

RESUMO

Matrizes

Introdução às matrizes

Podemos representar uma matriz tanto com colchetes "[]" quanto com parênteses "()".

Matriz de **dimensão $m \times n$** : **m linhas** e **n colunas**.

Elemento a_{ij} : o **primeiro índice** representa a **linha** e o **segundo índice** representa a **coluna**.

Representação de uma matriz pela lei de formação

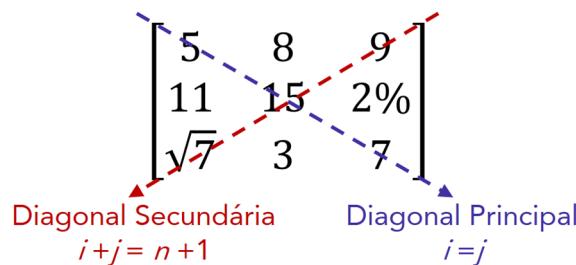
Cada elemento da matriz deve ser calculado por meio de uma fórmula apresentada.

Tipos de matrizes

Matriz linha: apresenta apenas uma linha. Dimensão da forma $1 \times n$.

Matriz coluna: apresenta apenas uma coluna. Dimensão da forma $m \times 1$.

Matriz quadrada: apresenta o mesmo número de linhas e de colunas. Dimensão da forma $n \times n$.



Matriz Retangular: número de linhas é diferente do número de colunas.

Matriz Diagonal: **matriz quadrada** em que todos os **elementos que não pertencem à diagonal principal** são iguais a **zero**.

Matriz Triangular: **matriz quadrada** em que todos os elementos acima ou abaixo de sua **diagonal principal** são nulos.

- **Matriz Triangular Superior:** todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.
- **Matriz Triangular Inferior:** todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

Matriz Identidade: elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os elementos fora da diagonal principal são zero.

Matriz Nula: todos os elementos são iguais a zero. É comum representar uma matriz nula quadrada pela letra O acrescida de um índice que indica a ordem da matriz. Ex: $O_3 \rightarrow$ matriz **nula quadrada de ordem 3**.

Operações com matrizes

Igualdade entre matrizes: duas matrizes são iguais quando apresentam a mesma dimensão $m \times n$ e seus elementos são idênticos e estão nas mesmas posições.

Adição e subtração de matrizes: é necessário que as matrizes tenham a mesma dimensão $m \times n$. Para realizar a operação, basta somar/subtrair os termos que estão na mesma posição.

Multiplicação da matriz por um número real: multiplicar todos os elementos da matriz pelo número real.

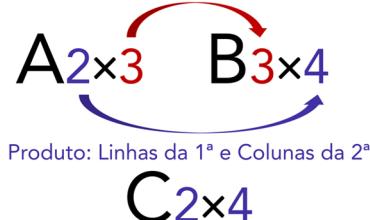
Multiplicação de matrizes

1. Verificar se o **número de colunas** da **primeira** matriz é igual ao **número de linhas** da **segunda**. Se essa igualdade não se verificar, não é possível realizar o produto das matrizes.

2. Obter o esquema geral da matriz-produto, que apresenta a seguinte dimensão:

Número de linhas da primeira × Número de colunas da segunda

Colunas da 1^a = Linhas da 2^a



3. Obter os elementos da matriz resultante a partir das **linhas da primeira matriz** e das **colunas da segunda matriz**.

O elemento c_{ij} da matriz-produto **C** é obtido por meio da **linha *i* da primeira matriz** e da **coluna *j* da segunda matriz**.

Propriedades da multiplicação de matrizes

A propriedade comutativa não vale para matrizes: $AB \neq BA$.

Propriedade associativa entre matrizes: $(AB)C = A(BC)$

Propriedade associativa entre matrizes e um número real: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Propriedade distributiva: $A(B + C) = AB + AC$; $(B + C)A = BA + CA$

Elemento neutro da multiplicação de matrizes: $AI = IA = A$

Traço de uma matriz quadrada

O **traço** de uma **matriz quadrada** é a **soma dos elementos da sua diagonal principal**. Se **A** é uma matriz quadrada, então o seu traço é representado por $tr(A)$.

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(A - B) = tr(A) - tr(B)$
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
- $tr(AB) = tr(BA)$

Matriz oposta

A **matriz oposta** de **A** é $-A$.

