Aula 14

TRF 1ª Região (Oficial de Justiça) Raciocínio Analítico e Raciocínio Lógico - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

15 de Março de 2023

Índice

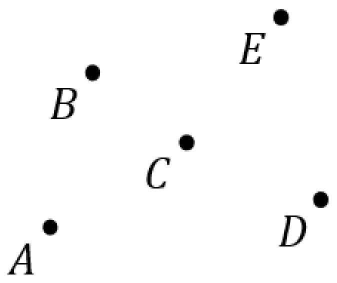
GEOMETRIA PLANA

Noções Elementares

Ponto e Reta

Ponto

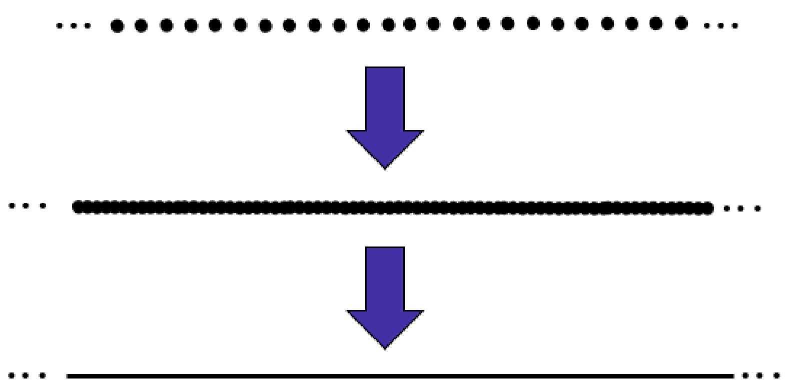
O ponto, a reta e o plano são noções bem **primitivas** de geometria. Tente definir um ponto. Você vai perceber que existe uma certa dificuldade nisso (rsrs). Apesar de não ter uma definição "pra valer", sabemos algumas de suas propriedades, de forma que conseguimos identificá-lo e caracterizá-lo.



A figura acima mostra vários exemplos de pontos. Você pode notar que chamamos cada um deles de uma **letra maiúscula**. É a notação mais comum. Uma outra característica do ponto é que ele **não possui dimensão**. Dizemos que é um elemento adimensional. Esse fato permite usarmos o ponto para identificar uma localização com bastante acuracidade. Por fim, vale a pena você anotar aí que não podemos dividir um ponto. Isso mesmo, você não pode "quebrar" um ponto em dois pontos.

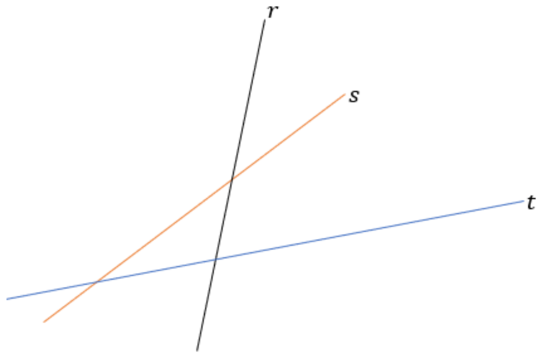
Reta

Por sua vez, **a reta vai ser formada pela união de infinitos pontos**.



Na imagem acima, tentei representar vários pontos se aglomerando até formarem uma reta (rsrs). Vamos lá! *Quais são as características de uma reta?* Primeiro: **ela é unidimensional**. Enquanto um ponto não possui dimensão (é adimensional), a reta agora é unidimensional.

Segundo: **ela é infinita para ambos os lados**! Ou seja, ela segue indefinidamente para qualquer um dos lados (apesar de não ser obrigatório, podemos usar reticencias nas duas "extremidades" da reta para expressar esse fato).



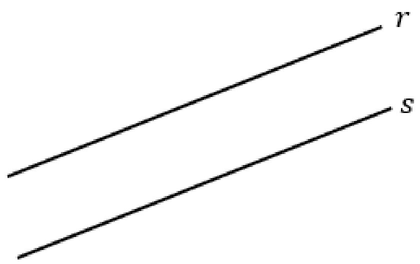
A imagem acima mostra a notação que usamos para as retas: **letras minúsculas**. Enquanto nos pontos usamos letras maiúsculas, nas retas são letras minúsculas! Vale ressaltar que o alfabeto que estamos utilizando de referência aqui é o latino (Aa, Bb, Cc, ..., Zz).

Agora, vou contar para vocês uma novidade. Em algumas situações, a reta terá extremidade(s). Logo, ela não se prolongará até ao infinito nos dois lados. Quando ela tiver **uma extremidade**, a chamaremos de **semirreta**. Por sua vez, quando ela tiver as **duas extremidades**, será apenas um **segmento de reta**.

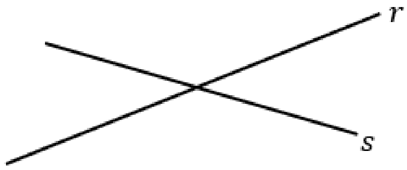
SEMIRRETA

SEGMENTO DE RETA

Normalmente, representamos o segmento de reta com extremidades A e B por $\overline{AB}$. Além desse detalhe, existe mais uma classificação que leva em conta se duas ou mais retas estão se encontrando. *Como assim?!*



RETAS PARALELAS



RETAS CONCORRENTES

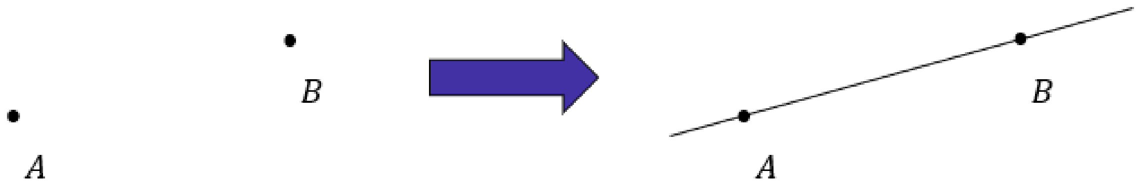
As **retas paralelas não se encontram**, enquanto as **retas concorrentes sim**. Essas últimas possuem **um único ponto em comum**. Duas retas que se encontram em mais de um ponto necessariamente vão se encontrar em todos os demais e serão chamadas retas coincidentes!

RETAS COINCIDENTES

É como se uma reta estivesse em cima da outra!!

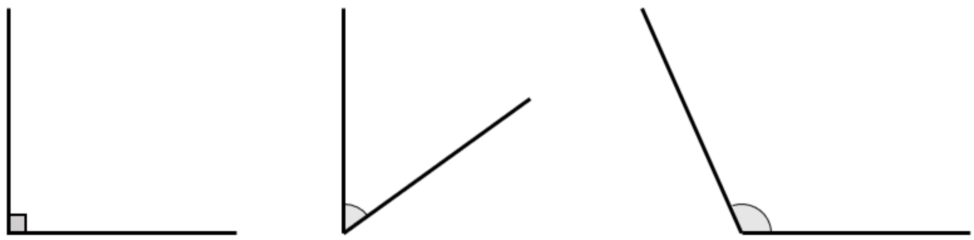
Para finalizar essa parte introdutória de retas, anote aí a seguinte propriedade:

- Sempre conseguiremos traçar uma reta por quaisquer dois pontos. Essa reta será única.

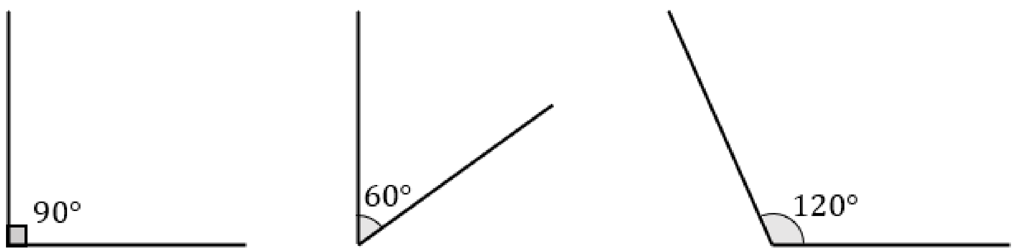


Ângulos

Um ângulo é formado pelo **encontro de duas semirretas**. Esse encontro pode se dar de várias formas. Veja.

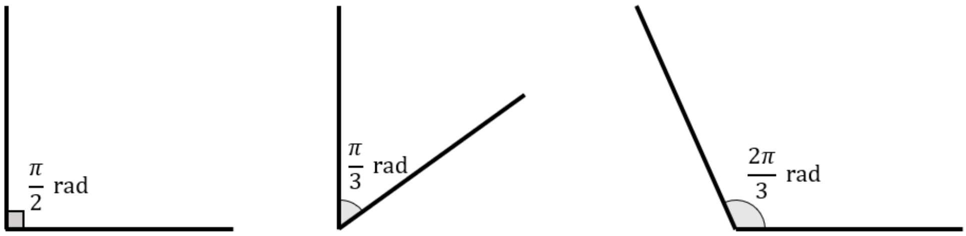


Perceba que dependendo de como arranjamos as semirretas, vamos ter aberturas diferentes. Nós podemos **quantificar essa abertura e expressar o resultado em graus (°) ou radianos (rad)**.



ÂNGULOS REPRESENTADOS EM GRAUS (°)

Agora olhe os mesmos ângulos, mas expressados em radianos.



ÂNGULOS REPRESENTADOS EM RADIANOS (rad)

São duas maneiras bem diferentes de expressarmos os ângulos, concorda? Muitos alunos possuem facilidade quando estão trabalhando com graus (°), mas quando aparece um ângulo em radianos (rad), já ficam assustados. Moçada, apenas uma regra de três simples separa um ângulo em radiano de um ângulo em grau (ou vice-versa). Para isso, lembre-se sempre do seguinte:

"$180°$ equivalem a π rad."

Sabendo disso, é só usar uma regra de três para converter um em outro. Vamos fazer alguns exemplos.

1) Converter 60° em radianos.

Você pensa assim: se 180° equivalem a π rad, então 60° equivalem a x. Com isso, podemos esquematizar:

$$180° \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$

$$60° \longleftrightarrow x$$

Multiplicando cruzado.

$$180x = 60\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{60\pi}{180} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}} \textbf{ rad}$$

Logo, podemos dizer que 60° equivalem a $\pi/3$ rad.

2) Converter $\frac{5\pi}{6}$ rad em graus.

Pensamento muito semelhante, moçada! Se 180° equivalem a π rad, então x equivalem a $\frac{5\pi}{6}$ rad.

$$180° \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$

$$x \longleftrightarrow \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

Multiplicando cruzado.

$$x \cdot \pi = 180 \cdot \frac{5\pi}{6} \quad \rightarrow \quad x = 30 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad x = 150°$$

Logo, $\frac{5\pi}{6}$ rad equivalem a 150°.

A tabela abaixo mostra os ângulos (em graus) mais frequentes em provas, bem como seu valor em radianos.

ESQUEMATIZANDO

Principais Ângulos			
Em Graus	Em Radianos	Em Graus	Em Radianos
$0°$	0 rad	$120°$	$\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$
$30°$	$\frac{\pi}{6} \text{ rad}$	$150°$	$\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$
$45°$	$\frac{\pi}{4} \text{ rad}$	$180°$	$\pi \text{ rad}$
$60°$	$\frac{\pi}{3} \text{ rad}$	$270°$	$\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$
$90°$	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$360°$	$2\pi \text{ rad}$

HORA DE PRATICAR!

(EEAR/2019) Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual:

A) 48°
B) 54°
C) 66°
D) 72°

Comentários:

Para treinar, moçada! Ora, se 180° equivalem a π rad, então x graus equivalem a $\frac{3\pi}{10}$ rad. Vamos esquematizar.

$$180° \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$

$$x \longleftrightarrow \frac{3\pi}{10} \text{ rad}$$

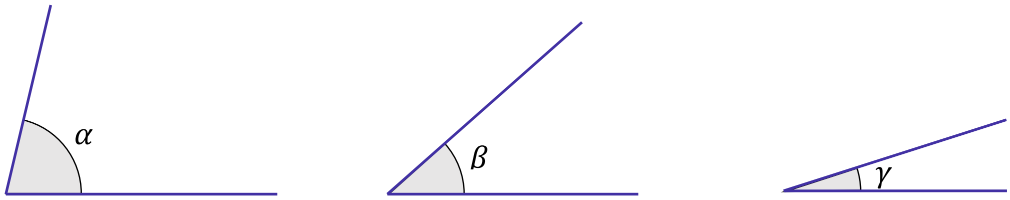
Multiplicando cruzado.

$$x \cdot \pi = 180 \cdot \frac{3\pi}{10} \quad \rightarrow \quad x = 18 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad x = 54°$$

Gabarito: LETRA B.

Agora que sabemos o que é um ângulo e suas unidades, vamos entrar nas nomenclaturas e classificações.

- **Ângulo Raso:** É o ângulo de 180° (π rad).
- **Ângulo Reto:** É o ângulo de 90° ($\pi/2$ rad)
- **Ângulo Agudo:** Todo ângulo maior que 0° e menor que 90°.

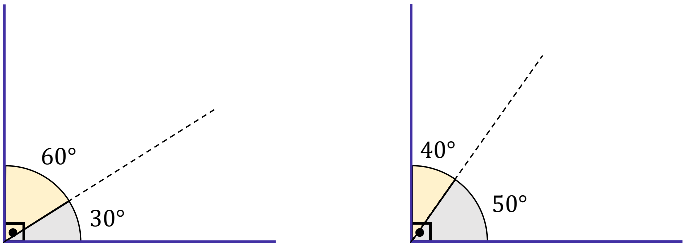


α, β *e* γ *são ângulos agudos.*

- **Ângulo Obtuso:** Todo ângulo maior que 90° e menor que 180°.

δ *e* θ *são ângulos obtusos.*

- **Ângulos Complementares**: Dois ângulos são chamados de complementares quando sua soma é igual a 90°.



Por exemplo, 60° e 30° são ângulos complementares, já que $30° + 60° = 90°$. Da mesma forma, 40° e 50° também são. Beleza?!!

- **Ângulos Suplementares**: Dois ângulos são chamados de complementares quando sua soma é igual a 180°.

Observe que 150° e 30° são ângulos suplementares, uma vez que sua soma é igual a 180°. Da mesma forma, 75° e 105° também são.

- **Ângulos Replementares:** Dois ângulos são chamados de replementares quando sua soma é 360°.

- $330°$ e $30°$ são ângulos replementares pois $330° + 30° = 360°$.
- $210°$ e $150°$ também são ângulos replementares, já que $210° + 150° = 360°$.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. ÁGUIA BRANCA/2018) O replemento do ângulo de 275° é:
A) 85°.
B) 95°.
C) 35°.
D) 25°.
E) 185°.

Comentários:
O replemento do ângulo de 275° é o ângulo que quando eu somar com 275 vai resultar em 360°. Assim,

$$275° + x = 360° \quad \rightarrow \quad x = 360° - 275° \quad \rightarrow \quad x = 85°$$

Gabarito: LETRA A.

(PREF. SM CAMPOS/2017) Dadas as afirmativas a respeito de ângulos,

I. Um ângulo de 80° é um ângulo reto.
II. Um ângulo de 105° é um ângulo obtuso.
III. Um ângulo de 5° é um ângulo agudo.

verifica-se que está(ão) correta(s)
A) I, apenas.
B) II, apenas.
C) I e III, apenas.
D) II e III, apenas.
E) I, II e III.

Comentários:
Vamos avaliar cada uma das afirmativas.

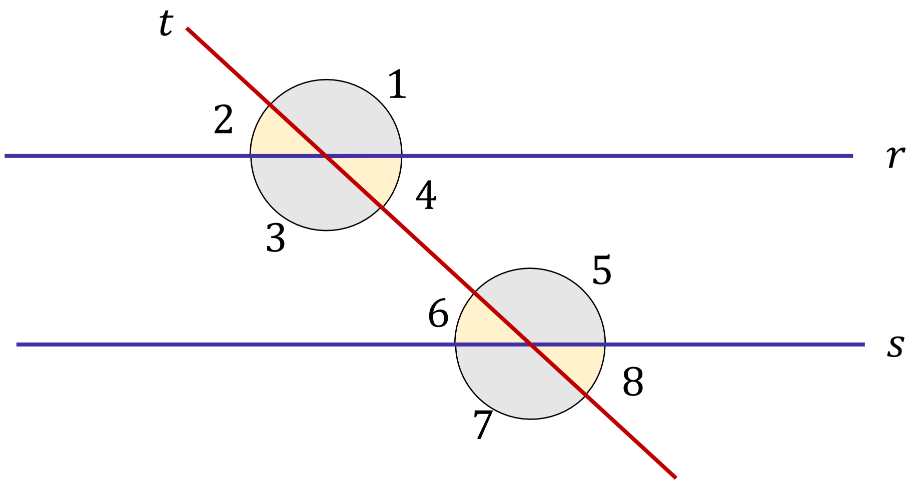
I. Um ângulo de 80° é um ângulo reto.
ERRADO. O ângulo reto é o ângulo de 90°.

II. Um ângulo de 105° é um ângulo obtuso.
CERTO. Qualquer ângulo maior que 90° e menor que 180° é um ângulo obtuso.

III. Um ângulo de 5° é um ângulo agudo.
CERTO. Qualquer ângulo maior que 0° e menor que 90° é um ângulo agudo.

Gabarito: LETRA D.

Para finalizar essa parte de ângulos, vamos conhecer mais alguns nomes que podem aparecer na sua prova. Considere a seguinte situação:

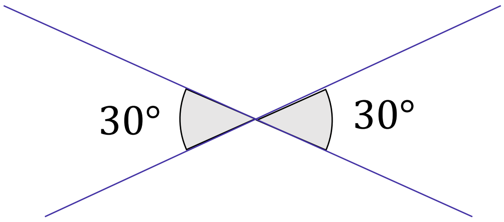


r e s são retas paralelas, enquanto t é uma transversal. Observe que quando a transversal corta as duas retas paralelas, vários ângulos são formados. Esses 8 novos ângulos ganham nomes. Vamos lá!

- Ângulos opostos pelo vértice: $(1,3), (2,4), (5,7)$ e $(6,8)$;
- Ângulos alternos internos: $(4,6)$ e $(3,5)$;
- Ângulos alternos externos: $(2,8)$ e $(1,7)$;
- Ângulos colaterais internos: $(3,6)$ e $(4,5)$;
- Ângulos colaterais externos: $(1,8)$ e $(2,7)$.

Professor, é muito nome! É muita coisa! Vou endoidar!

Calma, aluno! Se eu tivesse que escolher o mais importante para te falar, escolheria o oposto pelo vértice. Saiba que se dois ângulos são opostos pelo vértice. A consequência de dois ângulos serem opostos pelo vértice é que eles possuirão a mesma medida!

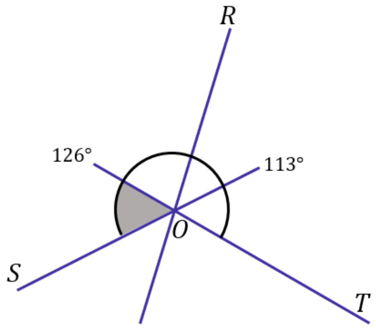


Vale a pena ter em mente que ângulos alternos internos/externos são congruentes (iguais). Por exemplo, voltando para a figura da página anterior,

- Como 4 e 6 são ângulos alternos internos, então eles possuem a mesma medida (são congruentes).
- Como 1 e 7 são ângulos alternos externos, então eles também possuem a mesma medida (são congruentes).

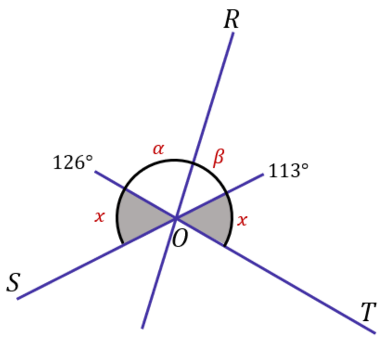
Dito tudo isso, agora vamos exercitar um pouco!

(PREF. SUZANO/2019) Três retas interceptam-se em um ponto O, formando a figura a seguir.



Considerando que RÔS mede 126° e RÔT mede 113°, a medida do ângulo destacado em cinza é:
A) 36°
B) 59°
C) 67°
D) 121°

Comentários:
A primeira coisa que deveríamos perceber é que **o ângulo destacado em cinza é igual ao que está atrás dele**. Veja que são ângulos opostos pelo vértice.



