# Aula 00

*BNB (Analista Bancário) Matemática - 2023 (Pré-Edital)*

Autor:

**Equipe Exatas Estratégia Concursos**

15 de Março de 2023

# Índice

# TEORIA DOS CONJUNTOS

## Introdução à Teoria dos Conjuntos

### Definição de Conjunto

Iniciaremos o nosso estudo da matemática pela **Teoria dos Conjuntos**. A escolha desse conteúdo é **cuidadosamente pensada** para que você possa formar **uma base sólida,** que lhe servirá de alicerce na construção de toda matemática necessária a sua prova.

A palavra "conjunto" significa exatamente o que você deve estar pensando: uma espécie de **grupo, lista** ou **uma coleção** de determinado objeto. Observe alguns exemplos de **como podemos representar** conjuntos na matemática:

- $A = \{a, b, c, d, e\}$
- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

O conjunto $A$ é formado pelas **5 primeiras letras** no nosso alfabeto. O conjunto $B$ é formado por **5 números pares**. O conjunto $C$ é formado por **10 números ímpares**. Você pode estar se perguntando: *só podemos fazer conjuntos de números e letras?*

**A resposta é não!** Podemos criar conjuntos de basicamente qualquer coisa, desde um conjunto representando **os funcionários de determinada empresa** a **conjuntos formados por outros conjuntos!** Por exemplo, o conjunto $E$ lista alguns professores de exatas do Estratégia Concursos.

- $E = \{Francisco, Eduardo, Vinicius, Luana, Djefferson\}$

Primeiramente, note que um conjunto muitas vezes aparecerá com seus elementos listados **dentro de um par de chaves**. Por isso, sempre que for escrever algum conjunto, não esqueça de colocar seus elementos aqui dentro: { }. É também usual as pessoas nomearem seus conjuntos com letras maiúsculas, mas **isso não é mandatório, nem necessário,** em algumas situações.

### Relação de Pertinência

Quando um elemento faz parte de determinado conjunto, dizemos que **o elemento PERTENCE ao conjunto**. Essa relação de pertinência **entre um elemento e um conjunto** é representada pelo símbolo $\in$.

- $b \in A$ : **Lemos**: $b$ **pertence** a $A$;
- $4 \in B$ : **Lemos**: $4$ **pertence** a $B$;

**Atente-se à simbologia**! Podemos dizer que um elemento **não pertence** a um determinado conjunto. Para isso, utilizamos o símbolo "não pertence": $\notin$.

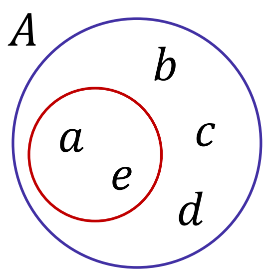
- $z \notin A$ : $z$ **não pertence** a $A$;
- $100 \notin B$ : $100$ **não pertence** a $B$;

## Relação de Inclusão

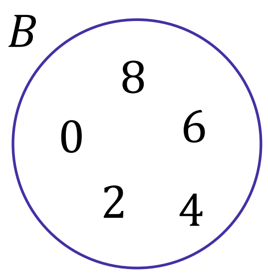
Existe mais um tipo de relação que devemos estudar: **a relação de inclusão**. Nesse tipo de relação, é estabelecido **um relacionamento entre dois conjuntos** e não mais entre um elemento e outro conjunto. Para isso, usamos uma simbologia específica que você deverá guardar: $\subset, \not\subset, \supset$ $\boldsymbol{e}$ $\not\supset$. Vamos ver com calma o que cada um deles diz! Considere: $\boldsymbol{A = \{a, b, c, d, e\}}$, $\boldsymbol{B = \{0, 2, 4, 6, 8\}}$ e $\boldsymbol{C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}}$.

- $\{a, e\} \subset A$ : **Lemos**: $\{a, e\}$ **está contido** em $A$;
- $\{0, 2, 8\} \subset B$ : **Lemos**: $\{0, 2, 8\}$ **está contido** em $B$;

Perceba que agora não estamos estabelecemos uma relação entre um elemento e um conjunto**. A relação de inclusão envolve <u>2 conjuntos</u>!** Diante disso, podemos introduzir um novo termo: **o subconjunto**. O subconjunto nada mais é do que **parte de um conjunto maior**. Quando dizemos, por exemplo, que $\boldsymbol{\{a, e\}}$ **está contido em** $\boldsymbol{A}$, estamos dizendo, com outras palavras, que $\{a, e\}$ é um subconjunto de $\boldsymbol{A}$.




O diagrama acima ajuda a compreender a relação de inclusão. Observe que **o conjunto** $\boldsymbol{\{a, e\}}$ **está inteiramente contido em** $\boldsymbol{A}$. Nessas condições, dizemos que $\{a, e\}$ está contido em $A$ ou ainda que $\{a, e\}$ é um subconjunto de $A$. Algumas vezes, você poderá ver **o termo "parte" sendo usado como sinônimo de subconjunto**. Agora, imagine a seguinte situação:



Nesse caso, temos que $\{a, e\} \not\subset B$ : **Lemos**: $\{a, e\}$ não está contido em $B$ ou $\{a, e\}$ não é um subconjunto de $B$. Vamos ver mais alguns exemplos de quando **um conjunto não está contido em outro**:

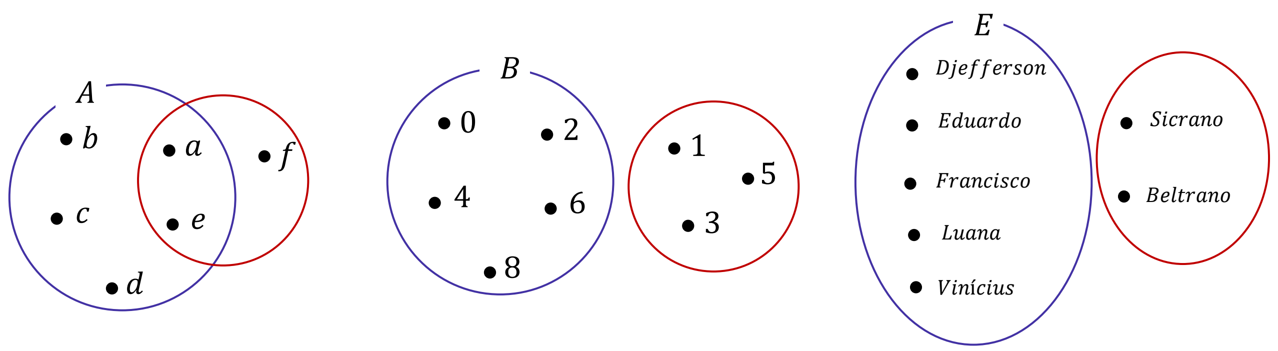
- $\{a, e, f\} \not\subset A$
- $\{1, 3, 5\} \not\subset B$

Perceba que **basta um elemento do conjunto não pertencer** ao conjunto maior que **não poderemos estabelecer uma relação de inclusão** entre os dois conjuntos e, portanto, dizemos que um não está contido no outro. Pessoal, **se $\{a, e\}$ está contido em $A$,** então também podemos dizer que **$A$ contém $\{a, e\}$**. Quando queremos expressar essa ideia de que um conjunto maior contém determinado subconjunto, utilizamos o símbolo $\supset$.

- $A \supset \{a, e\}$ : $A$ **contém** $\{a, e\}$
- $B \supset \{0, 2, 8\}$ : $B$ **contém** $\{0, 2, 8\}$

Analogamente, podemos estender o raciocínio para quando queremos dizer que determinado conjunto **não contém outro**. Nessas situações, utilizamos $\not\supset$.

- $A \not\supset \{a, e, f\}$ : $A$ **não contém** $\{a, e, f\}$
- $C \not\supset \{0, 1\}$ : $C$ **não contém** $\{0, 1\}$




$A \not\supset \{a, e, f\}$ $\quad$ $B \not\supset \{1, 3, 5\}$ $\quad$ $E \not\supset \{Sicrano, Beltrano\}$

HORA DE PRATICAR!

**(PREF. DE PINHAIS/2019)** Considerando os conjuntos $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, assinale a alternativa CORRETA:

A) O conjunto A está contido no conjunto B.
B) O conjunto B está contido no conjunto A.
C) O conjunto C está contido no conjunto B.

D) O conjunto C está contido no conjunto A.
E) O conjunto A está contido no conjunto C.

**Comentários:**

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Observe que os elementos destacados em vermelho **são exatamente todos os elementos do conjunto A**. Perceba, portanto, que **A está contido em C**.

**Gabarito:** Letra E.

## Igualdade entre Conjuntos

Pessoal, dois conjuntos são considerados iguais (ou idênticos) se eles possuem **exatamente os mesmos elementos!** Todo elemento que estiver em um deve necessariamente estar no outro. Por exemplo, considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 2, 1\}$. Nessa situação, podemos escrever que $A = B$.

*Professor, mas a ordem está diferente!*

Não importa! O importante é que todos elementos de A são os mesmos elementos de B.


**(MPE-GO/2022)** Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{0, 8, 2\}$ e $\{x, y, 2\}$ são iguais, podemos afirmar que:
A) $x = 0$ e $y = 8$
B) $x + y = 8$
C) $x < y$
D) $x + 2y = 8$

**Comentários:**
Para que os dois conjuntos sejam iguais, **seus elementos devem ser iguais**. Note que o "2" já aparece nos dois conjuntos, então não vamos nos preocupar com ele.

$$\{0, 8, 2\}$$

$$\{x, y, 2\}$$

Com isso, observe que **podemos ter duas situações**.

1ª situação) $x = 0$ e $y = 8$ 2ª situação) $x = 8$ e $y = 0$

Sabendo disso, vamos analisar as alternativas.

A) $x = 0$ e $y = 8$
**Errado.** Essa é a nossa primeira situação, que não é necessariamente verdade. Também é uma possibilidade o caso em que $x = 8$ e $y = 0$.

B) $x + y = 8$
**Correto.** Esse é nosso gabarito, pessoal. Verifique que **independentemente da situação**, sempre vamos ter $x + y = 8$. Afinal, sempre um vai ser 0 (zero) e o outro será 8 (oito), de forma que a soma é sempre 8 (oito).

C) $x < y$
**Errado.** Essa afirmação é verdade apenas para a primeira situação. Como podemos ter o caso em que $x = 8$ e $y = 0$, tem-se também que $x$ pode ser maior que $y$.

D) $x + 2y = 8$
**Errado.** Essa equação é válida apenas para a segunda situação. No caso em que $x = 0$ e $y = 8$, já é possível verificar que ela é inválida.

**Gabarito:** LETRA B.

# Subconjuntos

Vamos aprofundar um pouco o nosso estudo sobre **os subconjuntos**. Para começar, tente dizer quais são os subconjuntos do conjunto $A = \{a, b\}$. *Pronto?* Observe como fica:

| Conjunto | Subconjuntos |
|---|---|
| $A = \{a, b\}$ | $\emptyset$ |
| | $\{a\}$ |
| | $\{b\}$ |
| | $\{a, b\}$ |

A tabela acima lista todos os subconjuntos que podemos formar utilizando o conjunto $A$. Sabendo disso, podemos escrever as seguintes relações:

- $\emptyset \subset A$
- $\{a\} \subset A$
- $\{b\} \subset A$
- $\{a, b\} \subset A$

Devemos falar um pouco do **conjunto vazio e conjunto unitário**. O conjunto vazio, como o próprio nome sugere, **é um conjunto que não possui elementos**! É representado por meio do **símbolo** $\emptyset$ mas também pode aparecer como um simples par de chaves $\{\ \}$. Já **o conjunto unitário** é todo conjunto que **possui um único elemento**!

TOME NOTA!

**O conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.**

Seja $X$ um conjunto genérico, então:

$$\emptyset \subset \boldsymbol{X} \qquad ou \qquad \{\ \} \subset \boldsymbol{X}$$

Observe que $\{a, b\} \subset A$, indicando que qualquer conjunto é também um subconjunto de si mesmo! Seja $B = \{a, b, c\}$. Vamos listar os seus subconjuntos também?

| Conjunto | Subconjuntos |
|---|---|
| $B = \{a, b, c\}$ | $\emptyset$ |
| | $\{a\}$ |
| | $\{b\}$ |
| | $\{c\}$ |
| | $\{a, b\}$ |
| | $\{a, c\}$ |
| | $\{b, c\}$ |
| | $\{a, b, c\}$ |

Quando um subconjunto de B é diferente do próprio B, chamamos ele de **subconjunto próprio de B**. Por exemplo, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ são subconjuntos próprios de B. Já o subconjunto $\{a, b, c\}$ é denominado **impróprio** pois é igual ao próprio B! Com os conjuntos listados na tabela acima são subconjuntos de $B$, então podemos escrever:

- $\emptyset \subset B$
- $\{a\} \subset B$
- $\{b\} \subset B$
- $\{c\} \subset B$
- $\{a, b\} \subset B$
- $\{a, c\} \subset B$
- $\{b, c\} \subset B$
- $\{a, b, c\} \subset B$

Pessoal, observe que **os subconjuntos de um conjunto são apenas diferentes combinações de seus elementos**. Portanto, se você precisar listar os subconjuntos, siga os seguintes passos:

PRESTE MAIS ATENÇÃO!

**Passo 1:** O primeiro conjunto que você deve anotar como subconjunto é o **conjunto vazio**.

**Passo 2:** Depois, transforme em subconjunto cada elemento, um por um.

**Passo 3:** Em seguida, escreva os subconjuntos formado por pares de elementos.

**Passo 4:** Acabando os pares, pegue os trios e assim sucessivamente.

Seguindo essa receita, vamos listar os subconjuntos de $C = \{1, 2, 3\}$ ?

**Passo 1:** Você não deve esquecer que **o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto**, portanto:

$$\emptyset$$

**Passo 2:** Transformando cada elemento em um subconjunto, **um por um**.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$$

**Passo 3:** Escrever os subconjuntos formado por **pares** de elementos.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}$$

**Passo 4:** Ir para os trios.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}, \{1, 2, 3\}$$

Como o conjunto $C$ só possui 3 elementos, encerramos por aqui! Listamos todos os subconjuntos dele. Observe que quando tínhamos um conjunto com **2 elementos, obtivemos 4 subconjuntos**. Ao aumentar um elemento no conjunto, **passamos a ter 8 subconjuntos**. Será que é possível estabelecer uma fórmula para calcular **o número de subconjuntos baseado na quantidade de elementos de um conjunto**?

É possível sim e **a fórmula é bem simples**. Seja $n(A)$ **o número de elementos de um conjunto** $A$. Então, **o número de subconjuntos de $A$, $n_{S_A}$**, é dado por:

$$\boxed{n_{S_A} = 2^{n(A)}}$$

Por exemplo, vamos voltar no conjunto $C = \{1, 2, 3\}$. Como ele tem **três elementos**, para encontrar o número de subconjuntos de C, fazemos assim:

$$n_{S_C} = 2^{n(C)} \quad \rightarrow \quad n_{S_C} = 2^3 \quad \rightarrow \quad n_{S_C} = 8$$

Logo, C tem **oito subconjuntos**.

HORA DE PRATICAR!

**(IDAF-AC/2020)** Quantos subconjuntos possui o conjunto das vogais?

A) 10

B) 25

C) 32

D) 50

**Comentários**

Seja $V$ o conjunto formado por **todas as vogais**, então temos que: $V = \{a, e, i, o, u\}$

O conjunto acima **possui 5 elementos**, sabemos que o número de subconjuntos de um conjunto depende da quantidade de elementos e é dado através de uma fórmula.

$$n_{S_V} = 2^{n(V)} \quad \rightarrow \quad n_{S_V} = 2^5 \quad \rightarrow \quad n_{S_V} = 32$$

**Gabarito**: Letra C.

## Conjunto das Partes

Você sabia que **podemos juntar todos os subconjuntos de um conjunto para formar um novo conjunto**? Esse novo conjunto formado é denominado **conjunto das partes** e é representado pelo **símbolo** $\wp$. Por exemplo, os **conjuntos das partes** de $A = \{a, b\}$ e de $B = \{a, b, c\}$ são:

$$\wp(A) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\wp(B) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Observe que $\wp(A)$ e $\wp(B)$ são **conjuntos formados por outros conjuntos**! Note ainda que **a sua quantidade de elementos é exatamente a quantidade de subconjuntos** calculada pela fórmula $\boldsymbol{nS_A = 2^{n(A)}}$. Um outro ponto que chamamos atenção é que, no conjunto das partes, listamos **o conjunto vazio** { } explicitamente com um dos seus elementos.

HORA DE PRATICAR!

**(PREF. PETROLINA/2019)** Dado um conjunto A, representa-se por $\wp(A)$ o conjunto formado por todos os subconjuntos de A – o chamado conjunto das partes que também costuma ser representado por $2^A$. Se $A = \{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}\}$, qual das alternativas seguintes NÃO é elemento de $\wp(A)$?

A) $\phi$

B) $\{\phi, 1\}$

C) $\{1, \{\phi, 1\}\}$

D) $\{\phi, \{\phi\}\}$

E) $\{1, \{1\}\}$

**Comentários:**

O jeito mais imediato de resolver a questão **é listar todos os subconjuntos de $A$**. Perceba que teremos $2^4 =$ **$16$ subconjuntos**. Para nos auxiliar, vamos usar uma tabela. Vale também destacar que **$\phi$ representa o conjunto vazio** e você deve lembrar que **o conjunto vazio é sempre subconjunto** de qualquer conjunto.

| Conjunto | Subconjuntos | |
|---|---|---|
| $\{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}\}$ | $\phi$ | $\{\{\phi\}, 1\}$ |
| | $\{\phi\}$ | $\{\{\phi\}, \{1\}\}$ |
| | $\{\{\phi\}\}$ | $\{1, \{1\}\}$ |
| | $\{1\}$ | $\{\phi, \{\phi\}, 1\}$ |
| | $\{\{1\}\}$ | $\{\phi, 1, \{1\}\}$ |
| | $\{\phi, \{\phi\}\}$ | $\{\phi, \{\phi\}, \{1\}\}$ |
| | $\{\phi, 1\}$ | $\{\{\phi\}, 1, \{1\}\}$ |
| | $\{\phi, \{1\}\}$ | $\{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}\}$ |

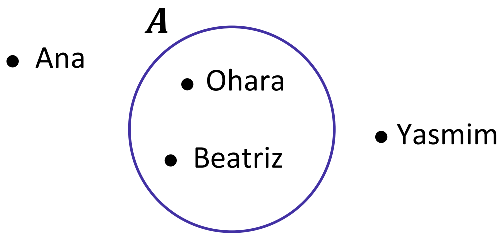
Ao listar os subconjuntos do conjunto $A$, percebemos que apenas o conjunto $\{1, \{\phi, 1\}\}$ não é elemento de $\wp(A)$. Isso acontece, pois, o conjunto $\{\phi, 1\}$ **não é elemento de A**.

