Estratégia Concursos

Aula 15

BNB - Raciocínio Lógico e Quantitativo - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

16 de Junho de 2023

Índice

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Princípios Fundamentais da Contagem

Nesta seção, veremos os princípios fundamentais de contagem, que você vai utilizar muito. Eles permeiam as ferramentas da análise combinatória e são requisitados em praticamente todas as questões sobre o assunto, desde as mais simples, até as mais complexas.

Princípio Multiplicativo

*Se um evento A ocorre de **m** maneiras diferentes **e** se, para cada uma dessas maneiras, um outro evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de **ambos** os eventos (A **e** B) ocorrerem é **m x n**.*

Para ilustrar, vamos considerar que João precisa se vestir com uma calça e uma blusa e que ele tem **3 calças** e **4 blusas**. Nesse caso, o evento A corresponde a vestir uma calça, com ***m* = 3** possibilidades, e o evento B corresponde a vestir uma blusa, com ***n* = 4** possibilidades.

Segundo o princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de João se vestir é:

$$m \times n = 3 \times 4 = 12$$

Podemos **extrapolar** esse princípio para **qualquer número de eventos**. Ou seja, se tivermos um terceiro evento **C** que ocorre de **p** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de os eventos A, B e **C** ocorrerem é **m x n x p**.

Utilizando o mesmo exemplo, considerando que João precisa utilizar um cinto e que ele tem **p = 2** cintos distintos, então o número de maneiras distintas de João colocar uma calça, uma blusa e um cinto é:

$$m \times n \times p = 3 \times 4 \times 2 = 24$$

(VUNESP/2019 – Prefeitura de dois Córregos/SP) Em um grupo de pessoas, há 12 homens e 13 mulheres. Com essas pessoas, uma dupla será aleatoriamente formada, com um homem e uma mulher, para participar de um concurso. O número total de possibilidades para a formação dessa dupla é

a) 12.

b) 144.

c) 156.

d) 168.

e) 288.

Comentários:

Havendo 12 homens e 13 mulheres, o número de possibilidades de selecionar um homem **E** uma mulher é, pelo princípio multiplicativo:

$$12 \times 13 = 156$$

Gabarito: C

(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG) Assinale a alternativa que contém a quantidade de vezes que é possível usar de maneiras diferentes duas blusas, três calças e quatro meias:

a) 24 maneiras diferentes.

b) 28 maneiras diferentes.

c) 32 maneiras diferentes.

d) 36 maneiras diferentes.

Comentários:

Há **2** blusas para cada uma das **3** calças. Além disso, para cada possível combinação de uma blusa e uma calça, há **4** meias diferentes. Logo, o número de alternativas é, pelo princípio multiplicativo:

$$\mathbf{2 \times 3 \times 4 = 24}$$

Gabarito: A

(CESPE/2013 – TRT-ES) Os alunos de uma turma cursam 4 disciplinas que são ministradas por 4 professores diferentes. As avaliações finais dessas disciplinas serão realizadas em uma mesma semana, de segunda a sexta-feira, podendo ou não ocorrerem em um mesmo dia. A respeito dessas avaliações, julgue o item seguinte.

Se cada professor escolher o dia em que aplicará a avaliação final de sua disciplina de modo independente dos demais, haverá mais de 500 maneiras de se organizar o calendário dessas avaliações.

Comentários:

Vamos representar as escolhas dos 4 professores da seguinte forma:

Sabendo que há 5 dias disponíveis, então cada professor terá 5 possibilidades de escolha:

5	5	5	5

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de organizar o calendário para os 4 professores é:

$$\text{Número de maneiras} = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

Ou seja, há mais de 500 maneiras de organizar.

Gabarito: Certo.

(FGV/2022 – PM-PB) Cada vértice de um quadrado ABCD deverá ser pintado com uma cor. Há 5 cores diferentes disponíveis para essa tarefa. A única restrição é que os vértices que estejam em extremidades opostas de qualquer diagonal do quadrado (AC e BD) sejam pintados com cores diferentes. O número de maneiras diferentes de pintar os vértices desse quadrado é:

a) 18

b) 60

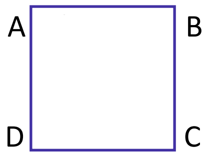
c) 120

d) 240

e) 400

Comentários:

A questão informa que temos **5** cores disponíveis para pintar 4 vértices de um quadrado:



No entanto, a cor do vértice **A** deve ser **diferente** da cor do vértice **C**; e a cor do vértice **B** deve ser **diferente** da cor do vértice **D**.

Assim, há **5** possibilidades para o vértice A e **4** possibilidades para o vértice C.

Similarmente, há **5** possibilidades para o vértice B e **4** possibilidades para o vértice D.

Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades para **todos** os 4 vértices é:

$$5 \times 5 \times 4 \times 4 = 400$$

Gabarito: E

Princípio Aditivo

*Se o evento A ocorre de **m** maneiras diferentes e o evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, e se A* e *B são **mutuamente exclusivos*** (ou seja, se um ocorrer o outro **não** ocorre), *então o número de maneiras de ocorrer **um** dos eventos (A **ou** B) é **m + n**.*

Para ilustrar esse princípio, vamos considerar que João precisa se **calçar** e que ele possui **3** opções de tênis e **2** opções de sapatos.

Nesse caso, o evento A corresponde a calçar um tênis, com $m = 3$ possibilidades, e o evento B corresponde a calçar um sapato, com $n = 2$ possibilidades. Esses eventos são **mutuamente excludentes** (João calçará um tênis **ou** um sapato; ele **não** pode calçar os dois). Assim, o número de maneiras de João se calçar é a soma:

$$m + n = 3 + 2 = 5$$

Podemos generalizar esse princípio para qualquer número de eventos.

RESUMINDO

- Quando **ambos** ocorrem os eventos (A **E** B), **multiplicamos** as possibilidades;
- Quando ocorre **somente um** dos eventos (A **OU** B), **somamos** as possibilidades.

Eventos Concomitantes: A **e** B → Princípio Multiplicativo: n(A) **x** n(B)

Eventos Excludentes: A **ou** B → Princípio Aditivo: n(A) **+** n(B)

HORA DE PRATICAR!

(CESPE/2013 – TRT-ES) Considerando que, na fruteira da casa de Pedro, haja 10 uvas, 2 maçãs, 3 laranjas, 4 bananas e 1 abacaxi, julgue o próximo item.

Se Pedro desejar comer apenas um tipo de fruta, a quantidade de maneiras de escolher frutas para comer será superior a 100.

Comentários:

Se Pedro deseja comer apenas **um** tipo de fruta, ele poderá comer uvas **OU** maçãs **OU** laranjas **OU** bananas **OU** abacaxi.

i) Uvas: há 10 uvas, logo Pedro poderá comer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 uvas. Logo, há 10 maneiras de escolher uvas para comer;

ii) Maçãs: há 2 maçãs, logo há 2 maneiras de escolher maçãs para comer;

iii) Laranjas: com 3 laranjas, há 3 maneiras de comer laranjas;

iv) Bananas: com 4 bananas, há 4 maneiras de comer bananas;

v) Abacaxi: há 1 abacaxi, logo há 1 forma de comer abacaxi.

Como Pedro irá escolher apenas **uma** dessas opções, então devemos aplicar o princípio aditivo:

$$\text{Número de maneiras} = 10 + 2 + 3 + 4 + 1 = 20$$

Que é inferior a 100.

Gabarito: Errado.

(CESPE 2016/FUB) Em um intervalo para descanso, a assistente em administração Marta foi a uma lanchonete cujo cardápio oferecia 7 tipos diferentes de salgados, 4 tipos diferentes de bolos, 3 espécies diferentes de tapioca, sucos de 3 sabores diferentes e 5 tipos diferentes de refrigerantes. A partir dessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Se Marta desejar fazer um lanche com apenas uma opção de comida e apenas uma bebida, ela terá mais de 100 maneiras distintas de organizar seu lanche.

Comentários:

Marta deseja escolher uma comida **E** uma bebida.

Para comer, Marta pode escolher uma das 7 opções de salgado **OU** um dos 4 tipos de bolo **OU** uma das 3 espécies de tapioca. Pelo princípio aditivo, as opções de comida são:

$$7 + 4 + 3 = 14$$

Para beber, Marta pode escolher uma das 3 opções de suco **OU** uma das 5 opções de refrigerante. Pelo princípio aditivo, as opções de bebida são:

$$3 + 5 = 8$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de se escolher uma comida **E** uma bebida é:

$$14 \times 8 = 112$$

Logo, há mais de 100 maneiras.

Gabarito: Certo.

FATORIAL DE UM NÚMERO NATURAL

Para resolvermos diversas questões de análise combinatória, utilizamos o chamado **fatorial**. O fatorial de um **número natural** (0, 1, 2, 3, ...) é representado como:

$$\boldsymbol{n}!$$

TOME NOTA!

O fatorial representa o **produto** de **todos** os números inteiros positivos **menores ou iguais àquele número**, conforme indicado a seguir:

$$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) \times (\boldsymbol{n}-\mathbf{2}) \times \ldots \times \mathbf{2} \times \mathbf{1}$$

Por exemplo:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Podemos representar o fatorial de um número natural como um fatorial de **qualquer** outro número natural **menor**, por exemplo:

$$4! = 4 \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!} = 4 \times 3!$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!$$

Esse tipo de mudança facilita o cálculo das divisões entre fatoriais (**muito comuns** em combinatória):

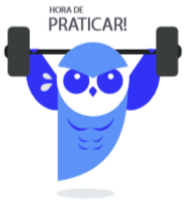
$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Atente-se para dois **casos especiais**: tanto o **fatorial de 1** quanto o fatorial de **fatorial de 0** são iguais a 1:

1! = 1

0! = 1



(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG) O fatorial de um número é extremamente utilizado na análise combinatória. Dessa forma, analise as proposições a seguir:

I. O fatorial n! de um número $n \in \mathbb{N}$ é dado por $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$;

II. $0! = 1$;

III. $1! = 0$.

Está(ão) CORRETA(S) a(s) proposição(ões):

a) II apenas.

b) I e II apenas.

c) II e III apenas.

d) I e III apenas.