Observe que aproveitamos para dar "nome aos bois". **Chamamos cada ângulo de uma letra**. Do enunciado, sabemos que **RÔS mede 126°**. Assim,

$$x + \alpha = 126° \qquad (1)$$

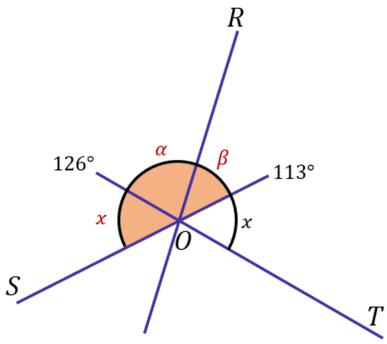
Temos também a informação que **RÔT mede 113°.** Assim,

$$x + \beta = 113° \qquad (2)$$

Vamos somar a equação (1) com a equação (2), membro a membro.

$$(x+\alpha)+(x+\beta)=126^\circ+113^\circ \quad \rightarrow \quad x+\boldsymbol{(x+\alpha+\beta)}=239^\circ$$

Pessoal, vocês estão vendo que eu destaquei uma parte da soma na nossa equação. Quero que você volte para nossa figura acima e veja que **a soma destacada é exatamente um ângulo raso, isto é, 180°**.



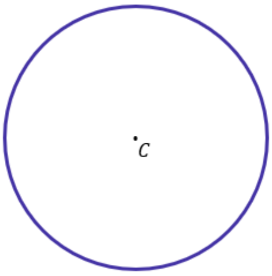
Portanto,

$$x+180^\circ=239^\circ \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x=59^\circ}$$

Gabarito: LETRA B.

Circunferência

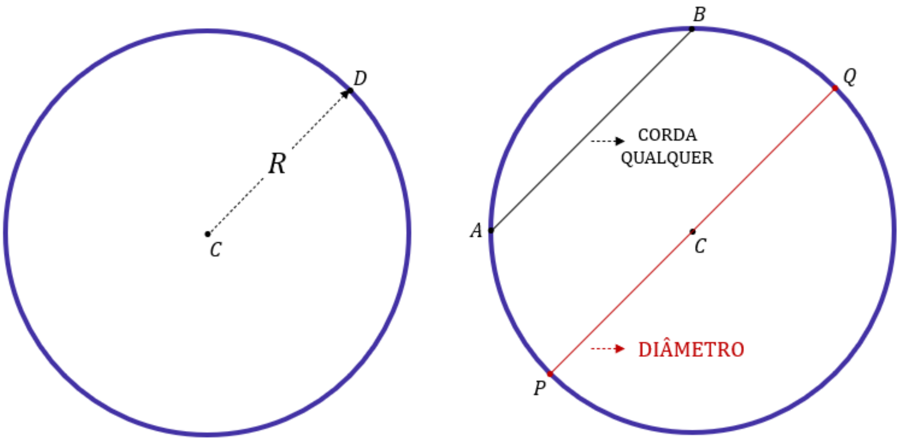
A primeira figura geométrica que estudaremos na aula de hoje será a circunferência. Particularmente, acho ela bem interessante, já que é uma **forma bem corriqueira**. Lembre-se de uma pizza, de um pneu, de uma moeda... todos eles possuem um formato circular (circunferencial). Com um pouco mais de rigor, nós definimos uma circunferência como sendo **o conjunto dos pontos equidistantes de um centro (C)**.



Raio, Diâmetro e Cordas

Quando estamos falando do raio (R) de uma circunferência, estamos falando da **distância entre seus pontos e o centro**. Por sua vez, corda é o segmento de reta que une dois pontos quaisquer de uma circunferência.

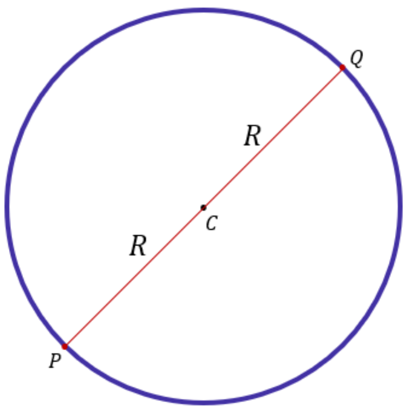
Acontece que **quando essa corda passa pelo centro da circunferência**, **nós a chamamos de diâmetro**. Para um melhor entendimento, vamos dar uma olhada nas figuras abaixo!



A figura de esquerda ilustra **o raio**. É exatamente a distância entre o centro e um ponto da circunferência. Na situação retratada, chamamos esse ponto de D. Já na circunferência da direita, quero mostrar pra você a diferença entre o diâmetro e uma corda qualquer.

Pessoal, para ser diâmetro, **o segmento de reta precisa passar pelo centro da circunferência**. Caso não passe (como o segmento AB), teremos uma corda. É verdade que o diâmetro não deixa de ser uma corda, mas é uma "corda especial", pois ela **é a corda de maior comprimento**!

Se olharmos com atenção para a figura, vemos que o comprimento do diâmetro (ou simplesmente diâmetro a partir de agora) vale exatamente **duas vezes o raio**. Por esse motivo, escrevemos que:



$$\boxed{D = 2R}$$

RESUMINDO

Raio: distância do centro até um ponto da circunferência.

Corda: segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência.

Diâmetro: corda que passa pelo centro da circunferência. Mede o dobro do raio (2R).

(PREF. CHÃ PRETA/2015) O segmento de reta que une dois pontos de uma circunferência é chamado
A) arco.
B) raio.
C) setor.
D) corda.
E) diâmetro.

Comentários:
Questão rápida para testarmos o que acabamos de ver. Na teoria, dissemos que:

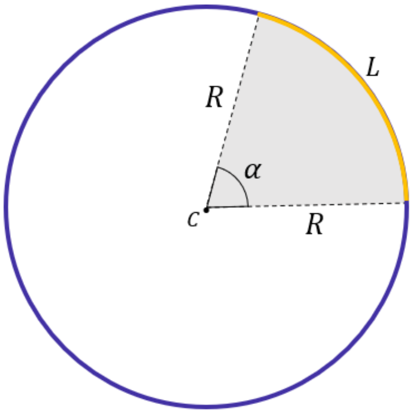
Corda: segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência.

Alguém poderia ter dúvidas sobre a possibilidade desse segmento ser um diâmetro. Note que **o enunciado não fala se o segmento passa pelo centro**. Dessa forma, não podemos garantir que ele seja o diâmetro.

Gabarito: LETRA D

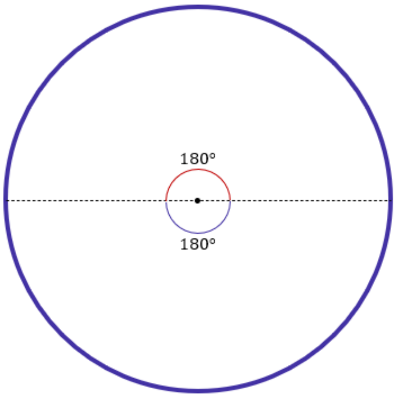
Setores

Um setor de circunferência corresponde à famosa **fatia de pizza**! Observe a figura abaixo.



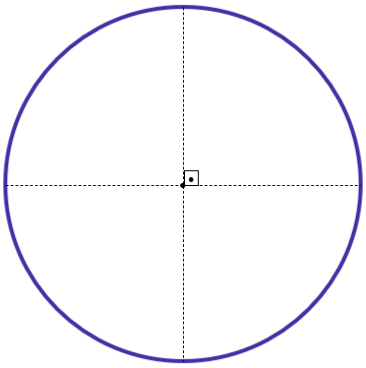
Todo setor possui um ângulo central (α). Além disso, a borda da pizza (destacada de amarelo) possui um comprimento L. É o que chamamos de comprimento do arco. **Esse comprimento L depende tanto do ângulo central $(\boldsymbol{\alpha})$ como do raio $(\boldsymbol{R})$**.

Aprenderemos a calculá-lo em breve. Antes disso, vamos aprender a calcular α. Para isso, imagine que você recebeu uma pizza enorme e vai dividi-la com um colega. Você corta ao meio:



Veja que cada setor ficou com um ângulo central de 180°.

Situação análoga ocorreria se dividíssemos a pizza em 4 fatias idênticas.

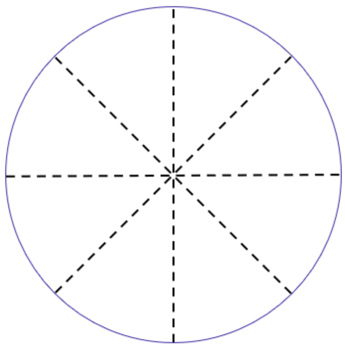


Quando temos quatro setores idênticos, o ângulo central de cada um deles é igual a **um quarto do ângulo total da circunferência**, isto é,

$$\alpha = \frac{360°}{4} \quad \rightarrow \quad \alpha = 90°$$

(CM VINHEDO/2020) Uma pizza de 8 pedaços faz cada fatia ter 45° de ângulo. Se quiser dividir em 9 pedaços, qual deve ser o ângulo da fatia?
A) 40°
B) 42°
C) 50°
D) 60°
E) 45°

Comentários:
Pessoal, **a pizza tem o formato de uma circunferência (normalmente, rsrs)**. Quando dividimos ela em 8 pedaços, ficamos com uma situação parecida com a mostrada a seguir:



Cada fatia corresponde a um setor de circunferência cujo ângulo é a oitava parte de 360°. Afinal, aprendemos que **uma circunferência tem 360°** (ou 2π rad).

$$\alpha = \frac{360°}{8} = 45°$$

Se dividirmos a pizza em 9 pedaços, podemos encontrar o ângulo central de cada setor dividindo **360° por 9**.

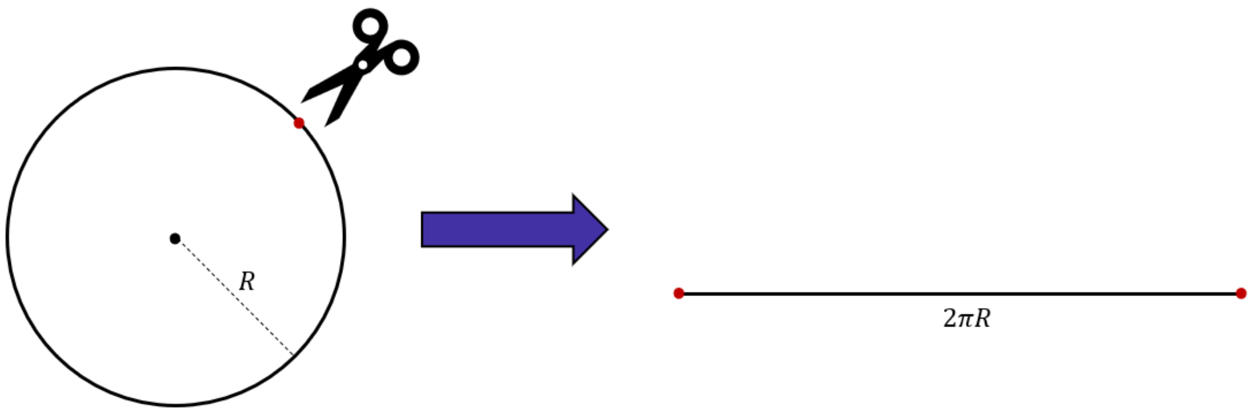
$$\alpha = \frac{360°}{9} = 40°$$

Gabarito: LETRA A.

Beleza, tudo bem até aqui né, pessoal? Vimos um pouco da definição de circunferência, de raio, de corda, de diâmetro e de setores. Espero que tudo esteja fazendo sentido, sempre voltaremos a falar deles! A medida que formos introduzindo novos conceitos, vamos ganhando mais maturidade e voltaremos a comentar aspectos adicionais desses elementos! Agora, continuando!

Comprimento de uma Circunferência

Lembra que no tópico passado eu falei sobre comprimento do arco? Que era tipo a medida da borda da fatia da pizza. Aqui, no comprimento da circunferência, estamos nos referindo **a medida da borda de toda a pizza** e não apenas da fatia! *Eita, tanta pizza que já tá dando fome! (rsrs).* Existe uma figura que eu gosto bastante para explicar o comprimento da circunferência, veja:

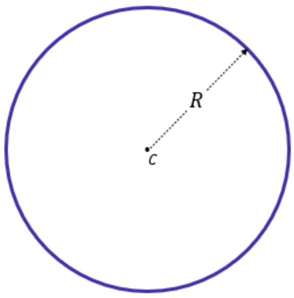


Ficou um pouco melhor de visualizar? Para tentar explicar de uma outra forma, imagine uma formiga no ponto vermelho, onde a tesoura vai cortar! **A distância que ela andaria para completar a volta** (andando apenas sobre a linha preta) é exatamente igual ao comprimento da circunferência (C). Esse valor é dado por uma fórmula bem conhecida que já adiantei um pouco na imagem acima, anota aí!

$$C = 2\pi R$$

HORA DE PRATICAR!

(CM Orizânia/2020) A figura a seguir ilustra a arena de um campeonato de artes marciais, que possui o formato circular e diâmetro de 8 m.



A medida "R" é denominada "raio" e tem sua medida equivalente à metade do diâmetro. Para calcular o comprimento "C" da circunferência, utiliza-se a fórmula: $C = 2\pi R$, em que πvale, aproximadamente, 3,14. O valor aproximado do comprimento da arena citada acima é de:
A) 12,56 m.
B) 25,12 m.
C) 50,24 m.
D) 100,48 m.
E) 200,96 m.

Comentários:
Questão para aplicarmos a fórmula que acabamos de ver! Devemos ter o cuidado de perceber que o enunciado deu o valor do diâmetro (D) e não do raio (R). Lembre-se:

$$D = 2R \quad \rightarrow \quad R = \frac{D}{2} \quad \rightarrow \quad R = \frac{8}{2} \quad \rightarrow \quad R = 4\,m$$

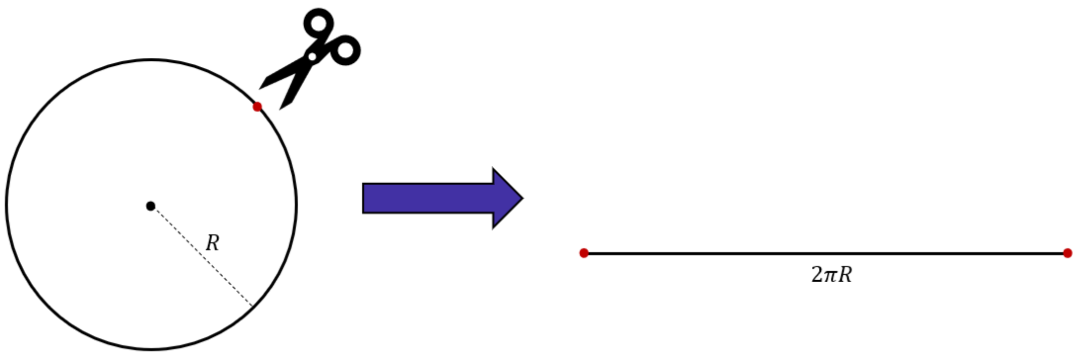
Se a arena tem diâmetro de 8 metros, então seu raio será metade disso, isto é, 4 metros. Com o raio, já conseguimos calcular o comprimento da circunferência.

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad C = 25{,}12\,m$$

Gabarito: LETRA B.

(PREF. C DOS COQUEIROS/2019) O carro de seu Antônio tem uma roda com 80 centímetros de diâmetro. Em certa viagem, seu Antônio totalizou 7.300 voltas em cada roda. Quantos quilômetros foram percorridos nesta viagem?
A) 18,3 km
B) 36,7 km
C) 13,7 km
D) 18,8 km

Comentários:
Esse é um tipo de questão bem clássica sobre comprimento de circunferência.



Quando o pneu dá uma volta, ele anda exatamente u**ma distância equivalente ao comprimento da circunferência**, isto é, $2\pi R$. Se o pneu tem um diâmetro de 80 cm, então sabemos que o raio é 40 cm (**lembre-se que o raio é sempre metade do diâmetro**). A distância que o carro percorrerá quando o pneu der uma volta será dada por:

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 40 \quad \rightarrow \quad C = 251{,}2\ cm$$

Logo, já sabemos que **em uma volta o carro anda $251,2\ cm = 2,512\ metros$**. Para achar quanto o carro anda após 7.300 voltas, devemos fazer uma *regra de três simples*.

$$1\ volta \longleftrightarrow 2{,}512\ metros$$
$$7.300\ voltas \longleftrightarrow x\ metros$$

Podemos multiplicar cruzado.

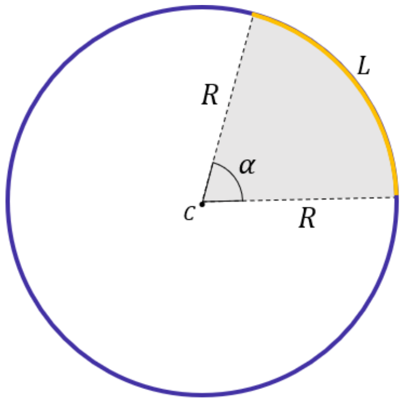
$$1 \cdot x = 7300 \cdot 2{,}512 \quad \rightarrow \quad x = 18.337{,}6\ metros$$

Lembre-se que **1 km é equivalente a 1.000 metros**, assim:

$$x = 18.337{,}6\ metros \cong 18{,}3\ km$$

Gabarito: LETRA A.

Agora que sabemos calcular o comprimento de uma circunferência, podemos fazer uma regra de três simples para achar o comprimento do arco. Voltemos para a figura do setor.



Ora, se quando temos uma circunferência inteira (que possui 360°), o comprimento dela é $2\pi R$, então um arco de ângulo central α tem comprimento L.

$$360° \longleftrightarrow 2\pi R$$
$$\alpha \longleftrightarrow L$$

Multiplicando cruzado.

$$L = 2\pi R \cdot \left(\frac{\alpha}{360°}\right)$$

Essa é a expressão para quando **estamos usando o ângulo central em graus**!! Caso você esteja usando α em radianos, devemos usar 2π na regra de três ao invés de 360°.

$$2\pi \longleftrightarrow 2\pi R$$
$$\alpha \longleftrightarrow L$$

Multiplicando cruzado.

$$L = \alpha \cdot \mathrm{R}$$

Na minha opinião, a fórmula desse jeito é bem mais interessante. Veja que o comprimento do arco L é o **produto do ângulo central (em radianos) pelo raio**. Quando o ângulo central é igual 2π, note que a expressão vira a fórmula do comprimento da circunferência. *Agora, vamos praticá-la?!*

(PREF. BATAGUASU/2021) Se um arco de 120° de um dado círculo tem comprimento de 8π cm, o seu raio tem comprimento:

A) 2π
B) 12 cm
C) 2 cm
D) 32 cm

Comentários:

Pessoal, veja que ele deu o ângulo em graus (120°) e o comprimento do arco (8π). A pergunta que ele faz é: qual é o raio? Ora, se ele deu o ângulo em graus, podemos usar a fórmula:

$$L = 2\pi R \cdot \left(\frac{\alpha}{360°}\right)$$

Do enunciado: $\alpha = 120°$ e $L = 8\pi$ cm. Vamos encontrar R.

$$8\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi} R \cdot \left(\frac{120°}{360°}\right) \quad \rightarrow \quad 4 = R \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \quad \rightarrow \quad R = 12 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA B.

Área de uma Circunferência

Quando calculamos a área de uma figura plana, estamos tentando **quantificar o tamanho da região delimitada por ela**. Pode ser um conceito meio abstrato, mas sempre usamos no dia-a-dia. Se conhecemos o raio da circunferência, podemos calcular sua área.

$$A = \pi R^2$$

Sugiro muito que guardem essa fórmula no coração. Além disso, a dica suprema é: **faça muitos exercícios** que envolvam cálculos de áreas de circunferência. Dessa forma, tenho certeza que ela entrará na "massa do sangue".

(PREF. MOSTARDAS/2020) Quanto mede a circunferência em cm e a área em cm², nessa ordem, de um círculo cujo diâmetro é 10 cm? (utilize $\pi = 3{,}14$)
A) 62,40 e 314.
B) 31,40 e 78,5.
C) 15,70 e 34,25.
D) 7,85 e 17,12.

Comentários:
Note que ele deu o diâmetro da circunferência (10 cm). Lembre-se que **o raio é metade do diâmetro**. Logo,

$$R = 5 \text{ cm}$$

Primeiro vamos calcular o comprimento da circunferência e, depois, a área.

- Comprimento da Circunferência (C)

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad C = 31{,}4 \text{ cm}$$

- Área (A)

$$A = \pi R^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 5^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad A = 78{,}5 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA B.

(PM-SP/2018) Utilizando-se para π o valor aproximado de 3,14, o perímetro de uma região plana em forma de círculo é de aproximadamente 63 m. Dessa forma, das alternativas a seguir, a que apresenta o valor mais aproximado para a área dessa região, em metros quadrados, é
A) 305.
B) 315.

C) 325.
D) 335.
E) 345.

Comentários:
Pessoal, perímetro de um círculo é uma maneira diferente de falar comprimento de circunferência (rsrs). Logo, quando ele diz que o perímetro é de aproximadamente 63 metros, **ele está dando o comprimento da circunferência**. Tendo essa informação, podemos encontrar o raio.