**Gabarito:** Letra C.

# União, Intersecção, Complementar e Diferença

## Representação por Diagramas

Você deve ter visto ao longo da aula que **apareceram alguns conjuntos na forma de diagramas**. Esse tipo de representação é extremamente útil na resolução de questões, pois **possibilita uma melhor compreensão do problema**. Por exemplo, seja $\boldsymbol{A}$ o conjunto de funcionários de uma determinada empresa.




Todos aqueles que estão dentro do conjunto $\boldsymbol{A}$ **representam funcionários da empresa**. **Quem está fora, não é funcionário da empresa**. Olhando simplesmente para o diagrama, podemos dizer que:

- $Ohara \in A$;
- $Beatriz \in A$;
- $Yasmim \notin A$;
- $Ana \notin A$.

Esses diagramas são bastante conhecidos no meio matemático e possuem um nome especial: são os **Diagramas de Venn-Euler** ou, simplesmente, **Diagramas de Venn**. Esse tipo de representação é utilizado principalmente quando **precisamos representar vários conjuntos ao mesmo tempo**. Nos tópicos a seguir, usaremos bastante esses diagramas e você logo ficará habituado.


Existem diferentes maneiras de representarmos os conjuntos. A primeira dela é como estamos fazendo desde o começo da aula, como por exemplo, em $V = \{a, e, i, o, u\}$. Chamamos esse tipo de representação de "**representação por enumeração**".

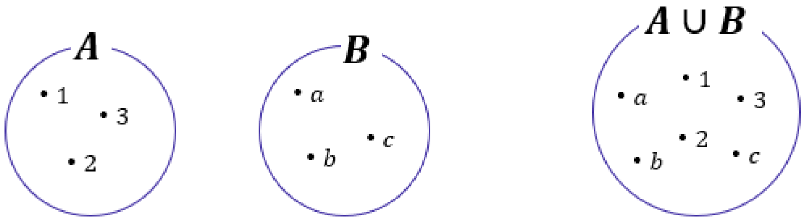
Ademais, temos a **representação por propriedade**. Para entender melhor, considere o mesmo conjunto V citado anteriormente. Ele também poderia ser escrito da seguinte forma: $\boldsymbol{V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}}$.

Na prática, podemos ler tal conjunto da seguinte forma: **V é o conjunto dos elementos de x, tal que x é vogal**. Lemos essa barrinha vertical como **"tal que"**. **Não esqueça!**

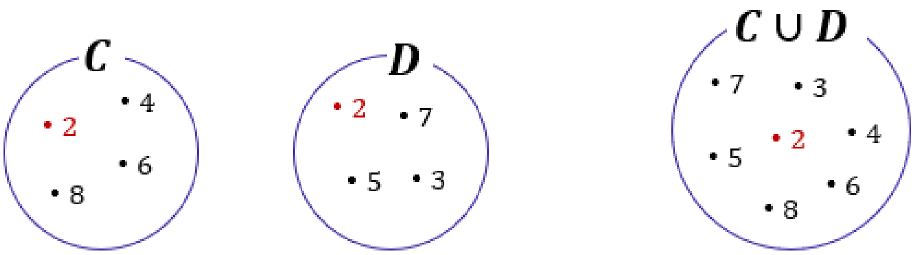
Por fim, temos a **representação por diagramas** que estudamos agora a pouco! Fechou?

# União

Nessa parte da nossa aula, veremos que existem **várias operações** que os conjuntos podem se submeter. A mais conhecida talvez seja **a união (ou reunião) de conjuntos**. A união de conjuntos é representada pelo **símbolo** $\cup$ e, basicamente, **funde dois conjuntos em um só**.



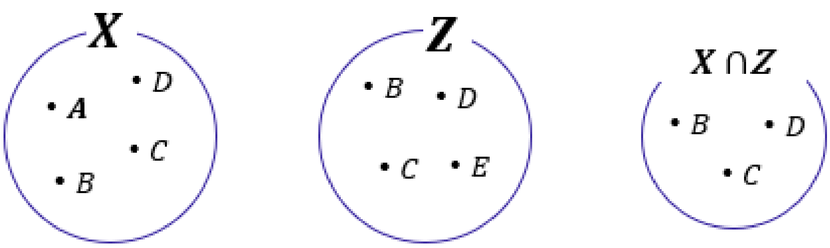

No diagrama acima, temos que $\boldsymbol{A = \{1, 2, 3\}}$ e $B = \{a, b, c\}$. Quando fazemos a união de $A$ e $B$, criamos um conjunto que possui <u>todos</u> **os elementos dos dois conjuntos**, $\boldsymbol{A \cup B = \{1, 2, 3, a, b, c\}}$. Haverá casos em que os conjuntos possuirão um mesmo elemento e, quando for necessário fazer a união dos dois, **você não precisará escrever duas vezes o elemento repetido**. Observe um exemplo nos diagramas abaixo.




Note que **o 2 é um elemento comum aos dois conjuntos**: $C = \{2, 4, 8, 6\}$ e $D = \{2, 3, 5, 7\}$. Nessas situações, quando fazemos a união de conjuntos que possuem elementos em comum, **esse elemento não vai aparecer duas vezes no conjunto união**! Confira que $C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, **o 2 aparece apenas uma vez**.

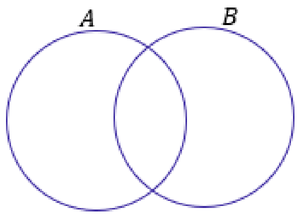
# Intersecção

A operação que seleciona **os elementos comuns entre dois ou mais conjuntos é denominada intersecção e é representada por** $\cap$. Por exemplo, nos diagramas acima o número 2 é o único elemento comum entre $C$ e $D$. Logo, o conjunto intersecção será formado apenas pelo elemento 2: $\boldsymbol{C \cap D = \{2\}}$. Veja mais um exemplo.

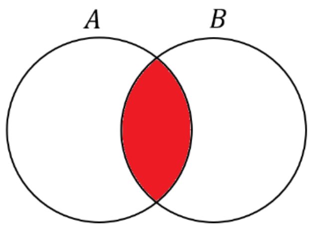


Temos que $X = \{A, B, C, D\}$ e $Z = \{B, C, D, E\}$. São dois conjuntos distintos, mas que **possuem alguns elementos em comum**. Os elementos $B, C$ e $D$ aparecem nos 2 conjuntos e formam o conjunto intersecção: $\boldsymbol{X \cap Z = \{B, C, D\}}$.

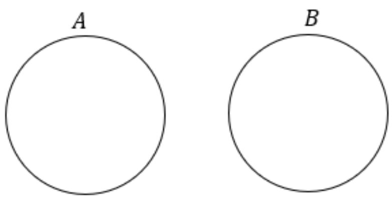
Quando dois conjuntos **possuem elementos em comum**, podemos representá-los assim:




Essa região comum representa exatamente a sua intersecção. Os elementos que estão na região em **vermelho** abaixo **pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B**.

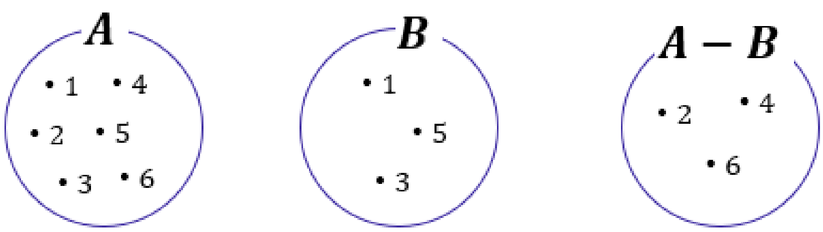



**Caso os conjuntos não possuam elementos em comum**, isto é, **não haja intersecção entre os dois**, nós vamos chamá-los de **disjuntos** e os representaremos utilizando círculos afastados um do outro.

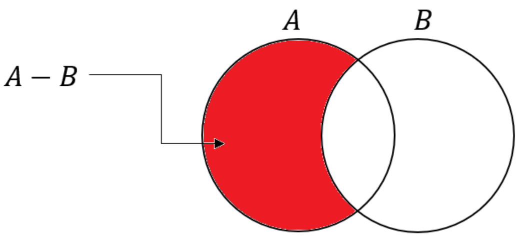


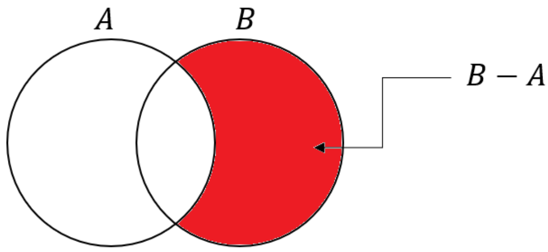

# Diferença

Existe uma outra operação que é muito importante para a sua prova! Essa operação **é a diferença ou, como também é conhecida, a subtração de conjuntos**! O conjunto diferença é representado por $\boldsymbol{A - B}$ e é formado por **todos os elementos de A que não são elementos de B**! Por exemplo, considere os conjuntos:

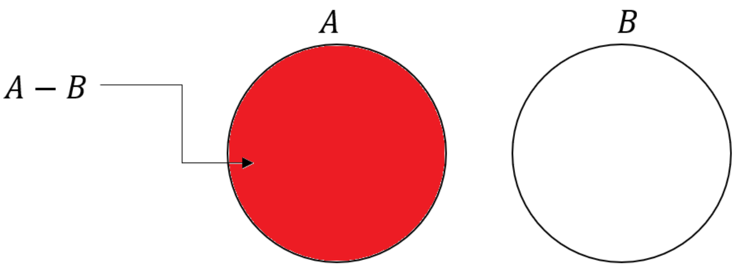


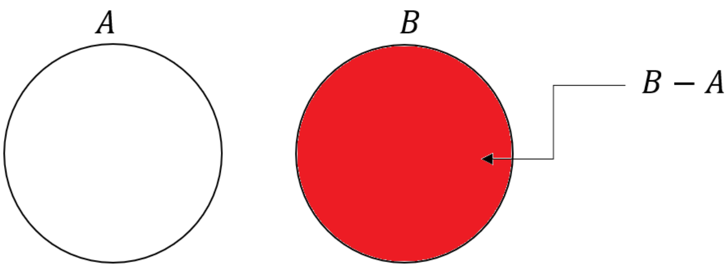
Observe que $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Para encontrar $A - B$, devemos selecionar **os elementos de $A$ que não são elementos de $B$**! Ou seja, **aqueles elementos que são apenas elementos de $A$**! Observe que $A$ e $B$ possuem em comum os seguintes elementos: $A \cap B = \{1, 3, 5\}$. Logo, se $A = \{\mathbf{1}, 2, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6\}$, então o $A - B = \{2, 4, 6\}$. Em diagramas, também é possível representar o conjunto diferença.




Um detalhe importante é que se $A$ e $B$ são **conjuntos disjuntos**, então **$A - B = A$ e $B - A = B$**. Veja como essa informação pode ser representada:




Vamos fazer alguns **exemplos numéricos** para visualizar ainda melhor essa última situação.

Considere os conjuntos $A = \{10, 20, 30\}$ e $B = \{40, 50\}$. Primeiramente, note que os conjuntos são disjuntos. *Mas qual é o motivo mesmo para eles serem disjuntos, professor?*

**A e B são disjuntos pois não possuem elementos em comum!** Nenhum sequer!! São totalmente diferentes um outro. *Tudo bem?!* Agora, lembre-se que **$A - B$ é o conjunto de elementos formados por todos os elementos de A que não são elementos de B**. Ora, nesse nosso exemplo, **<u>todos</u> os elementos de A não são elementos de B**!! Sendo assim, podemos escrever que:

$$A - B = \{10, 20, 30\} = A$$

HORA DE
PRATICAR!

**(PREF. LINHARES/2020)** Dados os três conjuntos numéricos:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$,
$B = \{0,2,4,6\}$,
$C = \{1,3,5,7,9\}$.

O resultado de $(A - B) \cap C$ é igual a:

A) $\{1,3,5\}$
B) $\{1,3,5,7,9\}$
C) $\{0,1,3,5,7,9\}$
D) $\{2,4,6\}$
E) $\{0\}$

**Comentários:**

Primeiramente, devemos **fazer a diferença entre o conjunto A e B**. Lembre-se, quando tivermos a diferença entre dois conjuntos, por exemplo, $A - B$, estamos procurando **o conjunto dos elementos de A que não são elementos de B**. Na nossa questão, temos que:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$B = \{0,2,4,6\}$$

***Primeira pergunta:*** **quais elementos estão ao mesmo tempo em A e em B**? Observe que **2, 4 e 6** são os três **elementos comuns** aos dois conjuntos. ***Segunda pergunta:*** que conjunto é formado quando eu removo esses elementos em comum do conjunto A? **É exatamente o conjunto diferença**!

$$A = \{1, \mathbf{2}, 3, \mathbf{4}, 5, \mathbf{6}\}$$
$$A - B = \{1, 3, 5\}$$

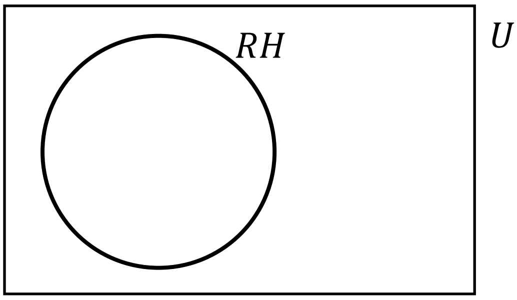
A questão não termina aqui. Ainda devemos fazer a intersecção desse conjunto com o C. **Note que C possui todos os três elementos do nosso conjunto diferença**. Portanto, <u>**coincidentemente**</u>, vamos ter que:

$$(A - B) \cap C = \{1, 3, 5\}$$

**Gabarito:** Letra A.

## Complementar

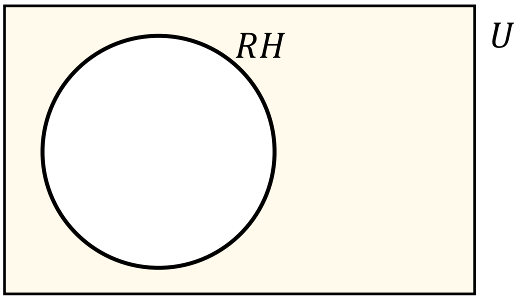
Quando falamos de um determinado conjunto, normalmente **estamos destacando determinado grupo dentro de um universo maior**. Por exemplo, podemos formar um conjunto dos funcionários especializados em RH de uma empresa. Esse grupo de funcionários foi retirado de um conjunto maior: **o conjunto formado por todos os funcionários da empresa**. Acompanhe o diagrama abaixo.




Observe que o conjunto formado por aqueles especializados em RH está contido dentro de um conjunto $U$. **Esse conjunto maior é frequentemente chamado de conjunto universo** e, nesse exemplo, poderia representar **o conjunto de todos os funcionários da empresa**.

Quer um outro exemplo? Imagine um conjunto formado por todas as vogais: $V = \{a, e, i, o, u\}$. Em um problema que estamos trabalhando com esse conjunto, qual seria o conjunto universo? O conjunto universo nessa situação seria o conjunto formado por todas as letras do alfabeto: $U = \{a, b, c, d, e, f, \dots, x, y, z\}$.

Quando estamos falando de conjunto universo, um novo conceito surge: **o conjunto complementar**. Lembre-se do conjunto que inventamos com os funcionários de uma empresa especializados em RH. *Qual o complementar desse conjunto?* Seria o conjunto formado por **todos os outros funcionários da empresa que <u>não</u> são especializados em RH!** Vamos mostrar no diagrama.




O complementar do conjunto RH é representado pela **parte pintada em amarelo**. *E no nosso exemplo das letras?* Qual o complementar do conjunto formado apenas pelas vogais? Ora, é **o conjunto formado por todas as outras letras que não são vogais, isto é, o conjunto das consoantes**! Para determinar o complementar de qualquer conjunto, **é de fundamental importância conseguir identificar qual é o conjunto universo**.

A notação utilizada para representar o complementar de um conjunto $X$ é $\boldsymbol{X^C}$ **ou** $\boldsymbol{\overline{X}}$. Representamos o conjunto complementar com esse "expoente" $C$ ou uma barra em cima. Ademais, podemos definir o conjunto complementar utilizando o que acabamos de ver **sobre conjunto diferença**.

$$\boxed{\boldsymbol{\overline{X} = X^C = U - X}}$$

Veja que utilizando a definição acima, temos que o conjunto complementar $X^C$ é formado por **tudo que está no conjunto universo, mas não está em $\boldsymbol{X}$**.

# Princípio da Inclusão-Exclusão

Pessoal, muitas vezes vamos precisar **determinar o número de elementos de um conjunto**. Essa tarefa de contar **pode ficar um pouco complicada quando temos elementos que pertencem a mais de um conjunto**, pois, nesses casos, **devemos eliminar as repetições** para não contar o mesmo elemento duas vezes.

Nesse sentido, surge o Princípio da Inclusão-Exclusão (PIE). Esse princípio possibilita uma contagem exata da quantidade de elementos **de um conjunto formado pela união de vários outros, mesmo que contenham intersecções**.

## ➢ 2 Conjuntos

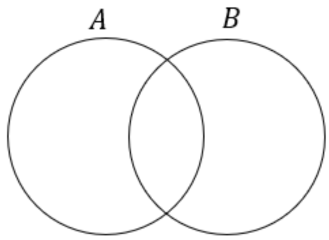
Imagine **dois conjuntos $A$ e $B$ com elementos em comum**. Se $n(A)$ é o número de elementos de $A$ e $n(B)$ é o número de elementos de $B$, quanto vale $n(A \cup B)$ ?

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}}$$

Vamos tentar entender o caminho das pedras para chegar na relação acima. Considere os conjuntos:

- $A = \{1, 2, 3\} \quad \Longrightarrow \quad n(A) = 3$
- $B = \{3, 4, 5\} \quad \Longrightarrow \quad n(B) = 3$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \Longrightarrow \quad n(A \cup B) = 5$
- $A \cap B = \{3\} \quad \Longrightarrow \quad n(A \cap B) = 1$




Observe que **apesar da união entre A e B ser uma espécie de fusão entre os dois conjuntos**, o número de elementos na união, na maioria dos casos, **não é a soma direta do número de elementos de A com o número de elementos de B**.

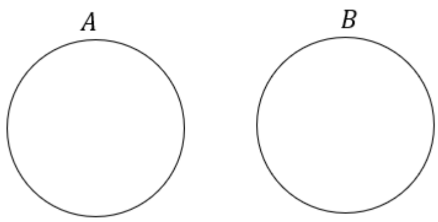
Perceba que **o elemento 3 aparece tanto em A como em B** e ao somar o número de elementos dos dois conjuntos **devemos considerar que estamos somando o mesmo elemento duas vezes!** É por isso esse motivo que devemos subtrair a quantidade de elementos que estão na intersecção. Já para **conjuntos disjuntos** temos que:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}}$$

pois:

$$\boldsymbol{n(A \cap B) = 0.}$$



**(PREF. SÃO GONÇALO/2022)** Em uma empresa na qual trabalham 116 pessoas, sabe-se que:

- 72 têm ensino médio completo;
- 64 sabem usar o EXCEL;
- 35 têm ensino médio completo e sabem usar o EXCEL.

