

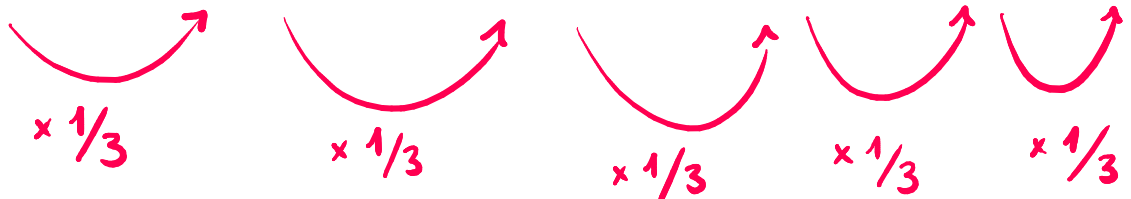
· PROGRESSÃO GEOMÉTRICA ·

EXEMPLOS

(i) 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 ...



(ii) 19.683 , 6.561 , 2.187 , 729 , 243 , 81



(iii) 100 , 80 , 64 , 51.2 ...



DEFINIÇÃO

Uma progressão geométrica de razão q é uma sequência tal que

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

EX.

2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 ...

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6

$q = 2$



EXEMPLO

Encontre a razão e classifique a P.G. quanto ao crescimento.

(i) $-48, -12, -3, \dots$

$\Rightarrow q = \frac{1}{4}$
crescente

$\times q$ $\times q$

(ii) $100, 50, 25, \dots$

$\Rightarrow q = \frac{1}{2}$
decrescente

$\times q$ $\times q$

(iii) $3, 18, 108, \dots$

$\Rightarrow q = 6$
crescente

$\times q$ $\times q$

(iv) $3, -6, 12, -24, 48, \dots$

$\Rightarrow q = -2$

$\times (-2)$ $\times (-2)$ $\times (-2)$ $\times (-2)$

TERMO GERAL DA P.G.

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = (a_1 \cdot q^3) \cdot q = a_1 \cdot q^4$$

$$a_6 = (a_1 \cdot q^4) \cdot q = a_1 \cdot q^5$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$



EXEMPLO 01

Determine o décimo termo da P.G.:

$$1, \sqrt{5}, 5 \dots$$

R :

$$a_1 = 1 \text{ e } q = \sqrt{5}$$

$$\hookrightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 1 \cdot \sqrt{5}^{n-1}$$

$$a_{10} = \sqrt{5}^{10-1} = \sqrt{5}^8 \cdot \sqrt{5}^1$$

$$= \underline{625\sqrt{5}}$$



EXEMPLO 02

Numa P.G. tem-se $a_4 = 12$ e $a_9 = 100$.

Quanto vale a_{12} ?

R :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$(i) a_4 = a_1 \cdot q^3 = 12$$

$$(ii) a_9 = a_1 \cdot q^8 = 100$$

$$\frac{a_1 \cdot q^8}{a_1 \cdot q^3} = \frac{100}{12}$$

$$q^5 = \frac{25}{3}$$

$$q = \sqrt[5]{\frac{25}{3}} = \left(\frac{25}{3}\right)^{1/5}$$

$$(i) a_1 \cdot q^3 = 12 \quad \therefore a_1 \cdot \left(\frac{25}{3}\right)^{3/5} = 12$$

$$a_1 = 12 \cdot \left(\frac{3}{25}\right)^{3/5}$$

$$\hookrightarrow a_{12} = a_1 \cdot q^{11} = 12 \cdot \left(\frac{3}{25}\right)^{3/5} \times \left(\frac{25}{3}\right)^{11/5}$$

SOMA DOS TERMOS

(i) P.G. INFINITA

a) CRESCENTE

3, 9, 27, 81, ...

A soma tende a infinito

b) DECRESCENTE

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, ...

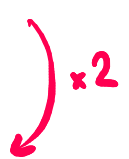
e' possível fazer a soma!

0,015625



Vamos calcular :

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

 $\times 2$

$$2S = 2 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots}_S$$

$$2S = 2 + S \quad \therefore \boxed{S = 2}$$



De modo geral ($a_1 > 0$ e $0 < q < 1$)

$$S_{\infty} = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots$$

$\times \frac{1}{q}$

$$\frac{S}{q} = \frac{a_1}{q} + \underbrace{a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots}_{S_{\infty}}$$

$$\frac{S_{\infty}}{q} = \frac{a_1}{q} + S_{\infty} \quad \therefore S_{\infty} = a_1 + q \cdot S_{\infty}$$

$$S_{\infty} - q \cdot S_{\infty} = a_1 \quad \therefore S_{\infty}(1 - q) = a_1$$

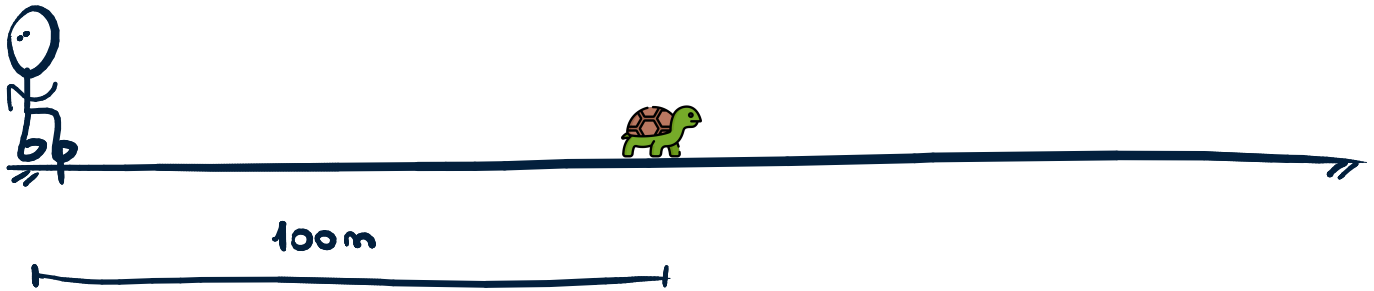
$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - q}$$



EXEMPLO

PARADOXO DE ZENÃO

AQUILES



Nos primeiros 50m Aquiles leva 10s para percorrer o trecho. Se a cada novo trecho ele percorre metade da distância que o separa da tartaruga, gastando para tal metade do tempo do trecho anterior, quanto tempo ele leva para alcançá-la?