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad R = \frac{C}{2\pi} \quad \rightarrow \quad R = \frac{63}{2 \cdot 3{,}14} \quad \rightarrow \quad R = \frac{63}{6{,}28} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R \cong 10\ metros}$$

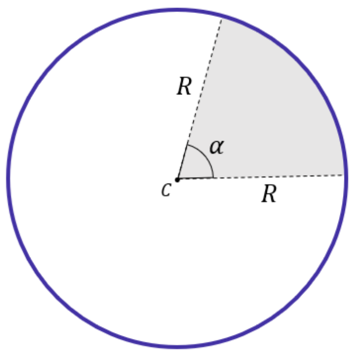
Com **o raio encontrado**, podemos usar a fórmula da área:

$$A = \pi R^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 10^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 100 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 314\ m^2}$$

Veja que a área que mais se aproxima do resultado é 315 m², na letra B.

Gabarito: LETRA B.

Agora que sabemos calcular a área de uma circunferência, podemos voltar e calcular a área de um setor (a famosa fatia da pizza)!



Imagine que queremos **calcular a área do setor** destacado acima. *Como faríamos?* Tem duas maneiras, galera. Ou decoramos a fórmula, ou usamos uma **regra de três simples** para deduzi-la. Para uma circunferência completa (que possui **360° ou 2π rad**), a área é πR^2. Assim,

$$2\pi \longleftrightarrow \pi R^2$$

$$\alpha \longleftrightarrow A_{setor}$$

Multiplicando cruzado, chegamos a:

$$A_{setor} = \frac{\alpha R^2}{2}$$

Uma observação muito importante: para usar a fórmula acima, α **deve estar em radianos**! Caso prefira, podemos fazer a regra de três utilizando 360°.

$$360° \longleftrightarrow \pi R^2$$

$$\alpha \longleftrightarrow A_{setor}$$

Assim,

$$A_{setor} = \left(\frac{\alpha}{360°}\right)\pi R^2$$

Já a fórmula acima é para quando α **estiver em graus**. Note que se você lembra da fórmula da área da circunferência, para obter a fórmula da área do setor, basta utilizarmos uma regra de três. Você não precisa "ocupar o HD" com mais uma coisa! Fique frio!

(PREF. JÁU/2019) Supondo-se que certa pizza no formato circular com perímetro de 94,2 cm foi cortada em três pedaços de mesmo tamanho cada. Sendo assim, assinalar a alternativa que apresenta a área de cada pedaço dessa pizza: (usar: $\pi = 3{,}14$)

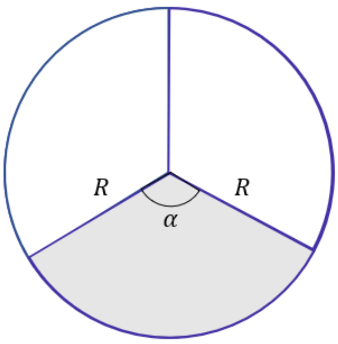
A) 31,4 cm²
B) 188,4 cm²
C) 235,5 cm²
D) 376,8 cm²

Comentários:

Sempre tenham em mente que perímetro da circunferência é o mesmo que o seu comprimento! Assim, se o enunciado falou o perímetro, podemos encontrar o raio dessa pizza!

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad R = \frac{C}{2\pi} \quad \rightarrow \quad R = \frac{94{,}2}{2 \cdot 3{,}14} \quad \rightarrow \quad R = \frac{94{,}2}{6{,}28} \quad \rightarrow \quad R = 15 \text{ cm}$$

Agora que temos o raio, observe que a pizza foi dividida em três pedaços iguais.



Para descobrir o ângulo central, devemos dividir 360° por 3.

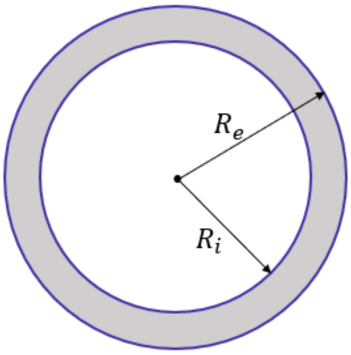
$$\alpha = \frac{360°}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = 120°$$

Com o ângulo central e o raio, podemos usar a fórmula que deduzimos para achar a área do setor.

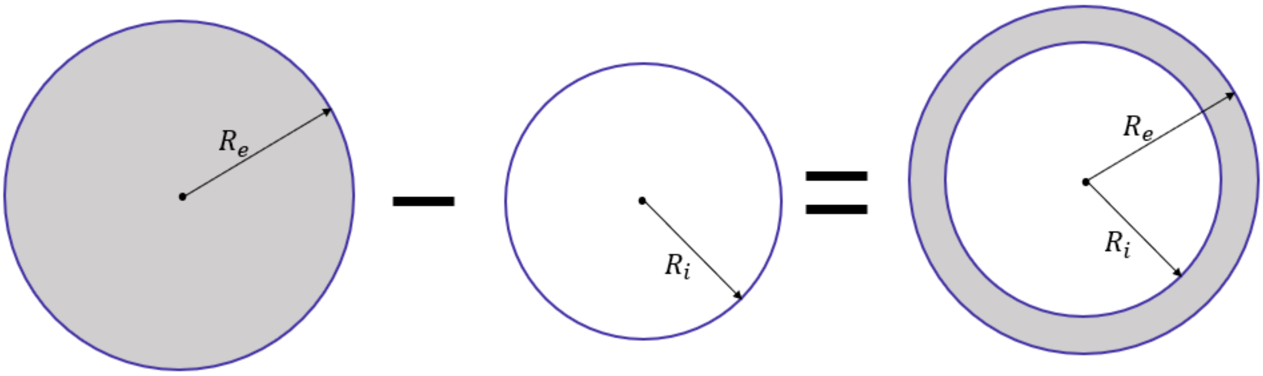
$$A_{setor} = \left(\frac{\alpha}{360°}\right)\pi R^2 \quad \rightarrow \quad A_{setor} = \left(\frac{120°}{360°}\right) \cdot 3{,}14 \cdot 15^2 \quad \rightarrow \quad A_{setor} = 235{,}5 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA C.

Para finalizar essa parte de circunferência, gostaria de comentar com vocês sobre **a área de uma coroa**! É um tipo de problema envolvendo áreas de circunferências bem comum! Por isso, é bom estarmos atentos. Imagine a seguinte situação:



A região destacada acima é o que chamamos de **coroa circular**. *Como fazemos para calcular sua área?* Note que temos uma **circunferência externa de raio R_e** e uma **circunferência interna de raio R_i**. Podemos esquematizar a situação da seguinte forma:

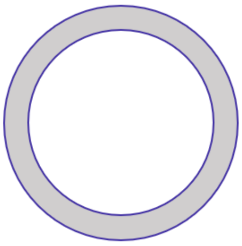


Assim, para calcular a área da coroa, devemos subtrair a área do círculo maior (externo) da área do círculo menor (interno), tudo bem?! Assim,

$$A_{coroa} = A_{externo} - A_{interno} \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \pi R_e^2 - \pi R_i^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{coroa} = \pi(R_e^2 - R_i^2)}$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. JUIZ DE FORA/2016) Na figura a seguir, temos dois círculos concêntricos, tais que seus raios medem 4 cm e 3 cm. Considerando $\pi = 3$ a área da região sombreada nessa figura é igual a



A) 48 cm²
B) 15 cm²
C) 27 cm²
D) 6 cm²
E) 21 cm²

Comentários:
Questão para calcular a área da coroa! Vamos lá! Primeiro, identificando as informações do enunciado:

$$\pi = 3 \qquad ; \qquad R_e = 4 \text{ cm} \qquad ; \qquad R_i = 3 \text{ cm}$$

Assim,

$$A_{coroa} = A_{externo} - A_{interno} \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \pi R_e^2 - \pi R_i^2 \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 3^2$$

$$A_{coroa} = 48 - 27 \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = 21 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA E.

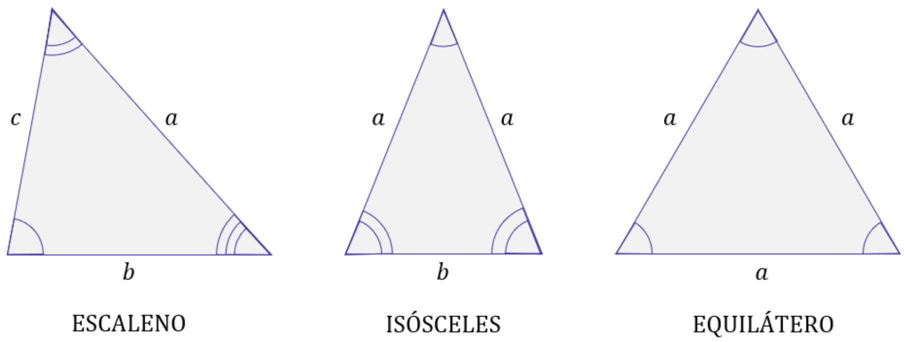
Triângulos

Agora falaremos um pouco sobre os triângulos. De modo simplificado, podemos definir um triângulo como uma **figura plana formada por três segmentos de reta**. Acontece que esses segmentos de reta não são dispostos de qualquer maneira. Eles devem formar três lados e três ângulos bem definidos, tudo bem?

Assim como na circunferência, nesse tópico falaremos sobre o perímetro e áreas, mas tudo no seu devido tempo! Primeiro, devemos aprender **quais os tipos de triângulo existem** e suas características. Vamos?!

Classificações

Quando estamos olhando apenas para o lado, podemos classificar os triângulos de três maneiras.

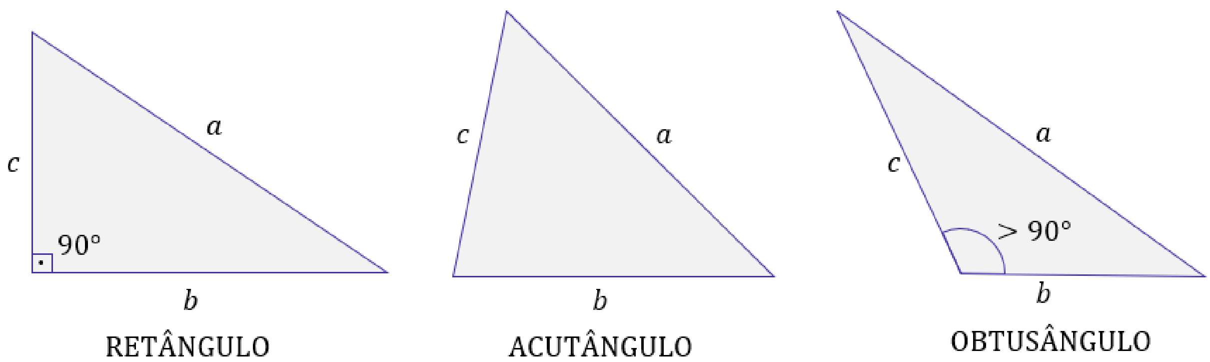


- **Escaleno:** todo triângulo que possui os **três lados distintos**! $a \neq b \neq c$. Como consequência, os ângulos opostos a cada um desses lados também serão diferentes.

- **Isósceles:** triângulo que possui **dois lados iguais**. Os ângulos opostos a esses lados também serão idênticos.

- **Equilátero:** triângulo com **todos os lados iguais**. Assim, todos os ângulos internos desse tipo de triângulo também são congruentes, medindo exatamente 60°.

Já quando estamos olhando para os ângulos internos, podemos classificar os triângulos da seguinte forma:



- **Retângulo: um dos ângulos do triângulo é um <u>ângulo reto</u>, isto é, de 90°**. Talvez, esse é o triângulo mais comum em provas. Afinal, é nele que utilizamos o famoso "Teorema de Pitágoras". Estudaremos esse triângulo com mais detalhes em breve.

- **Acutângulo: todos os ângulos do triângulo são <u>agudos</u>**, isto é, maiores que 0° e menores que 90°.

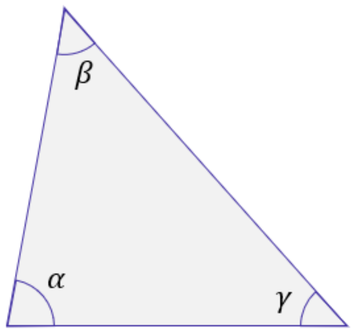
- **Obtusângulo: um dos ângulos do triângulo é um <u>ângulo obtuso</u>**, isto é, maior que 90° e menor que 180°.

Ângulos Internos e Externos

Feito esse parêntese para o estudo dos triângulos retângulos, vamos voltar a analisar os triângulos em geral. Pessoal, guardem aí com vocês o seguinte: **a soma dos ângulos <u>internos</u> de um triângulo é sempre 180°.**

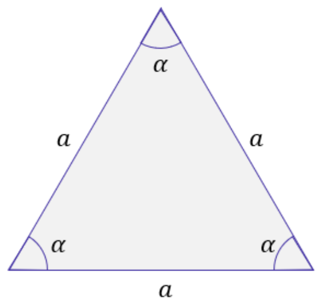
PRESTE MAIS ATENÇÃO!

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°!



$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

Lembre-se que no triângulo equilátero, todos os lados são iguais e que, com isso, temos que **todos os ângulos internos também são**! Em uma imagem, podemos representar assim:

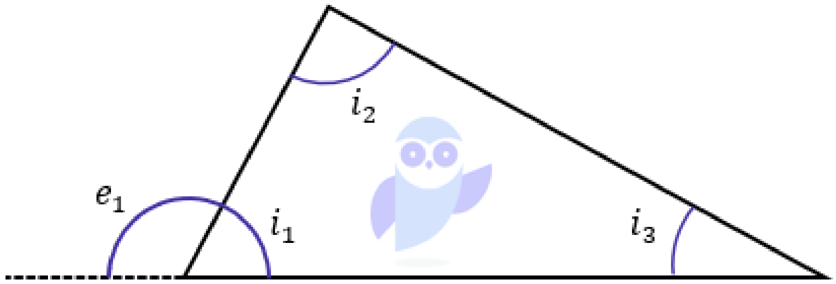


Como **a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°**, temos que:

$$\alpha + \alpha + \alpha = 180° \quad \rightarrow \quad 3\alpha = 180° \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{180°}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = 60°$$

É por esse motivo que, sempre que estamos trabalhando com triângulos equiláteros, qualquer um de seus **ângulos internos <u>valerá 60°</u>**. *Tudo certo até aqui?!*

Por vezes, também falamos de **ângulos externos**. Existe um resultado bastante interessante que podemos obter tendo em mente o que discutimos até aqui. Veja a figura abaixo.



i_1, i_2 e i_3 representam os três ângulos internos do triângulo e e_1 é um ângulo externo. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim,

$$i_1 + \boldsymbol{i_2} + \boldsymbol{i_3} = 180° \quad (1)$$

Além disso, se você olhar bem para o ângulo interno 1 (i_1) e para o ângulo externo 1 (e_1), é possível ver que eles formam um **ângulo raso**. Dessa forma,

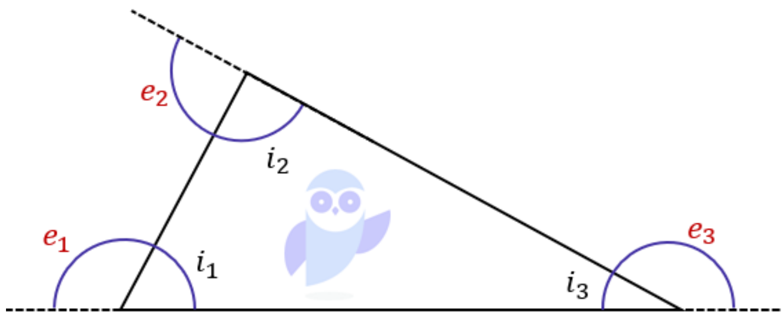
$$i_1 + \boldsymbol{e_1} = 180° \quad (2)$$

Quando comparamos as duas expressões, percebemos que a parte vermelha em (1) deve ser igual a parte vermelha em (2).

$$e_1 = i_2 + i_3$$

Conclusão: em todo triângulo, **a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele**.

Já que estamos falando de ângulos externos, qual seria a soma dos ângulos externos de um triângulo?



Lembre-se que um ângulo externo em um triângulo sempre será igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Assim, podemos escrever:

$$e_1 = i_2 + i_3$$

$$e_2 = i_1 + i_3$$

$$e_3 = i_1 + i_2$$

Somando as três equações acima membro a membro (e chamando essa soma de S_e), ficamos com:

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = (i_2 + i_3) + (i_1 + i_3) + (i_1 + i_2)$$

Reorganizando:

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = (i_1 + i_2 + i_3) + (i_1 + i_2 + i_3)$$

Pessoal, $i_1 + i_2 + i_3$ é a soma dos ângulos internos. Quanto vale essa soma?! Oras, vale 180°!!

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = 180° + 180°$$

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = 360°$$

Note, portanto, que **a soma dos ângulos externos de um triângulo vale 360°.** No final da nossa aula, veremos que podemos generalizar esse resultado para qualquer polígono convexo. No entanto, nesse momento, quero que você guarde apenas que:

A soma dos ângulos externos de um triângulo vale 360°.

HORA DE PRATICAR!

(EEAR/2020) Em relação aos triângulos, marque V para verdadeiro e F para falso. Em seguida, assinale a alternativa com a sequência correta.

( ) Triângulo acutângulo é todo triângulo que possui dois lados agudos.
( ) Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360°.
( ) Triângulo obtusângulo é todo triângulo que possui um dos ângulos internos obtuso.
( ) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

A) F - V - V - V
B) V - F - F - F
C) F - F - F - V
D) V - V - V - F

Comentários:

(**FALSO**) Triângulo acutângulo é todo triângulo que possui dois lados agudos.
Um triângulo acutângulo possui todos os seus três ângulos agudos. Caso apenas dois ângulos sejam agudos, não conseguimos garantir que é um triângulo acutângulo. Poderá ser um triângulo retângulo ou mesmo um obtusângulo.

(**VERDADEIRO**) Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360°.
Pessoal, essa afirmação está corretíssima. Quando formos estudar polígonos mais a fundo, veremos que a soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo será 360°.

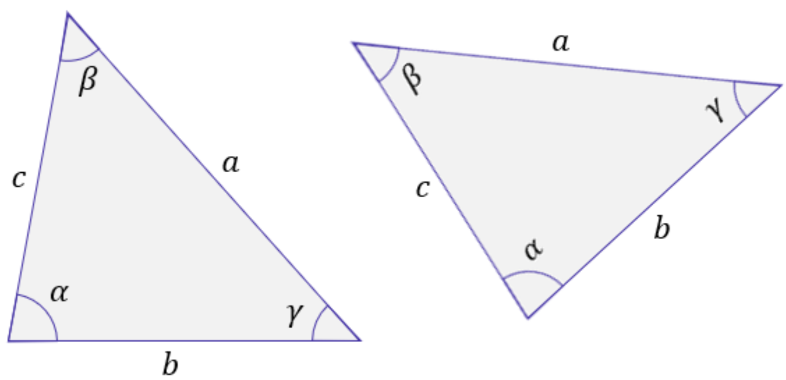
(**VERDADEIRO**) Triângulo obtusângulo é todo triângulo que possui um dos ângulos internos obtuso.
Também verdade, galera. É exatamente a definição de triângulo obtusângulo. Lembre-se sempre que um triângulo somente poderá ter um único ângulo obtusângulo. Esse fato ocorre de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser sempre 180°.

(**VERDADEIRO**) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.
Correto demais! Fizemos a demonstração na teoria!

Gabarito: LETRA A.

Congruência e Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são congruentes quando eles são iguais. Veja o par de triângulos abaixo.



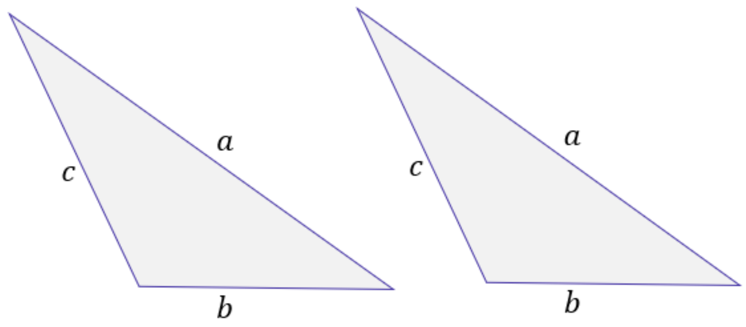
Note que **os dois triângulos são exatamente iguais**, um apenas está rotacionado com relação ao outro, podendo parecer que são diferentes. No entanto, se algum texto está falando de triângulos congruentes, ele está falando de triângulos idênticos! **Mesmo lados, mesmo ângulos! Não muda nadinha**!

A pergunta agora é: precisamos saber *todos os lados e todos os ângulos, dos dois triângulos, para determinar que são congruentes?!* A resposta é: não! Nós podemos concluir sobre a congruência de dois triângulos apenas com alguns valores de lados e/ou ângulos.