Comentários:

A proposição I corresponde exatamente à definição de fatorial: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$

A proposição II também está correta, pois $0! = 1$.

A proposição III está incorreta, pois $1! = 1$.

Ou seja, estão corretas apenas as proposições I e II.

Gabarito: B

(2018 – Prefeitura de Uruçuí/PI) A simplificação da expressão a seguir é: $\frac{200!}{198!}$

a) 200

b) 198!

c) 38.800

d) 39.800

Comentários:

Podemos escrever 200! como 200! = 200 x 199 x 198!. Assim, temos:

$$\frac{200!}{198!} = \frac{200 \times 199 \times 198!}{198!} = 200 \times 199 = 39.800$$

Gabarito: D

PERMUTAÇÃO

Permutar significa **trocar de lugar**. As técnicas de permutação permitem calcular o número de maneiras **distintas** de **ordenar** os elementos.

Permutação Simples

Na permutação simples, os elementos a serem ordenados são todos **distintos** entre si.

Vamos supor que precisamos organizar 3 pessoas diferentes (Ana, Beto e Caio) em uma fila. De quantas maneiras podemos organizar essa fila?

Inicialmente, há 3 possibilidades (Ana, Beto ou Caio) para o primeiro lugar da fila. Após a escolha do primeiro lugar, restarão 2 possibilidades para o segundo lugar. Por fim, restará 1 possibilidade para o terceiro lugar.

3	2	1
1º	2º	3º

Como são eventos concomitantes, pois alguém ficará em primeiro lugar, outra pessoa ficará em segundo **E** outra em terceiro, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento, pelo princípio multiplicativo:

$$3 \times 2 \times 1$$

E se houvesse 4 pessoas? Nesse caso, teríamos 4 possibilidades para o primeiro lugar; 3 para o segundo lugar; 2 para o terceiro e 1 para o quarto:

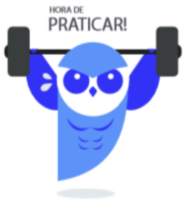
$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Para n alunos, temos:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Que corresponde à fórmula do **fatorial**!

> A **permutação simples** de **n** elementos **distintos**, que podemos representar como $\boldsymbol{P_n}$, é:
>
> $$\boldsymbol{P_n = n!}$$



(FGV/2019 – Prefeitura de Salvador/BA) Trocando-se a ordem das letras da sigla PMS de todas as maneiras possíveis, obtêm-se os anagramas dessa sigla. O número desses anagramas é:

a) 16.

b) 12.

c) 9.

d) 8.

e) 6.

Comentários:

Considerando que todas as 3 letras de PMS são distintas, o número de anagramas, ou seja, de formas de se reordenar essas letras é a permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Gabarito: E

(CESPE 2018/EBSERH) Julgue o próximo item, a respeito de contagem.

Se a enfermaria de um hospital possuir cinco leitos desocupados e se cinco pacientes forem ocupar esses leitos, então haverá mais de 100 formas diferentes de fazer essa ocupação.

Comentários:

Considerando que temos 5 leitos para serem ocupados por 5 pacientes, temos uma permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Logo, há mais de 100 formas de fazer essa ocupação.

Gabarito: Certo.

Permutação Simples com Restrições

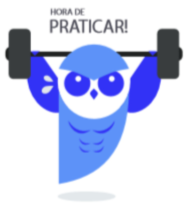
É possível que algumas questões de permutações imponham determinadas **restrições**, de modo nem todos os elementos poderão permutar livremente.

Por exemplo, vamos considerar que há 8 elementos distintos a serem ordenados {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, de modo que o número 1 esteja **fixo** na primeira posição e o número 8, na oitava posição.

1							8

Sendo assim, restarão os algarismos 2 a 7 (ou seja, um total de **6 algarismos**) para serem livremente ordenados nos **6 espaços** restantes. Dessa forma, teremos uma permutação de 6 elementos:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$



(FCC/2019 – Analista Judiciário do TRF 3ª Região) Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é

a) 30

b) 4

c) 120

d) 24

e) 6

Comentários:

Essa questão trabalha com a permutação de 5 elementos, com um deles fixo.

Considerando que 1 dos candidatos está **fixo** no município A, restam 4 candidatos para serem alocados em 4 municípios (B, C, D ou E). Portanto:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: D.