O número de funcionários dessa empresa que não têm ensino médio completo e não sabem usar o EXCEL é:
A) 13
B) 14
C) 15
D) 16

**Comentários:**
Vamos usar o **Princípio da Inclusão-Exclusão** para resolver esse problema. Inicialmente, considere "**M**" como o conjunto formado por todos aqueles que têm o ensino médio. Além disso, considere "**X**" como o conjunto formado por todos aqueles que sabem usar o EXCEL. Com as informações do enunciado, temos que:

$$n(M) = 72 \qquad n(X) = 64 \qquad n(M \cap X) = 35$$

Do princípio da inclusão-exclusão, sabemos que:

$$n(M \cup X) = n(M) + n(X) - n(M \cap X)$$

Substituindo as informações que temos,

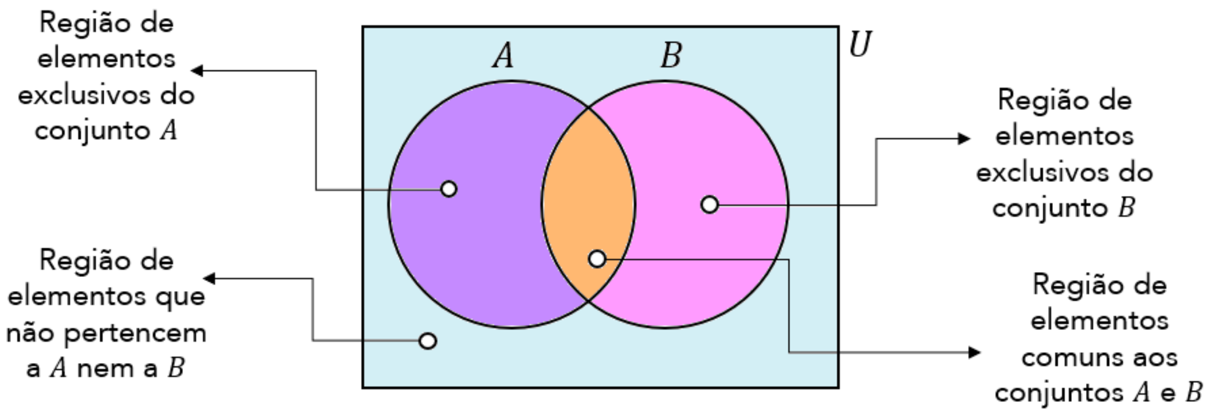
$$n(M \cup X) = 72 + 64 - 35 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{n(M \cup X) = 101}}$$

Note que a união desses dois conjuntos tem 101 pessoas. Por sua vez, o enunciado disse que **o número total de funcionários dessa empresa é 116.** Com isso, a quantidade de funcionários que não possuem ensino médio e não sabem usar o EXCEL é exatamente **a diferença entre o total de funcionário e $\boldsymbol{n(M \cup X)}$**. Assim,

$$116 - 101 = 15$$

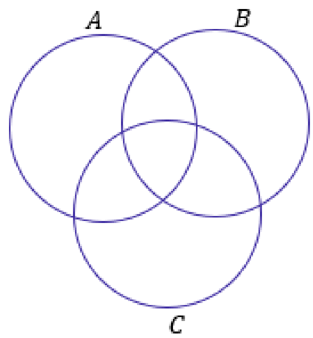
**Gabarito:** LETRA C.

A verdade é que **não precisamos decorar fórmulas** para responder questões que envolva esse princípio. Utilizando **um pouco de lógica e diagramas de Venn**, podemos encontrar a quantidade de elemento de cada conjunto envolvido em um problema típico de Princípio da Inclusão-Exclusão. Antes disso, quero deixar claro para vocês **o significado de cada uma das regiões** no seguinte diagrama:

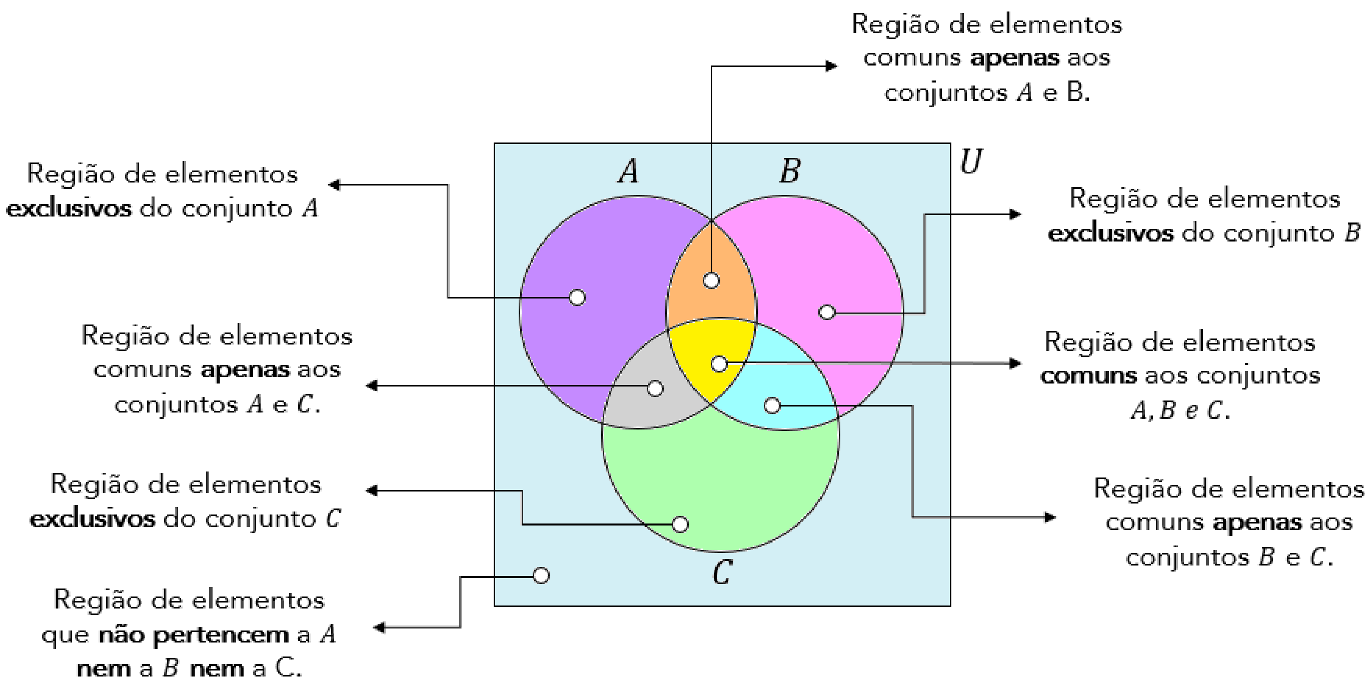



## ➢ 3 Conjuntos

Imagine que você tem 3 conjuntos, **cada conjunto possui elementos em comum com os outros dois**. A situação **mais completa** que podemos imaginar está representada pelo diagrama abaixo.




Vamos fazer **uma leitura** de cada uma das regiões da figura acima?



Observe que **o número de regiões com três conjuntos aumenta bastante** em relação à análise anteriormente feita com dois. Agora, considere que **você conhece a quantidade** de elementos de cada um dos conjuntos cima, isto é, $\boldsymbol{n(A)}$, $\boldsymbol{n(B)}$ **e** $\boldsymbol{n(C)}$**.**

*Como você faria para encontrar* $\boldsymbol{n(A \cup B \cup C)}$ *? Será que é só somar as três quantidades?* **A resposta para essa pergunta é não!** Precisamos ter atenção aos **elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**.

Segundo o Princípio da Inclusão- Exclusão, a fórmula geral que permite calcular a quantidade de elementos de um **conjunto formado pela união de outros três** é dada por:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

*Vamos tentar entender com ela surge?* Note que para achar a quantidade de elementos do conjunto união, primeiro **somamos individualmente as quantidades de cada um dos conjuntos**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C)}$$

No entanto, nós vimos que, ao fazer isso, **não estamos considerando os elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**. Essa soma dará, certamente, uma quantidade de elementos maior do que a quantidade real. *Mas, então, o que fazer?* **É preciso subtrair as quantidades dos elementos que estão nas intersecções, evitando assim a dupla contagem**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)}$$

Perceba que a fórmula ainda não está completa. Imagine um elemento que é **comum a todos os 3 conjuntos**, isto é, pertence a $A \cap B \cap C$. Esse elemento pertence tanto a $A$, quanto a $B$ e a $C$. Quando fizemos a soma $n(A) + n(B) + n(C)$, **contamos ele três vezes**!

Quando fizemos a subtração $-n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$ estamos **tirando ele três vezes**! **Resultado: não estamos contando os elementos de** $\boldsymbol{A \cap B \cap C}$. Por esse motivo, **adicionamos** $\boldsymbol{n(A \cap B \cap C)}$**.** Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Eu sei que a fórmula **pode parecer um pouco complicada**, mas garanto que com **um pouco de paciência e resolução de exercícios**, ela se tornará **mais amigável e bastante intuitiva**! Além disso, também ensinarei um jeito que vocês poderão utilizar **caso não lembrem da fórmula**. Algumas vezes, no entanto, **a questão pode exigir a aplicação direta dela**. Confira o exercício abaixo.

HORA DE PRATICAR!

**(IFF/2018)** Para um conjunto qualquer X, $n(X)$ representa a quantidade de elementos de X. Nesse sentido, considere que os conjuntos A, B e C tenham as seguintes propriedades:

$$n(A) = n(B) = n(C) = 50;$$
$$n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = 10;$$
$$n(A \cap B \cap C) = 0.$$

Nessa situação, $n(A \cup B \cup C)$ é igual a
A) 100.
B) 110.
C) 120.
D) 130.
E) 140.

**Comentários:**
Percebam que essa questão exige apenas **a aplicação direta da fórmula** que acabamos de ver.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C) = 50 + 50 + 50 - 10 - 10 - 10 + 0$$

$$n(A \cup B \cup C) = 120$$

**Gabarito:** Letra C.

Em algumas questões **não precisaremos aplicar diretamente a fórmula acima**. Será necessário um trabalho mais braçal da nossa parte, para chegar à resposta. Muitas vezes a questão pede valores específicos que vão surgir de uma maneira mais fácil **se a gente for completando o diagrama de Venn** com as quantidades.

Por favor, **dê mais olhada naquele "mapa" que mostrei logo no início desse tópico**, destacando as regiões e o seu significado.

# QUESTÕES COMENTADAS

## Introdução à Teoria dos Conjuntos

### FGV

**1. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Na matemática, as coleções são chamadas de conjuntos. Se uma coleção tem apenas um elemento, ela é dita um conjunto unitário. Um exemplo de conjunto unitário é a coleção formada pelos números que são:**

a) ao mesmo tempo, divisores de 4 e 9;
b) divisores de 4;
c) divisores de 9;
d) maiores que 4 e menores que 9;
e) formados pelos algarismos 4 e 9.

**Comentários:**

Queremos um conjunto que possua apenas um elemento. Vamos analisar cada uma das alternativas.

a) ao mesmo tempo, divisores de 4 e 9;

**CERTO.** O único número que é divisor, ao mesmo tempo de 4 e 9, **é o número 1**. Portanto, esse conjunto tem apenas um elemento e é considerado unitário.

b) divisores de 4;

**ERRADO.** São divisores de 4: $D(4) = \{1, 2, 4\}$. Note que **temos 3 elementos**, portanto, não é o conjunto unitário que estamos procurando.

c) divisores de 9;

**ERRADO.** São divisores de 9: $D(9) = \{1, 3, 9\}$. Note que **temos 3 elementos**, portanto, não é o conjunto unitário que estamos procurando.

d) maiores que 4 e menores que 9;

**ERRADO.** Se considerarmos apenas **os números inteiros entre 4 e 9**, vamos ter: $\{5, 6, 7, 8\}$. Portanto, está longe de ser o conjunto unitário que estamos procurando.

e) formados pelos algarismos 4 e 9.

**ERRADO.** Pessoal, **podemos formar infinitos números com os algarismos 4 e 9**. Entre eles, posso citar 49, 94, 449, 494, etc.

**Gabarito:** LETRA A.

**2. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Conjunto é o nome dado, na Matemática, a qualquer coleção. Entretanto, uma coleção pode não ter elementos. Nesse caso, diz-se que esse é um conjunto vazio. Um exemplo de conjunto vazio é a coleção:**

a) de meses do ano que começam pela letra J;

b) de dias da semana que começam pela letra T;

c) dos números que são, ao mesmo tempo, pares e ímpares;

d) dos números menores que 10 e maiores que 6;

e) das pessoas brasileiras que são casadas.

**Comentários:**

Vamos procurar uma coleção que não possua elementos. Devemos analisar alternativa por alternativa.

a) de meses do ano que começam pela letra J;

**ERRADO.** Temos vários meses que começam pela letra J: **Janeiro, Junho e Julho**.

b) de dias da semana que começam pela letra T;

**ERRADO.** Terça-feira é um dia da semana que começa pela letra T. Portanto, uma coleção formada por esses dias **não é vazia**.

c) dos números que são, ao mesmo tempo, pares e ímpares;

**CERTO.** Não existe nenhum número que seja ao mesmo tempo par ou ímpar. **Ou é ímpar, ou é par**. Portanto, um conjunto formado por esses números seria vazio.

d) dos números menores que 10 e maiores que 6;

**ERRADO.** Considerando apenas o conjunto dos inteiros, os números que são menores que 10 e maiores que 6 são: **7, 8 e 9**. Portanto, **não é um conjunto vazio**.

e) das pessoas brasileiras que são casadas.

**ERRADO.** Muitos brasileiros são casados. Portanto, **não seria um conjunto vazio**.

**Gabarito:** LETRA C.

**3. (FGV/CODEBA/2010) Sejam $\boldsymbol{A = \{0, 1, 2, 3\}}$ e $\boldsymbol{B = \{0, 2, 4\}}$ dois conjuntos. Com relação aos conjuntos A e B, analise as afirmativas a seguir:**

**I.** $\boldsymbol{B \subset A}$

**II.** $\boldsymbol{A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}}$

**III.** $\boldsymbol{A \cap B = \{0, 2\}}$

**Está(ão) correta(s) somente**

a) I.

b) II.
c) III.
d) I e II.
e) II e III.

**Comentários:**
Devemos analisar cada afirmativa.

I. $B \subset A$
**ERRADO.** Para que B estivesse contido em A, **todos os seus elementos também devem ser elementos de A**. Note que **B possui o elemento 4, enquanto A não possui**. Logo, B **não** pode estar contido em A.

II. $A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$
**CERTO.** A união dos dois conjuntos é a **reunião de seus elementos**. Assim, quando juntamos "todo mundo", realmente ficamos com $A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$.

III. $A \cap B = \{0,2\}$
**CERTO.** A intersecção é formada pelos **elementos em comum dos dois conjuntos**. Perceba que o 0 e o 2 são os elementos que estão nos dois conjuntos, ao mesmo tempo. Portanto, é correto dizer que $A \cap B = \{0,2\}$.

**Gabarito:** LETRA E.

# Outras Bancas

**4. (FUNDATEC/PREF. TRAMANDAÍ/2021) Considerando dois conjuntos, A e B, sendo: A = {2,4,6,8,10,12} e B = {2,4,6,8,10,12,14,16}, assinale a alternativa correta.**
A) O conjunto A contém o conjunto B.
B) O conjunto A está contido no conjunto B.
C) O conjunto B está contido no conjunto A.
D) O conjunto B pertence ao conjunto A.

**Comentários:**
Vamos escrever os dois conjuntos para visualizar quais são os elementos comuns aos dois.

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10}, \mathbf{12}\}$$
$$\mathbf{B} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10}, \mathbf{12}, \mathbf{14}, \mathbf{16}\}$$

Note que todos os elementos de A estão em B. Sendo assim, podemos dizer que **A está contido em B**, conforme aponta a letra B.

**Gabarito:** LETRA B.

**5. (ANPEC/2021) Seja R o conjunto dos números reais. Dado um subconjunto finito $A \subseteq R$, denote por $card(A)$ a sua cardinalidade (ou seja, o número de elementos em A). Classifique a seguinte item como certo ou errado:**

Dados dois subconjuntos finitos A, $B \subseteq \mathbb{R}$, se $B \subseteq A$, então $card(B) \leq card(A)$.

**Comentários:**

Se B está contido em A, então todos os elementos de B também estarão em A.

Portanto, nessas condições, **é impossível** que B tenha mais elementos do que A.

Sendo assim, é correto afirmarmos que a cardinalidade de B (ou número de elementos de B) sempre será **menor ou igual** a cardinalidade de A (ou número de elementos de A).

**Gabarito:** CERTO.

**6. (QUADRIX/CRA-PR/2022) Considerando o conjunto da frutas F, o conjunto das comidas doces D e o conjunto dos tipos de manga M, julgue o item.**

$$M \subset F$$

**Comentários:**

O enunciado trouxe que:

F = conjunto das frutas;
D = conjunto dos doces;
M = conjunto dos tipos de mangas.

Como **manga é uma fruta**, então o conjunto dos tipos de mangas **está contido** no conjunto das frutas. Na simbologia da teoria dos conjuntos, escrevemos:

$$\boxed{M \subset F}$$

**Gabarito:** CERTO.

**7. (AVANÇA-SP/PREF. AMERICANA/2023) Das alternativas abaixo, qual apresenta um conjunto vazio:**

A) P = {4}.
B) Q = {5,2,9}.
C) R = {0,1;0,6}.
D) S = {0,34; - 0,2}.

E) T = { }.

**Comentários:**

Vamos relembrar um pouco o que foi visto na teoria!


Devemos falar um pouco do **conjunto vazio e conjunto unitário**. O conjunto vazio, como o próprio nome sugere, **é um conjunto que não possui elementos**! É representado por meio do **símbolo** ∅ mas também pode aparecer como um simples par de chaves { }. Já **o conjunto unitário** é todo conjunto que **possui um único elemento**!

**Gabarito:** LETRA E.

# QUESTÕES COMENTADAS

## União, Intersecção, Complementar e Diferença

### Outras Bancas

**1. (IDIB/GOINFRA/2022) Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Determine a quantidade de subconjuntos do conjunto $C = (A \cap B) \cup \{1\}$.**

A) 32

B) 26

C) 30

D) 64

E) 2

**Comentários:**

Primeiramente, vamos determinar a intersecção entre A e B. Lembre-se que A ∩ B é o conjunto formado por **todos os elementos de A que <u>também</u> são elementos de B**, ou seja, elementos que pertencem aos dois conjuntos simultaneamente.

$$\mathrm{A} = \{1, \mathbf{2}, 3, \mathbf{4}, 5, \mathbf{6}, 7, \mathbf{8}\}$$
$$\mathrm{B} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}\}$$

Note que todos os elementos de B estão também em A. Sendo assim, **<u>a intersecção</u>** entre os dois conjuntos será igual ao B.