Critérios de Congruência

1. Lado-Lado-Lado (LLL)

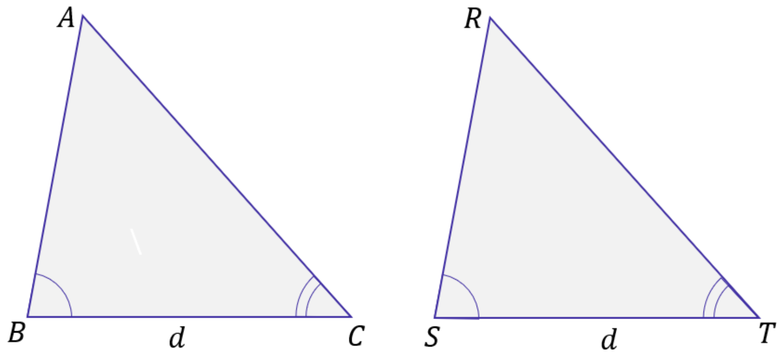
Se os dois triângulos possuírem os mesmos lados, então eles serão congruentes.



Esse critério nos diz que se os lados dos dois triângulos forem iguais, não precisamos nem olhar os ângulos. Só esse fato já nos garante que os dois são congruentes. Ok?!

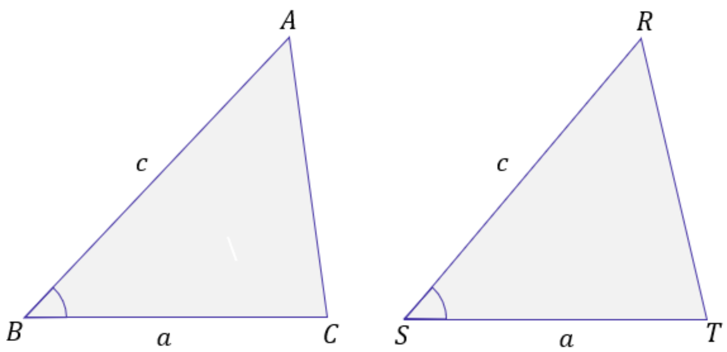
2. Ângulo-Lado-Ângulo (ALA)

Se dois triângulos possuem dois ângulos e o lado entre eles iguais, então os triângulos são congruentes.



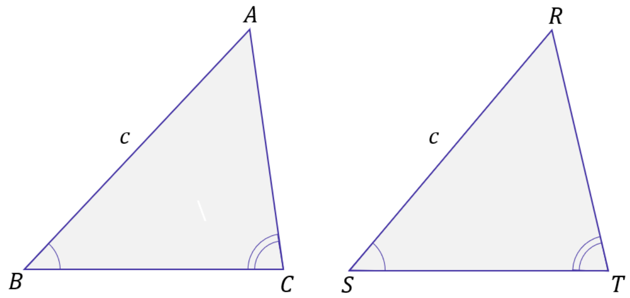
3. Lado-Ângulo-Lado (LAL)

Se dois triângulos possuem dois lados e o ângulo entre eles iguais, então os triângulos são congruentes.



4. Ângulo-Ângulo-Lado (AAL)

Se dois triângulos possuem dois ângulos e um lado oposto a um desses ângulos iguais, então os triângulos são congruentes.



Esses são os critérios mais importantes! Resumindo para vocês: **dois triângulos são congruentes quando eles são idênticos entre si (lados e ângulos iguais)**. Acontece que, não é preciso sabermos todos os lados nem todos os ângulos para concluir que dois triângulos são iguais.

Quando utilizamos os critérios acima, podemos concluir pela congruência dos triângulos sabendo apenas algumas poucas informações. Tudo bem?! Na prática, **esse não é um conteúdo muito explorado em prova**. Em contrapartida, o tema de semelhança de triângulos despenca!! Vamos entrar de vez nesse assunto!

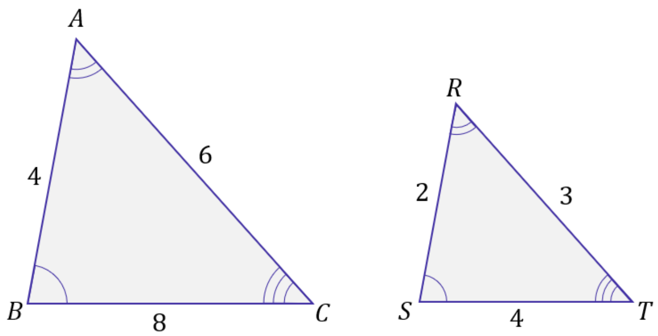
Semelhança de Triângulos

Pessoal, na semelhança de triângulos, vamos continuar com os três ângulos iguais. No entanto, os três lados devem ser proporcionais e não necessariamente iguais (como ocorre na congruência).

Triângulos Congruentes: ÂNGULOS E LADOS IGUAIS.

Triângulos Semelhantes: ÂNGULOS IGUAIS E LADOS PROPORCIONAIS.

Veja um par de triângulos semelhantes.



Os triângulos acima são semelhantes. Eles possuem ângulos internos iguais e os lados são proporcionais. Note que o triângulo ABC possui lado sempre o dobro do lado correspondente no triângulo RST.

$$\frac{AB}{RS} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{BC}{ST} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{AC}{RT} = \frac{6}{3} = 2$$

Chamamos esse "2" de razão de semelhança. Ele reflete a proporcionalidade entre os lados.

(PREF. PERUÍBE/2019) A respeito de polígonos semelhantes, analise as sentenças a seguir.
I. Se dois triângulos são semelhantes, então eles são congruentes.
II. Se dois triângulos possuem as medidas dos ângulos, respectivamente, proporcionais, então eles são semelhantes.
III. Se dois triângulos possuem as medidas dos ângulos, respectivamente, congruentes, então eles são semelhantes.
IV. Se dois triângulos possuem os lados, respectivamente, proporcionais, então eles são semelhantes.

As duas únicas afirmações verdadeiras são
A) I e II.
B) I e III.
C) I e IV.
D) II e IV.
E) III e IV.

Comentários:
I. Se dois triângulos são semelhantes, então eles são congruentes.
FALSO. Pessoal, **semelhança não implica congruência**. Dizer que dois triângulos são congruentes, significa dizer que esses dois triângulos são iguais (lados e ângulos). Por sua vez, na semelhança de triângulo, **apenas os ângulos são necessariamente iguais para os dois**.

II. Se dois triângulos possuem as medidas dos ângulos, respectivamente, proporcionais, então eles são semelhantes.
FALSO. Para ser semelhante, os ângulos dos dois triângulos devem ser iguais, enquanto os lados é que são proporcionais.

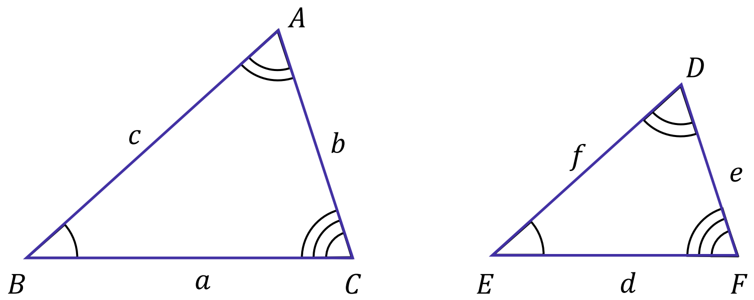
III. Se dois triângulos possuem as medidas dos ângulos, respectivamente, congruentes, então eles são semelhantes.
VERDADEIRO. Se as medidas dos ângulos são congruentes (iguais), então **os lados serão proporcionais e o triângulo será semelhante**.

IV. Se dois triângulos possuem os lados, respectivamente, proporcionais, então eles são semelhantes.
VERDADEIRO. Quando dois triângulos possuem os **três lados proporcionais**, eles são semelhantes. É o caso LLL que estudamos na teoria!

Gabarito: LETRA E.

Professor, estou entendendo que quando temos triângulos com ângulos iguais e lados proporcionais, eles serão semelhantes. Mas, para que serve isso?

Se você identificar que dois triângulos são semelhantes, então poderá estabelecer **uma relação entre os lados desse triângulo**. Observe a figura abaixo.



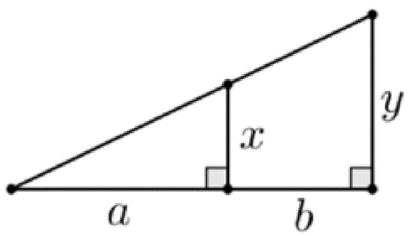
Galera, **ABC e DEF são triângulos semelhantes**. Com isso, sabemos que seus lados proporcionais. Por sabemos esse fato, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$$

Observe que sempre fazemos **a razão entre dois lados correspondentes**. Cuidado para não misturar tudo! Note que **"a" e "d" são opostos ao mesmo ângulo**, por isso, fazemos a razão a/d. Sugiro adotar essa forma de escrever as razões, para evitar confusão. Vamos ver na prática para entendermos melhor.

HORA DE PRATICAR!

(IMBEL/2021) Considere a figura:



Sabe-se que a razão a/b é igual a 3⁄2. A razão x/y é igual a

A) 3/2

B) 2/3

C) 2/5

D) 3/5

E) 5/3

Comentários:
Questão que envolve semelhança de triângulos e um pouco de algebrismo!

O enunciado nos deu a razão a/b. Vamos escrever **"a" em função de "b"**:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{3b}{2} \qquad (1)$$

Iremos usar esse resultado daqui a pouco! Agora, vamos fazer **a semelhança** propriamente dita.

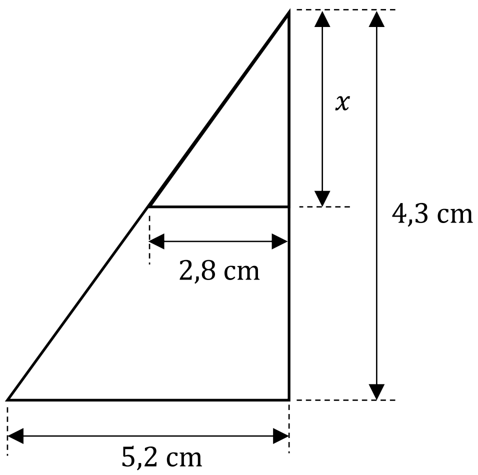
$$\frac{x}{y} = \frac{a}{a+b}$$

Vamos usar (1) na equação acima.

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{3b}{2}}{\frac{3b}{2}+b} \qquad \rightarrow \qquad \frac{x}{y} = \frac{\frac{3\cancel{b}}{\cancel{2}}}{\frac{5\cancel{b}}{\cancel{2}}} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\frac{x}{y} = \frac{3}{5}}$$

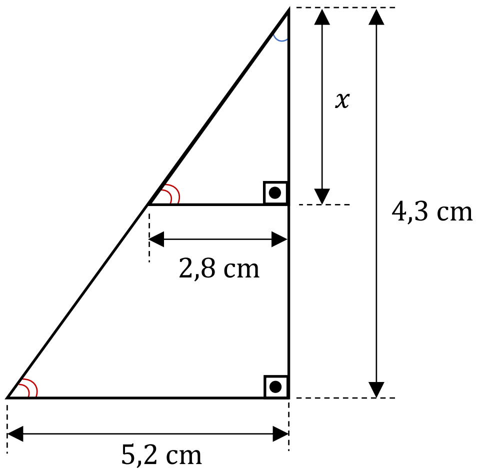
Gabarito: LETRA D.

(SAAE São Carlos/2019) Considere a figura a seguir.



O valor de x é, aproximadamente:
A) 0,8 cm
B) 1,5 cm.
C) 2,3 cm.
D) 2,9 cm.
E) 3,8 cm.

Comentários:
Pessoal, observe que **temos um triângulo retângulo menor e outro maior**. Eles são semelhantes. Como sabemos disso?! **Todos seus ângulos internos são ordenadamente iguais**! Confira na imagem a seguir:



Professor, então sempre que isso acontecer os triângulos serão semelhantes? Sim! A grande maioria das questões envolvem algum tipo de semelhança com triângulos retângulos. Então já fica esperto se cair algo parecido na sua prova! *Beleza! Entendi que são semelhantes, mas, e agora?!*

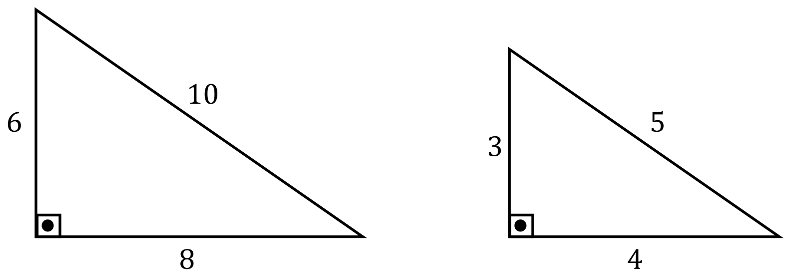
Ora, se são semelhantes, **seus lados são proporcionais** de forma que podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{x}{4,3} = \frac{2,8}{5,2} \quad \rightarrow \quad x \cong 2,31 \text{ cm}$$

Pessoal, uma vez que você conseguisse identificar a semelhança entre os triângulos retângulos, a parte mais chata da questão vira fazer a "continha" acima. Ressalto a importância de não misturar os lados. Sempre faça a razão entre dois lados correspondentes, isto é, **dois lados que estão opostos ao mesmo ângulo**.

Gabarito: LETRA C.

Galera, os lados são proporcionais. Mas, e as áreas dos triângulos, também serão?! A resposta é sim. No entanto, **as áreas serão proporcionais ao quadrado da razão de semelhança**. Explico melhor.



Como identificar que esses triângulos são semelhantes? Percebendo que os lados são proporcionais.

$$\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = 2$$

Portanto, os triângulos são semelhantes e **a razão de semelhança é 2**.

Agora, sei que não estudamos como calcular a área de triângulo, portanto, não vou focar nesse cálculo, mas apenas no resultado. O triângulo retângulo maior tem área 24 e o menor, 6. Note que:

$$\frac{A_M}{A_m} = \frac{24}{6} \quad \rightarrow \quad \frac{A_M}{A_m} = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{A_M}{A_m} = 2^2$$

A razão entre as duas áreas será igual a razão de semelhança que encontramos acima, **só que ao quadrado**. Esse resultado pode ser bastante útil, confira a questão abaixo.

ESTA CAI NA PROVA!

(PREF. SJC/2019) Um professor afirmou aos seus alunos que dois triângulo eram semelhantes, e propôs a eles que determinassem a razão de semelhança do maior para o menor triângulo, sabendo que a área do menor triângulo era de 13,5 unidades de área e a área do maior era de 121,5 unidades de área. A resposta correta esperada por esse professor era:

A) $\sqrt{3}$
B) 3
C) $3\sqrt{3}$
D) 9
E) $6\sqrt{3}$

Comentários:

Quando dois triângulos são semelhantes, **a razão de suas áreas é igual ao <u>quadrado</u> da razão de semelhança**. Conforme vimos na teoria:

$$\frac{A_M}{A_m} = k^2$$

O enunciado nos informou que $\boldsymbol{A_M = 121{,}5\ \mathrm{u.a.}}$ e $\boldsymbol{A_m = 13{,}5\ \mathrm{u.a.}}$. Vamos substituir na expressão para determinar o k.

$$\frac{121{,}5}{13{,}5} = k^2 \quad \rightarrow \quad k^2 = 9 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 3}$$

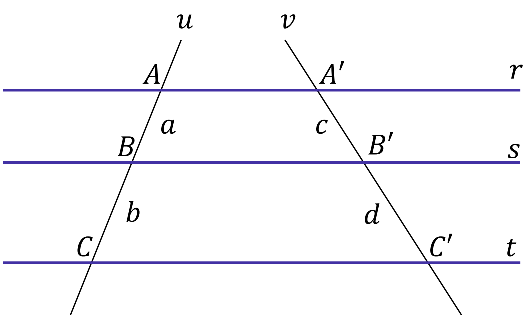
Gabarito: LETRA B.

Teorema de Tales

Vou tentar ser bem objetivo nesse ponto da matéria. O enunciado clássico do Teorema é o seguinte:

"Um feixe de retas paralelas determina, em duas retas transversais quaisquer, segmentos proporcionais."

Professor, é o quê? Vamos ver uma imagem!



$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$: são as retas **transversais** (que é toda reta que intercepta um feixe de retas paralelas);
$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$: são as retas **paralelas**.

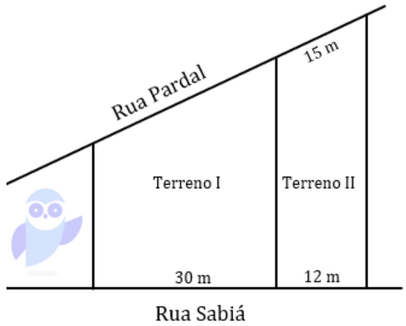
Sempre que conseguir identificar uma situação como acima, você poderá escrever que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

A demonstração desse fato **não tem um custo-benefício razoável**, portanto, nos limitaremos a aplicar o resultado comentado anteriormente, tudo bem? Para ilustrar, vamos ver uma questão.

HORA DE PRATICAR!

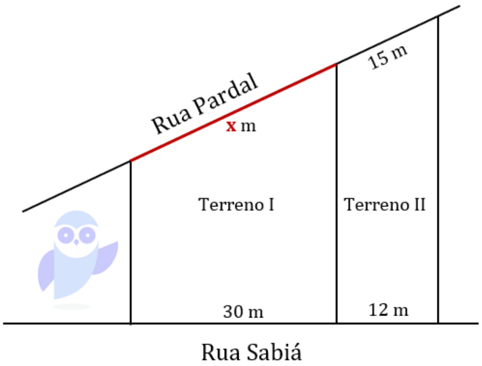
(PREF. OLÍMPIA/2019) Dois terrenos têm frente para a Rua Sabiá e para a Rua Pardal, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à Rua Sabiá. A figura apresenta algumas medidas desses dois terrenos.



A medida de frente do terreno 1, à Rua Pardal, é
A) 32,5 m.
B) 33,0 m.
C) 37,5 m.
D) 40,0 m.
E) 42,0 m.

Comentários:

Essa é uma questão bem clássica de Teorema de Tales. Observe que temos um feixe de retas paralelas intersectando duas retas transversais (que representam as ruas). Assim, considerando que o enunciado pede a medida de frente do terreno 1, à Rua Pardal, então:



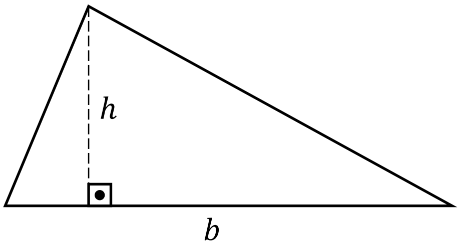
$$\frac{x}{15} = \frac{30}{12} \quad \rightarrow \quad x = \frac{450}{12} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 37,5\ m}$$

Gabarito: LETRA C.

Área de um Triângulo

Pessoal, esse é **um dos tópicos mais importantes dessa aula**. Há diversas maneiras de calcularmos a área de um triângulo. De acordo com as informações que tivermos, usaremos uma fórmula ou outra.

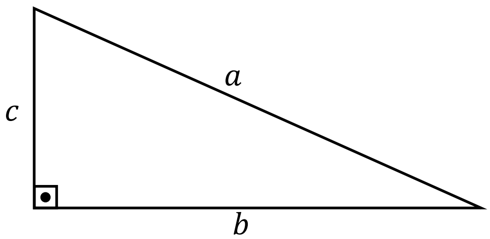
- Quando temos a base e a altura do triângulo.



"h" representa a medida da altura, enquanto **"b" representa a medida da base**. Quando tivermos essas informações, podemos calcular a área de um triângulo por meio da seguinte fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

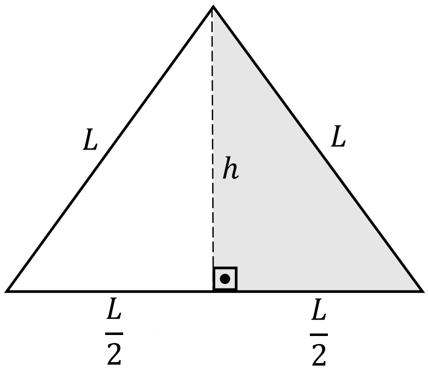
- **Quando o triângulo é retângulo**



Galera, perceba que quando o triângulo é retângulo, a altura relativa à base "b" é o próprio cateto "c". Assim,

$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

- Quando o triângulo é equilátero



Quando o triângulo é equilátero, **a altura relativa a qualquer um dos lados, vai sempre dividir esse lado <u>ao meio</u>**. Agora, observe o triângulo retângulo em destaque. Com o teorema de Pitágoras, podemos determinar a altura "h" em função do lado "L".

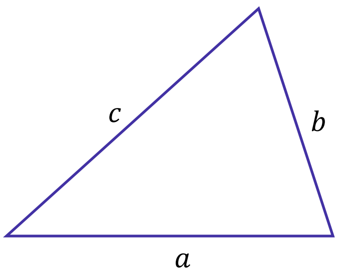
$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} \quad \rightarrow \quad h^2 = \frac{3L^2}{4} \quad \rightarrow \quad h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Com isso, podemos usar a fórmula que vimos anteriormente, substituindo o valor da altura "h" por esse que acabamos de encontrar.

$$A = \frac{bh}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{L \cdot \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, observe que existe uma fórmula "pronta" para calcularmos a área de um triângulo equilátero. **Se você sabe apenas o lado, já pode calcular a área**. No entanto, na prática, você não precisa memorizá-la. Se conhece a fórmula $A = bh/2$ e o Teorema de Pitágoras, **poderá deduzi-la a qualquer tempo**.

