Até agora
Otimização irrestrita
A partir de agora
Otimização restrita

Maximizando Lucros

O lucro semanal total (em dólares) que a Acrosonic obtém na produção e venda de um sistema de alto-falantes é dado pela função

$$L(x, y) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5000$$

onde x é o número de unidades montadas e y é o número de kits produzidos por semana. O gerente da Acrosonic decide restringir a produção desses sistemas de alto-falante a um total de 230 unidades por semana. Com essas condições, quantas unidades montadas e quantos kits deveriam ser produzidos por semana, a fim de maximizar o lucro semanal da empresa?

Função Produção

Suponha que x unidades de mão-de-obra e y unidades de capital sejam necessárias para produzir

$$f(,y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$$

unidades de certo produto. Se cada unidade de mão-de-obra custa \$200 e cada unidade de capital custa \$300, e um total de \$60.000 está disponível, determine quantas unidades de mão-de-obra e capital seriam necessárias a fim de maximizar a produção.

Definindo a restrição

Total de itens $\rightarrow$ 230

$x + y = 230$

Valor disponível $\rightarrow$ \$60.000

Custo $\rightarrow 200x + 300y \ = \ 60.000$

$$\max_{(x,y)} \; L(x,y) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5000$$

$$\max_{(x,y)} \; L(x,y)$$

sujeito a:

$x + y = 230$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$$\max_{(x,y)} \; f(x,y)$$

sujeito a:

$200x + 300y = 60.000$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Problema de otimização

$h_1(x,y) = x + y$ $h_1 : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$h_1(x,y) = 200x + 300y$
60.000
$200x + 300y = 60.000$
$c_1 = 230$
$h_1(x,y) = c_1 \Rightarrow x + y = 230$
$x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0$ $g_1(x,y) = -x$ $b_1 = 0$
$g_1(x,y) \leq b_1 \Rightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$
$y \geq 0 \Leftrightarrow -y \leq 0$ $g_2(x,y) = -y$ $b_2 = 0$
$g_2(x,y) \leq b_2 \Rightarrow -y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$
$g_1 : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$g_2 : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Restrições
de
desigualdade

Problema de otimização

$$\max_{(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

sujeito a:

$h_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1, \cdots, h_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_m$
$g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq b_1, \cdots, g_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq b_k$

- A função f é chamada de **função objetivo**
- As funções $g_1, \cdots, g_k$ e $h_1, \cdots, h_m$ são denominadas **funções restrição**
- As funções g_j definem as **restrições de desigualdade**
- As funções h_i definem as **restrições de igualdade**

Otimização de portfólios

$$\max_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)} \sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i \quad \min_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{i,j}$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \cdots, n$$

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1$$

$$0 \leq x_i$$

$$x_i \leq 1$$

$$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i, i = 1, \cdots, n$$

$$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 1, i = 1, \cdots, n$$

$$0 \leq x_i \;\; \Leftrightarrow \;\; 0 \geq -x_i \;\; \Rightarrow \;\; -x_i \leq 0$$

$$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -x_i, i = 1, \cdots, n$$

$$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0$$

$$
\begin{aligned}
g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= -x_1 \leq 0 \\
g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= -x_2 \leq 0 \\
&\vdots \\
g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= -x_n \leq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{n+1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= x_1 \leq 1 \\
g_{n+2}(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= x_2 \leq 1 \\
&\vdots \\
g_{n+n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= x_n \leq 1
\end{aligned}
$$

2n restrições
de desigualdade

O Método dos Multiplicadores de Lagrange
Para encontrar o extremo local da função $f(x, y)$ com a condição $h(x, y) = 0$ (supondo que esse extremo exista)

1. Construa a função auxiliar

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y)$$

2. Resolva o sistema formado pelas equações

$$F_x = 0 \;\; F_y = 0 \;\; F_\lambda = 0$$

   nas variáveis x, y e λ

3. Avalie f em cada ponto (x, y) obtido no passo 2. O maior (menor) desses valores é o máximo (mínimo) valor de f

$$\max_{(x,y)} \; -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5000$$

sujeito a:
$x + y = 230$
$h(x,y) = x + y - 230$
$F(x,y,\lambda) = L(x,y) + \lambda h(x,y) =$
$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5000 + \lambda(x + y - 230)$