(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão. A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 8! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o camelo fique na primeira posição e o elefante fique na sexta posição.

Comentários:

A questão pede para organizarmos uma fila de 10 animais, de forma que o camelo (C) fique na primeira posição e o elefante (E), na sexta:

C					E				

Como esses elementos estão **fixos** em posições específicas, basta reordenarmos os **demais elementos**.

Logo, o número de maneira de organizarmos essa fila corresponde à permutação de 10 – 2 = 8 elementos:

$$P_8 = 8!$$

Gabarito: Certo.

Agora, vamos voltar ao nosso exemplo dos 8 algarismos, supondo que os algarismos 1 e 2 ocupem os extremos, mas **sem fixar** qual irá ocupar a primeira posição e qual irá ocupar a última posição.

Assim, poderíamos ter o número 1 na primeira posição e o número 8 na oitava; **OU** o número 8 na primeira posição e o número 1 na oitava:

1							**8**

8							**1**

Nesse caso, para cada uma das 720 possibilidades de permutar os algarismos de 2 a 7 nas posições intermediárias, calculadas anteriormente, há **2 possibilidades** distintas de posicionar os extremos.

Pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar as possibilidades desses dois eventos:

$$2 \times P_6 = 2 \times 720 = 1440$$

Na verdade, essas **2 possibilidades** de alocar esses 2 algarismos, 1 e 8, nas 2 posições extremas correspondem à **permutação** desses 2 elementos.

Em outras palavras, tratamos esses casos como **duas permutações em separado** e, em seguida, **multiplicamos** os resultados (princípio multiplicativo).

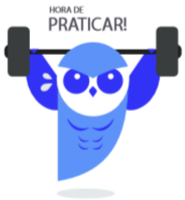
$$P_2 \times P_6$$

Agora, vamos supor que os 3 primeiros algarismos tenham que ocupar as 3 primeiras posições, em qualquer ordem; e os demais algarismos, as demais posições, também em qualquer ordem:

$$\underbrace{\square\ \square\ \square}_{1,\ 2\text{ e }3}\ \underbrace{\square\ \square\ \square\ \square\ \square}_{4,\ 5,\ 6,\ 7\text{ e }8}$$

Nesse caso, temos a permutação de **3 elementos** nas 3 primeiras posições e de **5 elementos** nas demais posições. Pelo princípio **multiplicativo**, o número de ordenações possíveis é:

$$P_3 \times P_5 = 3! \times 5! = 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$



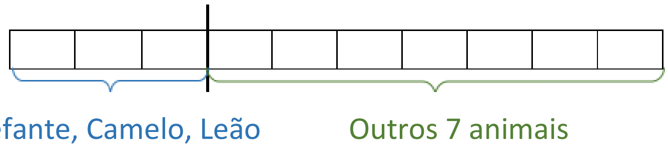
(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 3 × 7! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o elefante, o camelo e o leão fiquem nas três primeiras posições, não necessariamente nessa ordem.

Comentários:

Agora, desejamos organizar a fila de forma que os 3 animais (Elefante, Camelo e Leão) fiquem nas 3 primeiras posições, em **qualquer ordem**. Consequentemente, os outros 10 – 3 = 7 animais ocuparão as outras 7 posições, em qualquer ordem:



O número de formas de organizar os 3 animais corresponde a uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3!$$

O número de formas de organizar os outros 7 animais equivale a uma permutação de 7 elementos:

$$P_7 = 7!$$

Pelo princípio multiplicativo, **multiplicamos** esses resultados para obter o número de maneiras possíveis de organizar toda a fila:

Número de possibilidades = $3! \times 7!$

Esse resultado é **diferente** do valor informado no item, qual seja, 3 × 7!, logo, o item está errado. Aliás, como 3! = 3 x 2, o nosso resultado é o **dobro** do que consta no item da questão.

Gabarito: Errado.

Agora, vejamos mais um tipo de permutação com restrição. Vamos voltar ao exemplo dos 8 algarismos, supondo que os algarismos 1 e 2 tenham que ficar **sempre juntos**, **nessa ordem**.

Nesse caso, tratamos esses 2 algarismos como **elemento único**, que podemos chamar de **A**. Assim, em vez de 8 elementos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}, ordenaremos apenas **7 elementos** {A, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

Portanto, a quantidade de maneiras de ordenar 8 elementos, de modo que 2 estejam sempre **juntos** em uma **determinada ordem**, corresponde à **permutação de 7 elementos**.

Se houvesse 3 elementos **juntos** em **determinada ordem**, {1, 2 e 3}, chamaríamos os 3 elementos de A, e calcularíamos a permutação dos **6 elementos** {A, 4, 5, 6, 7 e 8}.

E se os elementos tivessem que ficar **juntos**, mas em **qualquer ordem**?