R:

$$\Delta t = 10 + 5 + 2,5 + 1,25 + \dots$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = \underline{20\text{seg}}$$



(ii) P.G. FINITA

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)}$$

EXEMPLO

Calcule a soma dos 10 primeiros termos da
P.G. 8, 16, 32 ...

R:

$$a_1 = 8 \quad e \quad q = 2$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)} = \frac{8(2^n - 1)}{(2 - 1)} = 8(2^n - 1)$$

$$S_{10} = 8(2^{10} - 1)$$



DEMONSTRAÇÃO

$$S_n = a_1 + \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{a_1 \cdot q^2} + \cancel{a_1 \cdot q^3} + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \quad (\text{I})$$

$$q \cdot S_n = \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{a_1 \cdot q^2} + \cancel{a_1 \cdot q^3} + a_1 \cdot q^4 + \dots + a_1 \cdot q^n \quad (\text{II})$$

$$(\text{II}) - (\text{I}) : qS_n - S_n = -a_1 + a_1 \cdot q^n$$

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)} \quad \square$$



PRODUTO DOS TERMOS

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

(i)

$$\boxed{a_1} \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot \boxed{a_n}$$

$a_1 \cdot q^{n-1}$

$$P = a_1 \cdot a_n = a_1^2 \cdot q^{n-1}$$

(ii)

$$a_1 \cdot \boxed{a_2} \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot \boxed{a_{n-1}} \cdot a_n$$

$a_1 \cdot q$ $a_1 \cdot q^{n-2}$

$$P = a_2 \cdot a_{n-1} = a_1^2 \cdot q^{n-1}$$

(iii)

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \boxed{a_3} \cdot \dots \cdot \boxed{a_{n-2}} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

$a_1 \cdot q^2$ $a_1 \cdot q^{n-3}$

$$P = a_3 \cdot a_{n-2} = a_1^2 \cdot q^{n-1}$$



Logo:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

$$= (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \dots$$

$$= \underbrace{(a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot \dots \cdot (a_1 \cdot a_n)}_{n/2 \text{ vezes}}$$

$$= (a_1 \cdot a_n)^{n/2}$$

$$= (a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1})^{n/2} = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$



EXEMPLO

Calcule o produto dos 20 primeiros termos da P.G. : $(\frac{2}{5} ; 2, 10 \dots)$

R :

$$\begin{array}{l} \text{P.G.} \rightarrow a_1 = \frac{2}{5} \\ \hookrightarrow q = 5 \end{array}$$

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot 5^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\prod_{i=1}^{20} a_i = \left(\frac{2}{5}\right)^{20} \cdot 5^{\frac{20 \cdot 19}{2}} = \frac{2^{20}}{5^{20}} \cdot 5^{190}$$

$$= \frac{2^{20} \cdot 5^{170}}{\quad}$$



~~PROGRESSÕES ARITMÉTICO - GEOMÉTRICAS~~

Trata-se de uma sequência do tipo

$$a ; (a+r) \cdot q ; (a+2r) q^2 ; (a+3r) q^3 \dots$$

$$\dots [a+(n-1)r] \cdot q^{n-1}$$



EXEMPLO

Calcule a soma dos n primeiros termos da sequência:

$$1, 5 \cdot 3, 9 \cdot 3^2, 13 \cdot 3^3, 17 \cdot 3^4 \dots$$

R :

$$a_n = [a_1 + (n-1) \cdot r] \cdot q^{n-1} = [1 + (n-1) \cdot 4] \cdot 3^{n-1}$$

$$= (4n - 3) \cdot 3^{n-1}$$

$$S = 1 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 3^2 + 13 \cdot 3^3 + 17 \cdot 3^4 + \dots + (4n - 3) \cdot 3^{n-1}$$

$$3S = 3 + 5 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3^3 + 13 \cdot 3^4 + 17 \cdot 3^5 + \dots + (4n - 3) \cdot 3^n$$

Subtraindo :

$$-2S = 1 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4 + \dots + 4 \cdot 3^{n-1} + (4n - 3) \cdot 3^n$$

$$-25 = 1 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4 + \dots + 4 \cdot 3^{n-1} + (4n-3) \cdot 3^n$$

$$S = -\frac{1}{2} - 2 \left[\underbrace{3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-1}} \right] + (4n-3) \cdot 3^n$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)} = \frac{3(3^{n-1} - 1)}{(3 - 1)}$$

$$S = -\frac{1}{2} - \cancel{2} \cdot \frac{3(3^{n-1} - 1)}{\cancel{2}} + (4n-3) \cdot 3^n$$

$$S = 3^n - 3 + 4n \cdot 3^n - 3^{n+1} - \frac{1}{2}$$

$$S = 3^n(4n+1) - 3(1+3^n) - \frac{1}{2}$$