$F_x = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 120 + \lambda = 0$ $F_y = -\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x + 100 + \lambda = 0$
$F_\lambda = x + y - 230 = 0$
$x = 180 \;\; y = 50 \;\; \lambda = -17.5$
$L(180, 50) =$
$-\frac{1}{4}180^2 - \frac{3}{8}50^2 - \frac{1}{4}150 \cdot 50 + 120 \cdot 180 + 100 \cdot 50 - 5000 = 10.312, 50$
Com estas restrições, o **maior lucro é** $\$10.312, 5$ obtido quando se produzem **180 unidades montadas** e **50 kits de alto-falantes**.

Sua vez

$$\max_{(x,y)} \; 100x^{3/4}y^{1/4}$$

sujeito a:

$200x + 300y = 60.000$

$h(x, y) = 200x + 300y - 60.000$

$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4} + \lambda(200x + 300y - 60.000)$

$F_x = 75x^{-1/4}y^{1/4} + 200\lambda = 0$

$F_y = 25x^{3/4}y^{-3/4} + 300\lambda = 0$

$F_\lambda = 200x + 300y - 60.000 = 0$

$x = 225 \;\; y = 50 \;\; \lambda \approx -0.257$

$f(225, 50) = 100 \cdot 225^{3/4} \cdot 50^{1/4} = 15.448$

A **produção máxima é de 15.448 unidades**
e é obtida considerando
225 unidades de mão-de-obra
e **50 unidades de capital**.

Observação necessária

$f(x) = -0.000002x^3 + 6x - 400$

$-f(x) = 0.000002x^3 - 6x + 400$

$f(x) = 0.063447x^4 - 1.953283x^3 + 14.632576x^2 - 6.684704x + 47.458874$

$-f(x) = -0.063447x^4 + 1.953283x^3 - 14.632576x^2 + 6.684704x - 47.458874$

$x^* = \max_x \; f(x)$

$x^* = \min_x \; [-f(x)]$

é equivalente

Condições de Karush-Kuhn-Tucker KKT (Condições de primeira ordem)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \; f(x)$$

sujeito a:

$h(x) = 0$

$g(x) \leq 0$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Teorema

Sejam $f, g, h \in \mathcal{C}^1$ e x^* um mínimo local do problema de minimizar f restrito a $h(x) = 0$ e $g(x) \leq 0$. Então existem $\mu^* \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ tais que:

1. $\mu^* \geq 0$
2. $\nabla f(x^*) + \mu_1 \nabla g_1(x^*) + \cdots + \mu_m \nabla g_m(x^*) + \lambda_1 \nabla h_1(x^*) + \cdots + \lambda_p \nabla h_p(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n}$
3. $\mu_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, \cdots, m$

n : quantidade de variáveis

p : quantidade de restrições de igualdade

m : quantidade de restrições de desigualdade

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \quad x^2 - 2x + y - 1$$

sujeito a:

$x + y \leq 2$

$y - x = 1$

$f(x,y) = x^2 - 2x + y - 1$

$g(x,y) = x + y - 2$

$h(x,y) = y - x - 1$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (2x - 2, 1)$$

$$\nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = (1, 1)$$

$$\nabla h(x,y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right) = (-1, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 1$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 1$$
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = -1$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 1$$

1. $\mu \geq 0$
2. $\nabla f(x,y) + \mu \nabla g(x,y) + \lambda \nabla h(x,y) = (0,0)$
3. $\mu g(x,y) = 0$

$$\nabla f(x,y) + \mu \nabla g(x,y) + \lambda \nabla h(x,y) = (0,0)$$
$$(2x-2, 1) + \mu(1,1) + \lambda(-1,1) = (0,0)$$
$$(2x-2, 1) + (\mu, \mu) + (-\lambda, \lambda) = (0,0)$$
$$(2x-2+\mu-\lambda, 1+\mu+\lambda) = (0,0)$$
$$2x - 2 + \mu - \lambda = 0$$
$$1 + \mu + \lambda = 0$$

$\mu g(x, y) = 0$
$\mu(x + y - 2) = 0$

1. $\mu \geq 0$
2. $2x - 2 + \mu - \lambda = 0$
   $1 + \mu + \lambda = 0$
3. $\mu(x + y - 2) = 0$
4. $x + y \leq 2$ e $y - x = 1$