- Quanto temos apenas os lados do triângulo.



Nessas situações, usaremos a famosa **<u>fórmula de Heron</u>**. Não é tão comum à sua cobrança em provas, mas é bom estarmos espertos. Quando você tiver todos os lados mas não sabe os ângulos nem as alturas, a fórmula abaixo resolve sua vida:

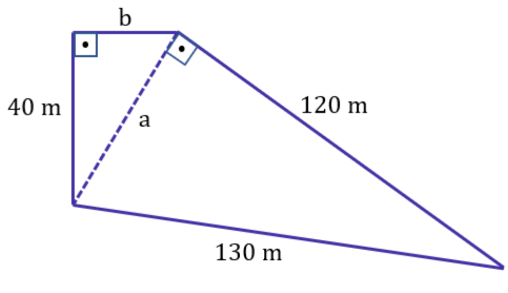
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Não é uma fórmula muito amigável, eu sei. Sorte nossa que **ela cai muito pouco**. Aqui, o **"p" representa o semiperímetro**, que pode ser determinado por meio da fórmula abaixo!

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

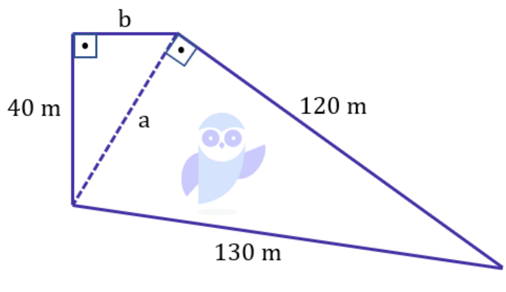
Peço que não se preocupe com a demonstração, pois **o custo benefício de fazê-la aqui é quase nulo**. Nessas horas, vamos tentar ser o mais prático e objetivo possível.

(PREF. CAMPINAS/2019) A praça de uma cidade foi construída a partir de dois terrenos, cada um deles com a forma de um triângulo retângulo, conforme a figura a seguir, com as respectivas medidas.



A área total dessa praça é igual a
A) 3800 m²
B) 4100 m²
C) 3950 m²
D) 4200 m²
E) 3600 m²

Comentários:
Sempre que observamos triângulos retângulos, uma coisa tem que vir a nossa mente: teorema de Pitágoras. Principalmente quando houver lados desse triângulo que não estão determinados.

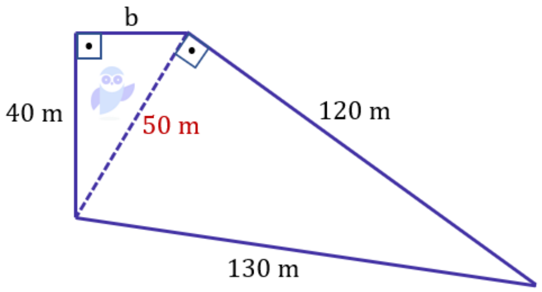


Concentre-se no triângulo que está envolvendo a coruja. Desconhecemos o cateto "a". Para determiná-lo, vamos usar o teorema de Pitágoras. Acompanhe.

$$a^2 + 120^2 = 130^2$$

$$a^2 + 14400 = 16900 \quad \rightarrow \quad a^2 = 16900 - 14400 \quad \rightarrow \quad a^2 = 2500 \quad \rightarrow \quad a = 50\ m$$

Com todos os lados determinados, vamos olhar para o outro triângulo.



No triângulo menor, também falta determinar um dos catetos. Aplicaremos mais uma vez o teorema de Pitágoras.

$$b^2 + 40^2 = 50^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 2500 - 1600 \quad \rightarrow \quad b^2 = 900 \quad \rightarrow \quad b = 30\ m$$

Pronto! Sabemos todos os lados de todos os triângulos! Agora, podemos calcular a área de cada um deles. Na teoria, aprendemos que a área de um triângulo retângulo é dada pelo produto dos catetos dividido por dois. Assim, para o triângulo maior, teremos:

$$A_M = \frac{120 \cdot 50}{2} \quad \rightarrow \quad A_M = 3.000\ m^2$$

Devemos fazer o mesmo cálculo para o triângulo menor,

$$A_m = \frac{30 \cdot 40}{2} \quad \rightarrow \quad A_m = 600\ m^2$$

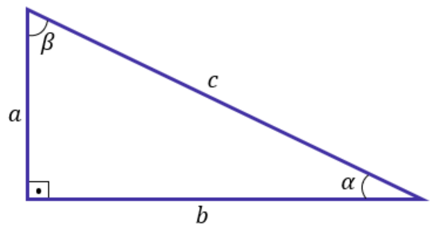
A área total da praça é exatamente a soma das áreas dos dois triângulos.

$$A = A_m + A_M \quad \rightarrow \quad A = 3.000 + 600 \quad \rightarrow \quad A = 3.600\ m^2$$

Gabarito: LETRA E.

Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo é tão importante que estudaremos ele em separado! Lembrem-se que chamamos de triângulo retângulo qualquer triângulo que possua **um de seus ângulos igual a 90 graus** ou $\frac{\pi}{2}$ radianos.



- O lado c é chamado de **hipotenusa**. **Ele é o maior dos lados** e está oposto ao ângulo de 90°.
- Os lados **a e b são os catetos**.
  - Com relação ao ângulo α, a é o cateto oposto e b é o cateto adjacente.
  - Com relação ao ângulo β, b é o cateto oposto e a é o cateto adjacente.

Relações Trigonométricas - Seno, Cosseno e Tangente

Moçada, eu sei que essa é uma parte da trigonometria e por isso não vou me aprofundar muito, mas vale a pena você saber as seguintes relações trigonométricas para a sua prova de geometria plana!

- **Seno**

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

- **Cosseno**

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

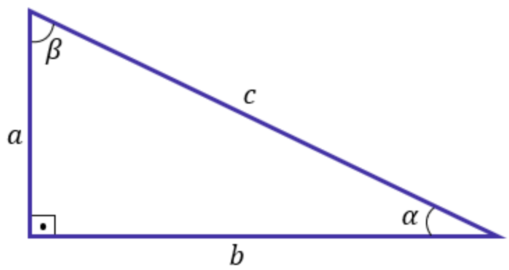
- **Tangente**

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

- **Relação Fundamental**

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Teorema de Pitágoras



O Teorema de Pitágoras é um grande clássico dos nossos estudos, não é verdade? Desde muito cedo, quando crianças, escutamos falar desse teorema. Vamos rever o que ele diz!

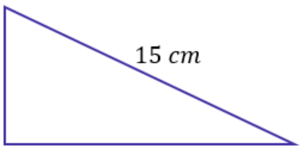
A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Matematicamente, podemos escrever:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. SANTIAGO DO SUL/2020) A figura abaixo demonstra um triângulo retângulo cujo seno vale 0,6. Determine, em metros, a medida do perímetro.



a) 36.
b) 3,6.
c) 0,36.
d) 0,036.
e) 0,0036.

Comentários:

O **perímetro é a soma de todos os lados**. A imagem do enunciado diz que a hipotenusa vale 15 cm e fornece o valor de um seno. Sabemos que:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$0{,}6 = \frac{\text{cateto oposto}}{15}$$

$$\text{cateto oposto} = 9\ cm$$

Sei que você deve estar curioso para saber qual dos ângulos do triângulo é o α. Para nosso exercício, isso não importará, pois **queremos saber apenas as medidas dos lados**. Ok! **Temos um cateto e uma hipotenusa**. Falta encontrar mais um cateto. Podemos usar a Teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$15^2 = 9^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad 225 = 81 + b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 144 \quad \rightarrow \quad b = 12\ cm$$

Temos todos os lados, o perímetro é dado pela soma deles.

$$Perímetro = a + b + c$$

$$Perímetro = 9 + 12 + 15$$

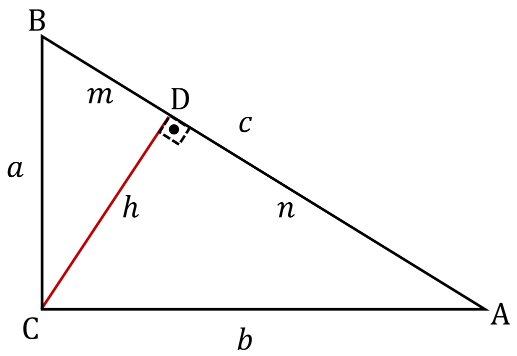
$$Perímetro = 36\ cm$$

Como queremos o resultado em metros, devemos dividir o resultado por 100. $\mathbf{Perímetro\ =\ 0,36\ m}$.

Gabarito: LETRA C.

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

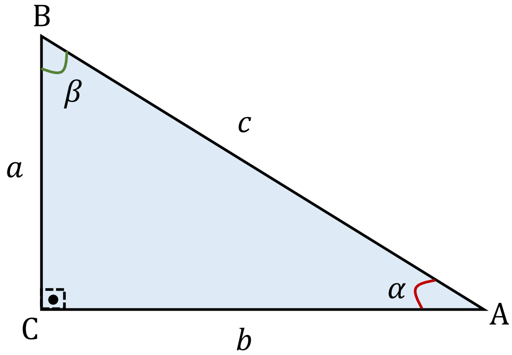
Saber as fórmulas que veremos agora pode poupar preciosos minutos na hora da sua prova. No entanto, caso não as lembre, saiba que sempre poderá deduzi-las (conforme faremos a seguir), pois são apenas consequências da **semelhança de triângulos**! Inicialmente, observe o desenho:

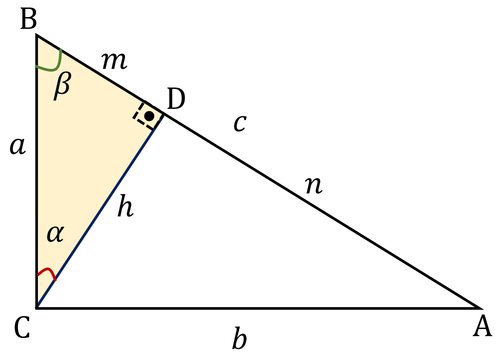


Na figura acima, temos: os catetos (a e b), a hipotenusa (c), a altura relativa à hipotenusa (h) e as partes da hipotenusa (m e n). *Caso você queira encontrar a altura relativa à hipotenusa, como procederia?* Observe que **os triângulos ABC e BCD são semelhantes**. Sendo assim, podemos escrever:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{h} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{h = \frac{ab}{c}}$$

Se você não enxergou essa semelhança, vem comigo aqui!





Observe que separei os dois triângulos semelhantes em questão: o azul (ABC) e o amarelo (BCD). Eles são semelhantes pois, apesar de terem lados diferentes, **seus ângulos internos são todos iguais**!

Beleza, professor. Mas, sabendo disso, como faço a semelhança?

Vamos lá! Qual lado está em frente ao **ângulo reto** no triângulo ABC?

É o lado "c".

Qual lado está em frente ao **ângulo reto** no triângulo BCD?

É o lado "a".

Com isso, já temos o lado esquerdo da nossa semelhança:

$$\frac{c}{a} =$$

Agora, vamos olhar outro ângulo.

Qual lado está em frente ao **ângulo β** no triângulo ABC?

É o lado "b'.

Qual lado está em frente ao **ângulo β** no triângulo BCD?

É a altura "h".

Com isso, nossa semelhança fica:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{h}$$

Isolando o "h":

$$\boxed{h = \frac{ab}{c}}$$

Pronto! Esse é o passo a passo para chegarmos na nossa primeira relação métrica! **Esse será o procedimento que usaremos para encontrar todas as outras**. Obviamente, usando outras semelhanças e lados/segmentos.

Na prática, a expressão que acabamos de encontrar nos diz que a altura relativa à hipotenusa é igual ao produto dos catetos dividido pela hipotenusa.

Professor, temos uma outra forma de encontrar essa altura? Temos sim! Observe.

Da semelhança entre os triângulos **BCD e CDA**:

$$\frac{h}{m}=\frac{n}{h} \quad \rightarrow \quad h^2 = mn \quad \rightarrow \quad \boxed{h=\sqrt{mn}}$$

Ah, entendi! Mas como fazemos para determinar o "m" e o "n"?

Para você entender melhor, perceba que quando descemos a altura relativa à hipotenusa, **essa altura toca a hipotenusa no <u>ponto D</u>**. Chamamos esse ponto de D de "pé da altura". Ele divide a hipotenusa em duas partes, **uma de comprimento "m" e outra de comprimento "n"** tal que $m+n=c$. Para encontrar a medida desses segmentos, usamos mais semelhanças.

Da semelhança entre os triângulos **ABC e BCD**, podemos tirar o seguinte:

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{m} \quad \rightarrow \quad a^2 = cm \quad \rightarrow \quad \boxed{m=\frac{a^2}{c}}$$

Analogamente, da semelhança entre os triângulos **ABC e ACD**, temos:

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{n} \quad \rightarrow \quad b^2 = cn \quad \rightarrow \quad \boxed{n=\frac{b^2}{c}}$$

Vamos ver como isso tudo já caiu em prova?

HORA DE PRATICAR!

(CRECI 11/2022) Os catetos de um triângulo retângulo medem 32 cm e 60 cm. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

A altura relativa à hipotenusa desse triângulo mede 28 cm.

Comentários:
Queremos verificar se a altura relativa à hipotenusa é essa mesmo que o item forneceu. Para isso, note que o enunciado forneceu os catetos. No entanto, **precisamos também do valor da hipotenusa**. Para encontrá-la, vamos usar o teorema de Pitágoras:

$$c^2=a^2+b^2 \quad \rightarrow \quad c^2=32^2+60^2 \quad \rightarrow \quad a^2=4624 \quad \rightarrow \quad a=68$$

Pronto! Com o valor da hipotenusa, podemos usar a relação métrica que acabamos de ver.

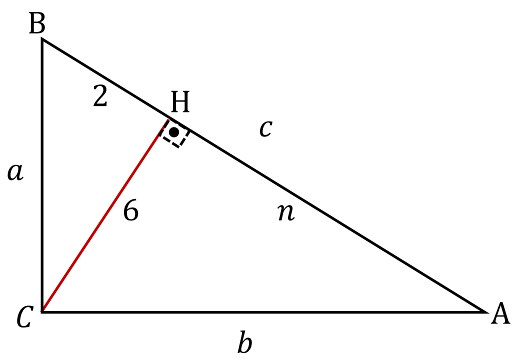
$$h=\frac{ab}{c} \quad \rightarrow \quad h=\frac{32\cdot 60}{68} \quad \rightarrow \quad h=\frac{1920}{68} \quad \rightarrow \quad h=28{,}23 \text{ cm}$$

Note que a altura é **um pouquinho maior que 28**, contrariando o afirmado no item.

Gabarito: ERRADO.

(ESA/2021) Considere um triângulo retângulo ABC, retângulo em C. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa e sabendo que CH = 6 cm e BH = 2 cm, o produto dos comprimentos dos catetos é igual a:
A) 150 cm²
B) 144 cm²
C) 120 cm²
D) 180 cm²
E) 108 cm²

Comentários:
Inicialmente, vamos desenhar o triângulo proposto.



Observe que a altura relativa (h) foi dada e **vale 6**.

Por sua vez, o segmento BH também foi informado e **vale 2**.

Agora, *vocês lembram qual a relação métrica que apareceu o produto dos catetos?* Foi a primeira!

$$h = \frac{ab}{c}$$

ou seja:

$$ab = hc \qquad (1)$$

Para encontrarmos o produto dos catetos, é suficiente multiplicarmos a altura (h) pela hipotenusa (c). A altura (h) nós já temos, ela é justamente o segmento CH que vale 6. Nesse momento, **precisamos determinar apenas o valor da hipotenusa "c"**. Para isso, podemos lembrar da relação métrica que relaciona o "m" com o "h":

$$h^2 = mn \qquad (2)$$

Substituindo $h = 6$ e $m = 2$ em (2):

$$n = \frac{36}{2} \quad \rightarrow \quad n = 18$$

Com o valor de "m" e "n", conseguimos encontrar "c":

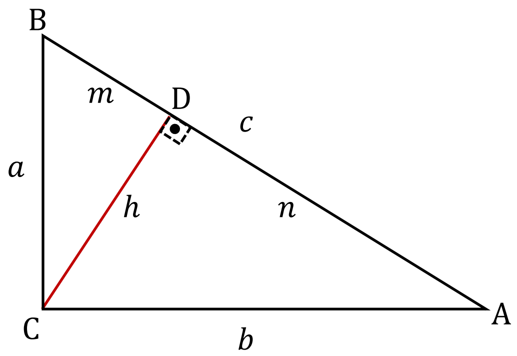
$$c = m + n \quad \rightarrow \quad c = 2 + 18 \quad \rightarrow \quad c = 20$$

Agora, é só usarmos (1):

$$ab = 6 \cdot 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{ab = 120}$$

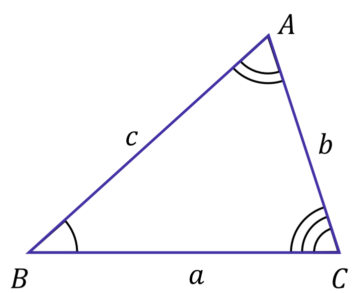
Gabarito: LETRA C.

Galera, eu sei que essa parte pode pegar um pouco no pé! São expressões que podem ser chatinhas, mas lembre-se sempre que você poderá deduzi-las usando **semelhança de triângulos**. Gaste a maior parte de sua energia não tentando decorá-las, mas sim aprendendo a como chegar nelas. De qualquer forma, vou resumir tudo que vimos em uma tabela, para facilitar sua revisão!

<table>
<tr><th colspan="2">Relações Métricas no Triângulo Retângulo</th></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td>$ab = hc$</td></tr>
<tr><td>$h^2 = mn$</td></tr>
<tr><td>$a^2 = mc$</td></tr>
<tr><td>$b^2 = nc$</td></tr>
<tr><td>$c = m + n$</td></tr>
</table>

Lei do Senos e a Lei dos Cossenos

Para aproveitar que falamos um pouco de seno e cosseno nessa aula, quero conversar com vocês sobre duas leis que relacionam as medidas dos lados de um triângulo com os senos e cossenos dos ângulos internos. Considere o triângulo genérico abaixo.



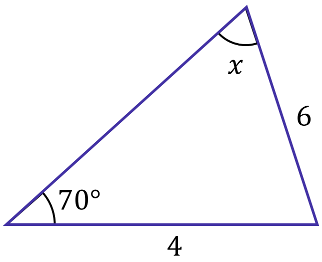
De acordo com a lei dos senos, a razão entre o lado e o seno do ângulo oposto é uma constante no triângulo. Dessa forma, podemos escrever que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Para entender melhor como pode ser a cobrança desse tema, vamos fazer uma questão.

HORA DE PRATICAR!

(EEAR/2013) Considere as medidas indicadas na figura e que $\operatorname{sen}(70°) = 0{,}9$. Pela "Lei dos Senos", obtém-se que sen x é igual a



A) 0,4
B) 0,5
C) 0,6
D) 0,7

Comentários:
Pessoal, é super importante perceber que a razão é entre a medida do lado e o seno do seu **ângulo <u>oposto</u>**! Assim, para a questão em tela, temos que:

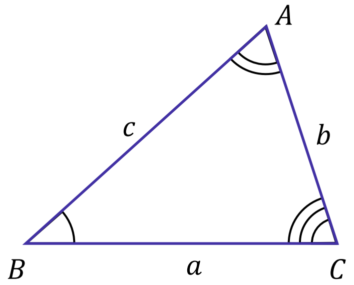
$$\frac{6}{\operatorname{sen} 70°} = \frac{4}{\operatorname{sen} x}$$

Usando a informação do enunciado que $\mathbf{sen(70°) = 0,9}$ e isolando $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{4 \cdot 0{,}9}{6} \quad \rightarrow \quad \mathbf{sen\,x = 0,6}$$

Gabarito: LETRA C.

Por sua vez, **a lei dos cossenos** vai relacionar os lados de um triângulo qualquer com o cosseno de um dos ângulos. Guarde com você o seguinte:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Observe o esquema abaixo para entender melhor as expressões.

"a" é o lado oposto ao ângulo Â

$$a^2 = \underbrace{b^2 + c^2 - 2bc}_{\text{b e c são os demais lados}} \cdot cos\,\hat{A}$$

Eu sei que pode estar pairando a dúvida sobre de onde vem essa expressão. A demonstração tanto da lei dos senos quanto da dos cossenos tem custo benefício mínimo. Para sua prova de concurso, precisará apenas aplicá-la. Por esse motivo, vamos ver uma questão para sentir na prática como funciona essa tal de lei dos cossenos.

