

SISTEMAS LINEARES

EQUAÇÃO LINEAR

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : \text{INCÓGNITAS} \\ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n : \text{COEFICIENTES} \\ b : \text{TERMO CONSTANTE / INDEPENDENTE} \end{array} \right.$$



$$3x + 4y = 6 \quad \left(\begin{array}{l} b = 0 \\ \text{EQ. LINEAR NÃO HOMOGÊNEA} \end{array} \right)$$

$$7x - 3y + z = 0 \quad \left(\begin{array}{l} b = 0 \\ \text{EQ. LINEAR HOMOGÊNEA} \end{array} \right)$$

↳ A SOLUÇÃO TRIVIAL SEMPRE É SOLUÇÃO

↳ $x=0 ; y=0 ; z=0$

$$2x^2 + y = 1 \rightarrow \text{EQ. NÃO LINEAR}$$

$$3xy + z = 4 \rightarrow \text{EQ. NÃO LINEAR}$$



SISTEMAS LINEARES

É UM CONJUNTO DE EQUAÇÕES LINEARES.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

SIST. LINEAR

NÃO HOMOGÊNEO

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

SIST. LINEAR

HOMOGÊNEO

SEMPRE ADMITE A
SOLUÇÃO TRIVIAL

~~$$\begin{cases} x + yz = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$~~

SIST. NÃO LINEAR



CONJUNTO SOLUÇÃO

É O CONJUNTO DE VALORES QUE TORNAM
A EQUAÇÃO / SISTEMA VERDADEIROS.

$$* \quad 2x - y = 3$$

$(x, y) = (4, 5)$ É SOLUÇÃO

$$2.(4) - (5) = 3$$

$(x, y) = (5, 7)$ É SOLUÇÃO

$$2.(5) - (7) = 3$$

$(x, y) = (2, 4)$ NÃO É SOLUÇÃO

$$2.(2) - (4) \neq 3$$



$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$(x, y) = (2, 1)$ É Solução

$$\begin{cases} (2) + 3(1) = 5 \quad \checkmark \\ 2(2) - (1) = 3 \quad \checkmark \end{cases}$$

$(x, y) = (-1, 2)$ Não É Solução

$$\begin{cases} (-1) + 3(2) = 5 \quad \checkmark \\ 2(-1) - (2) \neq 3 \quad \times \end{cases}$$



EXEMPLO

VERIFIQUE SE OS VALORES DADOS
SÃO SOLUÇÃO DO SISTEMA ABAIXO.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

(a) $(1, 1, 1)$

(b) $(2, 0, -1)$

(c) $(6, 3, -2)$



(a) $(1, 1, 1)$ É Solução

$$\begin{cases} (1) + 2(1) + 3(1) = 6 \\ (1) - (1) + (1) = 1 \end{cases}$$

(b) $(2, 0, -1)$ Não É Solução

$$\begin{cases} (2) + 2(0) + 3(-1) \neq 6 \\ (2) - (0) + (-1) = 1 \end{cases}$$

(c) $(6, 3, -2)$ É Solução

$$\begin{cases} (6) + 2(3) + 3(-2) = 6 \\ (6) - (3) + (-2) = 1 \end{cases}$$



REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}}_B$$

A: MATRIZ DE COEFICIENTES

B: MATRIZ DE TERMOS CONSTANTES

X: MATRIZ DE INCÓGNITAS



REPRESENTAÇÃO REDUZIDA

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right]$$



EXEMPLO

ESCREVA O SISTEMA NA FORMA MATRICIAL

REDUZIDA :

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ 3x - y - z = 7 \\ x + 2y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{array} \right]$$