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8\}$$

O enunciado fala no conjunto $\mathrm{C} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \{1\}$. Com isso, vamos fazer **a união** do conjunto acima com o conjunto $\{1\}$.

$$C = \{1, 2, 4, 6, 8\}$$

O resultado é um conjunto C com **5 (cinco) elementos**. Na teoria, vimos que **o número de <u>subconjuntos</u>** que conseguimos formar a partir de um conjunto com **$n$ elementos é igual a $2^n$.** Logo,

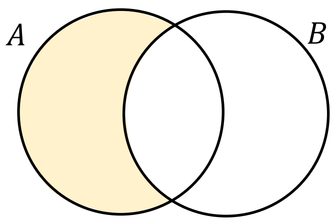
$$\text{Número de subconjuntos de C} = 2^5$$
$$\boxed{\textbf{Número de subconjuntos de C} = \mathbf{32}}$$

**Gabarito:** LETRA A.

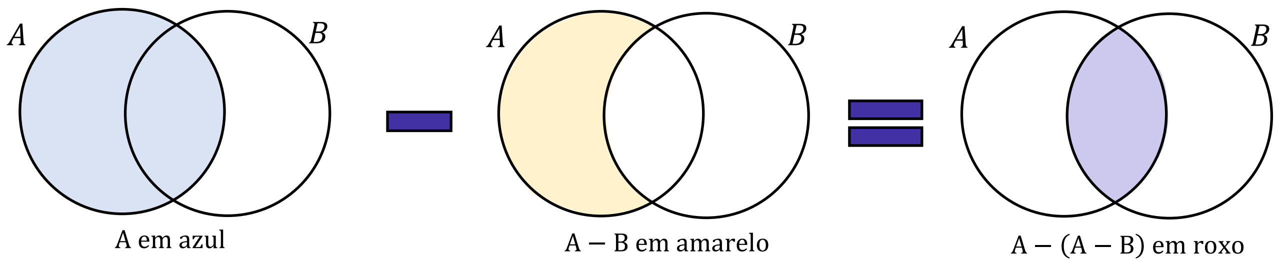
**2. (SELECON/PREF. SÃO GONÇALO/2022) Sejam A e B conjuntos definidos da seguinte maneira:**
**A = {pessoas que moram em São Gonçalo}**
**B= {pessoas que trabalham em Niterói}**

**O conjunto A – (A – B) representa o conjunto cujos elementos são pessoas que:**
A) moram em São Gonçalo e trabalham em Niterói
B) moram em Niterói e trabalham em São Gonçalo
C) moram em São Gonçalo e não trabalham em Niterói
D) moram em Niterói e não trabalham em São Gonçalo

**Comentários:**
Você lembra que $A - B$ é o conjunto formado por **todos os elementos de A que não são elementos de B**. Por meio de diagramas, podemos representar esse conjunto como a seguinte região:




A questão pede o conjunto $A - (A - B)$. Vamos encontrá-lo por meio de diagramas.




Com isso, observe que o conjunto $\boldsymbol{A - (A - B)}$ **corresponde exatamente à intersecção dos dois conjuntos**. Se A é composto pelas pessoas que **moram em São Gonçalo** e B é composto pelas pessoas que **trabalham em Niterói**, então $A - (A - B)$ é o conjunto formado pelas pessoas que moram em São Gonçalo e trabalham em Niterói.

**Gabarito:** LETRA A.

**3. (FUNDATEC/BM-RS/2022) Considere os conjuntos:**

$$\boldsymbol{A = \{1, 2, 3, 18\}}$$
$$\boldsymbol{B = \{1, 2, 3, ..., 18\} = \{x \in N \,/\, 0 < x < 19\}}$$

**É possível afirmar que $A \cap B$ é dado por:**

A) $A$

B) $B$

C) $A \cup B$

D) $A \setminus B$

E) $B \setminus A$

**Comentários:**

Lembrem-se que o conjunto $A \cap B$ **é o conjunto da intersecção entre A e B**. Na prática, significa o conjunto formado por todos os elementos que são, **simultaneamente**, elementos de A e de B. Do enunciado, temos:

$$\boldsymbol{A = \{1, 2, 3, 18\}}$$
$$\boldsymbol{B = \{1, 2, 3, \dots, 18\} = \{x \in N \ / \ 0 < x < 19\}}$$

Note que B está abreviado, mas basicamente é formado por **todos os números naturais entre 0 e 19**, **não** incluindo esses extremos.

$$\mathrm{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{18}\}$$
$$\mathrm{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 4{,}5{,}6{,}7{,}8{,}9{,}10{,}11{,}12{,}13{,}14{,}15{,}16{,}17, \mathbf{18}\}$$

Sendo assim, podemos escrever que:

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 18\}$$

Observe que **o conjunto encontrado é igual ao próprio A**. Logo, podemos marcar a letra A.

**Gabarito:** LETRA A.

**4. (INST. CONSULPLAN/PREF. GONÇALVES/2022) Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 5, 6\}$ e $C = \{2, 5, 7, 9\}$. O conjunto $(A \cup B) - (B \cap C)$ é:**

A) $\{0, 1, 3, 4, 6\}$

B) $\{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

C) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

D) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

**Comentários:**

A questão nos forneceu os seguintes conjuntos:

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \qquad B = \{2, 4, 5, 6\} \qquad C = \{2, 5, 7, 9\}$$

Vamos fazer cada uma das operações. Primeiro, $A \cup B$.

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Observe que na união dos dois conjuntos, listamos todos os elementos que pertencem aos dois. É importante lembrar que **não é preciso repetir** um elemento comum. Por exemplo, o elemento "2" pertence tanto a A quanto a B. Quando fazemos a união de A com B, o **"2" aparece só uma vez e não duas**. *Tudo certo?*

Agora, vamos $B \cap C$.

$$B \cap C = \{2, 5\}$$

Na intersecção, estamos interessados naqueles elementos que pertencem simultaneamente a B e a C. Note que apenas **o 2 e o 5 estão nos dois conjuntos**. Por fim, queremos encontrar $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})$**.** Nesse caso, queremos tudo que está em $A \cup B$ **mas não** está $B \cap C$.

$$A \cup B = \{0, 1, \mathbf{2}, 3, 4, \mathbf{5}, 6\}$$
$$B \cap C = \{\mathbf{2}, \mathbf{5}\}$$

Com isso:

$$\boxed{(A \cup B) - (B \cap C) = \{0, 1, 3, 4, 6\}}$$

**Gabarito:** LETRA A.

# FGV

**5. (FGV/SSP-AM/2022) Sobre dois conjuntos A e B sabe-se que:**

**- A união de A e B tem 130 elementos.**
**- A diferença B – A tem 50 elementos.**
**- A diferença A – B tem 60 elementos.**

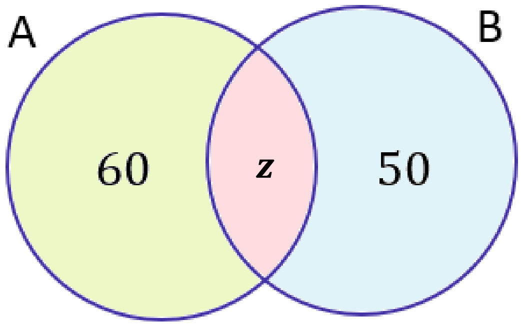
**Sendo x o número de elementos de A e y o número de elementos de B, o valor de x + y é igual a**

A) 110.
B) 120.
C) 130.
D) 140.
E) 150.

**Comentários:**

Primeiramente, vamos relembrar o que significa os conjuntos diferenças apontados no enunciado.

1) $B - A$ é o conjunto formado por **todos os elementos de B que <u>não</u> são elementos de A**.
2) Analogamente, $A - B$ é o conjunto formado por **todos os elementos de A que <u>não</u> são elementos de B**.




O conjunto $A - B$ está representado pela região verde. Note que é **tudo de $A$ <u>menos</u> a parte vermelha**. Essa parte vermelha **representa os elementos de A que também são elementos de $B$**, ou seja, a intersecção dos dois conjuntos. Por sua vez, a região azul representa o conjunto $B - A$. Observe que já colocamos as quantidades de cada desses conjuntos. Como não sabemos quantos elementos pertencem a $A$ e a $B$ **simultaneamente**, então vamos chamar essa quantidade de "z". O enunciado nos diz que a união desses dois conjuntos possui **130 elementos**. Na prática, isso significa que se **<u>somamos</u> todas as regiões** destacadas no diagrama de Venn acima, então **<u>devemos</u>** obter esses 130 elementos. *Vamos fazer isso?*

$$60 + z + 50 = 130 \quad \rightarrow \quad z = 130 - 110 \quad \rightarrow \quad \boxed{z = 20}$$

Pronto, temos "z". Com ele, podemos determinar quantos elementos possui cada um dos conjuntos.

$$n(A) = 60 + z \quad \rightarrow \quad n(A) = 60 + 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{n(A) = 80}$$

$$n(B) = 50 + z \quad \rightarrow \quad n(B) = 50 + 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{n(B) = 70}$$

A questão quer a soma desses dois valores. Logo,

$$n(A) + n(B) = x + y = 80 + 70 = 150$$

**Gabarito:** LETRA E.

## CEBRASPE

**6. (CESPE/COGE-CE/2019) Segundo o portal cearatransparente.ce.gov.br, em 2018, dos 184 municípios do estado do Ceará, 4 celebraram exatamente 1 convênio com o governo estadual, 22 celebraram exatamente 2 convênios com o governo estadual, e 156 celebraram 3 ou mais convênios com o governo estadual. De acordo com o texto, se, para cada $j = 0, 1, 2, \ldots,$ $M_j$ for o conjunto dos municípios cearenses que celebraram, pelo menos, $j$ convênios com o governo estadual, então o conjunto dos municípios que não celebraram nenhum convênio com o governo do estado será representado pelo conjunto**

A) $M_0$
B) $M_1 - M_0$
C) $M_1 \cap M_0$
D) $M_0 - M_1$
E) $M_0 \cup M_1$

**Comentários:**

Se $M_j$ representa o conjunto dos municípios que celebram, pelo menos, j convênios, **$M_0$ é o conjunto dos municípios que celebram, pelo menos, "zero convênios"**. Em outras palavras, basicamente todos os municípios estão inseridos nesse conjunto, pois **incluem aqueles que não fazem nenhum convênio e aqueles que fazem qualquer número**.

Para obter o conjunto dos munícipios que não celebraram nenhum convênio, **devemos retirar do conjunto $M_0$ todos os munícipios que celebram 1 ou mais convênios**. Isso é representado por $M_0 - M_1$.

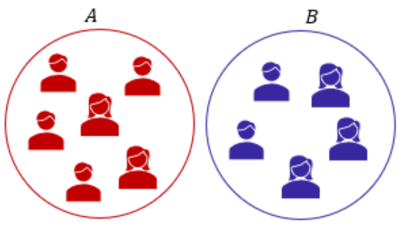
**Gabarito:** LETRA D.

**7. (CESPE/TRF-1/2017) Em uma reunião de colegiado, após a aprovação de uma matéria polêmica pelo placar de 6 votos a favor e 5 contra, um dos 11 presentes fez a seguinte afirmação: “Basta um de nós mudar de ideia e a decisão será totalmente modificada.” Considerando a situação apresentada e a proposição correspondente à afirmação feita, julgue o próximo item.**

Se A for o conjunto dos presentes que votaram a favor e B for o conjunto dos presentes que votaram contra, então o conjunto diferença A\B terá exatamente um elemento.

**Comentários:**

É possível representar os conjuntos A e B conforme o diagrama abaixo.



Observe que **não há intersecção entre A e B**, pois, **uma mesma pessoa não pode pertencer aos dois conjuntos**. Isso ocorre devido a **impossibilidade de se votar a favor e contra simultaneamente**. Portanto, sabemos que quando **A e B são disjuntos, então temos que $\boldsymbol{A \backslash B = A}$**. Como A tem seis elementos, então A\B terá também seis elementos e **não apenas um**, como indica o item.

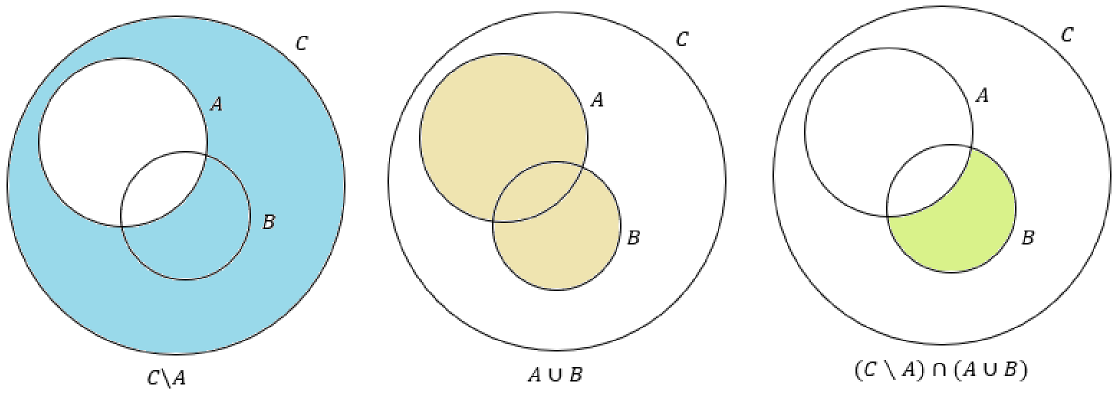
**Gabarito:** ERRADO.

**8. (CESPE/INSS/2015) Julgue o item a seguir, relativos a raciocínio lógico e operações com conjuntos.**

Se $A$, $B$ e $C$ forem conjuntos quaisquer tais que $A, B \subset C$, então $(C \setminus A) \cap (A \cup B) = C \cap B$.

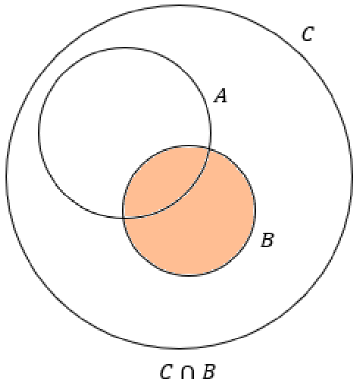
**Comentários:**

Na minha opinião, a melhor forma de resolver esse tipo de exercício é por meio de desenhos. No entanto, antes de trazer qualquer imagem, gostaria de lembrar que **$\boldsymbol{C \backslash A}$ é a mesma coisa que $\boldsymbol{C - A}$**. Logo, **são os elementos de C que não são elementos de A**.




Olhem a figura acima. Veja que **A e B estão dentro de C pois o enunciado informa que $\boldsymbol{A, B \subset C}$**. Como o enunciado não fala se A e B são disjuntos, podemos considerar que eles possuem uma intersecção entre si, conforme a imagem. **A região pintada corresponde exatamente ao resultado da operação**.

Por exemplo, **$\boldsymbol{C \backslash A}$ está representada por toda região de azul**. $A \cup B$ por toda a região marrom. Por fim, quando tiramos a intersecção desses dois conjuntos, ficamos com a área verde. Esse é o lado esquerdo da equação do enunciado. Para que a equação seja verdadeira, **o lado direito deve representar exatamente a mesma região**. No entanto, note que:




Veja que **as regiões são diferentes** e, portanto, **a equação não bate**. Logo, o item está incorreto.

**Obs.:** Para a equação ser verdadeira **A e B devem ser disjuntos**. Como exercício, mostre esse fato! Basta observar as áreas, considerando que A e B não possuem intersecção.

**Gabarito:** ERRADO.

**(SUFRAMA/2014) Texto para as próximas questões**

**Para o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, se A for um subconjunto de Ω, indique por $S(A)$ a soma dos elementos de A e considere e $S(\emptyset) = 0$. Nesse sentido, julgue o item a seguir.**

**9. (CESPE/SUFRAMA/2014) Se A e B forem subconjuntos de Ω, tais que $A \subset B$, então $0 \leq S(A) \leq S(B) \leq 55$.**

**Comentários:**

$S(A)$ representa **a soma dos elementos de A**. Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, então:

$$S(\Omega) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

Você concorda que qualquer subconjunto de $\Omega$ vai apresentar uma soma menor ou igual a 55? Por exemplo, considere que $B = \{1,3,5,7,9\}$. Note que B é um subconjunto de $\Omega$. Assim,

$$S(B) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

**Não tem como** escolher um subconjunto de $\Omega$ e a soma dos elementos dele **fornecer um resultado maior** que a soma dos elementos de $\Omega$. Concorda? Da mesma forma, se pegarmos um subconjunto de B, digamos A, **a soma dos elementos de A vai ser menor ou igual a soma dos elementos de B**. Por exemplo, se $A = \{1, 3\}$, então:

$$S(A) = 1 + 3 = 4$$

Veja que é bem menor que 25. Com esse raciocínio, é possível ver que o enunciado trouxe um desigualdade verdadeira. Note que **se houvessem números negativos em $\Omega$**, não poderíamos ter feito as conclusões que fizemos aqui. Logo, item correto.

**Gabarito:** CERTO.

**10. (CESPE/SUFRAMA/2014) Se $A \subset \Omega$, e se $\Omega \backslash A$ é o complementar de A em Ω, então $S(\Omega \backslash A) = S(\Omega) - S(A)$.**

**Comentários:**
Gostaria de chamar atenção ao fato de que **A é um subconjunto de $\Omega$**. Se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, então o conjunto A poderá ser $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Assim, **o complementar de A em Ω será os elementos de Ω que não estão em A**, isto é:

$$\Omega \backslash A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Se **S(A) é a soma dos elementos de A**, ficamos com

$$S(\Omega) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$S(A) = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

$$S(\Omega \backslash A) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Logo, veja que:

$$S(\Omega \backslash A) = S(\Omega) - S(A)$$

Conforme o item trouxe.