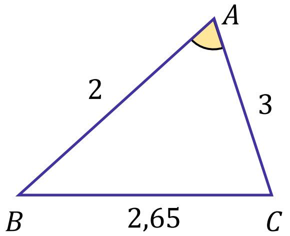
HORA DE PRATICAR!

(PC-DF/2012) Investigações de um crime com arma de fogo indicam que um atirador atingiu diretamente dois pontos, B e C, a partir de um único ponto A. São conhecidas as distâncias: AC = 3 m, AB = 2 m e BC = 2,65 m. A medida do ângulo formado pelas duas direções nas quais o atirador disparou os tiros é mais próxima de

A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 75°
E) 90°

Comentários:

Vamos esquematizar a situação proposta no enunciado.



O enunciado pede o ângulo entre as direções nas quais o atirador disparou. Destaquei esse ângulo de amarelo na nossa imagem acima. Uma boa maneira de determinarmos esse ângulo, é encontrando o seu cosseno. Para isso, vamos utilizar a lei dos cossenos.

$$2{,}65^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \hat{A}$$

$$7{,}0225 = 4 + 9 - 12 \cdot \cos \hat{A}$$

$$7{,}0225 - 13 = -12 \cdot \cos \hat{A}$$

$$-6{,}0225 = -12 \cdot \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{6{,}0225}{12} \cong -\frac{6}{12}$$

$$\cos \hat{A} \cong \frac{1}{2}$$

Você lembra qual ângulo menor que 180° possui cosseno igual a 1/2? Como **trata-se do cosseno de um ângulo notável**, temos meio que a "obrigação" de lembrá-lo.

O ângulo menor que 180° que tem cosseno igual a 1/2 é 60°.

$$\hat{A} \cong 60°$$

Gabarito: LETRA A.

ATENÇÃO DECORE!

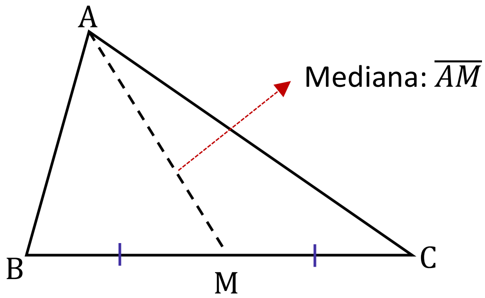
Ângulo Notável	Seno	Cosseno
0°, 360°	0	1
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
90°	1	0
180°	0	-1
270°	-1	0

Pontos notáveis no triângulo

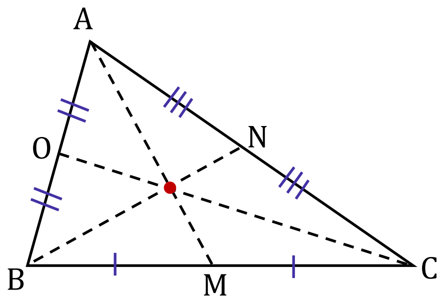
No estudo do triângulo, existem quatro pontos que precisam ser estudados com atenção: o baricentro, o incentro, o ortocentro e o circuncentro. Veremos todos eles com detalhes a seguir!

Baricentro

Galera, para entender o baricentro, precisamos primeiro entender o que é uma mediana. A mediana nada mais é do que um **segmento de reta que vai ligar um vértice ao ponto médio do lado oposto a esse vértice**. Vamos visualizar essa situação para entender melhor!



Beleza! Agora note que um triângulo não possui apenas uma mediana! Podemos traçar uma mediana para cada vértice. Observe!



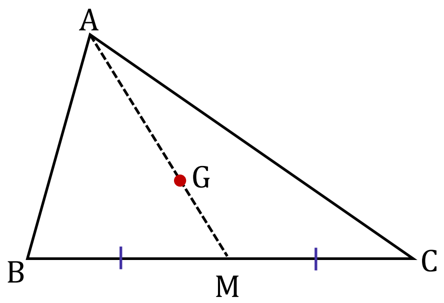
Observe que essas medianas se encontram em um ponto (que destaquei em vermelho). Esse é o nosso baricentro! Anote aí, então!

TOME NOTA!

Baricentro é o ponto de encontro das três **medianas** de um triângulo.

Professor, e esse baricentro tem alguma propriedade especial?

Tem sim! Ele divide a mediana em duas partes de tal forma que uma mede o dobro da outra! Vou explicar melhor no desenho! Vem cá!



Para a imagem não ficar muito poluída, desenhei apenas uma mediana e coloquei o baricentro (G). Observe que o ponto G divide a mediana em dois segmentos: **o AG e o GM**. A propriedade que devemos guardar é:

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$$

Guarde sempre que o segmento que contém o vértice (AG) **mede o dobro** do segmento que contém o ponto médio (GM).

Professor, isso cai em prova?!

Vamos conferir!

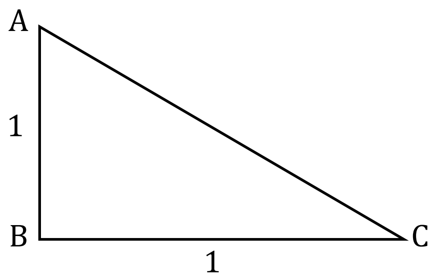
HORA DE PRATICAR!

(CBM-AL/2021) Acerca de triângulos, julgue o próximo item.

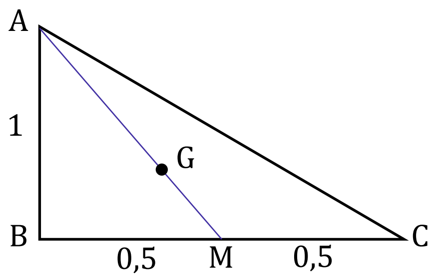
Considere o triângulo retângulo e isósceles ABC, com lados AB = BC = 1. Nesse caso, sendo G o baricentro desse triângulo, é correto afirmar que o segmento AG é igual a $\sqrt{\frac{2}{6}}$.

Comentários:

O primeiro passo é desenhar esse triângulo retângulo e isósceles de lado **igual a 1**.



Como a questão falou em baricentro, é importante desenhar a mediana também. Note que ele fala de segmento AG, logo vamos traçar a **mediana relativa ao vértice A**.



Lembre-se que a mediana toca no **ponto médio do lado oposto**. Por esse motivo, ficou "0,5" de um lado e "0,5" do outro.

Agora, note que estamos procurando a medida do segmento AG. Para isso, primeiramente devemos encontrar a medida do segmento AM. Esse segmento é a **hipotenusa do triângulo retângulo ABM**. Logo, vamos usar o Teorema de Pitágoras para encontrá-lo.

$$AM^2 = AB^2 + BM^2$$

$$AM^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad AM^2 = 1 + \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad AM^2 = \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad AM = \sqrt{\frac{5}{4}} \qquad (1)$$

Nesse momento, devemos observar que:

$$AM = AG + GM \qquad (2)$$

Como G é o baricentro, podemos usar a propriedade que vimos na teoria:

$$\boldsymbol{AG = 2GM} \quad \rightarrow \quad GM = \frac{AG}{2} \qquad (3)$$

Usando esse (3) em (2):

$$AM = AG + \frac{AG}{2} \quad \rightarrow \quad AM = \frac{3AG}{2}$$

Vamos **isolar AG** pois é quem estamos procurando:

$$AG = \frac{2AM}{3} \qquad (4)$$

Pronto! Agora vamos usar o resultado (1) em (4).

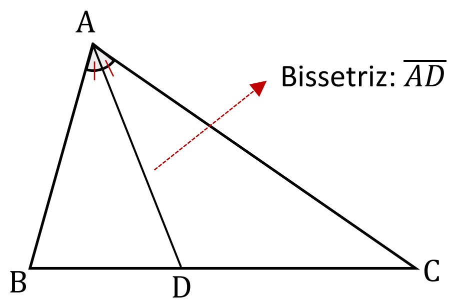
$$AG = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{4}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{AG = \frac{\sqrt{5}}{3}}}$$

Gabarito: ERRADO.

Para encerrarmos essa parte de **baricentro**, saiba também que ele é **o centro de gravidade do triângulo**. Por esse motivo, costumamos representá-lo pela letra "G".

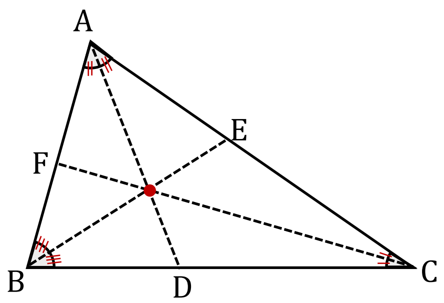
Incentro

Para entender o que é o incentro, é necessário entender o que é a **bissetriz interna de um triângulo**. A bissetriz interna nada mais é do que um segmento de reta que divide um ângulo interno em dois ângulos iguais. Vamos visualizá-la no desenho para melhor compreensão.



Moçada, não confunda! Enquanto a mediana está preocupada em dividir o lado oposto em dois segmentos iguais, **a bissetriz interna se preocupa em dividir o ângulo interno em dois iguais**. Ela pode tocar em qualquer ponto do lado oposto.

Mais um vez, perceba que o triângulo não possui apenas uma bissetriz interna, mas três!



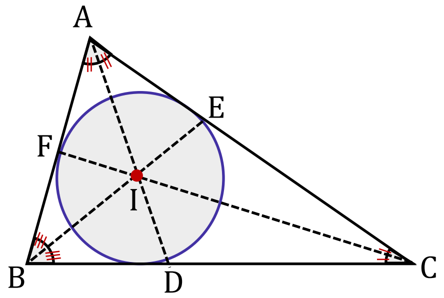
Logo, quando desenhamos as três bissetrizes de um triângulo, notamos que elas se encontram em um ponto. É exatamente esse ponto que chamamos de incentro.

TOME NOTA!

Incentro é o ponto de encontro das três **bissetrizes internas** de um triângulo.

Professor, esse ponto tem alguma propriedade especial?

Tem sim! Ele é o centro da circunferência inscrita nesse triângulo!



(PREF. PAÇO DO LIMIAR/2019) O centro de uma circunferência inscrita em um triângulo é facilmente obtido quando se determina o:

A) Autocentro.

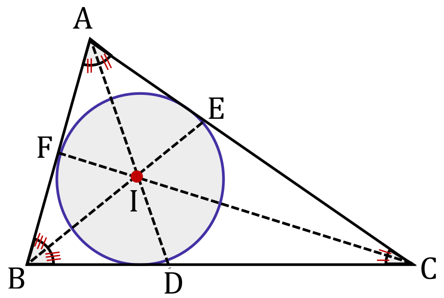
B) Baricentro.

C) Circuncentro.

D) Incentro.

Comentários:

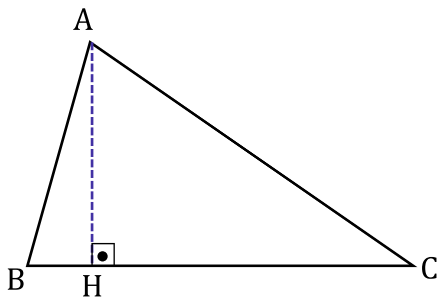
Conforme vimos, é o **incentro (I)** que coincide com o centro da circunferência **inscrita** no triângulo.



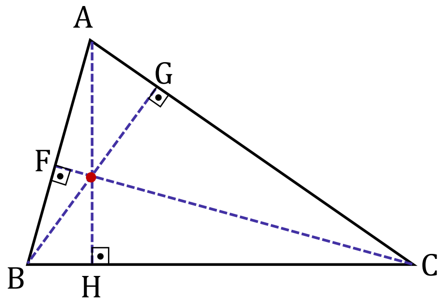
Gabarito: LETRA D.

Ortocentro

Para entender o ortocentro, precisamos entender o que é a altura. A altura de um triângulo nada mais é do que o segmento de reta que parte de um dos vértices e toca no lado oposto fazendo um ângulo de 90°. Vamos desenhar.



Sendo assim, como temos três vértices e três lados, podemos concluir que teremos **três alturas**. Vamos desenhar todas elas.



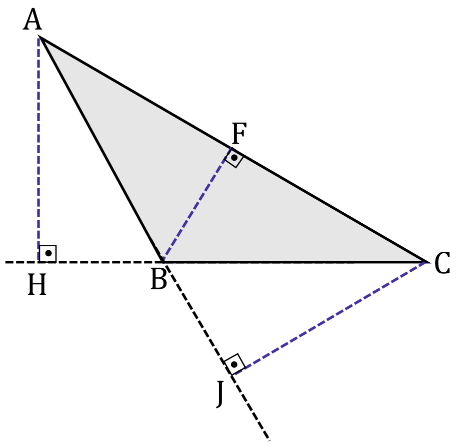
Perceba, portanto, que as alturas de um triângulo também se encontram em um ponto. É esse ponto que nós chamamos de **ortocentro**.

TOME NOTA!

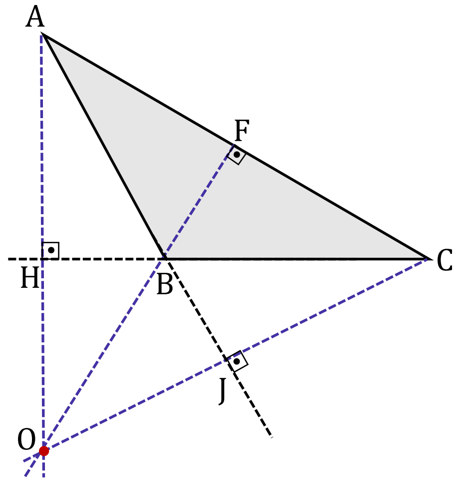
Ortocentro é o ponto de encontro das **três retas suportes da altura** de um triângulo.

Opa!! Professor, o senhor vinha falando de altura, mas na definição falou de reta suporte da altura. O que aconteceu?

Galera, acontece que nem sempre a altura será interna ao triângulo. Algumas vezes ela será externa e precisaremos traçar uma reta suporte para encontrar o ortocentro. Vamos desenhar essa situação.



Perceba que o triângulo ABC possui alturas que são externas ao triângulo (CJ e AH). Se desenharmos dessa forma, não conseguiremos encontrar o incentro, pois **as alturas não estão se encontram**. Isso significa que o ortocentro não existe? Não!! Pois o ortocentro é o **ponto de encontro das <u>retas suportes da altura</u>**. Na prática, nós vamos simplesmente prolongar as alturas até elas se encontrarem!



Note que, **<u>nessas situações</u>**, o ortocentro é externo ao triângulo. Não há problema algum.

HORA DE PRATICAR!

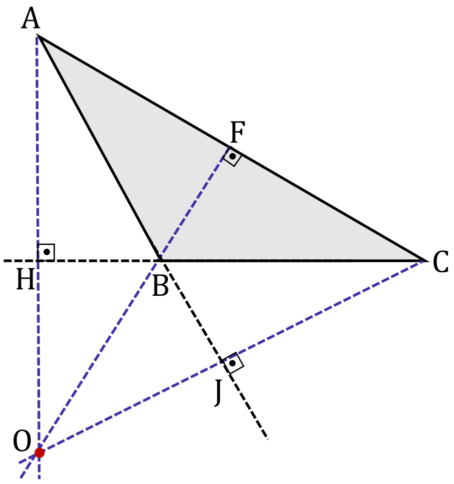
(PREF. HORIZONTINA/2021) Marcar C para as afirmativas Certas, E para as Erradas e, após, assinalar a alternativa que apresenta a sequência CORRETA:

( ) O ortocentro de um triângulo qualquer é sempre interno ao triângulo.
( ) O incentro de um triângulo qualquer é o ponto de interseção das medianas desse triângulo.
( ) Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.
( ) O ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo qualquer equivale ao centro de um círculo inscrito nesse triângulo.

A) E - E - E - C.
B) E - E - C - C.
C) C - E - E - C.
D) C - C - C - E.
E) C - C - E - C.

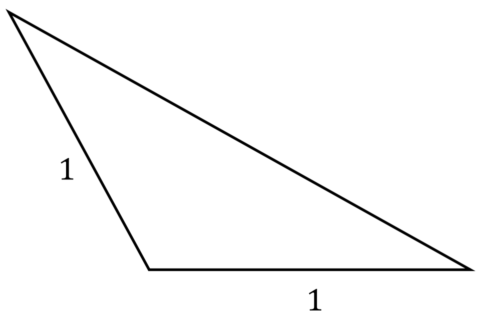
Comentários:
Vamos analisar cada uma das afirmativas.

(E) O ortocentro de um triângulo qualquer é sempre interno ao triângulo.
Errado! Acabamos de ver uma situação em que o ortocentro estava **externo** ao triângulo.



( ) O incentro de um triângulo qualquer é o ponto de interseção das medianas desse triângulo.
Errado! O incentro é o ponto de intersecção das **bissetrizes internas** de um triângulo. Lembre-se que o encontro das medianas é o baricentro.

( ) Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.
Errado! Podemos ter um triângulo isósceles que é um **triângulo obtusângulo**. Podemos desenhar como exemplo um triângulo da forma:



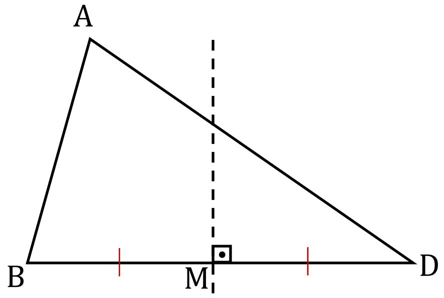
( ) O ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo qualquer equivale ao centro de um círculo inscrito nesse triângulo.

Correto! Lembre-se que o ponto de intersecção das bissetrizes internas de um triângulo é o **incentro**. Vimos que o incentro coincide com o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Gabarito: LETRA A.

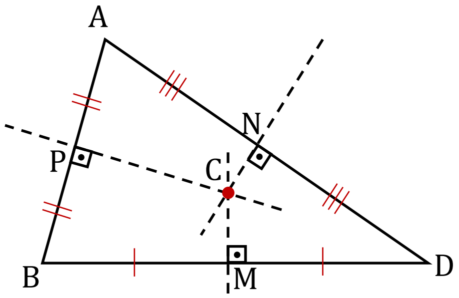
Circuncentro

Esse é o nosso último ponto notável. Para entendê-lo, é preciso conhecer a mediatriz. No contexto do estudo de triângulos, a mediatriz é um segmento de reta que passa perpendicularmente pelo ponto médio do lado. *Como assim, professor?!* Vamos para o desenho!



Galera, o importante de perceber aqui é o seguinte: a mediatriz não precisa partir do vértice! Ela pode vir de qualquer lugar. **Nossa preocupação aqui é dividir o lado no meio e perpendicularmente!!** Para satisfazer essas duas condições, ela não precisa partir do vértice, ok?!

Mais uma vez, você deve ter percebido que teremos três mediatrizes em um triângulo. Vamos desenhá-la.



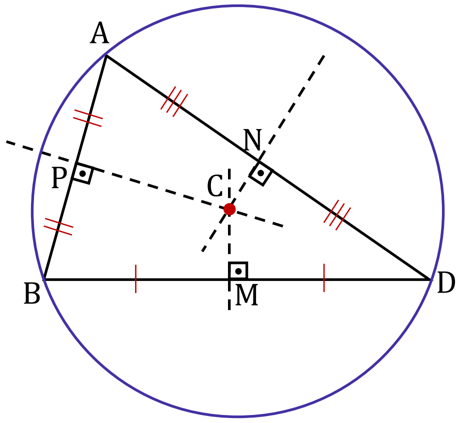
Observe que as mediatrizes se encontram em um ponto! Chamamos esse ponto de circuncentro.

TOME NOTA!

Circuncentro é o ponto de encontro das **três mediatrizes** dos lados do triângulo.

Professor, percebi que todo ponto notável que vimos até agora tem uma propriedade especial. O circuncentro também possui uma?

Sim! Saiba que **o circuncentro coincide com o centro da circunferência <u>circunscrita</u> ao triângulo**!



Bem legal, né?!

(PREF. ALTA FLORESTA/2019) Em um triangulo qualquer ABC, encontramos circuncentro quando:

A) Traçamos o triângulo dentro de uma circunferência.

B) Traçamos as três medianas deste triângulo.

C) Traçamos as três bissetrizes deste triângulo.

D) Traçamos as três alturas deste triângulo.

E) Traçamos as três mediatrizes deste triângulo.

Comentários:

Questão bem direta, mas vamos analisar todas as alternativas!

A) Traçamos o triângulo dentro de uma circunferência.

Errado, pessoal! Por mais que o circuncentro coincida com o centro da circunferência circunscrita, apenas desenhar o triângulo dentro da circunferência **<u>não é suficiente</u>** para encontrarmos esse ponto notável.

B) Traçamos as três medianas deste triângulo.

Errado! Quando traçamos as três medianas obtemos **<u>o baricentro</u>**.

C) Traçamos as três bissetrizes deste triângulo.

Errado! Quando traçamos as três bissetrizes internas do triângulo obtemos **<u>o incentro</u>**.