Nesse caso, o **início** da solução é similar, isto é, chamamos esses elementos de um **único elemento**, **A**, e fazemos a **permutação** do elemento **A** com os demais elementos.

Por exemplo, se os algarismos {1, 2 e 3} tivessem que ficar juntos, mas em qualquer ordem, dentre os 8 algarismos, primeiro calcularíamos a permutação dos 6 elementos {A, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Porém, para **cada uma** dessas 720 possibilidades, há diferentes formas de **ordenar os 3 elementos**, o que corresponde à **permutação** de 3 elementos.

Logo, para calcular o número de maneiras de organizar **todos** os 8 elementos nessas condições, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela permutação de **3 elementos** (princípio multiplicativo):

$$\mathbf{P_6 \times P_3 = 6! \times 3! = 720 \times 6} = 4320$$

(CESPE 2018/BNB) Julgue o próximo item, relativo a análise combinatória e probabilidade.

A quantidade de números naturais distintos, de cinco algarismos, que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, de modo que 1 e 2 fiquem sempre juntos e em qualquer ordem, é inferior a 25.

Comentários:

A quantidade de números que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 corresponde a uma permutação desses elementos. Para que os números 1 e 2 fiquem sempre juntos, podemos considerá-lo com elemento único. Assim, temos uma permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Porém, para cada uma dessas 24 maneiras de organizar os algarismos 3, 4, 5 e o elemento 1-2, podemos ter 1 primeiro e depois 2, ou 2 primeiro e depois 1. Logo, pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar esse resultado pela permutação de 2 elementos $P_2 = 2! = 2$:

$$\text{Quantidade de números possíveis} = 24 \times 2 = 48$$

Essa quantidade é **superior** a 25.

Gabarito: Errado.

Permutação com Repetição

Enquanto na permutação **simples**, todos os elementos são **distintos**, na permutação com **repetição**, alguns elementos se **repetem**.

Quando há **elementos repetidos**, o número de maneiras distintas de ordenação **diminui**, pois algumas possibilidades que seriam distintas na permutação simples tornam-se a mesma possibilidade quando há elementos iguais.

Por isso, precisamos dividir o resultado da permutação simples pelo número de maneiras de reordenar os elementos repetidos, isto é, pela permutação dos elementos repetidos.

Havendo n elementos no **total**, com k elementos distintos **repetidos** a permutação desses elementos, o que representamos como P_n^k, é dada por:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!}$$

Por exemplo, a permutação dos elementos {A, A, A, B, C} é uma permutação de **5** elementos, no **total**, dos quais **3 são repetidos**, dada por:

$$P_5^3 = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

E se houvesse **outro elemento repetido**? Por exemplo, {A, A, A, B, B, C, D}.

Nesse caso, dividimos a **permutação simples de todos** os elementos pelo **produto das permutações dos elementos repetidos**.

No caso, dividimos a permutação simples de 7 elementos pelo produto da permutação de 3 elementos (A) com a permutação de 2 elementos (B):

$$P_7^{2,3} = \frac{P_7}{P_2 \times P_3} = \frac{7!}{2! \times 3!}$$

$$P_7^{2,3} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 7 \times 3 \times 5 \times 4 = 420$$

(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Com as letras, A, B e C, é possível fazer seis agrupamentos diferentes de três letras: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Se as três letras fossem A, A e B, só poderiam ser feitos três desses agrupamentos diferentes: AAB, ABA, BAA. Com as letras F, F, G e G, o número de agrupamentos diferentes de quatro letras é

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 16.

Comentários:

A quantidade de agrupamentos com as letras F, F, G e G corresponde à permutação de 4 elementos, com 2 repetições de F e 2 repetições de G:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Gabarito: A.

(FGV/2018 – ALE-RO) Assinale a opção que indica o número de permutações das letras da palavra SUSSURRO

a) 1680

b) 1560

c) 1440

d) 1320

e) 1260

Comentários:

A palavra SUSSURRO contém 8 letras, sendo o S repetido 3 vezes, o U repetido 2 vezes e o R repetido 2 vezes.

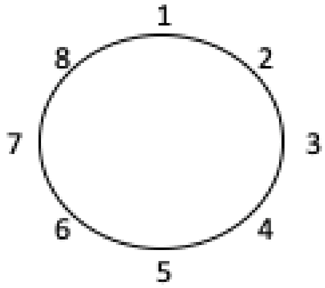
Assim, temos a permutação de 8 elementos com repetição de 2, 2 e 3 elementos:

$$P_8^{2,2,3} = \frac{8!}{2! \times 2! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 2 \times 3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

Gabarito: A

Permutação Circular

Na permutação circular, considera-se que os elementos estão dispostos em um **círculo**.



No círculo, o que importa é a posição de cada elemento em relação aos demais. Em outras palavras, quando giramos o círculo, por exemplo, quando todos os elementos se posicionam uma posição à direita de onde estavam posicionados, temos a **mesma** disposição.