$\mu(x + y - 2) = 0 \Rightarrow \mu = 0$ ou $x + y - 2 = 0$

Da condição 2
Restrição do problema
Candidato a ponto de mínimo: $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

$\mu = 0$: $2x - 2 - \lambda = 0$ e $1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ e
$2x - 2 - (-1) = 0 \Rightarrow 2x - 2 + 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
Utilizando que $y - x = 1$, obtemos $y - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

$x + y - 2 = 0$: $x = 2 - y$ substituindo este valor de x na equação
$y - x = 1$ obtemos $y - (2 - y) = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$

Conferindo se $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{3}{2}$ satisfazem as restrições:
$x + y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \leq 2$ OK
$y - x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ OK
O ponto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ é um candidato!
Precisamos verificar as condições de segunda ordem...

Condições necessárias de segunda ordem

Se, em adição às condições de primeira ordem também vale que para todo $b \in T(x^*, \mu^*), b^T \mathbb{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) b \geq 0$ (definida positiva), então x^* é um mínimo local, onde

- $T(x^*, \mu^*) = \{b : \nabla h(x^*) b = 0 \;\; e \;\; \nabla g_i(x^*) b = 0, i \in \mathbb{J}\}$, $\mathbb{J} = \{i : g_i(x^*) = 0, \mu_i^* > 0\}$
- $\mathbb{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \mathbb{F}(x) + [\lambda \mathbb{H}(x)] + [\mu \mathbb{G}(x)]$
  - $\mathbb{F}(x)$ é a matriz hessiana de f em x
  - $[\lambda \mathbb{H}(x)] = \lambda_1 H_1(x) + \cdots + \lambda_p H_p(x)$, H_i é a matriz hessiana de h_i em x
  - $[\mu \mathbb{G}(x)] = \mu G_1(x) + \cdots + \mu_m G_m(x)$, G_i é a matriz hessiana de g_i em x
  - $G_k(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g_k(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_k(x)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g_k(x)}{\partial x_1 \partial x_n} & \vdots & \frac{\partial^2 g_k(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$

Analisando se $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ é ponto de mínimo:

$$\begin{aligned} T(x^*, \mu^*) &= \{b : \nabla h(x^*)b = 0 \;\; e \;\; \nabla g_i(x^*)b = 0, i \in \mathbb{J}\}, \\ &= \{b : (-1, 1)(b_1, b_2) = 0\} \\ & \quad \Rightarrow -b_1 + b_2 = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 \end{aligned}$$

$b = (b_1, b_1)$
$\mathbb{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \mathbb{F}(x) + [\lambda^* \mathbb{H}(x)] + [\mu^* \mathbb{G}(x)]$
$f_x(x, y) = 2x - 2$ $f_y(x, y) = 1$ $g_x(x, y) = 1$ $g_y(x, y) = 1$ $h_x(x, y) = -1$ $h_y(x, y) = 1$

$$\mathbb{F}(x) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{G}(x) = \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{H}(x) = \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}(x^*,\lambda^*,\mu^*) = \mathbb{F}(x) + [\lambda\mathbb{H}(x)] + [\mu\mathbb{G}(x)]$$
$$\mathbb{L}(x^*,\lambda^*,\mu^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda^* \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu^* \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$b^T\mathbb{L}(x^*,\lambda^*,\mu^*)b \geq 0$$
$$[b_1 b_1] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = 2b_1^2 \geq 0$$
Portanto, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ é um mínimo local do problema de otimização.

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \quad x^2 + y^2$$

sujeito a:

$x \geq 0 \qquad\qquad -x \leq 0$

$y \geq 0 \qquad\qquad -y \leq 0$

$x + y \geq 5 \qquad\qquad -x - y \leq -5$

$f(x, y) = x^2 + y^2 \; g_1(x, y) = -x \; g_2(x, y) = -y \; g_3(x, y) = -x - y + 5$

Condições de KKT

1. $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0$
2. $\nabla f(x, y) + \mu_1 \nabla g_1(x, y) + \mu_2 \nabla g_2(x, y) + \mu_3 \nabla g_3(x, y) = (0, 0)$
3. - $\mu_1 g_1(x, y) = 0$
   - $\mu_2 g_2(x, y) = 0$
   - $\mu_3 g_3(x, y) = 0$