**Gabarito:** CERTO.

# QUESTÕES COMENTADAS

## Princípio da Inclusão-Exclusão

### Outras Bancas

**1. (SELECON/PREF. SÃO GONÇALO/2022) Em uma empresa na qual trabalham 116 pessoas, sabe-se que:**

**- 72 têm ensino médio completo;**
**- 64 sabem usar o EXCEL;**
**- 35 têm ensino médio completo e sabem usar o EXCEL.**

**O número de funcionários dessa empresa que não têm ensino médio completo e não sabem usar o EXCEL é:**

A) 13
B) 14
C) 15
D) 16

**Comentários:**

Vamos usar o **Princípio da Inclusão-Exclusão** para resolver esse problema. Inicialmente, considere "**M**" como o conjunto formado por todos aqueles que têm o ensino médio. Além disso, considere "**X**" como o conjunto formado por todos aqueles que sabem usar o EXCEL. Com as informações do enunciado, temos que:

$$n(M) = 72 \qquad n(X) = 64 \qquad n(M \cap X) = 35$$

Do princípio da inclusão-exclusão, sabemos que:

$$n(M \cup X) = n(M) + n(X) - n(M \cap X)$$

Substituindo as informações que temos,

$$n(M \cup X) = 72 + 64 - 35 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{n(M \cup X) = 101}}$$

Note que a união desses dois conjuntos tem 101 pessoas. Por sua vez, o enunciado disse que **o número total de funcionários dessa empresa é 116.** Com isso, a quantidade de funcionários que não possuem ensino médio e não sabem usar o EXCEL é exatamente **a diferença entre o total de funcionário e $\boldsymbol{n(M \cup X)}$**. Assim,

$$116 - 101 = 15$$

**Gabarito:** LETRA C.

**2. (AOCP/IP PREV/2022) Para conhecer a opinião em relação à possível aplicação de dois fundos de Previdência em um plano aberto de Previdência, identificados por A e B, uma Instituição Financeira aplicou um questionário entre seus conveniados e verificou que:**

**- 48% de seus conveniados gostariam que o Fundo de Previdência A fosse aplicado em seus planos;**
**- 35% de seus conveniados gostariam que o Fundo de Previdência B fosse aplicado em seus planos;**
**- 12% de seus conveniados gostariam que o Fundo de Previdência A e o Fundo de Previdência B fossem aplicados em seus planos.**

**Dessa forma, é correto afirmar que**
A) mais de 30% dos conveniados não responderam ao questionário ou não manifestaram interesse em qualquer um dos dois Fundos de Previdência.
B) o percentual de conveniados que gostariam que somente o Fundo de Previdência A fosse aplicado em seus planos foi de 23%.
C) 71 conveniados gostariam que pelo menos um dos dois Fundos de Previdência fosse aplicado em seus planos.
D) mais de 14 dos conveniados gostariam que somente o Fundo de Previdência B fosse aplicado em seus planos.
E) mais de 70% dos conveniados gostariam que pelo menos um dos dois Fundos de Previdência fosse aplicado em seus planos, A ou B ou ambos.

**Comentários:**
Mais uma vez, vamos usar o **Princípio da Inclusão-Exclusão**. Primeiramente, considere o conjunto "**A**" como o conjunto dos conveniados que gostariam do Fundo de Previdência **A**. Por sua vez, "**B**" é o conjunto daqueles que gostariam do Fundo de Previdência **B**. Com as informações do enunciado, podemos escrever que:

$$n(A) = 48\% \qquad n(B) = 35\% \qquad n(A \cap B) = 12\%$$

Por meio do PIE, podemos encontrar, em termos de porcentagem, quantos conveniados preferem **o fundo A <u>ou</u> o fundo B**.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Substituindo as informações que retiramos do enunciado,

$$n(A \cup B) = 48\% + 35\% - 12\% \quad \rightarrow \quad n(A \cup B) = 71\%$$

Ou seja, **71% dos conveniados preferem o fundo A ou o fundo B**. Sendo assim, os **29%** dos conveniados **restantes** **não** **respondeu** a pesquisa ou **não** **prefere nenhum dos fundos**. Com essas informações, vamos avaliar as alternativas.

A) mais de 30% dos conveniados não responderam ao questionário ou não manifestaram interesse em qualquer um dos dois Fundos de Previdência.
**Errado.** Pessoal, vimos que a porcentagem de conveniados que não responderam ao questionário ou que não tem interesse em nenhum dos fundos é igual a **29%**, ou seja, **inferior a 30%.**

B) o percentual de conveniados que gostariam que somente o Fundo de Previdência A fosse aplicado em seus planos foi de 23%.
**Errado.** Tem-se que 48% dos conveniados gostariam do fundo A. No entanto, sabemos que 12% deles também preferem o fundo B. Para encontrar os conveniados que gostariam **apenas** do fundo A, basta fazer a diferença:

$$48\% - 12\% = \mathbf{36}\%$$

C) 71 conveniados gostariam que pelo menos um dos dois Fundos de Previdência fosse aplicado em seus planos.
**Errado.** Galera, cuidado aqui. A alternativa trouxe "71 conveniados", não é isso. O correto seria "71% dos conveniados". Estamos trabalhando com **porcentagens**, não **valores absolutos**.

D) mais de 14 dos conveniados gostariam que somente o Fundo de Previdência B fosse aplicado em seus planos.
**Errado.** É a mesma coisa aqui, moçada. A alternativa trouxe "mais de 14 dos conveniados", não é isso. Lembre-se que estamos trabalhando com **porcentagens**, não **valores absolutos**.

E) mais de 70% dos conveniados gostariam que pelo menos um dos dois Fundos de Previdência fosse aplicado em seus planos, A ou B ou ambos.
**Certo.** Encontramos que **71%** dos conveniados gostariam de aplicar o fundo A ou o fundo B em seus planos de previdência.

**Gabarito:** LETRA E.

**3. (FUNDATEC/SEPOG-RS/2022) Em uma escola de informática, foram entrevistados 200 alunos. Com a entrevista, pode-se concluir que 61 alunos estudam Matemática, 55 estudam Programação e 50 estudam Raciocínio Lógico. Ainda, 20 alunos estudam Matemática e Programação, 23 estudam Raciocínio Lógico e Programação e 21 estudam Matemática e Raciocínio Lógico. E 12 alunos estudam as três disciplinas, Matemática, Raciocínio Lógico e Programação. Com base nessas informações, é possível concluir que:**

A) 86 alunos não estudam nenhuma das três disciplinas.
B) 60 alunos estudam apenas uma das três disciplinas.
C) 34 alunos não estudam nenhuma das três disciplinas.
D) 30 alunos estudam apenas duas disciplinas.
E) 23 alunos estudam apenas matemática.

**Comentários:**
Vamos usar o princípio da inclusão-exclusão, dessa vez para **três conjuntos**. Considere "M" o conjunto daqueles que estudam matemática, "P" o conjunto daqueles que estudam programação e "R", daqueles que estudam raciocínio lógico. Com as informações do enunciado, podemos escrever:

**- 61 alunos estudam Matemática:** $n(M) = 61$
**- 55 estudam Programação:** $n(P) = 55$
**- 50 estudam Raciocínio Lógico:** $n(R) = 50$
**- 20 alunos estudam Matemática e Programação:** $n(M \cap P) = 20$
**- 23 estudam Raciocínio Lógico e Programação:** $n(P \cap R) = 23$
**- 21 estudam Matemática e Raciocínio Lógico:** $n(M \cap R) = 21$
**- 12 alunos estudam as três disciplinas:** $n(M \cap P \cap R) = 12$

Por meio do PIE, vamos conseguir encontrar $n(M \cup P \cup R)$. O número de elementos da união dos três conjuntos nos informa **quantos alunos gostam de pelo menos uma das matérias**. Vamos lá!

$$n(M \cup P \cup R) = n(M) + n(P) + n(R) - n(M \cap P) - n(M \cap R) - n(P \cap R) + n(M \cap P \cap R)$$

Substituindo os valores extraídos do enunciado,

$$n(M \cup P \cup R) = 61 + 55 + 50 - 20 - 23 - 21 + 12$$

$$\boxed{\boldsymbol{n(M \cup P \cup R) = 114}}$$

Assim, podemos concluir que **114 alunos estudam pelo menos uma matéria** dentre as três em referência: matemática, programação ou raciocínio lógico. Como **200 alunos foram entrevistados**, temos uma diferença de $200 - 114 = 86$ alunos que **não estudam nenhuma das três matérias**.

**Gabarito:** LETRA A.

## FGV

**4. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Em uma assembleia com 172 votantes, duas propostas independentes, A e B, foram colocadas em votação. Cada votante votou a favor ou contra cada uma das duas propostas. Sabe-se que 138 votaram a favor da proposta A, 74 votaram a favor da proposta B e 32 votaram contra as duas propostas. O número de votantes que votaram a favor da proposta A e contra a proposta B é**

a) 66.

b) 69.

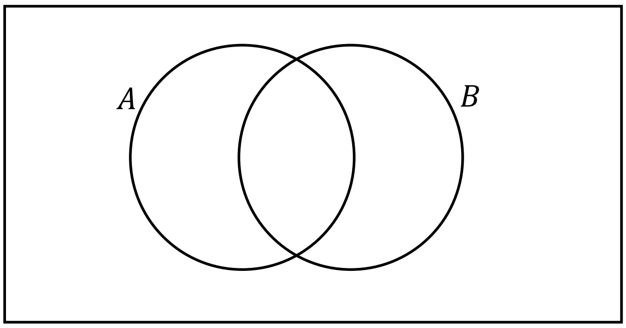
c) 72.

d) 74.

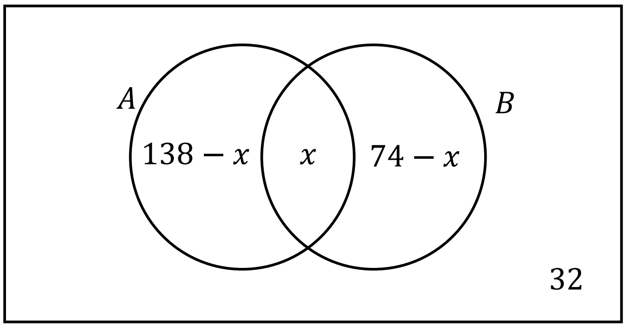
e) 140.

**Comentários:**

Vamos resolver essa questão usando **Diagramas de Venn**. Como temos duas propostas:



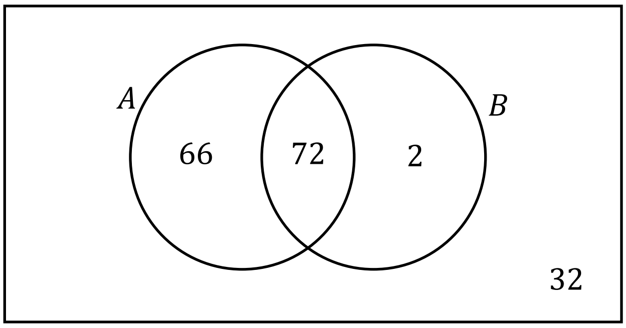

Com o **diagrama pré-esquematizado**, vamos inserir as informações do enunciado.



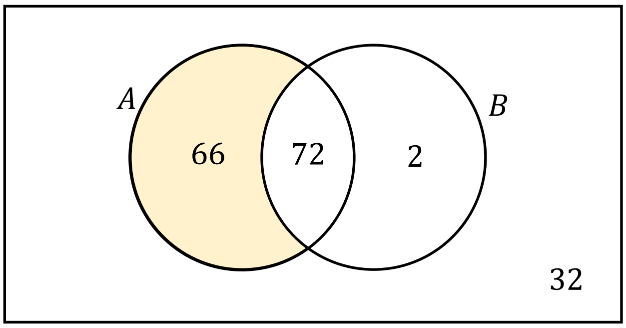

Vou explicar melhor o diagrama acima! Observe que o enunciado não falou quantos votaram a favor das duas propostas. Sendo assim, coloquei **o "x" na intersecção dos conjuntos**. Ademais, como sabemos que 32 votou contra as duas propostas, deixei essa quantidade fora de A e B, mas ainda dentro do universo dos votantes. Por fim, devemos saber que, após organizar essas regiões, a soma de todas as quantidades deve **resultar nos <u>172 votantes</u>** da assembleia.

$$(138 - x) + x + (74 - x) + 32 = 172 \quad \rightarrow \quad 244 - x = 172 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 72}$$

Pronto, com o valor de "x", vamos complementar o diagrama.




Como o enunciado quer **o número de votantes a favor de A e contra B**, então queremos a seguinte região:




**Gabarito**: Letra A

**5. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) A prefeitura de certo município formou com seus funcionários 3 comissões para examinar assuntos diferentes. Sabe-se que:**

**- há funcionários que participam de mais de uma comissão.**
**- cada comissão é formada por 15 funcionários.**
**- em cada comissão há 5 funcionários que não participam de mais nenhuma outra comissão.**
**- há 2 funcionários que participam das três comissões.**

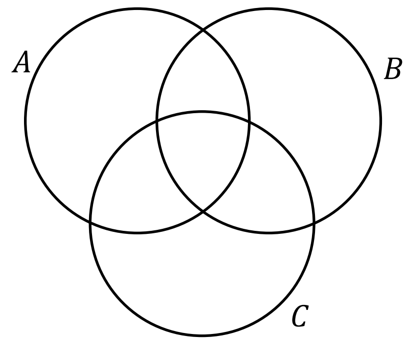
**O número de funcionários que participam de, pelo menos, uma comissão é igual a**

a) 29.
b) 31.
c) 36.
d) 39.
e) 43.

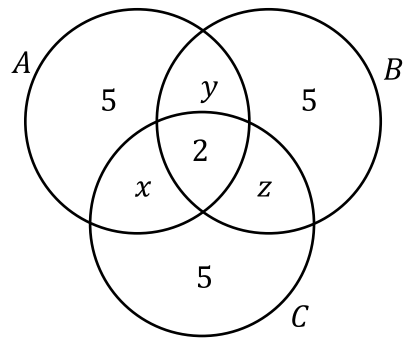
**Comentários:**

Para resolver essa questão, usaremos diagramas de Venn.

Como são três comissões, vamos chamá-las de "A", "B" e "C".




Agora, vamos inserir no diagrama algumas informações que a questão passou.




As informações que usamos foram: (i) **em cada comissão há 5 funcionários que não participam de mais nenhuma outra comissão;** e (ii) **há 2 funcionários que participam das três comissões.**

Nas intersecções duplas, colocamos as incógnitas "x", "y" e "z" pois nada conseguimos afirmar no momento sobre elas.

Agora, vamos usar a seguinte informação: **cada comissão é composta por 15 funcionários**. Com isso, podemos equacionar:

$$5 + x + y + 2 = 15 \quad \rightarrow \quad x + y = 8$$

$$5 + x + z + 2 = 15 \quad \rightarrow \quad x + z = 8$$
$$5 + z + y + 2 = 15 \quad \rightarrow \quad z + y = 8$$

Agora, vamos somar as três equações acima, membro a membro.

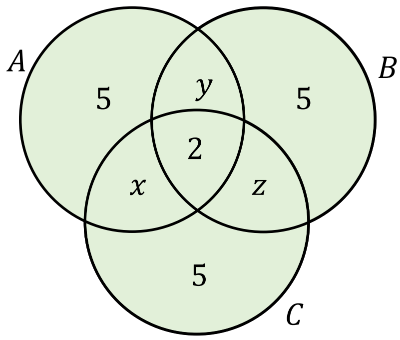
$$(x + y) + (x + z) + (z + y) = 24$$

$$2 \cdot (x + y + z) = 24$$

$$x + y + z = 12$$

*Professor, o que vamos fazer com essa soma?*

Galera, vamos lá! Observe que o enunciado pede o número de funcionários **que participam de <u>pelo menos uma</u> comissão**. Isso compreende tudo que está dentro dos diagramas.




Sendo assim, o que estamos procurando é:

$$T = 5 + 5 + 5 + 2 + x + y + z \quad \rightarrow \quad T = 17 + x + y + z$$

Podemos usar a soma "$x + y + z$" que determinamos anteriormente.

$$T = 17 + 12 \quad \rightarrow \quad \boxed{T = 29}$$

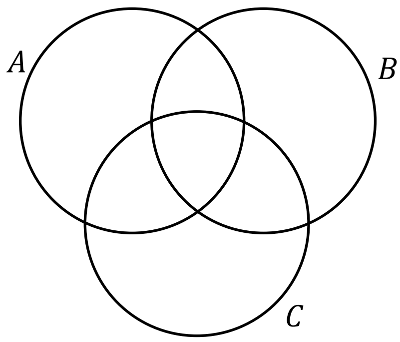
**Gabarito:** Letra A

**6. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Uma empresa disponibilizou 3 cursos de aperfeiçoamento para seus funcionários: o Curso A, o Curso B e o Curso C. Como o horário permitia, cada funcionário poderia se matricular em mais de um curso. Terminado o prazo de matrículas, verificou-se que 8 funcionários se matricularam no curso A, 10 no curso B e 12 no curso C. Havia 4 funcionários matriculados nos cursos A e B, 4 funcionários nos cursos B e C e, também, 4 nos cursos A e C. Sabe-se ainda que há 1 único funcionário matriculado apenas no curso A. O número de funcionários que estão matriculados em ao menos 1 curso é**

a) 19.
b) 21.
c) 23.
d) 27.
e) 30.

**Comentários:**

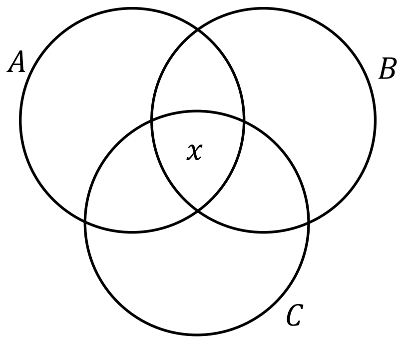
Vamos resolver esse exercício usando apenas **os Diagramas de Venn**! O primeiro passo é desenhá-los.




Nesse momento, devemos inserir as informações que possuímos. Ressalto que **essas informações <u>não</u> podem ser colocadas de qualquer forma no diagrama**. Existe uma ordem que deve ser observada! Começamos inserindo a quantidade referente à intersecção tripla, depois colocamos aquelas referentes às intersecções duplas e, por fim, aquelas referentes aos conjuntos isoladamente.

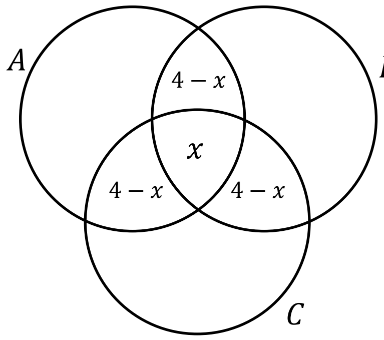
*Professor, o enunciado não falou quantos alunos se matricularam nos três cursos!*

Então vamos chamar essa quantidade de “x”.

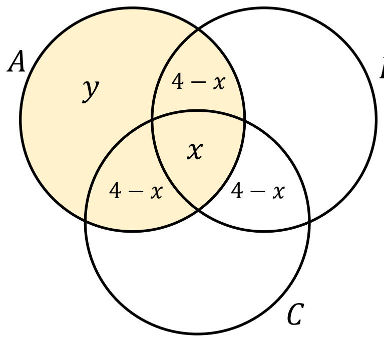



Agora, vamos para as **intersecções <u>duplas</u>**. O enunciado nos disse que:
- 4 funcionários matriculados nos cursos A e B;
- 4 funcionários nos cursos B e C;
- 4 funcionários nos cursos A e C.