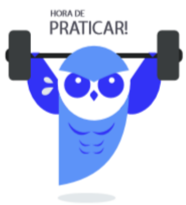
Portanto, para calcular a quantidade de disposições distintas, podemos **fixar um** dos elementos. Com isso, as posições de **todos** os outros elementos irão **importar**.

Portanto, calculamos a **permutação simples** para os **demais** elementos (no caso, 7):

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

A permutação circular de $\boldsymbol{n}$ elementos, $\boldsymbol{PC_n}$, é dada por:

$$\boldsymbol{PC_n = (n-1)!}$$



(2019 – Prefeitura de Ibiaçá/RS) O número máximo de maneiras distintas que um grupo de cinco amigos pode se sentar ao redor de uma mesa circular para realizar um lanche coletivo é:

a) 120

b) 50

c) 24

d) 12

e) 1

Comentários:

A permutação circular de n = 5 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: C

(2016 – Prefeitura de Ouricuri/PE) De quantas maneiras possíveis podemos dispor nove crianças em um círculo em que todas brincam de mãos dadas?

a) 9!

b) 8!

c) 7!

d) 6!

e) 5!

Comentários:

A permutação circular de n = 9 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_9 = 8!$$

Gabarito: B

ARRANJO E COMBINAÇÃO

As técnicas que veremos nesta seção (arranjo e combinação) trabalham com a **seleção** de um subconjunto dos elementos.

A **ordem** dos elementos selecionados será **relevante** para o **arranjo**, mas **não** para a **combinação**. Em outras palavras, selecionar os elementos A e B ou os elementos B e A são possibilidades **distintas** para o **arranjo**, porém **equivalentes** para a **combinação**.

Arranjo Simples

No arranjo, **selecionamos** alguns elementos, de maneira que a sua **ordenação** seja **relevante**. Um sorteio de algumas pessoas, para receberem prêmios distintos é um exemplo desse tipo de seleção.

A ordem da seleção será importante sempre que os elementos selecionados tiverem destinos **diferentes**, como diferentes prêmios, funções, cargos, tarefas, posições etc.

Vamos supor que existam **10** pessoas em um sorteio, das quais **4** serão sorteadas, para receberem prêmios diferentes, não sendo possível sortear a mesma pessoa mais de uma vez.

Como a ordem importa, há 10 possibilidades para sortearmos a primeira pessoa; em seguida, restarão 9 pessoas para o segundo sorteio; depois, 8 pessoas para o terceiro sorteio; e, por fim, 7 pessoas para o último sorteio.

10	**9**	**8**	**7**
1º	2º	3º	4º

Como os quatro sorteios irão ocorrer, pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento. Dessa forma, o resultado do arranjo de **4** elementos, dentre **10**, é:

$$A_{10,4} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

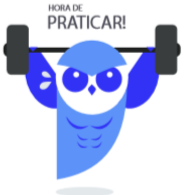
Esse resultado corresponde à razão entre o fatorial de **10** (número total de elementos) e o fatorial de 6 (diferença entre o número **total** de elementos e o número de elementos **sorteados**):

$$A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

No caso geral, um **arranjo** de k elementos, dentre n elementos distintos é:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Outra notação possível para o arranjo é A_n^k.



(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Na bilheteria de um teatro há apenas 5 ingressos à venda para a seção de uma peça. Se 4 amigos comprarem ingressos para essa seção, então o número total de posições distintas em que esses amigos poderão se acomodar no teatro é

a) 120.

b) 80.

c) 60.

d) 20.

e) 5.

Comentários:

Temos uma seleção de 4 lugares, dentre 5 disponíveis, com importância de ordem, pois cada lugar é **distinto** do outro. Assim, temos o arranjo de 4 elementos, dentre 5:

$$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: A.

(VUNESP/2018 – PM/SP) Utilizando-se os algarismos 2, 3, 5, 6, 7 e 9, a quantidade de números múltiplos de 5 e que tenham três algarismos distintos que podem ser formados é

a) 25.

b) 20.

c) 15.

d) 10.

Comentários:

Para que o número formado pelos 6 algarismos indicados no enunciado seja múltiplo de 5, é necessário que o algarismo 5 seja o último algarismo. Assim, os diferentes números que podem ser formados com 3 algarismos correspondem a um arranjo de 2 elementos, dentre os algarismos {2, 3, 6, 7 e 9}, isto é, 5 algarismos:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Gabarito: B.

(CESPE 2019/COGE-CE) Em determinado órgão, sete servidores foram designados para implantar novo programa de atendimento ao público. Um desses servidores será o coordenador do programa, outro será o subcoordenador, e os demais serão agentes operacionais.

Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de distribuir esses sete servidores nessas funções é igual a

a) 21.

b) 42.

c) 256.

d) 862.

e) 5.040.