EXEMPLO

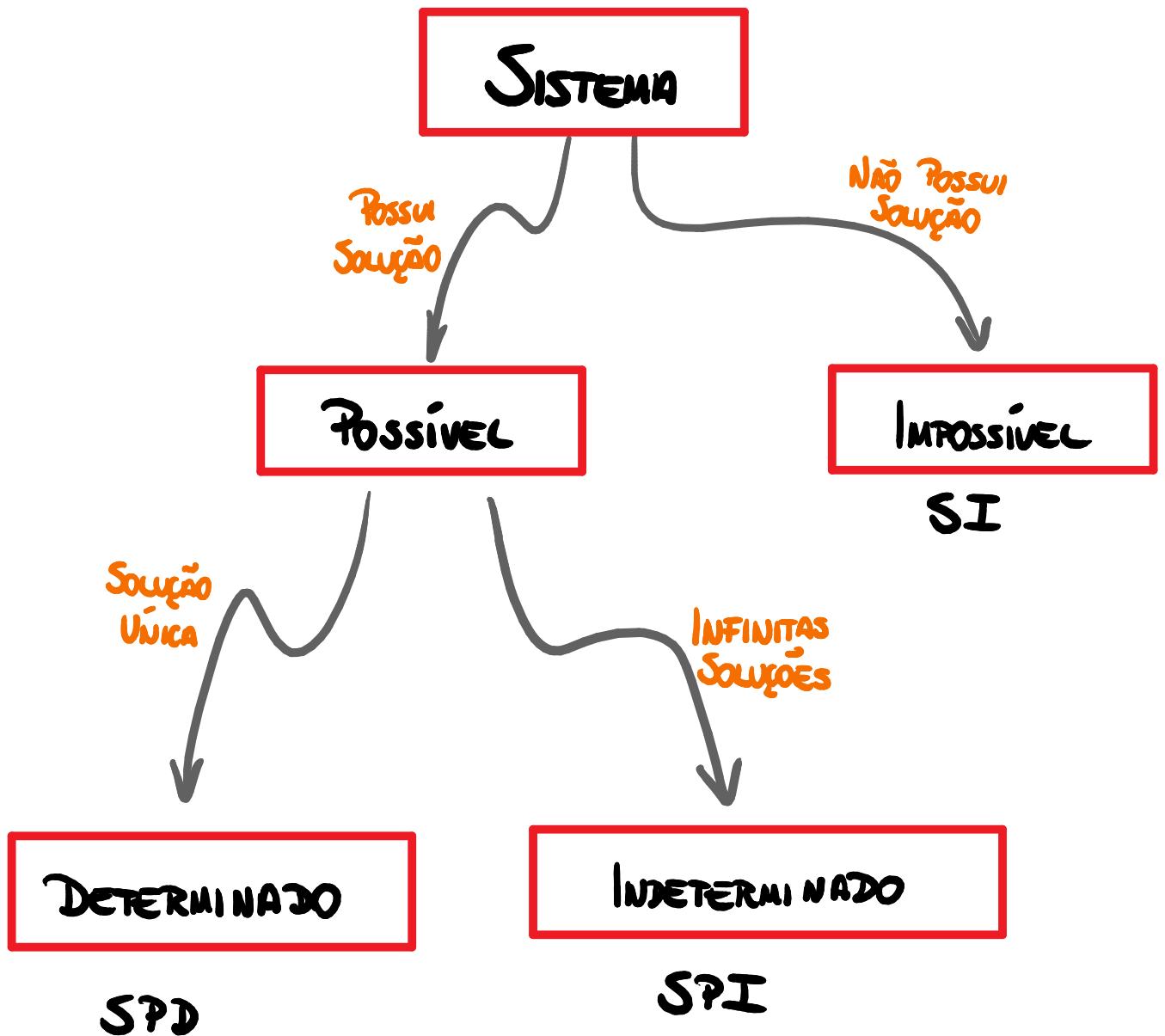
ESCREVA O SISTEMA QUE A MATRIZ
ABAIXO REPRESENTA:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 7 & -1 & 2 & 9 \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + y - 2z = 3 \\ 2x + 3y = 4 \\ 7x - y + 2z = 9 \end{array} \right.$$



CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS



$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

SOLUÇÃO

$$(x, y) = (2, 1)$$

SPD

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$$

SOLUÇÕES

$$(x, y) = \begin{cases} (3, 1) \\ (5, 2) \\ (7, 3) \\ \vdots \end{cases}$$

SPI

$$\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x + 6y = 6 \end{cases}$$

SOLUÇÕES : $\emptyset$

$\nexists x, y$



MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS

REGRA DE CRAUER

* CONDIÇÃO : $\det A \neq 0$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x - y + z = 4 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$



$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 20$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10$$



VALORES DAS INCOGNITAS:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} \rightarrow x = \frac{20}{10} \rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} \rightarrow y = \frac{10}{10} \rightarrow \boxed{y = 1}$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} \rightarrow z = \frac{10}{10} \rightarrow \boxed{z = 1}$$