No diagrama, ficamos:



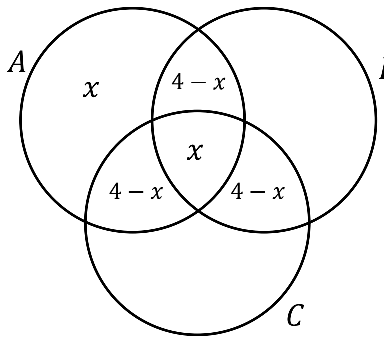

Por fim, vamos analisar as informações sobre cada conjunto. Esse momento é mais delicado! Note que devemos ter 8 funcionários em A. No nosso desenho até agora, temos:




Queremos determinar o "y" para preencher o diagrama. Devemos somar tudo dentro de A e igualar a 8, pois **A deve ter 8 funcionários matriculados** (conforme informado na questão).

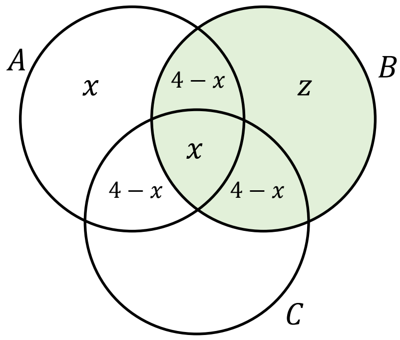
$$(4 - x) + x + (4 - x) + y = 8 \quad \rightarrow \quad y = x$$

Com isso:



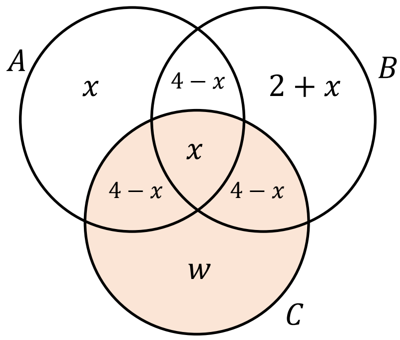

Vamos seguir esse mesmo raciocínio para as demais regiões que ainda faltam.

**- 10 funcionários no curso B:**



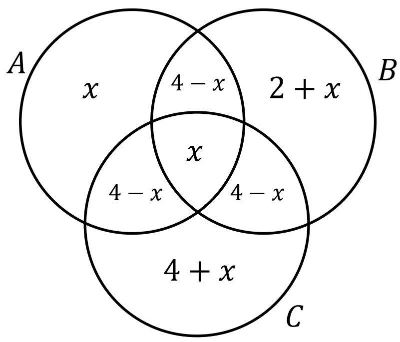

$$(4-x)+x+(4-x)+z=10 \quad \rightarrow \quad z=2+x$$

**- 12 funcionários no curso C:**



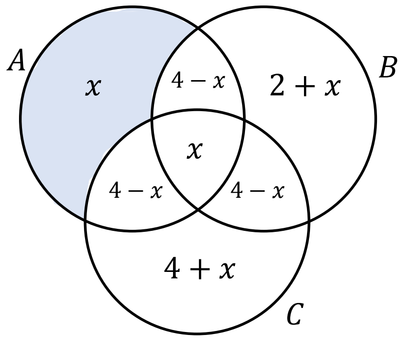

$$(4-x)+x+(4-x)+w=12 \quad \rightarrow \quad w=4+x$$

Pronto! Temos nosso diagrama esquematizado e preenchido!




Agora vem uma informação superimportante: **há 1 único funcionário matriculado apenas no curso A.**

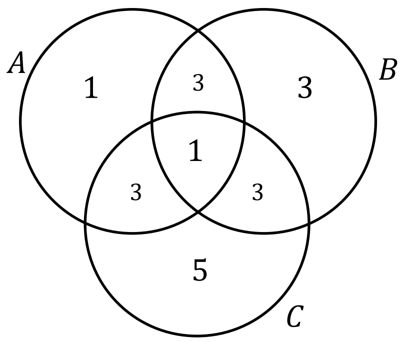
Qual região do diagrama representa exatamente esse grupo?




Logo,

$$x = 1$$

Com o valor de "x", podemos usá-lo em todo diagrama.




Como a questão pede o número de funcionários matriculados **em <u>pelo menos um</u> curso**, basicamente queremos a soma dos valores em todas as regiões.

$$T = 1 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3 + 5 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{T = 19}}$$

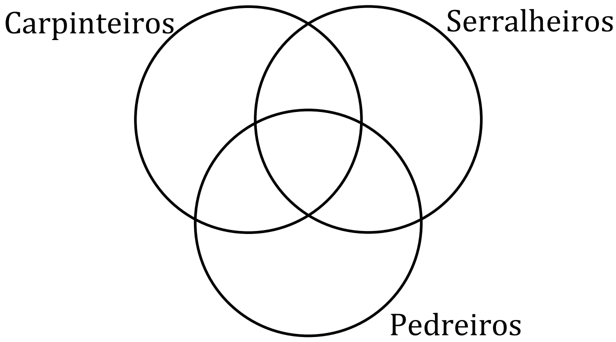
**Gabarito**: Letra A

## FCC

**7. (FCC/TCE-SP/2015) Em um grupo de 33 operários da construção civil há serralheiros, carpinteiros e pedreiros. Alguns deles exercem mais de uma dessas funções quando necessário. Nesse grupo não há serralheiro que também não seja pedreiro, e 5 dos serralheiros também são carpinteiros. Os carpinteiros que são pedreiros, também são serralheiros. São 12 os serralheiros que não são carpinteiros. Os demais operários exercem apenas uma dessas funções. Com essas informações é possível determinar que o número de operários que exercem mais de uma função supera o número daqueles que exercem apenas uma função em**

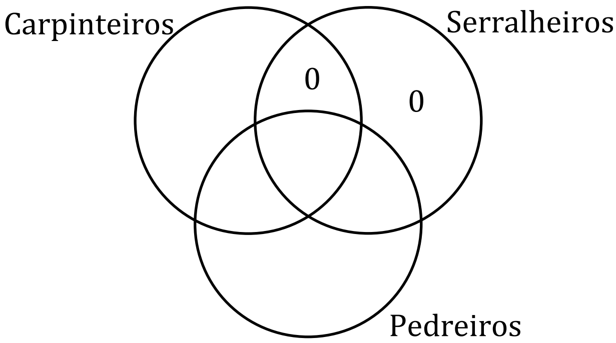
A) 3.
B) 4.
C) 1.
D) 2.
E) 5.

**Comentários:**
*Eita! Quanta informação!* Para nos ajudar, vamos esquematizar esses três conjuntos.



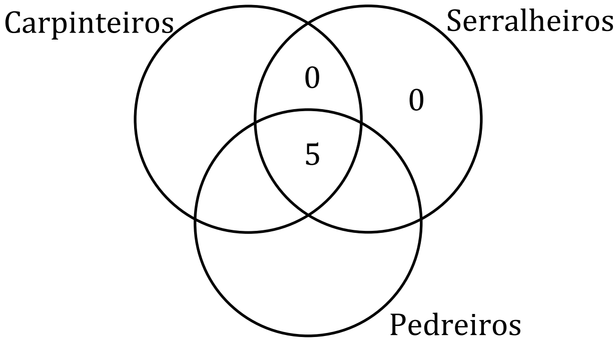

Agora, vamos inserir as informações que o enunciado passou.

- Nesse grupo não há serralheiro que também não seja pedreiro.



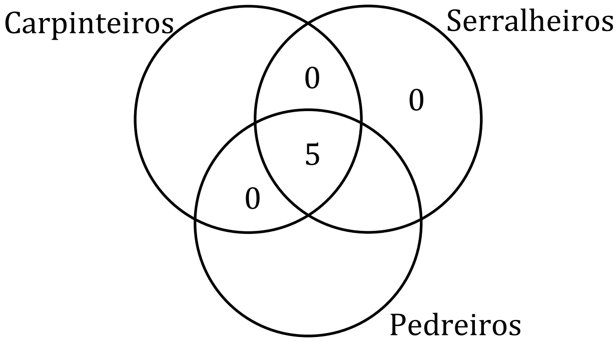

Ora, veja que com essa informação podemos garantir que **não há operários que seja apenas serralheiro ou que seja serralheiro e carpinteiro**. Por isso, colocamos os "0" nas duas regiões.

- 5 dos serralheiros também são carpinteiros.



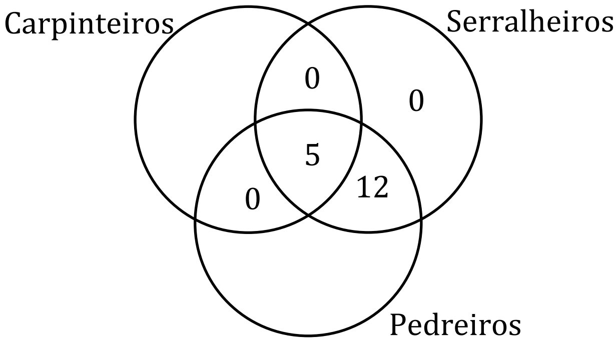

Como serralheiro também é pedreiro (da informação anterior), então **esses "5" estão justamente na intersecção dos três conjuntos**.

- Os carpinteiros que são pedreiros, também são serralheiros.

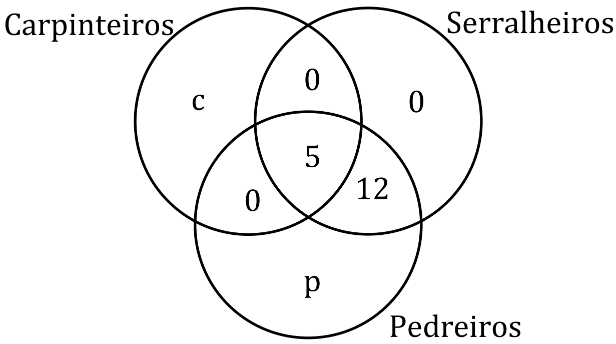



Essa informação nos permite concluir que **não existe carpinteiro e pedreiro, apenas**. Com isso, colocamos um "0" na região que representa esses operários.

- São 12 os serralheiros que não são carpinteiros.




- Os demais operários exercem apenas uma dessas funções.




Como **temos um total de 33 operários**, podemos escrever:

$$c + p + 0 + 0 + 0 + 5 + 12 = 33 \quad \rightarrow \quad c + p = 16$$

Logo, **o número de operários que exercem apenas uma função é 16**. Como **17 (5+12) exercem mais de uma**, então a diferença procurada é: $dif = 17 - 16 \quad \rightarrow \quad dif = 1$

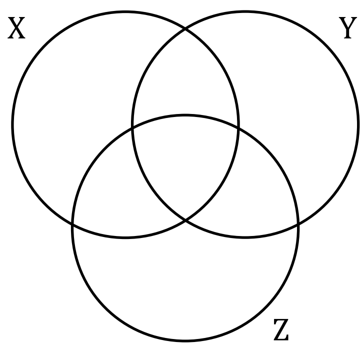
**Gabarito:** LETRA C.

**8. (FCC/SEFAZ-RJ/2014) Em uma grande empresa, 50% dos empregados são assinantes da revista X, 40% são assinantes da revista Y e 60% são assinantes da revista Z. Sabe-se que 20% dos empregados assinam as revistas X e Y, 30% assinam as revistas X e Z, 20% assinam as revistas Y e Z e 10% não assinam nenhuma das revistas. Considerando que existam somente as revistas X, Y e Z, obtém-se que a porcentagem dos empregados que assinam mais que uma revista é igual a**

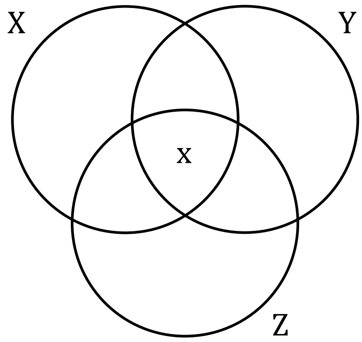
A) 40%
B) 60%
C) 50%
D) 70%
E) 80%

**Comentários:**

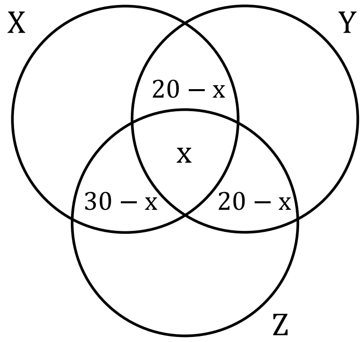
Vamos esquematizar esses conjuntos.



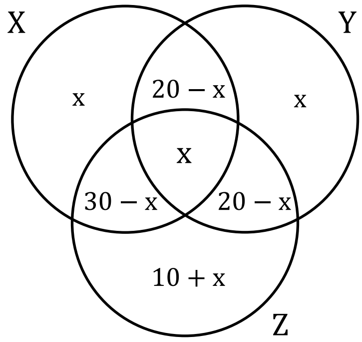
Em situações assim, devemos começar sempre pela **intersecção dos *três* conjuntos**. Como o enunciado não falou nada a esse respeito, vamos chamar essa quantidade de "x".



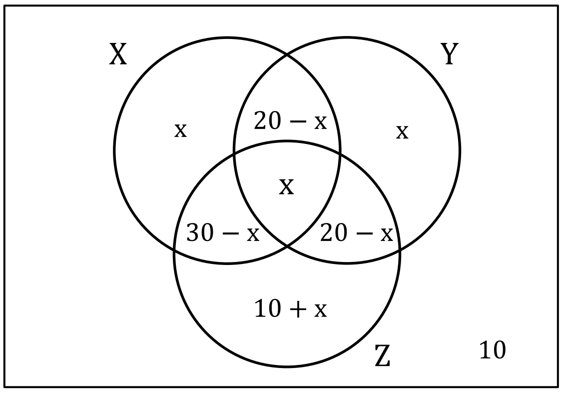

- 20% dos empregados assinam as revistas **X e Y**, 30% assinam as revistas **X e Z**, 20% assinam as revistas **Y e Z**. Colocando essas informações nos conjuntos, ficamos com:




- Além disso, **50% dos empregados são assinantes da revista X**, **40% são assinantes da revista Y** e **60% são assinantes da revista Z**.




- Por fim, **10% não assinam nenhuma das revistas**.

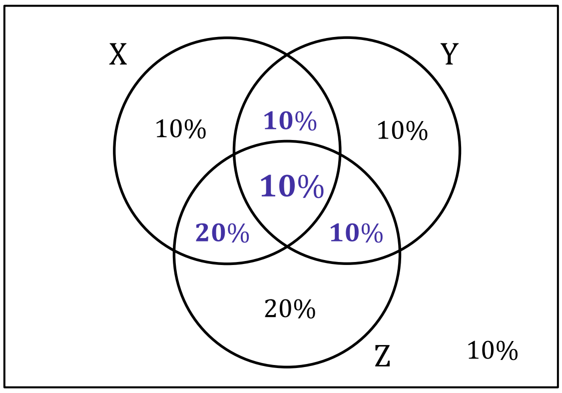



A soma de todas as regiões **deve totalizar os 100% dos funcionários**. Sendo assim,

$$x + x + (10 + x) + (20 - x) + (20 - x) + (30 - x) + x + 10 = 100$$

$$x + 90 = 100 \quad \rightarrow \quad x = 10\%$$

Vamos substituir o "x" no esquema e destacar a região formada por aqueles que leem mais de uma revista.




Assim, $10\% + 10\% + 10\% + 20\% =$ **$50\%$ dos funcionários leem mais de uma revista**.

**Gabarito:** LETRA C.

**9. (FCC/TRF-3/2014) Em uma construtora, há pelo menos um eletricista que também é marceneiro e há pelo menos um eletricista que também é pedreiro. Nessa construtora, qualquer eletricista é também marceneiro ou pedreiro, mas não ambos. Ao todo são 9 eletricistas na empresa e, dentre esses, são em maior número aqueles eletricistas que são também marceneiros. Há outros 24 funcionários que não são eletricistas. Desses, 15 são marceneiros e 13 são pedreiros. Nessa situação, o maior número de funcionários que podem atuar como marceneiros é igual a**

A) 33.

B) 19.

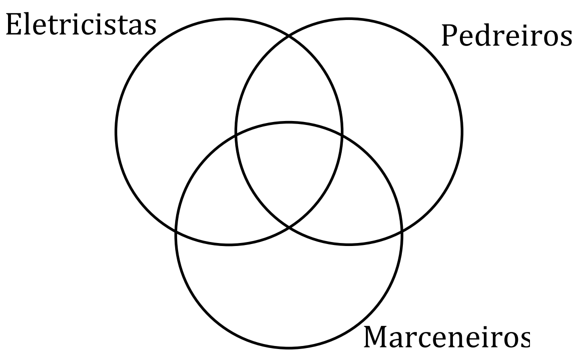
C) 24.

D) 15.

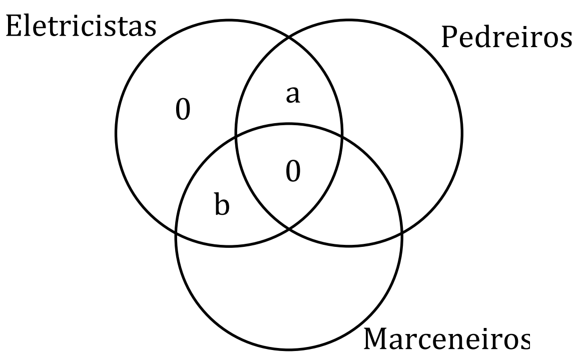
E) 23.

**Comentários:**

Questão para treinarmos os diagramas de Venn.

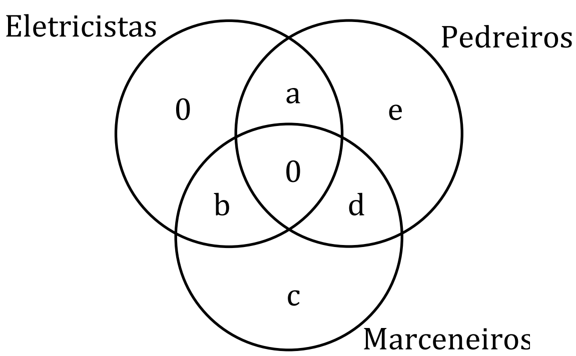



- Qualquer eletricista é também marceneiro ou pedreiro, **mas não ambos**.