$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (2x, 2y)$$
$$\nabla g_1(x,y) = (g_{1_x}, g_{1_y}) = (-1, 0)$$
$$\nabla g_2(x,y) = (g_{2_x}, g_{2_y}) = (0, -1)$$
$$\nabla g_3(x,y) = (g_{3_x}, g_{3_y}) = (-1, -1)$$
$$\nabla f(x,y) + \mu_1 \nabla g_1(x,y) + \mu_2 \nabla g_2(x,y) + \mu_3 \nabla g_3(x,y) = (0,0)$$
$$(2x, 2y) + \mu_1(-1, 0) + \mu_2(0, -1) + \mu_3(-1, -1) = (0,0)$$
$$(2x - \mu_1 - \mu_3, 2y - \mu_2 - \mu_3) = (0,0)$$
$$2x - \mu_1 - \mu_3 = 0$$
$$2y - \mu_2 - \mu_3 = 0$$

- $\mu_1 g_1(x,y) = 0$
- $\mu_2 g_2(x,y) = 0$
- $\mu_3 g_3(x,y) = 0$

- $\mu_1(-x) = 0$
- $\mu_2(-y) = 0$
- $\mu_3(-x - y + 5) = 0$

$\mu_1 = 0$ ou $x = 0$
$\mu_2 = 0$ ou $y = 0$
$\mu_3 = 0$ ou $x + y = 5$

Casos

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$: $2x = 0$ e $2y = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow x + y = 0 \leq 5$
Não é factível

$\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\mu_3 > 0$: Como $\mu_3 > 0$, então $x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - y$
$2x - \mu_3 = 0$
$2y - \mu_3 = 0$
$2(5 - y) - \mu_3 = 0 \Rightarrow 10 - 2y - \mu_3 = 0 \Rightarrow$
$\mu_3 = 10 - 2y \Rightarrow 2y - 10 + 2y = 0 \Rightarrow 4y = 10 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$
$x = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$
$(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ é factível
$\mu_3 = 2\frac{5}{2} = 5$

$\mu_1 = \mu_3 = 0$ e $\mu_2 > 0$: Como $\mu_2 > 0$ então $y = 0$
$\mu_1 = \mu_3 = 0 \Rightarrow x = 0$
$x + y = 0 + 0 = 0 \leq 5$ Não é factível

$\mu_2 = \mu_3 = 0$ e $\mu_1 > 0$: Como $\mu_1 > 0$ então $x = 0$
$\mu_2 = \mu_3 = 0 \Rightarrow y = 0$ $(0, 0)$ não é factível

O único candidato a ponto de mínimo é $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

Condições de segunda ordem

$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, 0, 5)$

$T(x, y, \mu_3) = \{(b_1, b_2) : \nabla g_3(x, y) \cdot (b_1, b_2) = 0\}$

$= \{(b_1, b_2) : (-1, -1)(b_1, b_2) = 0\} = \{(b_1, b_2) : -b_1 - b_2 = 0\}$

$= \{(b_1, b_2) : b_2 = -b_1\}$

$$\mathbb{L}(x^*, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mathbb{F}(x) + \mu_1 G_1(x) + \mu_2 G_2(x) + \mu_3 G_3(x)$$

$$\mathbb{F}(x) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} g_{3_{xx}} & g_{3_{xy}} \\ g_{3_{yx}} & g_{3_{yy}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}(\tfrac{5}{2}, \tfrac{5}{2}, 0, 0, 5) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot G_1 + 0 \cdot G_2 + 5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}(x^*, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b^T \mathbb{L}(x^*, \mu^*) b \geq 0$$

$$[b_1 \ -b_1] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ -b_1 \end{bmatrix} = 4b_1^2 \geq 0$$

Portanto, $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$
é um mínimo local
do problema de otimização.

$$f_x = 2x \;\; f_y = 2y \;\; g_{1_x} = -1 \;\; g_{1_y} = 0$$
$$g_{2_x} = 0 \; g_{2_y} = -1 \; g_{3_x} = -1 \; g_{3_y} = -1$$