EXEMPLO

RESOLVA O SISTEMA ABAIXO UTILIZANDO
REGRA DE CRAMER :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ -2x + 5y = -1 \end{cases}$$



$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - (2(-2)) = 19$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 55 - (-2) = 57$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - (-22) = 19$$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} \rightarrow x = \frac{57}{19} \rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} \rightarrow y = \frac{19}{19} \rightarrow \boxed{y = 1}$$



MANIPULAÇÃO DE SISTEMAS

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -5x - 10y = -20 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ -5 & -10 & -20 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} \cancel{0x} + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$



ESCALONAMENTO

FAZER COMBINAÇÕES LINEARES ENTRE AS LINHAS DE MODO A REDUZIR A ORDEM DO SISTEMA PASSO A PASSO.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 5y + 3z = 10 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

$$L_2 = L_2 - 2.L_1$$

$$L_3 = L_3 - 3.L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ y + z = 2 \\ -4y - 2z = -6 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \end{array} \right]$$

$$L_3 = L_3 + 4.L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ y + z = 2 \\ 2z = 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 & \text{(I)} \\ y + z = 2 & \text{(II)} \\ 2z = 2 & \text{(III)} \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad z = 1$$

$$\text{(II)} \quad y + 1 = 2 \rightarrow y = 1$$

$$\text{(I)} \quad x + 2 \cdot 1 + 1 = 4 \rightarrow x = 1$$

$$\boxed{x = 1} \quad ; \quad \boxed{y = 1} \quad ; \quad \boxed{z = 1}$$



EXEMPLO

RESOLVA O SISTEMA ABAIXO USANDO ESCALONAMENTO.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ -3x + 7y - 4z = -1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -4 & -1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 = L_1 - 2.L_2 \\ L_3 = L_3 + 3.L_2 \end{array}$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$L_1 = L_1 - 5 \cdot L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} 2z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

$$(I) \quad z = 3 //$$

$$(III) \quad y - 3 = -1 \rightarrow y = 2 //$$

$$(II) \quad x - 2 \cdot 2 + 3 = 0 \rightarrow x = 1 //$$

$$x = 1 ; \quad y = 2 ; \quad z = 3$$



EXEMPLO

RESOLVA O SISTEMA ABAIXO USANDO ESCALONAMENTO.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y - 3z = 9 \\ 3x + 7y - 4z = 13 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & -1 & 4 \\ \textcircled{2} & 5 & -3 & 9 \\ \textcircled{3} & 7 & -4 & 13 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} -3 - 2(-1) \\ L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1 \end{array}$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] L_3 = L_3 - L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow 0x + 0y + 0z = 0$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{z = \alpha} \quad (\text{II}) : y - \alpha = 1 \rightarrow \boxed{y = \alpha + 1}$$

$$(\text{I}) : x + 2(\alpha + 1) - \alpha = 4$$

$$\boxed{x = -\alpha + 2}$$



SOLUÇÃO :

$$(x, y, z) = (2 - \alpha, 1 + \alpha, \alpha)$$

ALGUMAS SOLUÇÕES :

$$\alpha = 0 \rightarrow (2, 1, 0)$$

$$\alpha = 4 \rightarrow (-2, 5, 4)$$

INFINITAS SOLUÇÕES



EXEMPLO

RESOLVA O SISTEMA ABAIXO USANDO ESCALONAMENTO.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y - 3z = 9 \\ 3x + 7y - 4z = 10 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & -1 & 4 \\ \textcircled{2} & 5 & -3 & 9 \\ \textcircled{3} & 7 & -4 & 10 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} -4 - 3(-1) \\ L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1 \end{array}$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \quad L_3 = L_3 - L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \underbrace{0x + 0y + 0z}_{0} = -3$$

SISTEMA SEM SOLUÇÃO

SIST. IMPOSSÍVEL
(SI)



DISCUSSÃO DE SISTEMAS

→ IDENTIFICAR A CLASSIFICAÇÃO DO SISTEMA

→ MÉTODO : ESCALONAMENTO

SISTEMA ESCALONADO:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & \dots & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & \dots & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \dots & 4 & 7 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 2 \end{array} \right]$$

$$ax = b$$



$$ax = b$$

POSSIBILIDADES:

$$* a \neq 0$$



SPD

$$ax = b \rightarrow x = \frac{b}{a} \quad \text{Solução Única}$$

$$* a = 0 ; b = 0$$



SPI

$$0x = 0 ; \text{ INFINITAS}$$

$$* a = 0 ; b \neq 0$$



SI

$$0x = b \rightarrow \text{NÃO Possui Solução}$$



DISCUTA O SISTEMA :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ ax - 2y = b \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ a & -2 & b \end{array} \right] \quad L_2 = L_2 + 2L_1$$