Comentários:

Nessa questão, devemos definir o número de maneiras distintas de distribuir 7 servidores em funções distintas: 1 será coordenador, 1 será subcoordenador e os demais serão agentes. Note que, após a definição do coordenador e do subcoordenador, os que **sobrarem** serão **necessariamente** agentes. Por isso, não precisamos nos preocupar com eles, apenas com o **coordenador** o **subcoordenador**.

Para a escolha do coordenador, há 7 servidores, ou seja, 7 possibilidades:

7	

Após a escolha do coordenador, restarão 6 possibilidades para o subcoordenador:

7	6

Como devemos escolher o coordenador E o subcoordenador, devemos multiplicar as possibilidades (princípio multiplicativo):

Número de Possibilidades = 7 x 6 = 42

Alternativamente, poderíamos calcular o arranjo de 2 elementos, dentre 7:

$$A_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

Gabarito: B

Combinação Simples

Assim como no caso do arranjo, a combinação é uma **seleção** de elementos de um conjunto finito. Entretanto, para a combinação, a **ordem não importa**.

Por exemplo, em um sorteio de participantes para um **grupo** de estudo, a ordem do sorteio de cada participante é irrelevante.

Nessa situação, algumas possibilidades **distintas** identificadas no **arranjo** são **equivalentes** na **combinação**. Consequentemente, a **combinação** de determinados elementos resulta em um número **menor** do que o **arranjo** dos mesmos elementos.

Na verdade, precisamos dividir o resultado do arranjo pelo fatorial do número de elementos selecionados, pois ele corresponde à permutação dos elementos selecionados.

A combinação sem reposição de k elementos, de um total de n elementos, é dada por:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Outras notações comuns para a combinação são C_n^k ou $\binom{n}{k}$.

Para o mesmo exemplo anterior, se as 4 pessoas sorteadas, dentre 10, receberem os mesmos prêmios, o número de maneiras de selecionar essas pessoas é:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$

Algumas questões pedem o número de maneiras de selecionar "**pelo menos um**" ...

Nesses casos, calcule **todas** as possibilidades e, em seguida, **subtraia** o número de possibilidades que **não** atendem à restrição, ou seja, com "nenhum"...

Por exemplo, vamos supor que haja 5 mulheres e 4 homens (ou seja, 9 pessoas no total); e que vamos selecionar 3 pessoas para formar uma equipe, com **pelo menos uma** mulher.

Para calcular o número de possibilidades, primeiro calculamos o número total de maneiras possíveis de selecionar 3 pessoas, de um total de 9 pessoas:

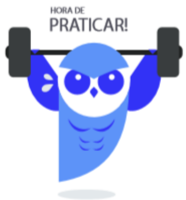
$$C_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

Agora, calculamos o número de maneiras possíveis de selecionar 3 pessoas, das quais **nenhuma** é mulher, ou seja, somente homens. Sabendo que há 4 homens no total, temos:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 4$$

Logo, o número de maneiras de formar grupos de 3 pessoas com **pelo menos uma** mulher é:

$$84 - 4 = 80$$



(FGV/2019 – Pref. Angra dos Reis/RJ) Maria possui em casa quatro tipos de frutas: banana, mamão, abacate e manga. Ela decidiu fazer uma vitamina com duas dessas frutas, batendo-as juntas com leite no liquidificador. O número de vitaminas diferentes que Maria poderá fazer é

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

e) 12.

Comentários:

O número de vitaminas diferentes corresponde ao número de maneiras diferentes de Maria escolher 2, das 4 frutas, sem que a ordem importe, logo, temos uma combinação de 2 elementos, dentre 4:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4!}{2! \times 2} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Gabarito: D

(FGV/2022 – PC-RJ) Do grupo dos 6 novos policiais de uma delegacia, 2 deles serão escolhidos para um treinamento especial. O número de pares diferentes de policiais que podem ser enviados para o treinamento especial é:

a) 10

b) 12.

c) 15.

d) 16.

e) 18.

Comentários:

O número de pares de policiais que podem ser escolhidos, dentre 6, corresponde ao número de maneiras de escolher 2 elementos, dentre 6. Como a ordem dos escolhidos não importa, temos a combinação de 2 elementos dentre 6:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

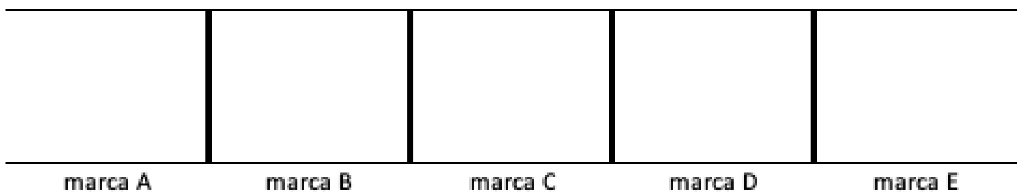
Gabarito: C

Combinação Completa

Os problemas de combinação completa (ou combinação com repetição) envolvem um conjunto de **n tipos** de elementos **diferentes**, dos quais serão escolhidos **k** elementos **iguais ou diferentes**.