D) Traçamos as três alturas deste triângulo.

Errado! Quando traçamos as três alturas de um triângulo obtemos **<u>o ortocentro</u>**.

E) Traçamos as três mediatrizes deste triângulo.

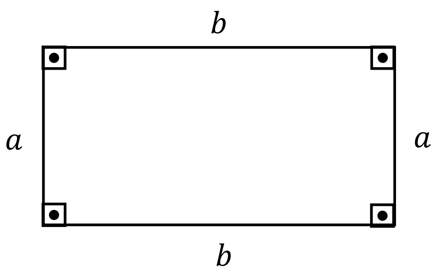
Correto! É isso mesmo! Quando traçamos **as três mediatrizes** do triângulo conseguimos encontrar o seu circuncentro!

Gabarito: LETRA E.

Quadriláteros

Nessa seção, mostrarei para vocês os quadriláteros mais conhecidos. Serei bem objetivo e quero que vocês deem especial atenção para as fórmulas de área. Combinado?!

Retângulo



$$\boxed{ÁREA = a \cdot b}$$

Características Principais:

- Comprimento: "b"; Largura: "a";
- Ângulos internos são iguais a 90°;
- Lados opostos são iguais

(CM SERTÃOZINHO/2019) O quadro de avisos de uma firma tem a forma de um retângulo com 80 cm de altura e 1,2 m² de área. A medida do comprimento desse quadro é

A) 1,2 m

B) 1,3 m

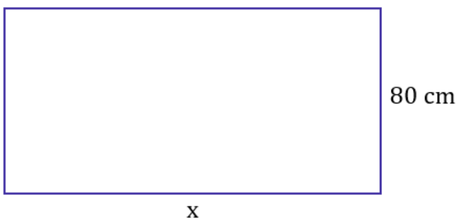
C) 1,4 m

D) 1,5 m

E) 1,6 m

Comentários:

Temos uma largura e a área. Sabendo disso, podemos determinar o comprimento. Primeiro, veja o retângulo.



Uma coisa importante que devemos perceber é que a área dada está em metros quadrados e a medida da largura está em centímetros. Cuidado para não misturar! Precisamos escrever 80 centímetros em metros.

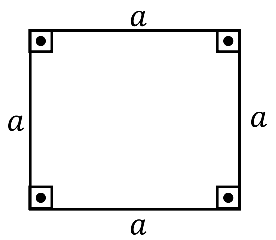
$$80\ centímetros = 0{,}8\ metros \qquad \text{(dividimos por 100)}$$

Em um retângulo, a área é dada pelo produto do comprimento pela largura. Assim,

$$x \cdot 0{,}8 = 1{,}2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1{,}2}{0{,}8} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 1,5\ m}$$

Gabarito: LETRA D.

Quadrado



$$\boxed{ÁREA = a^2}$$

Características Principais:

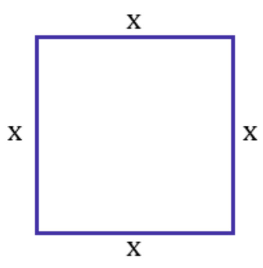
- Todos os lados são iguais;
- Todos os ângulos internos são iguais a 90°;
- É um polígono regular.

(FITO/2020) Um galpão tem a superfície em formato quadrado com perímetro igual a 96 m. Esse galpão será divido em três salas de modo que suas áreas sejam diretamente proporcionais aos números: 2, 4 e 9. A diferença entre as áreas das duas maiores salas será igual a

A) 32,0 m².
B) 68,4 m².
C) 153,6 m².
D) 180,8 m².
E) 192,0 m².

Comentários:

Beleza! Lembre-se que o perímetro é a soma dos lados. Em um quadrado, todos os lados são iguais. Assim,



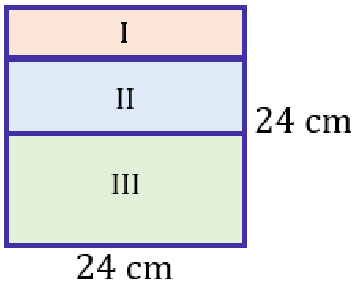
O enunciado disse que o perímetro desse quadrado é 96 cm.

$$x + x + x + x = 96 \quad \rightarrow \quad 4x = 96 \quad \rightarrow \quad x = 24\ cm$$

Logo, o lado do quadrado é 24 cm. A área de um quadrado é igual ao lado ao quadrado.

$$A = 24^2 \quad \rightarrow \quad A = 576\ cm^2$$

Esse quadrado é dividido em três salas com áreas proporcionais a 2, 4 e 9. Imagine algo do tipo (não sabemos as formas da sala, quero apenas ilustrar uma possibilidade para melhor entendimento).



Podemos escrever as seguintes proporcionalidades:

$$A_I = 2k$$
$$A_{II} = 4k$$
$$A_{III} = 9k$$

Ora, a soma das áreas de todas as salas deve ser igual a área do quadrado. Assim,

$$2k + 4k + 9k = 576 \quad \rightarrow \quad 15k = 576 \quad \rightarrow \quad k = \frac{576}{15} \quad \rightarrow \quad k = 38{,}4$$

A diferença das áreas das duas maiores sala é:

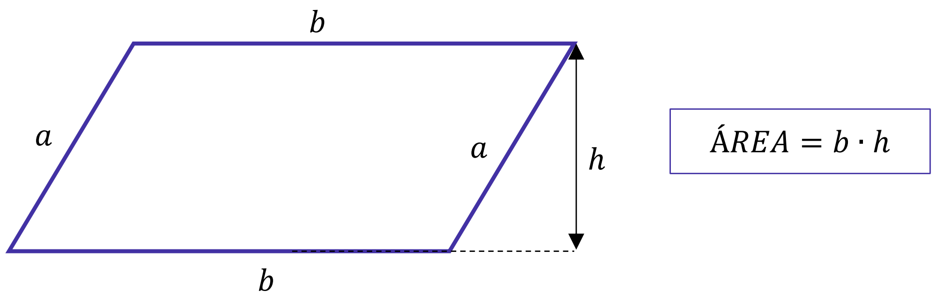
$$Diferença = A_{III} - A_{II} \quad \rightarrow \quad Dif = 9k - 4k \quad \rightarrow \quad Dif = 5k$$

Basta substituirmos o valor de "k".

$$Dif = 5 \cdot 38{,}4 \quad \rightarrow \quad Dif = 192\ m^2$$

Gabarito: LETRA E.

Paralelogramo

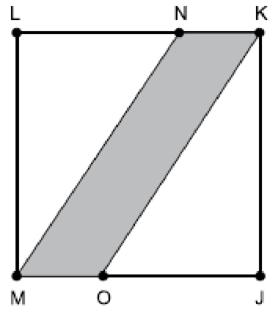


Características Principais:

- Lados opostos são iguais (congruentes) e paralelos;
- Ângulos opostos são iguais (congruentes)

- A área é dada em função da altura "h" e esse "h" nem sempre vai estar disponível para nós. Na maioria das vezes, teremos que usar um pouco dos conhecimentos sobre triângulos retângulos, tudo bem?

(UNICAMP/2019) Os pontos N e O pertencem aos lados de um quadrado JKLM, determinando o paralelogramo KNMO cuja área é igual a 1/3 da área do quadrado, conforme a figura.



Se a medida do lado do quadrado é 6 cm, o perímetro do paralelogramo, em cm, é igual a

A) $2 + 2\sqrt{13}$

B) $2 + 4\sqrt{13}$

C) $4 + \sqrt{13}$

D) $4 + 4\sqrt{13}$

Comentários:

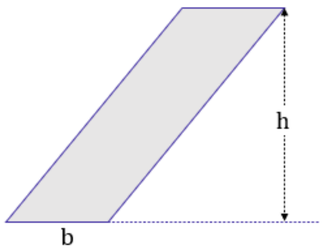
Queremos saber o perímetro do paralelogramo. O enunciado apenas disse que a área do paralelogramo é igual a um terço da área do quadrado. Como a medida do lado do quadrado vale 6 cm, então podemos calcular a sua área.

$$A_{quadrado} = L^2 \quad \rightarrow \quad A_{quadrado} = 6^2 \quad \rightarrow \quad A_{quadrado} = 36 \text{ cm}^2$$

Se a área do paralelogramo é um terço da do quadrado, fazemos:

$$A_{paralelogramo} = \frac{1}{3} \cdot A_{quadrado} \quad \rightarrow \quad A_{paralelogramo} = \frac{1}{3} \cdot 36 \quad \rightarrow \quad A_{paralelogramo} = 12 \text{ cm}^2$$

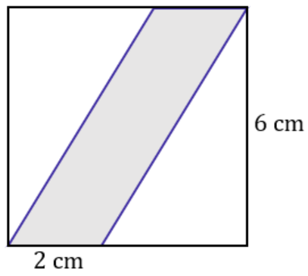
Ok! Temos a área, mas o enunciado pede o perímetro (que é a soma de todos os lados). Agora, veja o seguinte paralelogramo:



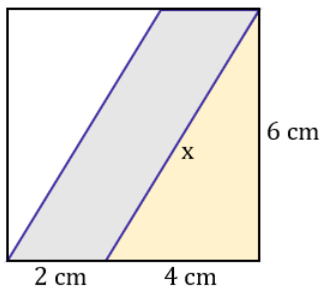
Na situação representada na figura, sabemos que a área dele é dada por $A = bh$. Compare o paralelogramo acima com o da questão. Percebeu que a altura do paralelogramo da questão é igual ao lado do quadrado? Ou seja, $h = 6\ cm$! Podemos, portanto descobrir a base.

$$A_{paralelogramo} = bh \quad \rightarrow \quad 12 = b \cdot 6 \quad \rightarrow \quad b = \frac{12}{6} \quad \rightarrow \quad b = 2 \text{ cm}$$

Ficamos com a seguinte situação:



No entanto, falta ainda descobrir o lado "diagonal". Para isso, veja o triângulo retângulo.



Ora, "x" é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 4 cm e 6 cm. Vamos usar o Teorema de Pitágoras!

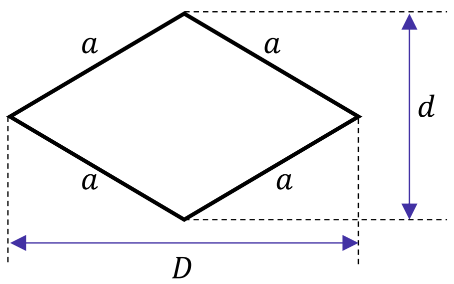
$$x^2 = 4^2 + 6^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 16 + 36 \quad \rightarrow \quad x^2 = 52 \quad \rightarrow \quad x = 2\sqrt{13} \text{ cm}$$

Pronto! Temos todos os lados do paralelogramo, basta somá-los para obter o perímetro!

$$Perímetro = 2 + 2 + 2\sqrt{13} + 2\sqrt{13} \quad \rightarrow \quad Perímetro = 4 + 4\sqrt{13} \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA D.

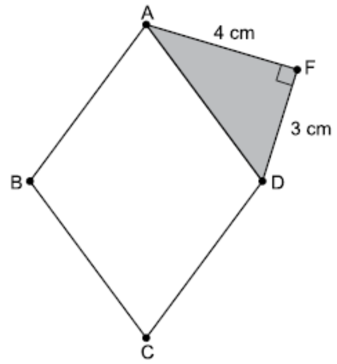
Losango



$$ÁREA = \frac{D \cdot d}{2}$$

Características Principais:
- O losango é um paralelogramo com todos os lados iguais;
- É também chamado de paralelogramo equilátero;
- Ângulos opostos iguais;
- "D" é a medida da diagonal maior, enquanto "d" é a medida da diagonal menor.

(PREF. ITAPEVI/2019) Um losango ABCD e um triângulo retângulo AFD têm o lado AD em comum conforme a figura.

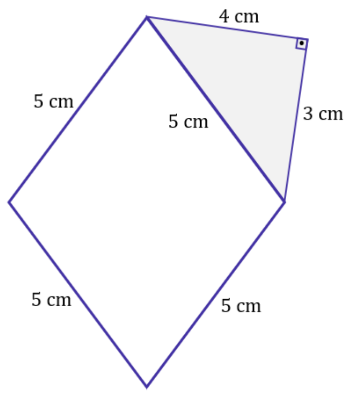


O perímetro do losango, em cm, é igual a
A) 16
B) 18
C) 20
D) 22

Comentários:
Notem que o triângulo retângulo destacado é o aquele pitagórico! Logo, se os catetos são 3 e 4, a hipotenusa só pode ser 5 cm! Tudo bem? Caso não lembrasse disso, você poderia usar o Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 4^2 + 3^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 16 + 9 \quad \rightarrow \quad x^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x = 5 \text{ cm}$$

O motivo de encontrar a hipotenusa do triângulo retângulo é que ela coincide com o lado do losango. Como no losango todos os lados são iguais, já podemos determinar o perímetro.

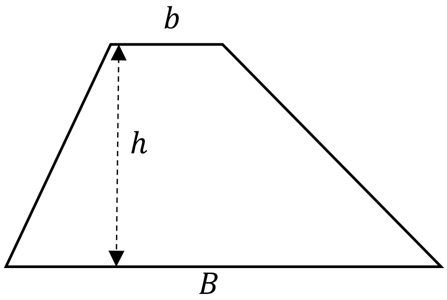


Assim, lembrando que o perímetro é a soma dos lados:

$$Perímetro = 5 + 5 + 5 + 5 \quad \rightarrow \quad Perímetro = 20 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA C.

Trapézio

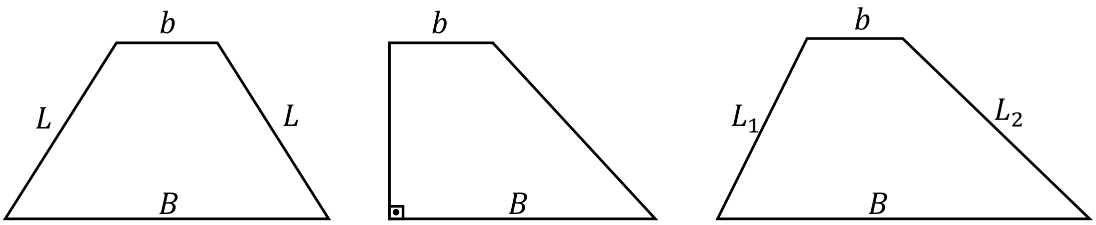


$$\text{ÁREA} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Características Principais:

- "B" representa a medida da base maior, "b" é a medida da base menor;
- As bases são paralelas;
- "h" é a altura do trapézio.

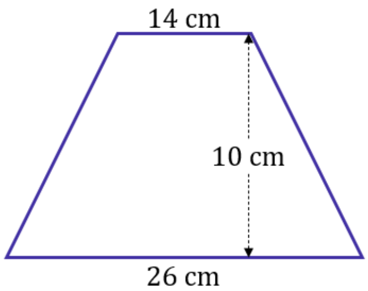
Tipos de Trapézios:



Trapézio Isósceles   Trapézio Retângulo   Trapézio Escaleno

- **Trapézio Isósceles:** Os lados não paralelos possuem a mesma medida. Além disso, são simétricos.
- **Trapézio Retângulo:** Um dos lados não paralelos faz um ângulo de 90° com as bases.
- **Trapézio Escaleno:** É o trapézio que apresenta todos os seus lados distintos.

(PREF. ITANHAÉM/2020) Assinale a alternativa que apresenta a área do trapézio abaixo.



A) 260 cm^2
B) 200 cm^2
C) 1.820 cm^2

D) 3.640 cm^2
E) 400 cm^2

Comentários:
Galera, questãozinha apenas para treinarmos a fórmula da área do trapézio. O enunciado deu de cara todas as informações que precisamos.

- $Base\ Maior\ (B) = 26\ cm;$
- $Base\ Menor\ (b) = 14\ cm;$
- $Altura\ (h) = 10\ cm$

Lembre-se da fórmula:

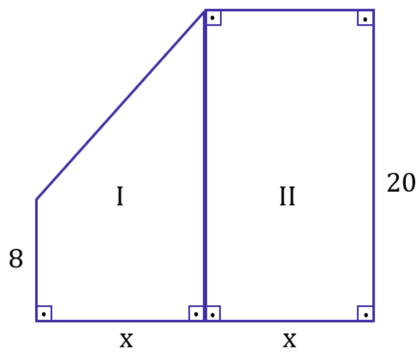
$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Agora, substituindo as informações:

$$A = \frac{(26+14)\cdot 10}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{40\cdot 10}{2} \quad \rightarrow \quad A = 40\cdot 5 \quad \rightarrow \quad A = 200\ cm^2$$

Gabarito: LETRA B.

(PREF. CERQUILHO/2019) Na figura, com medidas em metros, estão representados dois terrenos adquiridos por Xavier, sendo que o terreno I tem a forma de um trapézio, e o terreno II tem formato retangular.

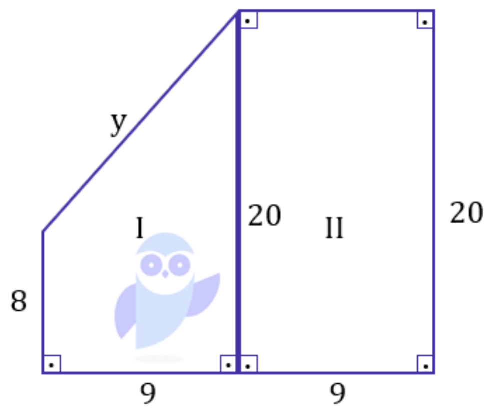


Se a área do terreno II é 180 m², então, o perímetro do terreno I é igual a
A) 52 m.
B) 50 m.
C) 49 m.
D) 46 m.
E) 42 m.

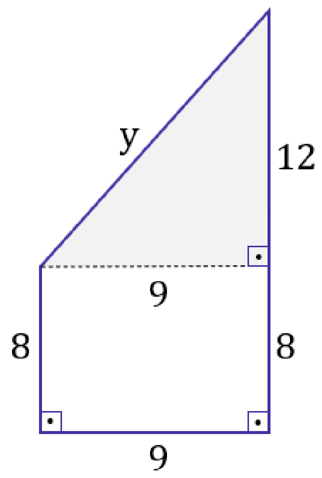
Comentários:
Pessoal, o enunciado deu a área do terreno retangular e sabemos uma de suas dimensões. Logo, podemos determinar x.

$$20\cdot x = 180 \quad \rightarrow \quad x = \frac{180}{20} \quad \rightarrow \quad x = 9 \text{ metros}$$

Dessa forma, ficamos com quase todas as dimensões do terreno I determinadas.



Veja que temos quase todas as dimensões do trapézio determinadas. Precisamos ainda descobrir "y". Para isso, precisaremos olhar o trapézio com mais cuidado.



O lado "y" do trapézio é justamente a hipotenusa do triângulo retângulo destacado. O lado maior foi dividido em duas partes, uma de 8 e outra de 12, que é exatamente um dos catetos. Podemos usar o Teorema de Pitágoras.

$$y^2 = 9^2 + 12^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = 81 + 144 \quad \rightarrow \quad y^2 = 225 \quad \rightarrow \quad y = 15\ m$$

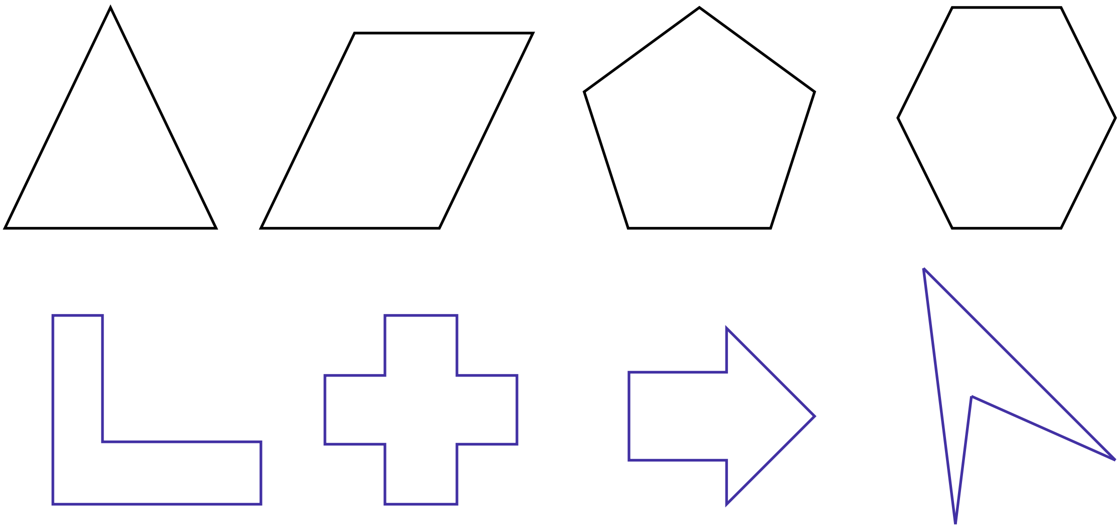
Pronto! Todos os lados do trapézio do terreno I estão determinados. Para encontrar o perímetro, basta somarmos tudo.

$$Perímetro = 8 + 9 + 20 + 15 \quad \rightarrow \quad Perímetro = 52\ m$$

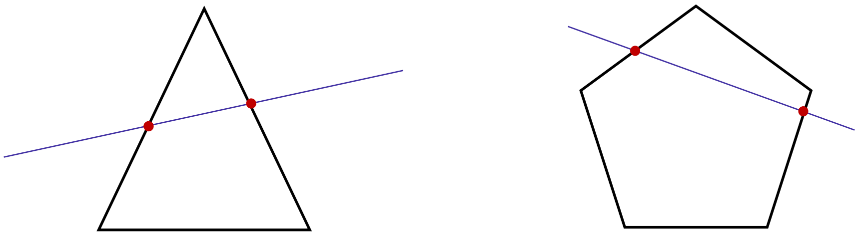
Gabarito: LETRA A.