- Ao todo são **9 eletricistas na empresa** e, dentre esses, são em maior número aqueles eletricistas que são também marceneiros: $a + b = 9 \qquad b > a \qquad (1)$

- Há outros **24 funcionários que <u>não</u> são eletricistas**.



$$c + d + e = 24 \quad (2)$$

- Desses (dos 24 que não são eletricistas), **15 são marceneiros** e **13 são pedreiros**.

$$c + d = 15 \quad (3)$$

$$d + e = 13 \quad (4)$$

Usando a equação (3) em (2):

$$15 + e = 24 \quad \rightarrow \quad e = 9$$

Usando a equação (4) em (2):

$$13 + c = 24 \quad \rightarrow \quad c = 11$$

Com os valores de "e" e "c" determinados, podemos encontrar "d".

$$11 + d + 9 = 24 \quad \rightarrow \quad d = 4$$

Queremos **o número <u>máximo</u> de marceneiros**. Quando olhamos para o diagrama, vemos que:

$$\text{Marceneiros} = \text{b} + \text{d} + \text{c}$$

Substituindo "d" e "c".

$$\text{Marceneiros} = \text{b} + 4 + 11 \quad \rightarrow \quad \text{Marceneiros} = \text{b} + 15$$

Note que para o número de marceneiros ser máximo, **"b" deve assumir o maior valor possível**. Lembre-se:

$$\text{a} + \text{b} = 9$$

Com "a" deve ser pelo menos um (já que existe **pelo menos um eletricista que é pedreiro**), então o valor máximo para "b" é 8. Sendo assim,

$$\text{Marceneiros} = 8 + 15 \quad \rightarrow \quad \text{Marceneiros} = 23$$

**Gabarito:** LETRA E.

## CEBRASPE

**10. (CESPE/FUNPRESP-EXE/2022) A seguir, são apresentadas informações obtidas a partir de uma pesquisa realizada com 1.000 pessoas.**

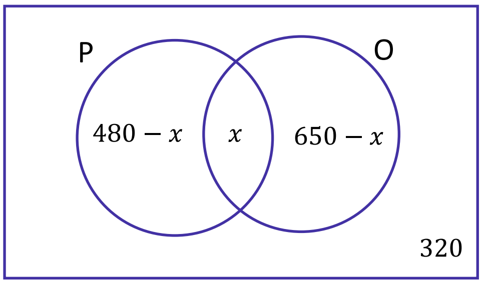
**- 480 possuem plano de previdência privada;**
**- 650 possuem aplicações em outros tipos de produtos financeiros;**

**- 320 não possuem aplicação em nenhum produto financeiro.**

**Com base nessa situação hipotética, julgue o item seguinte.**

Há mais pessoas que não possuem aplicações em nenhum produto financeiro que pessoas que possuem simultaneamente plano de previdência privada e aplicações em outros produtos financeiros.

**Comentários:**
Vamos desenhar os diagramas, moçada!




Para a compreensão do diagrama, considere "P" o conjunto formado por aquelas pessoas que possuem plano de **previdência privado**. Por sua vez, "O" é o conjunto formado por aquelas pessoas que possuem aplicação em **outros** tipos de produtos financeiros. Além disso, observe que:

1) "x" representa a quantidade de pessoas que possuem **tanto a previdência privada quanto outros tipos de produto financeiro**.

2) Se **480** é o total de elementos do conjunto "P", então podemos concluir que "$480 - x$" é o número de pessoas que possuem **apenas a previdência privada**.

3) Da mesma forma, se 650 é o total de elementos do conjunto "O", então podemos concluir que "$650 - x$" é o número de pessoas que possuem **apenas outros tipos de produtos financeiros**.

4) Por fim, temos 320 "fora" dos dois conjuntos, indicando quantas pessoas **não possuem nenhuma das aplicações financeiras**.

A pesquisa foi realizada com **1.000 pessoas**. Sendo assim, quando somamos cada uma das regiões do diagrama que desenhamos, devemos obter **exatamente** esse número. Logo,

$$(480 - x) + x + (650 - x) + 320 = 1000$$

$$1450 - x = 1000$$

$$\boxed{x = 450}$$

Pronto, 450 é o número de pessoas que aplicam **tanto na previdência privada quanto em outros produtos financeiros**.

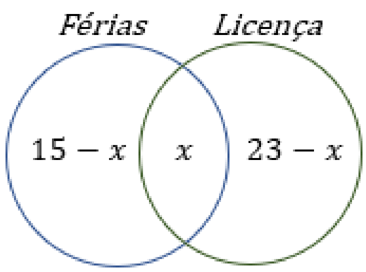
O item diz que a quantidade de pessoas que **não** possuem aplicações em **nenhum** produto (320) **é maior** que a quantidade de pessoas que possuem **simultaneamente** os dois produtos (450).

Com isso, podemos concluir que **tal afirmação está equivocada**, uma vez que se tem 450 pessoas que possuem os dois produtos, enquanto apenas 320 **não usam nenhum dos dois**.

**Gabarito:** ERRADO.

**11. (CESPE/ME/2020) O setor de gestão de pessoas de determinada empresa realiza regularmente a análise de pedidos de férias e de licenças dos seus funcionários. Os pedidos são feitos em processos, em que o funcionário solicita apenas férias, apenas licença ou ambos (férias e licença). Em determinado dia, 30 processos foram analisados, nos quais constavam 15 pedidos de férias e 23 pedidos de licenças. Com base nessa situação hipotética, julgue o item que se segue. A quantidade de processos analisados nesse dia que eram referentes apenas a pedido de férias é igual a 8.**

**Comentários:**
É uma questão típica de Diagrama de Venn. Nesses casos, a primeira informação que devemos procurar é **a quantidade de elementos na intersecção dos conjuntos**, nesse caso, quantas pessoas pediram **férias e licença, simultaneamente**. Como a questão não informou esse valor, suponha que seja $x$. O diagrama, portanto, é o seguinte:




$15 - x$ representa a quantidade de pessoas que pediram **APENAS férias**. $23 - x$ representa a quantidade de pessoas que pediram **APENAS licença**. A questão informou que **o total de processos analisados foram 30**. Logo, a soma dos valores discriminados acima deve ser 30.

$$(15 - x) + x + (23 - x) = 30 \quad \rightarrow \quad 38 - x = 30 \quad \rightarrow \quad x = 8$$

Note que **8 é o número de pessoas que tiraram férias e pediram licença**. Para descobrir o número de processos analisados referentes **apenas a pedido de férias**, devemos pegar **o total de pedidos de férias e subtrair o valor de processos que pediram férias e licença**, simultaneamente.

$$SÓ\ FERIAS = 15 - x = 15 - 8 = 7$$

**7 pessoas fizeram APENAS o pedido de férias**.

**Gabarito:** ERRADO.

**12. (CESPE/PREF. B dos COQUEIROS/2020) Em uma pesquisa feita com um grupo de 100 turistas que visitavam Aracaju, verificou-se que todos eles tinham visitado pelo menos duas das seguintes praias: Atalaia, Aruana e da Costa. A tabela a seguir mostra quantos desses turistas visitaram as referidas praias.**

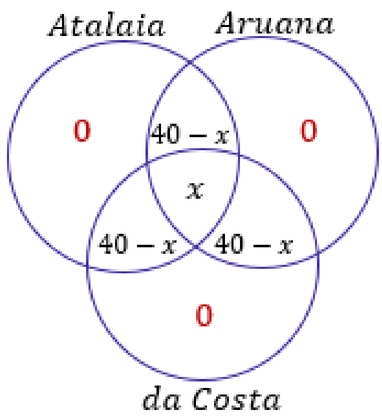
| Praias Visitadas | Número de Turistas |
|---|---|
| Atalaia e Aruana | **40** |
| Atalaia e da Costa | **40** |
| Aruana e da Costa | **40** |

**Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.**

**I. Menos de 40 turistas visitaram a praia de Atalaia.**
**II. Nenhum dos turistas participantes da pesquisa visitou apenas uma das praias citadas.**
**III. Nenhum dos turistas participantes da pesquisa visitou todas as três praias citadas.**

**Assinale a opção correta.**
A) Apenas o item II está certo.
B) Apenas o item III está certo.
C) Apenas os itens I e II estão certos.
D) Apenas os itens I e III estão certos.
E) Todos os itens estão certos.

**Comentários:**
Não esqueça que, nesse tipo de questão, **a primeira coisa** que você deve se perguntar é: *qual a quantidade de elementos na* ***intersecção dos três conjuntos em questão****?* Se **não** for fornecido esse valor, você deve chamá-lo de $x$. Observe como fica o diagrama para essa questão.




Observe que também preenchemos $40 - x$ nas intersecções dois a dois. Quando o enunciado diz que 40 pessoas visitaram a praia A e a praia B, ele **não está dizendo que 40 visitaram apenas a praia A e a praia B. Dentro dessas 40 pessoas pode ter tido 10 que também foram para a praia C**.

Se estamos nos perguntando a quantidade de pessoas que visitaram **APENAS as praias A e B**, devemos subtrair a quantidade de pessoas que **além das praias A e B, também visitou a C**. Ficou claro, pessoal?!

Uma informação muito importante dada no enunciado é que: **todos os turistas tinham visitado pelo menos duas das praias**. Com isso, foi possível colocar o 0, indicando que **não houve quem visitou uma única praia**. Com o nosso diagrama montado e sabendo que **100 turistas visitaram as praias**, sabemos que ao somar os elementos discriminados acima, devemos obter exatamente o valor total de turistas.

$$(40 - x) + (40 - x) + (40 - x) + x = 100$$

$$120 - 2x = 100 \quad \rightarrow \quad 2x = 20 \quad \rightarrow \quad x = 10$$

Esse valor encontrado indica que **10 pessoas visitaram as três praias**! Com isso, **30 pessoas visitaram APENAS Atalaia e Aruana**, **30 pessoas visitaram APENAS Aruana e da Costa** e **30 pessoas visitaram APENAS Atalaia e da Costa**. Podemos agora analisar os itens.

I. Menos de 40 turistas visitaram a praia de Atalaia.
**ERRADO.** Vimos que 30 pessoas visitaram Atalaia e Aruana, outras 30 visitaram Atalaia e da Costa e 10 pessoas visitaram as 3 praias. Com isso, $30 + 30 + 10 =$ **70 pessoas visitaram a praia de Atalaia**.

II. Nenhum dos turistas participantes da pesquisa visitou apenas uma das praias citadas.
**CORRETO.** Essa informação está no próprio enunciado, quando ele diz que **os turistas visitaram pelo menos duas das praias.**

III. Nenhum dos turistas participantes da pesquisa visitou todas as três praias citadas.
**ERRADO.** De acordo com o que desenvolvemos, **10 pessoas visitaram as três praias**.

**Gabarito:** LETRA A.

## CESGRANRIO

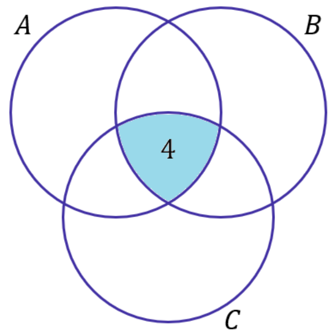
**13. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Um grupo de fornecedores foi dividido em três conjuntos, de acordo com o atendimento a três critérios de qualidade, denominados critérios A, B e C. Após uma análise, observou-se que apenas quatro empresas atendem aos três critérios; seis empresas atendem aos critérios B e C; dez empresas atendem ao critério C, mas não atendem ao A; doze empresas atendem ao critério B, mas não atendem ao A, e vinte e três empresas atendem a, pelo menos, um dos critérios A ou B. Considerando-se que nesse grupo de fornecedores não existe empresa que não atenda a, pelo menos, um dos três critérios, o número total de empresas desse grupo, isto é, $n(AUBUC)$, é igual a**

a) 21
b) 25
c) 27
d) 29
e) 31

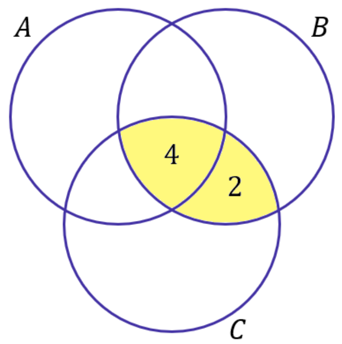
**Comentários:**

Galera, um jeito legal de resolver esse exercício é **por meio dos diagramas** que vimos ao longo da aula. Pegamos cada uma das informações passadas no enunciado e tentamos encaixá-las no desenho. Veja.

- **quatro empresas** atendem aos três critérios.

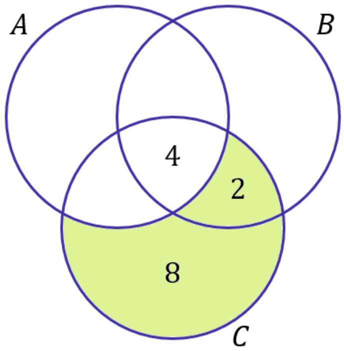



- **seis empresas** atendem aos critérios B e C.



Devemos perceber que a informação não nos diz que as empresas atendem APENAS aos critérios B e C. Dessa forma, **uma empresa que atende aos três critérios está inserida nessa conta**. Por isso, para completar os seis, adicionamos apenas mais duas empresas na região de intersecção dos dois critérios.

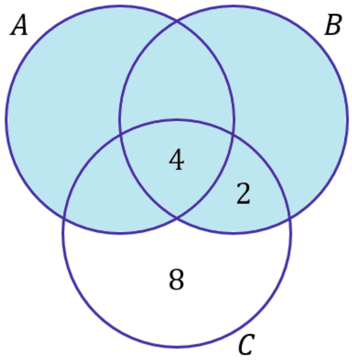
- dez empresas atendem ao critério C, mas não atendem a $A$.




A região verde representa as empresas que atendem ao critério C, mas não atendem ao $A$. Nessa parte do diagrama, **já tínhamos contabilizado duas empresas** no item anterior. Portanto, faltou apenas oito empresas que contabilizamos na região das empresas que atendem apenas ao critério C.

- vinte e três empresas atendem a, **pelo menos**, um dos critérios A ou B.

Essa informação é, talvez, a mais importante. Na prática, o enunciado está nos dizendo que toda a região marcada abaixo contabiliza **23 pessoas**:




Como sabemos que todas as empresas **cumprem ao menos um dos critérios**, então o total de empresas é a soma dessas 23 com as 8 que ficaram de fora (aquelas empresas que **apenas** atenderam ao critério C).

$$n(A \cup B \cup C) = 23 + 8 \quad \rightarrow \quad n(A \cup B \cup C) = 31$$

**Gabarito:** LETRA E.

**14. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) Os conjuntos P e Q têm p e q elementos, respectivamente, com $p + q = 13$. Sabendo-se que a razão entre o número de subconjuntos de P e o número de subconjuntos de Q é 32, quanto vale o produto $pq$?**

a) 16
b) 32
c) 36
d) 42
e) 46

**Comentários:**

Na teoria, vimos que o número de subconjuntos depende da quantidade de elementos do conjunto principal. Por exemplo, **se um conjunto tem 3 elementos, então ele terá $2^3 = 8$ subconjuntos**. Lembre-se da fórmula:

$$nS_A = 2^{n(A)}$$

**$nS_A$ representa o número de subconjuntos de A** e **$n(A)$ é o número de elementos de A**. Como o conjunto P tem p elementos e o conjunto Q tem q, podemos escrever:

$$nS_P = 2^{n(P)} \quad \rightarrow \quad nS_P = 2^p$$

$$nS_Q = 2^{n(Q)} \quad \rightarrow \quad nS_Q = 2^q$$

O enunciado diz que a razão entre o número de subconjuntos de P e o número de subconjuntos de Q é 32. Assim,

$$\frac{nS_P}{nS_Q} = \frac{2^p}{2^q} = 32 \quad \rightarrow \quad 2^{p-q} = 32 \quad \rightarrow \quad 2^{p-q} = 2^5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p - q = 5}$$

Veja que o enunciado também informou que $\boldsymbol{p + q = 13}$. Temos duas equações e duas incógnitas. Podemos montar um sistema de equações.

$$\begin{cases} p + q = 13 & (1) \\ p - q = 5 & (2) \end{cases}$$

Podemos **isolar "p"** na equação (2):

$$p = q + 5$$

Agora, devemos substituir p na equação (1).

$$(q+5)+q=13 \quad \rightarrow \quad 2q+5=13 \quad \rightarrow \quad 2q=8 \quad \rightarrow \quad q=4$$

Encontramos o valor de q. Agora, podemos substituir em $p = q + 5$.

$$p = 4+5 \quad \rightarrow \quad p = 9$$

Com os valores de p e q determinados, podemos encontrar o produto.

$$pq = 4 \cdot 9 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{pq = 36}$$

**Gabarito:** LETRA C.

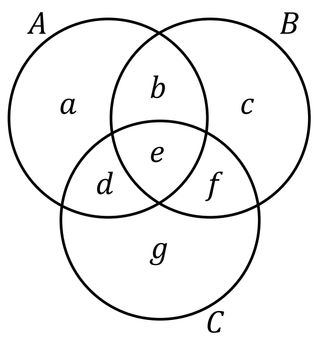
## Vunesp

**15. (VUNESP/TJ-SP/2019) São três os conjuntos. A totalidade de elementos que estão nesses três conjuntos é 42. A totalidade de elementos que estão em dois, e apenas dois desses conjuntos, é 42. A totalidade de elementos que estão em um, e apenas um desses conjuntos é 42. Sabendo que em todas as seções e interseções desses três conjuntos há pelo menos um elemento, e que não há seção e nem mesmo interseção com um mesmo número de elementos, então o maior número possível para o total de elementos de um desses três conjuntos é**

A) 132.
B) 120.
C) 110.
D) 124.
E) 118.

**Comentários:**

Primeiro vamos esquematizar esses conjuntos.




Chamamos as quantidades em cada uma das regiões do diagrama de uma letra do alfabeto. Agora, vamos analisar as informações do enunciado.

- **A totalidade de elementos que estão nesses três conjuntos é 42.**

$$e = 42 \quad (1)$$

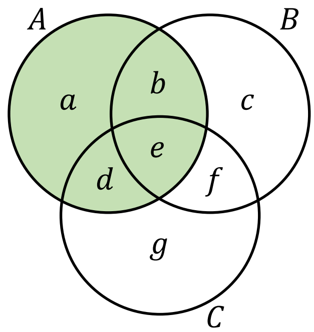
- **A totalidade de elementos que estão em dois, e apenas dois desses conjuntos, é 42.**

$$b + d + f = 42 \quad (2)$$

- **A totalidade de elementos que estão em um, e apenas um desses conjuntos é 42.**

$$a + c + g = 42 \quad (3)$$

Queremos saber **a maior quantidade possível de elementos de um desses três conjuntos**. Note que o problema é bem simétrico, logo não importa qual deles vamos pegar para realizar essa conta.