Por exemplo, escolher **p = 3 potes de sorvete** havendo um total de **n = 5 marcas distintas** (os potes podem ser de uma mesma marca ou de marcas distintas).

Para calcular todas as possibilidades, vamos imaginar que cada **marca de sorvete** esteja em uma **seção** separada do congelador, conforme indicado a seguir, e que vamos posicionar 3 , simbolizando os potes de sorvete, nas seções correspondentes:



Dessa forma, podemos considerar esse problema como uma **permutação com repetição** dos **p = 3 objetos** (**potes de sorvetes**) e das **4 divisórias** que separam as **marcas**.

O número de **divisórias** é sempre igual ao número de **marcas menos 1**, ou seja, $n - 1$.

Portanto, a **combinação completa** de **p = 3 objetos** de **n = 5 marcas**, indicada por CR_5^3, é igual à **permutação** de 7 elementos, com repetição de **p = 3** e **n - 1 = 4** elementos:

$$CR_5^3 = P_7^{3,4} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 4!} = 7 \times 5 = 35$$

De maneira geral, a combinação de $\boldsymbol{p}$ **objetos** de $\boldsymbol{n}$ **tipos** (ou marcas), equivale à permutação de $\boldsymbol{n-1}+\boldsymbol{p}$ elementos, com repetição de $\boldsymbol{n-1}$ e $\boldsymbol{p}$ elementos:

$$\boldsymbol{CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}}$$

Também devemos utilizar a **combinação completa** em problemas de **distribuição** de objetos entre pessoas (ou lugares). Por exemplo, a livre distribuição de 3 cestas básicas para 5 famílias segue o mesmo raciocínio.

(FGV/2018 – ALE-RO) Helena entra em uma sorveteria que oferece sorvetes de 8 sabores diferentes. Helena deseja escolher uma casquinha com duas bolas de sorvete não necessariamente de sabores diferentes. A ordem em que as bolas forem colocadas na casquinha não fará a escolha de Helena ser diferente.

O número de maneiras de Helena escolher sua casquinha é

a) 64.

b) 56.

c) 36.

d) 28.

e) 16.

Comentários:

Nessa questão, temos um exemplo de combinação com reposição (ou combinação completa, dada por:

$$\boldsymbol{CR_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}}$$

Sabendo que há 8 sabores disponíveis (n = 8) e que Helena irá escolher 2 bolas de sorvete (p = 2):

$$CR_8^2 = \frac{(8+2-1)!}{(8-1)! \times 2!} = \frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Gabarito: C

(CESPE 2018/SEFAZ-RS) Se 7 kg de feijão forem distribuídos para até quatro famílias, de modo que cada uma delas receba um número inteiro de quilos, então, nesse caso, a quantidade de maneiras distintas de se distribuírem esses 7 kg de feijão para essas famílias será igual a

a) 30.

b) 120.

c) 330.

d) 820.

e) 1.320.

Comentários:

O enunciado permite que alguma(s) família(s) fique sem quilos de feijão porque menciona que a distribuição será para "até" 4 famílias. Assim, há 7 quilos de feijão (p = 7) a serem distribuídos livremente para 4 famílias (n = 4).

Essa distribuição corresponde à combinação com repetição de p = 7 objetos dentre n = 4 tipos, que pode ser vista como uma permutação de 10 elementos, com repetição de p = 7 objetos e de n - 1 = 3 divisórias:

$$CR_4^7 = P_{10}^{3,7} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

Gabarito: B.

(2019 – Conselho Regional de Medicina/AC) O pai de 3 filhos, com idades diferentes, distribuiu 9 balas idênticas entre eles, de forma que o mais velho recebeu o dobro de balas do caçula e o filho do meio recebeu mais balas que o caçula e menos balas que o mais velho. O filho caçula recebeu X balas e o filho do meio recebeu Y balas.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Se alguém deseja distribuir 9 balas idênticas entre 3 pessoas, sem qualquer critério de distribuição, com cada uma delas recebendo pelo menos uma bala, então existem 28 maneiras de se fazer a distribuição.

Comentários:

Esse também é um caso de combinação completa, em que as balas correspondem aos objetos e as pessoas correspondem às seções.

Porém, o problema apontou para uma restrição: todas as pessoas receberão pelo menos uma bala.

Após distribuir uma bala por pessoa, totalizando 3 balas, sobrarão 9 – 3 = 6 balas a serem distribuídas, sem critério, para as 3 pessoas.

Portanto, temos a combinação completa de k = 6 objetos para n = 3 pessoas, ou seja, n – 1 = 2 divisórias:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

$$CR_3^6 = P_8^{2,6} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

Gabarito: Certo

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:

PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.