↑

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ a+4 & 0 & b+2 \end{array} \right] \quad \begin{aligned} a + 2(2) &= a + 4 \\ b + 2(1) &= b + 2 \end{aligned}$$

$$(a+4)x = b+2$$

① $a+4 \neq 0$; $a \neq -4 \rightarrow$ SPD

② $a = -4$; $b = -2 \rightarrow$ SPI

③ $a = -4$; $b \neq -2 \rightarrow$ SI



EXEMPLO

DISCUTA O SISTEMA :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + m^2 y = m \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{array} \right] \quad L_2 = L_2 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m^2 - 1 & m - 1 \end{array} \right]$$

$$(m^2 - 1)y = m - 1$$



$$(m^2 - 1)y = m - 1$$

$$ax = b$$

$$* m^2 - 1 \neq 0$$

$$m^2 \neq 1$$

$$\boxed{m \neq \pm 1} \rightarrow \text{SPD}$$

$$* m = 1 \rightarrow 0y = 0 \rightarrow \text{SPI}$$

$$* m = -1 \rightarrow 0y = -2 \rightarrow \text{SI}$$

$$\text{SE } m \neq \pm 1 \rightarrow \text{SPD}$$

$$\text{SE } m = 1 \rightarrow \text{SPI}$$

$$\text{SE } m = -1 \rightarrow \text{SI}$$



EXEMPLO

DISCUTA O SISTEMA :

$$\begin{cases} 3x + (k+2)y = 1 \\ (k-2)x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & k+2 & 1 \\ k-2 & 3 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} k-2 \\ 3 \end{array}$$

$$(k+2)(k-2) = k^2 - 4$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3(k-2) & k^2 - 4 & k-2 \\ 3(k-2) & 9 & 3 \end{array} \right] L_2 = L_2 - L_1$$

$$9 - (k^2 - 4) = 13 - k^2$$

$$3 - (k-4) = 5 - k$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3(k-2) & k^2-4 & k-2 \\ 0 & 13-k^2 & 5-k \end{array} \right]$$

$$(13-k^2)y = 5-k$$

$$* \quad 13-k^2 \neq 0$$

$$k^2 \neq 13$$

$$k \neq \pm \sqrt{13}$$

→ SPD

$$* \quad k = \sqrt{13} ; \quad "b" = 5 - \sqrt{13} \neq 0 \rightarrow SI$$

$$O_y = 5 - \sqrt{13}$$

$$* \quad k = -\sqrt{13} ; \quad "b" = 5 + \sqrt{13} \neq 0$$

$$O_y = 5 + \sqrt{13}$$

→ SI



EXEMPLO

DISCUTA O SISTEMA :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 = L_1 - mL_2 \\ L_3 = L_3 - L_2 \end{array}$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-m^2 & 1-m & 1-m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ 0 & 1-m & m-1 & m^2-m \end{array} \right] \quad L_1 = L_1 + L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -m^2-m+2 & 0 & 1-m \end{array} \right]$$

$$\underbrace{(-m^2-m+2)} y = 1-m$$

$$-m^2-m+2=0$$

$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{-1} = -1 \\ P = \frac{c}{a} = \frac{2}{-1} = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}$$

$$\underset{\downarrow}{-}(m-\underset{\downarrow}{1})(m+\underset{\downarrow}{2}) y = 1-m$$



* $m \neq 1 \in m \neq -2 \rightarrow \text{SPD}$

* $m = 1 \rightarrow O_y = 0 \rightarrow \text{SPI}$

* $m = -2 \rightarrow O_y = 3 \rightarrow \text{SI}$



EXEMPLO

CALCULE OS VALORES DE a PARA QUE
O SISTEMA SEJA POSSÍVEL E NÃO HOMOGENEO.