Escolhendo o conjunto destacado acima, podemos escrever:

$$n(A) = a + b + d + e$$

Sabemos que $e = 42$, podemos substituir.

$$n(A) = a + b + d + 42$$

Da equação (2),

$$b + d = 42 - f$$

Substituindo em $n(A)$,

$$n(A) = a + (42 - f) + 42 \quad \rightarrow \quad n(A) = 84 + a - f$$

Da equação (3),

$$a = 42 - c - g$$

Substituindo em $n(A)$,

$$n(A) = 84 + (42 - c - g) - f \quad \rightarrow \quad n(A) = 126 - c - g - f$$

Observe que para **n(A) ser máximo**, **"c", "g" e "f" devem ser <u>os menores possíveis</u>**. Para chegar nos valores desses parâmetros, devemos ter em mente duas informações:

- em todas as seções e interseções desses três conjuntos **há pelo menos um elemento**;
- não há seção e nem mesmo interseção **com um mesmo número de elementos.**

Assim, os menores valores possíveis que "c", "g" e "f" podem assumir são:

$$c = 1,\, g = 2 \text{ e } f = 3$$

Substituindo,

$$n(A) = 126 - 1 - 2 - 3 \quad \rightarrow \quad n(A) = 120$$

*Professor, não poderíamos ter $g = 1, c = 3$ e $f = 2$?*

Podemos sim, moçada! No entanto, como o problema é simétrico, não faz diferença a letra que vamos chamar cada um dos valores. Precisamos apenas perceber que **"1", "2" e "3" são os menores valores possíveis que "c", "g" e "f" podem assumir.** Agora saber qual deles é qual é indiferente, pois o resultado será sempre o mesmo. Faça o teste!

**Gabarito:** LETRA B.

# LISTA DE QUESTÕES

## Introdução à Teoria dos Conjuntos

### FGV

**1. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Na matemática, as coleções são chamadas de conjuntos. Se uma coleção tem apenas um elemento, ela é dita um conjunto unitário. Um exemplo de conjunto unitário é a coleção formada pelos números que são:**

a) ao mesmo tempo, divisores de 4 e 9;
b) divisores de 4;
c) divisores de 9;
d) maiores que 4 e menores que 9;
e) formados pelos algarismos 4 e 9.

**2. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Conjunto é o nome dado, na Matemática, a qualquer coleção. Entretanto, uma coleção pode não ter elementos. Nesse caso, diz-se que esse é um conjunto vazio. Um exemplo de conjunto vazio é a coleção:**

a) de meses do ano que começam pela letra J;
b) de dias da semana que começam pela letra T;
c) dos números que são, ao mesmo tempo, pares e ímpares;
d) dos números menores que 10 e maiores que 6;
e) das pessoas brasileiras que são casadas.

**3. (FGV/CODEBA/2010) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 2, 4\}$ dois conjuntos. Com relação aos conjuntos A e B, analise as afirmativas a seguir:**

**I.** $B \subset A$
**II.** $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
**III.** $A \cap B = \{0, 2\}$

**Está(ão) correta(s) somente**

a) I.
b) II.
c) III.
d) I e II.
e) II e III.

# Outras Bancas

**4. (FUNDATEC/PREF. TRAMANDAÍ/2021) Considerando dois conjuntos, A e B, sendo: A = {2,4,6,8,10,12} e B = {2,4,6,8,10,12,14,16}, assinale a alternativa correta.**

A) O conjunto A contém o conjunto B.

B) O conjunto A está contido no conjunto B.

C) O conjunto B está contido no conjunto A.

D) O conjunto B pertence ao conjunto A.

**5. (ANPEC/2021) Seja R o conjunto dos números reais. Dado um subconjunto finito $\boldsymbol{A \subseteq R}$, denote por $\boldsymbol{card(A)}$ a sua cardinalidade (ou seja, o número de elementos em A). Classifique a seguinte item como certo ou errado:**

Dados dois subconjuntos finitos A, $B \subseteq \mathbb{R}$, se $B \subseteq A$, então $card(B) \leq card(A)$.

**6. (QUADRIX/CRA-PR/2022) Considerando o conjunto da frutas F, o conjunto das comidas doces D e o conjunto dos tipos de manga M, julgue o item.**

$$M \subset F$$

**7. (AVANÇA-SP/PREF. AMERICANA/2023) Das alternativas abaixo, qual apresenta um conjunto vazio:**

A) P = {4}.

B) Q = {5,2,9}.

C) R = {0,1;0,6}.

D) S = {0,34; - 0,2}.

E) T = { }.

# Gabarito

1. LETRA A
2. LETRA C
3. LETRA E
4. LETRA B
5. CERTO
6. CERTO
7. LETRA E

# Lista de Questões

## União, Intersecção, Complementar e Diferença

### Outras Bancas

**1. (IDIB/GOINFRA/2022) Seja o conjunto A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} e B = {2, 4, 6, 8}. Determine a quantidade de subconjuntos do conjunto C= (A ∩ B) ∪ {1}.**

A) 32

B) 26

C) 30

D) 64

E) 2

**2. (SELECON/PREF. SÃO GONÇALO/2022) Sejam A e B conjuntos definidos da seguinte maneira:**

**A = {pessoas que moram em São Gonçalo}**
**B= {pessoas que trabalham em Niterói}**

**O conjunto A – (A – B) representa o conjunto cujos elementos são pessoas que:**

A) moram em São Gonçalo e trabalham em Niterói

B) moram em Niterói e trabalham em São Gonçalo

C) moram em São Gonçalo e não trabalham em Niterói

D) moram em Niterói e não trabalham em São Gonçalo

**3. (FUNDATEC/BM-RS/2022) Considere os conjuntos:**

$$\boldsymbol{A = \{1, 2, 3, 18\}}$$
$$\boldsymbol{B = \{1, 2, 3, \ldots, 18\} = \{x \in N \;/\; 0 < x < 19\}}$$

**É possível afirmar que $A \cap B$ é dado por:**

A) $A$

B) $B$

C) $A \cup B$

D) $A \backslash B$

E) $B \backslash A$

**4. (INST. CONSULPLAN/PREF. GONÇALVES/2022) Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 5, 6\}$ e $C = \{2, 5, 7, 9\}$. O conjunto $(A \cup B) - (B \cap C)$ é:**

A) $\{0, 1, 3, 4, 6\}$

B) $\{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
C) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
D) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

## FGV

**5. (FGV/SSP-AM/2022) Sobre dois conjuntos A e B sabe-se que:**

**- A união de A e B tem 130 elementos.**
**- A diferença B – A tem 50 elementos.**
**- A diferença A – B tem 60 elementos.**

**Sendo x o número de elementos de A e y o número de elementos de B, o valor de x + y é igual a**
A) 110.
B) 120.
C) 130.
D) 140.
E) 150.

## CEBRASPE

**6. (CESPE/COGE-CE/2019) Segundo o portal cearatransparente.ce.gov.br, em 2018, dos 184 municípios do estado do Ceará, 4 celebraram exatamente 1 convênio com o governo estadual, 22 celebraram exatamente 2 convênios com o governo estadual, e 156 celebraram 3 ou mais convênios com o governo estadual. De acordo com o texto, se, para cada $j = 0, 1, 2, \ldots,$ $M_j$ for o conjunto dos municípios cearenses que celebraram, pelo menos, $j$ convênios com o governo estadual, então o conjunto dos municípios que não celebraram nenhum convênio com o governo do estado será representado pelo conjunto**
A) $M_0$
B) $M_1 - M_0$
C) $M_1 \cap M_0$
D) $M_0 - M_1$
E) $M_0 \cup M_1$

**7. (CESPE/TRF-1/2017) Em uma reunião de colegiado, após a aprovação de uma matéria polêmica pelo placar de 6 votos a favor e 5 contra, um dos 11 presentes fez a seguinte afirmação: "Basta um de nós mudar de ideia e a decisão será totalmente modificada." Considerando a situação apresentada e a proposição correspondente à afirmação feita, julgue o próximo item.**

Se A for o conjunto dos presentes que votaram a favor e B for o conjunto dos presentes que votaram contra, então o conjunto diferença A\B terá exatamente um elemento.

**8. (CESPE/INSS/2015) Julgue o item a seguir, relativos a raciocínio lógico e operações com conjuntos.**

Se $A$, $B$ e $C$ forem conjuntos quaisquer tais que $A, B \subset C$, então $(C \setminus A) \cap (A \cup B) = C \cap B$.

**(SUFRAMA/2014) Texto para as próximas questões**

**Para o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, se A for um subconjunto de Ω, indique por $S(A)$ a soma dos elementos de A e considere e $S(\emptyset) = 0$. Nesse sentido, julgue o item a seguir.**

**9. (CESPE/SUFRAMA/2014) Se A e B forem subconjuntos de Ω, tais que $A \subset B$, então $0 \leq S(A) \leq S(B) \leq 55$.**

**10. (CESPE/SUFRAMA/2014) Se $A \subset \Omega$, e se $\Omega \setminus A$ é o complementar de A em Ω, então $S(\Omega \setminus A) = S(\Omega) - S(A)$.**

# Gabarito

1. LETRA A
2. LETRA A
3. LETRA A
4. LETRA A
5. LETRA E
6. LETRA D
7. ERRADO
8. ERRADO
9. CERTO
10. CERTO

# LISTA DE QUESTÕES

## Princípio da Inclusão-Exclusão

### Outras Bancas

**1. (SELECON/PREF. SÃO GONÇALO/2022) Em uma empresa na qual trabalham 116 pessoas, sabe-se que:**

**- 72 têm ensino médio completo;**
**- 64 sabem usar o EXCEL;**
**- 35 têm ensino médio completo e sabem usar o EXCEL.**

**O número de funcionários dessa empresa que não têm ensino médio completo e não sabem usar o EXCEL é:**

A) 13
B) 14
C) 15
D) 16

**2. (AOCP/IP PREV/2022) Para conhecer a opinião em relação à possível aplicação de dois fundos de Previdência em um plano aberto de Previdência, identificados por A e B, uma Instituição Financeira aplicou um questionário entre seus conveniados e verificou que:**

**- 48% de seus conveniados gostariam que o Fundo de Previdência A fosse aplicado em seus planos;**
**- 35% de seus conveniados gostariam que o Fundo de Previdência B fosse aplicado em seus planos;**
**- 12% de seus conveniados gostariam que o Fundo de Previdência A e o Fundo de Previdência B fossem aplicados em seus planos.**

**Dessa forma, é correto afirmar que**

A) mais de 30% dos conveniados não responderam ao questionário ou não manifestaram interesse em qualquer um dos dois Fundos de Previdência.
B) o percentual de conveniados que gostariam que somente o Fundo de Previdência A fosse aplicado em seus planos foi de 23%.
C) 71 conveniados gostariam que pelo menos um dos dois Fundos de Previdência fosse aplicado em seus planos.
D) mais de 14 dos conveniados gostariam que somente o Fundo de Previdência B fosse aplicado em seus planos.

E) mais de 70% dos conveniados gostariam que pelo menos um dos dois Fundos de Previdência fosse aplicado em seus planos, A ou B ou ambos.

**3. (FUNDATEC/SEPOG-RS/2022) Em uma escola de informática, foram entrevistados 200 alunos. Com a entrevista, pode-se concluir que 61 alunos estudam Matemática, 55 estudam Programação e 50 estudam Raciocínio Lógico. Ainda, 20 alunos estudam Matemática e Programação, 23 estudam Raciocínio Lógico e Programação e 21 estudam Matemática e Raciocínio Lógico. E 12 alunos estudam as três disciplinas, Matemática, Raciocínio Lógico e Programação. Com base nessas informações, é possível concluir que:**
A) 86 alunos não estudam nenhuma das três disciplinas.
B) 60 alunos estudam apenas uma das três disciplinas.
C) 34 alunos não estudam nenhuma das três disciplinas.
D) 30 alunos estudam apenas duas disciplinas.
E) 23 alunos estudam apenas matemática.

## FGV

**4. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Em uma assembleia com 172 votantes, duas propostas independentes, A e B, foram colocadas em votação. Cada votante votou a favor ou contra cada uma das duas propostas. Sabe-se que 138 votaram a favor da proposta A, 74 votaram a favor da proposta B e 32 votaram contra as duas propostas. O número de votantes que votaram a favor da proposta A e contra a proposta B é**
a) 66.
b) 69.
c) 72.
d) 74.
e) 140.

**5. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) A prefeitura de certo município formou com seus funcionários 3 comissões para examinar assuntos diferentes. Sabe-se que:**

**- há funcionários que participam de mais de uma comissão.**
**- cada comissão é formada por 15 funcionários.**
**- em cada comissão há 5 funcionários que não participam de mais nenhuma outra comissão.**
**- há 2 funcionários que participam das três comissões.**

**O número de funcionários que participam de, pelo menos, uma comissão é igual a**
a) 29.
b) 31.
c) 36.
d) 39.

e) 43.

**6. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Uma empresa disponibilizou 3 cursos de aperfeiçoamento para seus funcionários: o Curso A, o Curso B e o Curso C. Como o horário permitia, cada funcionário poderia se matricular em mais de um curso. Terminado o prazo de matrículas, verificou-se que 8 funcionários se matricularam no curso A, 10 no curso B e 12 no curso C. Havia 4 funcionários matriculados nos cursos A e B, 4 funcionários nos cursos B e C e, também, 4 nos cursos A e C. Sabe-se ainda que há 1 único funcionário matriculado apenas no curso A. O número de funcionários que estão matriculados em ao menos 1 curso é**

a) 19.
b) 21.
c) 23.
d) 27.
e) 30.

# FCC

**7. (FCC/TCE-SP/2015) Em um grupo de 33 operários da construção civil há serralheiros, carpinteiros e pedreiros. Alguns deles exercem mais de uma dessas funções quando necessário. Nesse grupo não há serralheiro que também não seja pedreiro, e 5 dos serralheiros também são carpinteiros. Os carpinteiros que são pedreiros, também são serralheiros. São 12 os serralheiros que não são carpinteiros. Os demais operários exercem apenas uma dessas funções. Com essas informações é possível determinar que o número de operários que exercem mais de uma função supera o número daqueles que exercem apenas uma função em**

A) 3.
B) 4.
C) 1.
D) 2.
E) 5.

**8. (FCC/SEFAZ-RJ/2014) Em uma grande empresa, 50% dos empregados são assinantes da revista X, 40% são assinantes da revista Y e 60% são assinantes da revista Z. Sabe-se que 20% dos empregados assinam as revistas X e Y, 30% assinam as revistas X e Z, 20% assinam as revistas Y e Z e 10% não assinam nenhuma das revistas. Considerando que existam somente as revistas X, Y e Z, obtém-se que a porcentagem dos empregados que assinam mais que uma revista é igual a**

A) 40%
B) 60%
C) 50%
D) 70%
E) 80%

**9. (FCC/TRF-3/2014) Em uma construtora, há pelo menos um eletricista que também é marceneiro e há pelo menos um eletricista que também é pedreiro. Nessa construtora, qualquer eletricista é também marceneiro ou pedreiro, mas não ambos. Ao todo são 9 eletricistas na empresa e, dentre esses, são em maior número aqueles eletricistas que são também marceneiros. Há outros 24 funcionários que não são eletricistas. Desses, 15 são marceneiros e 13 são pedreiros. Nessa situação, o maior número de funcionários que podem atuar como marceneiros é igual a**

A) 33.

B) 19.

C) 24.

D) 15.

E) 23.

## CEBRASPE

**10. (CESPE/FUNPRESP-EXE/2022) A seguir, são apresentadas informações obtidas a partir de uma pesquisa realizada com 1.000 pessoas.**

**- 480 possuem plano de previdência privada;**
**- 650 possuem aplicações em outros tipos de produtos financeiros;**
**- 320 não possuem aplicação em nenhum produto financeiro.**

**Com base nessa situação hipotética, julgue o item seguinte.**

Há mais pessoas que não possuem aplicações em nenhum produto financeiro que pessoas que possuem simultaneamente plano de previdência privada e aplicações em outros produtos financeiros.

**11. (CESPE/ME/2020) O setor de gestão de pessoas de determinada empresa realiza regularmente a análise de pedidos de férias e de licenças dos seus funcionários. Os pedidos são feitos em processos, em que o funcionário solicita apenas férias, apenas licença ou ambos (férias e licença). Em determinado dia, 30 processos foram analisados, nos quais constavam 15 pedidos de férias e 23 pedidos de licenças. Com base nessa situação hipotética, julgue o item que se segue. A quantidade de processos analisados nesse dia que eram referentes apenas a pedido de férias é igual a 8.**

**12. (CESPE/PREF. B dos COQUEIROS/2020) Em uma pesquisa feita com um grupo de 100 turistas que visitavam Aracaju, verificou-se que todos eles tinham visitado pelo menos duas das seguintes praias: Atalaia, Aruana e da Costa. A tabela a seguir mostra quantos desses turistas visitaram as referidas praias.**

| Praias Visitadas | Número de Turistas |
|---|---|
| Atalaia e Aruana | **40** |

| | |
|---|---|
| Atalaia e da Costa | **40** |
| Aruana e da Costa | **40** |

**Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.**

**I. Menos de 40 turistas visitaram a praia de Atalaia.**
**II. Nenhum dos turistas participantes da pesquisa visitou apenas uma das praias citadas.**
**III. Nenhum dos turistas participantes da pesquisa visitou todas as três praias citadas.**

**Assinale a opção correta.**
A) Apenas o item II está certo.
B) Apenas o item III está certo.
C) Apenas os itens I e II estão certos.
D) Apenas os itens I e III estão certos.
E) Todos os itens estão certos.

## CESGRANRIO

**13. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Um grupo de fornecedores foi dividido em três conjuntos, de acordo com o atendimento a três critérios de qualidade, denominados critérios A, B e C. Após uma análise, observou-se que apenas quatro empresas atendem aos três critérios; seis empresas atendem aos critérios B e C; dez empresas atendem ao critério C, mas não atendem ao A; doze empresas atendem ao critério B, mas não atendem ao A, e vinte e três empresas atendem a, pelo menos, um dos critérios A ou B. Considerando-se que nesse grupo de fornecedores não existe empresa que não atenda a, pelo menos, um dos três critérios, o número total de empresas desse grupo, isto é, $n(AUBUC)$, é igual a**
a) 21
b) 25
c) 27
d) 29
e) 31

**14. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) Os conjuntos P e Q têm p e q elementos, respectivamente, com $p + q = 13$. Sabendo-se que a razão entre o número de subconjuntos de P e o número de subconjuntos de Q é 32, quanto vale o produto $pq$?**
a) 16
b) 32
c) 36
d) 42
e) 46

## Vunesp

**15. (VUNESP/TJ-SP/2019) São três os conjuntos. A totalidade de elementos que estão nesses três conjuntos é 42. A totalidade de elementos que estão em dois, e apenas dois desses conjuntos, é 42. A totalidade de elementos que estão em um, e apenas um desses conjuntos é 42. Sabendo que em todas as seções e interseções desses três conjuntos há pelo menos um elemento, e que não há seção e nem mesmo interseção com um mesmo número de elementos, então o maior número possível para o total de elementos de um desses três conjuntos é**

A) 132.

B) 120.

C) 110.

D) 124.

E) 118.

# Gabarito

1. LETRA C
2. LETRA E
3. LETRA A
4. LETRA A
5. LETRA A
6. LETRA A
7. LETRA C
8. LETRA C
9. LETRA E
10. ERRADO
11. ERRADO
12. LETRA A
13. LETRA E
14. LETRA C
15. LETRA B

# ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
# PIRATARIA É CRIME.

**Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.**

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

**Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.**