Matriz transposta, simétrica e antissimétrica

A **transposta** de uma matriz **A** (notação: A^t) corresponde à matriz cujas linhas foram transformadas em colunas.

$$\begin{aligned}(A^t)^t &= A \\ (\alpha A)^t &= \alpha A^t \\ (AB)^t &= B^t A^t \\ (A + B)^t &= A^t + B^t\end{aligned}$$

Matriz Simétrica: a matriz é igual a sua transposta $\rightarrow A = A^t$

- É quadrada; e
- Os **elementos simétricos com relação à diagonal principal são iguais.**

Matriz antissimétrica: $A^t = -A$

- É quadrada;
- A diagonal principal é nula; e
- Os **elementos simétricos com relação à diagonal principal são opostos.**

Matriz inversa

A **inversa** de uma matriz A (notação: A^{-1}) é aquela matriz que, quando multiplicada pela matriz A, tem como resultado a matriz identidade:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Uma matriz que **não possui inversa** é denominada **singular**.

Propriedades:

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{-1} &= A \\ (A^{-1})^t &= (A^t)^{-1} \\ (\alpha A)^{-1} &= \frac{1}{\alpha} A^{-1} \\ (\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \\ (\mathbf{ABC})^{-1} &= \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}\end{aligned}$$

Matriz inversa como análogo da divisão: pode-se multiplicar ambos os lados de uma equação matricial pela inversa de uma matriz (A^{-1}) e, na sequência, usar a propriedade $A^{-1}A = I$.

Matriz ortogonal

Uma matriz A é dita **ortogonal** quando a sua inversa é igual a sua transposta:

$$A \text{ é ortogonal} \leftrightarrow A^{-1} = A^t$$

Determinantes

Noção básica e representação

Um **determinante** é um número calculado a partir de uma **matriz quadrada**. Representado por duas barras " $|$ $|$ ".

Determinante de matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz de ordem 1 é o próprio elemento da matriz.

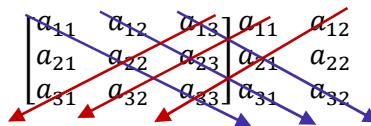
Determinante de matriz de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det A = ad - bc$$

(Produto dos elementos da diagonal principal) – (Produto dos elementos da diagonal secundária)

Determinante de matriz de ordem 3

Regra de Sarrus



Parte Negativa Parte Positiva

$$\det A = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}] - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}]$$

Obtenção do determinante de matrizes de qualquer ordem

Menor complementar

O menor complementar de um elemento a_{ij} de uma matriz A é o determinante D_{ij} da matriz obtida eliminando-se a linha i e a coluna j da matriz A .

Cofator ou complemento algébrico

O cofator do elemento a_{ij} de uma matriz A é um número representado por A_{ij} calculado do seguinte modo:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

Teorema de Laplace

O **determinante** de uma matriz A é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

1. Escolher uma fila (linha ou coluna), preferencialmente a que tiver mais zeros;
2. Realizar o produto de cada elemento da fila pelo seu respectivo cofator; e
3. Somar os produtos obtidos.

Propriedades dos determinantes

- **Teorema de Binet:** $\det(AB) = \det A \times \det B$
- **Determinante da matriz inversa:** $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- **Determinante da matriz transposta:** $\det A^t = \det A$
- **Multiplicação de uma fila por uma constante:** ao multiplicar uma fila (linha ou coluna) de uma matriz por uma constante k , o determinante dessa nova matriz também fica multiplicado por k .
- **Multiplicação da matriz por uma constante:** $\det(kA) = k^n \det A$
- **Determinante de matriz triangular ou de matriz diagonal:** o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.
- **Fila nula:** uma matriz que apresenta uma fila (linha ou coluna) cujos elementos são todos zero apresenta determinante zero.
- **Filas paralelas iguais:** uma matriz com filas paralelas iguais (linhas ou colunas) apresenta determinante zero.
- **Filas paralelas proporcionais:** uma matriz com filas paralelas proporcionais (linhas ou colunas) apresenta determinante zero.
- **Troca de filas paralelas:** ao trocarmos uma fila (linha ou coluna) de lugar com outra fila paralela, o determinante muda de sinal.
- **Combinação linear de filas:** quando uma matriz apresenta uma fila (linha ou coluna) que é combinação linear de outras filas, o seu determinante é zero.

Teorema de Jacobi

Ao multiplicar uma fila por qualquer número e somar esse resultado a uma outra fila paralela qualquer, o valor do determinante não se altera. Em outras palavras, podemos trocar uma fila qualquer por uma combinação linear que contenha a fila original.

Regra de Chio

- Fazer com que o elemento a_{11} seja igual a 1;
- Zerar todos os elementos da primeira linha, à exceção de a_{11} , fazendo uso da primeira coluna;
- Feita a operação anterior, o determinante em questão é igual ao menor complementar D_{11} ;
- Repita o processo, se necessário, para reduzir a ordem do determinante mais uma vez.

Matriz inversa

A é inversível $\leftrightarrow \det A \neq 0$
 A é singular $\leftrightarrow \det A = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$