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = \sin 2a \\ -4x + y - 6z = \cos 3a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & \sin 2a \\ -4 & 1 & -6 & \cos 3a \\ 6 & 3 & -4 & -2\cos a \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 = L_2 + 4L_1 \\ L_3 = L_3 - 6L_1 \end{array}$$

$$-4 - 6(-5)$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & \sin 2a \\ 0 & 9 & -26 & \cos 3a + 4 \sin 2a \\ 0 & -9 & 26 & -2 \cos a - 6 \sin 2a \end{array} \right] \quad L_3 = L_3 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & \sin 2a \\ 0 & 9 & -26 & \cos 3a + 4 \sin 2a \\ 0 & 0 & 0 & K \end{array} \right]$$

$$K = \cos 3a + 4 \sin 2a - 2 \cos a - 6 \sin 2a = 0$$

$$\cos 3a - 2 \sin 2a - 2 \cos a = 0$$

$$4 \cos^3 a - 3 \cos a - 2 \cdot 2 \sin a \cos a - 2 \cos a = 0$$

$$4 \cos^3 a - 4 \sin a \cos a - 5 \cos a = 0$$

$$\cos a (4 \cos^2 a - 4 \sin a - 5) = 0$$

$$\cos a = 0$$



$$4\cos^2 a - 4\sin a - 5 = 0$$

$$4(1 - \sin^2 a) - 4\sin a - 5 = 0$$

$$-4\sin^2 a - 4\sin a - 1 = 0$$

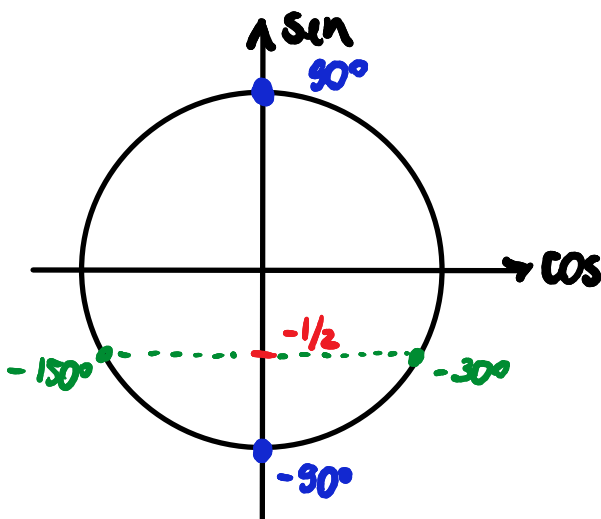
$$4\sin^2 a + 4\sin a + 1 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4(4)(1) = 0$$

$$\sin a = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} \rightarrow \sin a = -\frac{1}{2}$$

$$\cos a = 0$$

$$\sin a = -\frac{1}{2}$$



~~$a = 90^\circ$~~ $\rightarrow$ HOMOGENEO

~~$a = 30^\circ$~~ $\rightarrow$ HOMOGENEO

$a = -150^\circ$ ✓

$a = -30^\circ$ ✓

$$a = -30^\circ + 360K^\circ$$

$$a = -150^\circ + 360K^\circ$$



EXEMPLO

SEJAM $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, Com $a^2 = b^2 + c^2$

CALCULE O VALOR DE $\cos x + \cos y + \cos z$
EM FUNÇÃO DE a, b E c .

$$\begin{cases} b \cdot \cos z + c \cdot \cos y = a \\ a \cdot \cos z + c \cdot \cos x = b \\ a \cdot \cos y + b \cos x = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \cdot \cos z + c \cdot \cos y = a & (a) \\ a \cdot \cos z + c \cdot \cos x = b & (b) \\ a \cdot \cos y + b \cos x = c & (c) \end{cases}$$



$$\begin{cases} ab \cos z + ac \cos y = a^2 \\ ab \cos z + bc \cos x = b^2 \\ ac \cos y + bc \cos x = c^2 \end{cases}$$

$$\underbrace{ab \cos z + ac \cos y}_{a^2} = \underbrace{ab \cos z + bc \cos x}_{b^2} + \underbrace{ac \cos y + bc \cos x}_{c^2}$$

$$2bc \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 0$$

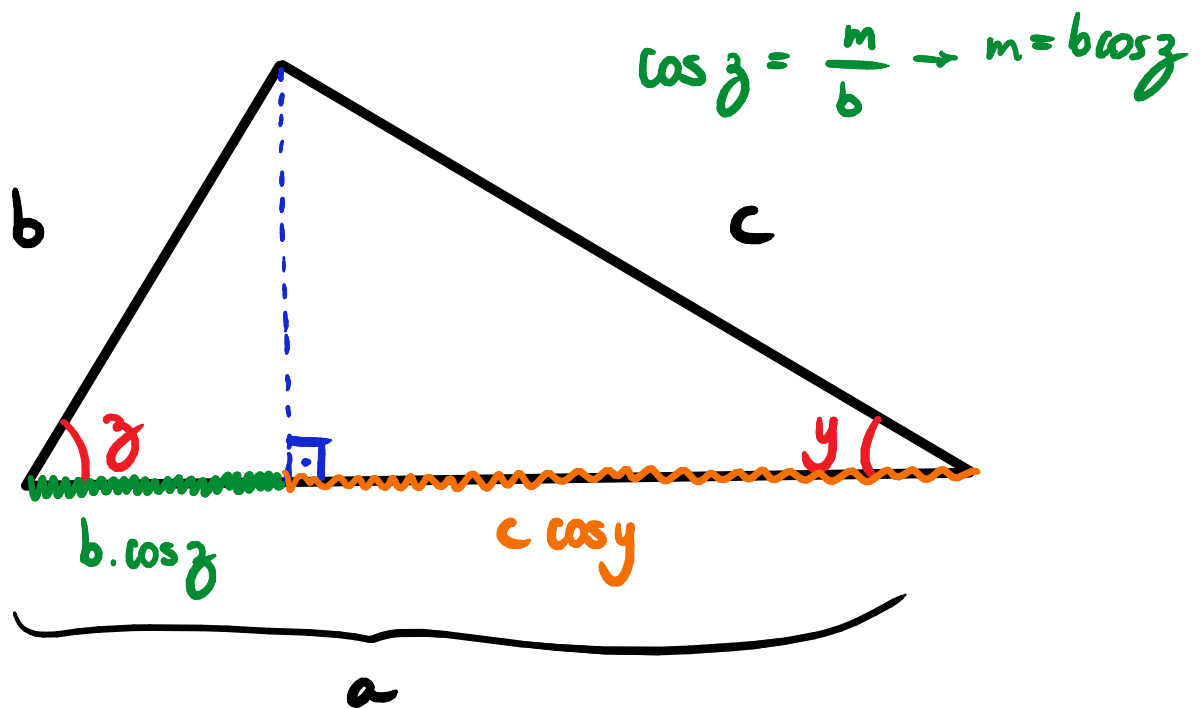
$$(II) \quad a \cos z + 0 = b \rightarrow \cos z = \frac{b}{a}$$

$$(III) \quad a \cos y + 0 = c \rightarrow \cos y = \frac{c}{a}$$

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0 + \frac{c}{a} + \frac{b}{a}$$

$$\cos x + \cos y + \cos z = \frac{b+c}{a}$$



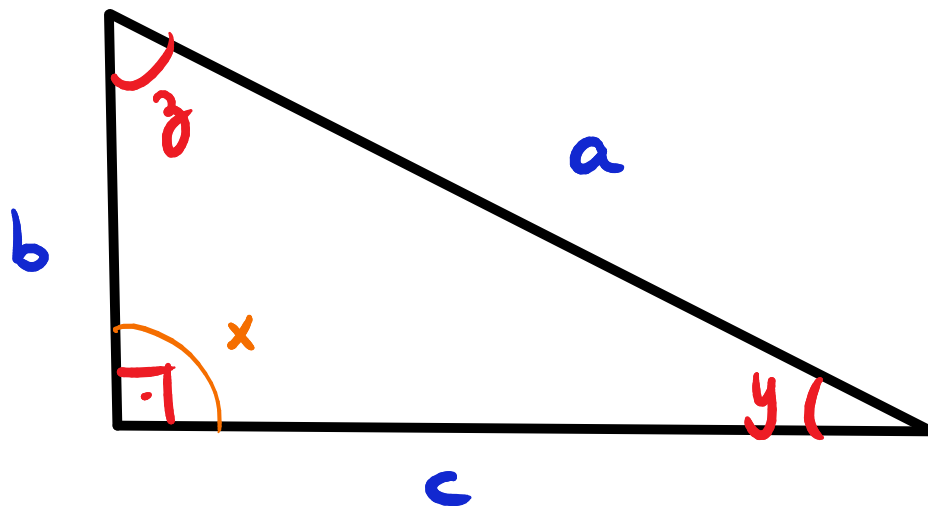


$$\begin{cases} a = b \cos z + c \cos y \\ b = a \cos z + c \cos x \\ c = a \cos y + b \cos x \end{cases}$$

QUALQUER
TRIÂNGULO



$$\begin{cases} b \cdot \cos z + c \cdot \cos y = a \\ a \cdot \cos z + c \cdot \cos x = b \\ a \cdot \cos y + b \cdot \cos x = c \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos x = \cos 90^\circ = 0 \\ \cos y = \frac{c}{a} \\ \cos z = \frac{b}{a} \end{cases} \quad \cos x + \cos y + \cos z = \frac{b+c}{a}$$



OPERAÇÕES ELEMENTARES POR LINHAS

i) TROCA DE LINHAS

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{troca de } L_1 \text{ e } L_3} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

ii) MULTIPLICAR UMA LINHA POR $K \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \times 2 \\ \times 3 \end{array}} \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 & 10 \\ -3 & 12 & 21 & 18 \\ 6 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$



iii) SOMAR A UMA LINHA UM MÚLTIPLO ESCALAR
DE OUTRAS LINHAS.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad L_2 = L_2 + 2.L_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 16 \\ 6 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad L_3 = L_3 - L_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 16 \\ 4 & -6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$



MATRIZES EQUIVALENTES POR LINHA

NOTAÇÃO :

$$A \sim B$$

MATRIZ OBTIDA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO
DE OPERAÇÕES ELEMENTARES.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 & 10 \\ -3 & 12 & 21 & 18 \\ 6 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 16 \\ 4 & -6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$



MATRIZ ESCALONADA

MATRIZ NA QUAL O NÚMERO DE ZEROS
EM CADA LINHA AUMENTA CONSECUTIVAMENTE.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad L_3 = L_3 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$



POSTO OU CARACTERÍSTICA

POSTO OU CARACTERÍSTICA DE UMA MATRIZ
É O NÚMERO DE LINHAS NÃO NULAS DA
MATRIZ ESCALONADA.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{array}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{car}(A) = p(A) = 2$$



EXEMPLO

CALCULE O RANK DAS MATRIZES ABAIXO :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$p(A) = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(B) = 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_2 - 2L_1$$

$$L_3 = L_3 - 3L_1$$

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(C) = 1$$



$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{array}$$

$$D' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad L_3 = L_3 - 2L_2$$

$$D'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \quad p(A) = 3$$



EXEMPLO

DISCUTA O ROSTO DA MATRIZ :



EXEMPLO

SEJAM $x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5 \in \mathbb{R}$

$$A_{5 \times 5} \mid a_{ij} = x_i + y_j ; 1 \leq i, j \leq 5$$

QUAL O MAIOR VALOR POSSÍVEL PARA $p(A)$?

$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$x_1 + y_3$	$x_1 + y_4$	$x_1 + y_5$	
$x_2 + y_1$	$x_2 + y_2$	$x_2 + y_3$	$x_2 + y_4$	$x_2 + y_5$	$L_2 = L_2 - L_1$
$x_3 + y_1$	$x_3 + y_2$	$x_3 + y_3$	$x_3 + y_4$	$x_3 + y_5$	$L_3 = L_3 - L_1$
$x_4 + y_1$	$x_4 + y_2$	$x_4 + y_3$	$x_4 + y_4$	$x_4 + y_5$	$L_4 = L_4 - L_1$
$x_5 + y_1$	$x_5 + y_2$	$x_5 + y_3$	$x_5 + y_4$	$x_5 + y_5$	$L_5 = L_5 - L_1$



$$\begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & x_1 + y_3 & x_1 + y_4 & x_1 + y_5 \\ x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 & x_3 - x_1 & x_3 - x_1 & x_3 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 & x_4 - x_1 & x_4 - x_1 & x_4 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_5 - x_1 & x_5 - x_1 & x_5 - x_1 & x_5 - x_1 & x_5 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = C_2 - L_1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 & y_5 - y_1 \\ x_2 + y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 + y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 + y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 + y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 & y_5 - y_1 \\ x_2 + y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(A) \leq 2$$

$$P_{\max}(A) = 2$$