Polígonos

Os triângulos e os quadriláteros que vimos nessa aula são polígonos. Simplificadamente, podemos chamar de polígono, **a figura geométrica plana e fechada formada pela união de segmentos de reta**. Confira abaixo.

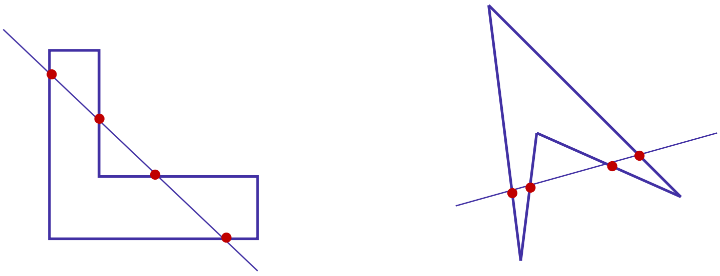


Na primeira linha da imagem acima estão **alguns polígonos que chamamos de convexos**. Eles vão ser chamados assim quando uma qualquer reta **cortar o polígono em apenas dois pontos**.



Polígonos Convexos

Observe que qualquer reta que usamos para cortar o polígono, vai tocá-lo em apenas dois pontos! Essa é a característica que vai definir os polígonos convexos! Observe agora os não convexos:



Polígonos Não Convexos

Por sua vez, **nos polígonos não convexos, existem retas que vão cortá-los em mais de dois pontos**. Veja que eles podem assumir as mais diferentes formas, sendo bem imprevisíveis e dificilmente estarão na sua prova. Quando caem, 99% das vezes é apenas para fazermos a identificação em convexo ou não.

Por fim, quero trazer para vocês um resultado que vimos para triângulos e quadriláteros mas que na verdade **serve para qualquer polígono**.

A soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo será sempre 360°.

Ademais, **a soma dos ângulos internos de um polígono de "n" lados** é dada por:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Por exemplo, no triângulo temos três lados e, portanto, $n = 3$. Usando isso na fórmula acima,

$$S_i = (3-2) \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_i = 180°$$

Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, conforme vimos.

Analogamente, para os quadriláteros convexos, temos $n = 4$.

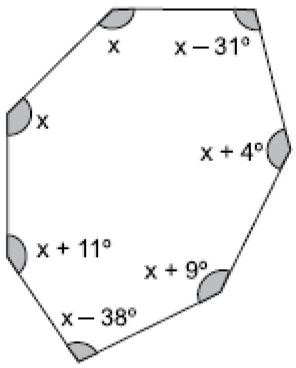
$$S = (4-2) \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_i = 2 \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_i = 360°$$

Assim, a soma dos ângulos internos nos quadriláteros convexos é 360°.

Viu só, moçada? Caso queira saber a soma dos ângulos internos em um hexágono, por exemplo, basta substituirmos $n = 6$. **Às vezes, as bancas gostam de cobrar essa fórmula.**

HORA DE PRATICAR!

(PREF. ARAÇATUBA/2019) Em um polígono convexo, a soma dos ângulos internos, em graus, é dada pela fórmula $S = 180(n - 2)$, sendo n o número de lados do polígono. No polígono da figura, a incógnita x representa um valor em graus



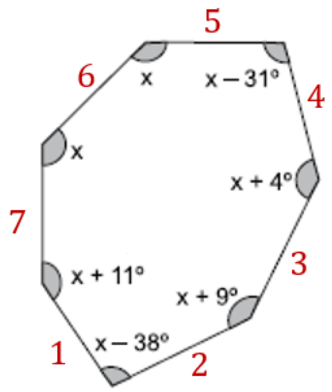
O menor ângulo interno desse polígono mede:

A) 99°

B) 97°

C) 95°
D) 93°
E) 91°

Comentários:
O primeiro passo do exercício é contarmos os lados do polígono. Isso mesmo, vamos lá!



O polígono tem 7 lados! Podemos achar quanto vale a soma dos ângulos internos! Caso não lembrasse da fórmula, a questão foi boazinha e trouxe! Vamos aplicá-la.

$$S = (n - 2) \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S = (7 - 2) \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S = 5 \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S = 900°$$

Beleza! Quando somarmos todos esses ângulos destacados na imagem, devemos obter 900°.

$$(x + 11°) + (x - 38°) + (x + 9°) + (x + 4°) + (x - 31°) + x + x = 900°$$

$$7x - 45 = 900$$

$$7x = 945$$

$$x = \frac{945}{7}$$

$$x = 135°$$

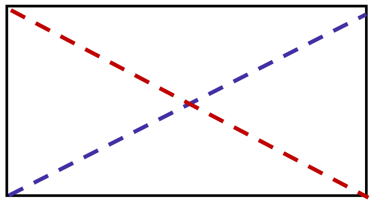
O menor ângulo desse polígono será dado por "$x - 38°$", pois é o que estamos tirando mais de x.

$$Menor\ \hat{A}ngulo = x - 38° = 135° - 38° = 97°$$

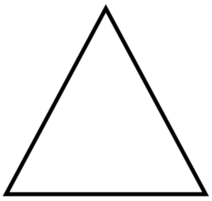
Gabarito: LETRA B.

Diagonais de um Polígono Convexo

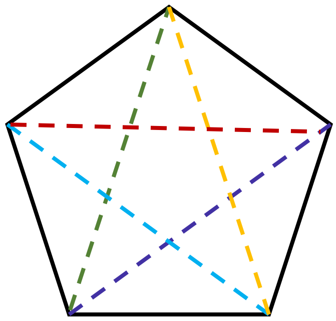
As diagonais de um polígono são segmentos de retas que **unem vértices não adjacentes**. Calma, vou mostrar melhor o que isso significa!



Observe o retângulo acima! Ele tem **duas diagonais**. Uma está marcada de roxo e outra de vermelho. Agora, veja o triângulo:



Por sua vez, o triângulo, apesar de ser um polígono convexo, **não possui diagonais**. O motivo disso é **que todos os seus vértices são adjacentes um do outro**. Dessa forma, não conseguimos traçar nenhuma diagonal. Agora, vamos ver o pentágono!



O pentágono já possui 5 diagonais! A pergunta que vem agora é: *Existe uma maneira de calcularmos a quantidade de diagonais sabendo o número de lados do polígono convexo?* A resposta é sim! Existe uma fórmula que nos fornece essa quantidade e as bancas estão começando a cobrá-la.

TOME NOTA!

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

"d" representa a quantidade de diagonais e "n" é o número de lados do polígono.

ESTA CAI NA PROVA!

(ISS-BH/2022) A partir do conceito: “Dado um polígono convexo qualquer, diagonal é o segmento que une dois vértices não consecutivos”. Assim, um triângulo não possui diagonais, pois, como só possui três vértices, não é possível unir dois vértices não consecutivos, o quadrado possui duas diagonais e partir de um dos vértices, encontramos, apenas um outro vértice não consecutivo, enquanto, que no pentágono convexo temos 5 diagonais, e nesse polígono encontramos a partir de um vértice, dois outros vértices não consecutivos. A partir dessas informações, monta-se a tabela a seguir.

Nome do Polígono	Número de lados	Número de diagonais	A partir de um dos vértices, o número de vértices não consecutivos
Triângulo	3	0	0
Quadrado	4	2	1
Pentágono	5	5	2
Hexágono	6	9	3
Heptágono	7	14	4

Verifica-se que existe uma certa regularidade entre o número de lados, número de diagonais e o número de vértices não consecutivos contados a partir de um dos vértices. Então, o número de diagonais de um polígono convexo que possui 102 lados é igual a

A) 4.852.
B) 4.947.
C) 4.998.
D) 5.049.
E) 5.100.

Comentários:

Pessoal, **o número de diagonais** de um polígono convexo de "n" lados é dado pela seguinte relação:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

O enunciado quer o número de diagonais de um polígono com **102 lados**. Assim,

$$d = \frac{102 \cdot (102-3)}{2} \quad \rightarrow \quad d = \frac{102 \cdot 99}{2} \quad \rightarrow \quad d = 51 \cdot 99 \quad \rightarrow \quad \boxed{d = 5.049}$$

Gabarito: LETRA D.

QUESTÕES COMENTADAS

Introdução

Outras Bancas

1. (OMNI/PREF. LENÇOIS PTA/2021) Consideremos três pontos A, B e C em um plano π, análise as opções abaixo e marque aquela que tem uma afirmação verdadeira.

A) Entre os pontos A, B e C, sempre é possível desenhar um triângulo.

B) O segmento AB, ou seja, o segmento de reta que começa no ponto A e termina no ponto B, tem uma quantidade finita de pontos.

C) A reta que passa pelos pontos A e B, pode passar também pelo ponto C.

D) A, B e C não podem estar todos no plano π.

Comentários:

Vamos analisar as alternativas.

A) Entre os pontos A, B e C, sempre é possível desenhar um triângulo.

Errado. Pense em três pontos que são **colineares**! Nessa situação, não conseguiremos desenhar um triângulo.

B) O segmento AB, ou seja, o segmento de reta que começa no ponto A e termina no ponto B, tem uma quantidade finita de pontos.

Errado. O segmento de reta, por mais que tenha extremidades, é formado por **infinitos pontos** que "ligam" essas extremidades.

C) A reta que passa pelos pontos A e B, pode passar também pelo ponto C.

Certo! Esse é o nosso gabarito. Conforme comentamos na alternativa A, esses três pontos podem ser colineares. Dessa forma, uma reta que passa pelos pontos A e B, **também passaria por C**.

D) A, B e C não podem estar todos no plano π.

Errado. O próprio enunciado fala que os pontos estão em um plano π. Não há problema nisso. Todos os pontos **podem pertencer sim** a um mesmo plano.

Gabarito: LETRA C.

2. (AOCP/PREF. TERESÓPOLIS/2021) Sabe-se que a diferença entre o dobro do suplemento de um ângulo x e os dois quintos da medida desse mesmo ângulo x é zero. Dessa forma, é correto afirmar que a medida do ângulo x é igual a

A) 180°

B) 150°

C) 120°
D) 90°
E) 30°

Comentários:
Dois ângulos são suplementares quando **sua soma é igual a 180°**. Se temos um ângulo "x", então seu suplementar "S" é tal que:

$$x + S = 180° \quad \rightarrow \quad S = 180° - x \qquad (1)$$

O enunciado fala que **a diferença entre o dobro de "S" e dois quintos de "x" é zero**. Com isso:

$$2S - \frac{2x}{5} = 0 \qquad (2)$$

Podemos usar (1) em (2):

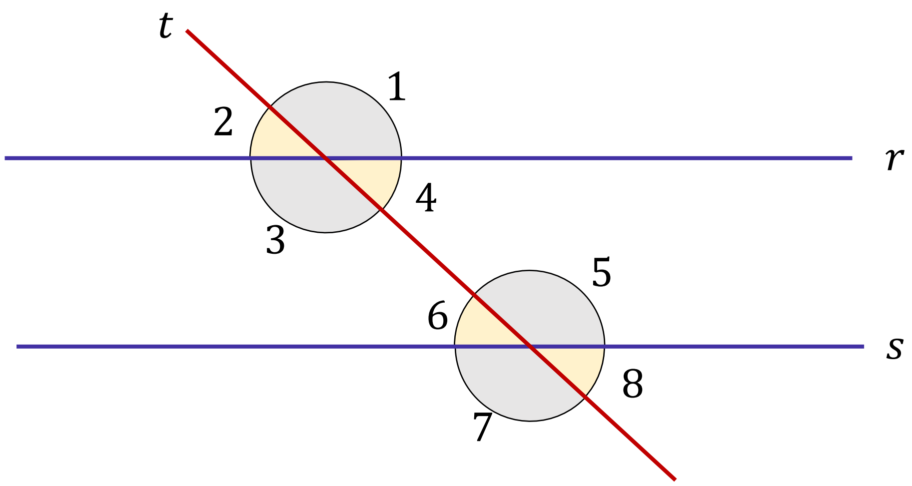
$$2 \cdot (180° - x) - \frac{2x}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad 360 - 2x - \frac{2x}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{12x}{5} = 360$$

$$\rightarrow \quad x = 5 \cdot 30 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 150°}$$

Gabarito: LETRA B.

3. (AOCP/PREF. TERESÓPOLIS/2021) Em um plano, considere duas retas r e s, distintas e paralelas entre si, e uma reta t transversal à reta r e à reta s, determinando ângulos em suas intersecções. Em relação aos ângulos determinados por essas três retas, é correto afirmar que
A) no total, são determinados 10 ângulos nas intersecções dessas três retas.
B) os pares de ângulos que estão entre as retas r e s e estão em posições alternadas em relação à reta t são denominados ângulos alternos externos.
C) os pares de ângulos que não estão entres as retas r e s e estão em posições alternadas em relação à reta t são denominados ângulos alternos internos.
D) os pares de ângulos que estão entre as retas r e s e estão do mesmo lado em relação à reta t são denominados ângulos colaterais internos.
E) os pares de ângulos que não estão entre as retas r e s e estão do mesmo lado em relação à reta t são denominados ângulos alternos.

Comentários:
Pessoal, a questão está pedindo para considerarmos aquela nossa figura que destrinchamos na teoria!



- Ângulos opostos pelo vértice: $(1{,}3), (2{,}4), (5{,}7)\ e\ (6{,}8)$;
- Ângulos alternos internos: $(4{,}6)$ e $(3{,}5)$;
- Ângulos alternos externos: $(2{,}8)$ e $(1{,}7)$;
- Ângulos colaterais internos: $(3{,}6)$ e $(4{,}5)$;
- Ângulos colaterais externos: $(1{,}8)\ e\ (2{,}7)$.

Com essas informações, vamos analisar as alternativas.

A) no total, são determinados 10 ângulos nas intersecções dessas três retas.
Errado. São **8 ângulos** determinados nas intersecções das três retas.

B) os pares de ângulos que estão entre as retas r e s e estão em posições alternadas em relação à reta t são denominados ângulos alternos externos.
Errado. O enunciado está se referindo aos pares de ângulos (4,6) e (3,5). Note que como esses ângulos estão entre as retas r e s, **eles são os alternos internos.**

C) os pares de ângulos que não estão entres as retas r e s e estão em posições alternadas em relação à reta t são denominados ângulos alternos internos.
Errado. O enunciado está se referindo aos pares de ângulos (2,8) e (1,7). Note que como esses ângulos não estão entre as retas r e s, **eles são os alternos externos.**

D) os pares de ângulos que estão entre as retas r e s e estão do mesmo lado em relação à reta t são denominados ângulos colaterais internos.
Certo. É isso mesmo, pessoal! Ora, se estão entre as retas r e s, eles **são internos**. Como estão do mesmo lado em relação à reta t, então **são colaterais.**

E) os pares de ângulos que não estão entre as retas r e s e estão do mesmo lado em relação à reta t são denominados ângulos alternos.

Errado. Galera, como os ângulos estão do mesmo lado em relação à reta t, eles **não podem ser alternos**, mas sim colaterais.

Gabarito: LETRA D.

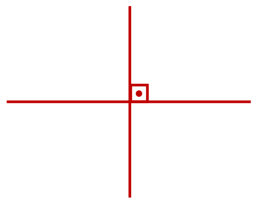
4. (INST. EXCELÊNCIA/PREF. TAUBATÉ/2019) Conforme o estudo de ângulos e retas, analise as seguintes afirmativas:

I - Duas retas são perpendiculares se formarem um ângulo reto.
II - Duas retas concorrentes e não perpendiculares formam dois ângulos agudos.
III - Duas retas concorrentes e não perpendiculares formam dois ângulos obtusos.
IV - Duas retas paralelas entre si formam um ângulo raso de 180°.

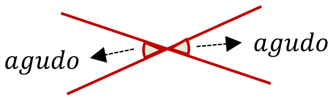
Está CORRETO o que se afirma em:
A) I, II e III.
B) I, II e IV.
C) I, III e IV.
D) Nenhuma das alternativas.

Comentários:
Vamos analisar cada uma das afirmativas.

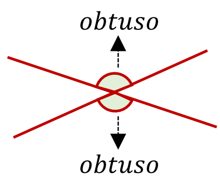
I - Duas retas são perpendiculares se formarem um ângulo reto.
É exatamente isso, pessoal. Lembre-se que um ângulo reto é aquele de 90°.



II - Duas retas concorrentes e não perpendiculares formam dois ângulos agudos.
Correto. Elas formam **dois ângulos agudos** e **dois ângulos obtusos**.



III - Duas retas concorrentes e não perpendiculares formam dois ângulos obtusos.
Correto! Comentamos isso no item anterior.



IV - Duas retas paralelas entre si formam um ângulo raso de 180°.

Errado. Duas retas paralelas nem chegam a se tocar e, portanto, não formam ângulo.

Gabarito: LETRA A.

5. (SGP-J/PREF. JOINVILLE/2019) Qual das afirmações a seguir é falsa:

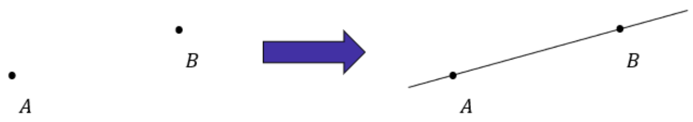
A) Dois pontos determinam uma única reta;
B) Por um ponto passam infinitas retas;
C) Por um ponto passam infinitos planos;
D) Por uma reta passam infinitos planos;
E) Um plano contém infinitas retas.

Comentários:

Vamos comentar uma por uma!

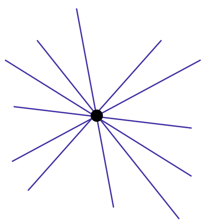
A) Dois pontos determinam uma única reta;

Errado! Questão bem capciosa. Dois pontos **distintos** determinam uma única reta. Se esses dois pontos forem **coincidentes**, isso não ocorre.



B) Por um ponto passam infinitas retas;

Correto!

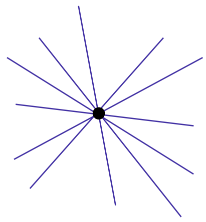


C) Por um ponto passam infinitos planos;

Correto também! Imagine um plano que contenha cada uma das retas que desenhamos no item anterior! Assim, da mesma forma que infinitas retas passam por um ponto, também passam infinitos planos.

D) Por uma reta passam infinitos planos;

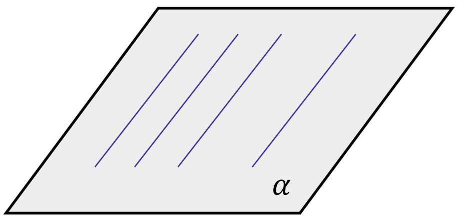
Correto! Para visualizar essa situação, vamos aproveitar uma figura que já desenhamos.



Imagine que o ponto central é uma reta vista de frente (saindo pela tela do seu computador). Por sua vez, as retas seriam planos (vistos de lado) que se estendem perpendicularmente à tela.

E) Um plano contém infinitas retas.

Isso mesmo! Podemos desenhar essa situação.



Gabarito: LETRA A.

6. (CONSCAM/SAEEDOCO/2018) De acordo com os conceitos primitivos da Geometria Plana, assinale a alternativa correta.

A) Duas retas coplanares são concorrentes quando não possuem ponto comum.

B) Por um ponto dado no plano passa-se somente uma reta.

C) As retas e semirretas coplanares possuem as mesmas características.

D) As retas paralelas coplanares classificam-se em distintas e coincidentes.

E) Em um plano existe somente uma reta.

Comentários:

A) Duas retas coplanares são concorrentes quando não possuem ponto comum.

Errado! Elas são concorrentes quando possuem **um único ponto** em comum.

B) Por um ponto dado no plano passa-se somente uma reta.

Errado. Por um ponto podem passar **infinitas** retas.

C) As retas e semirretas coplanares possuem as mesmas características.

Errado. Retas são diferentes de semirretas. Essas últimas possuem **uma extremidade**.

D) As retas paralelas coplanares classificam-se em distintas e coincidentes.
Correto. Duas retas paralelas coplanares podem ser **distintas ou coincidentes**.

E) Em um plano existe somente uma reta.
Errado. Em um plano existem **infinitas** retas.

Gabarito: LETRA D.

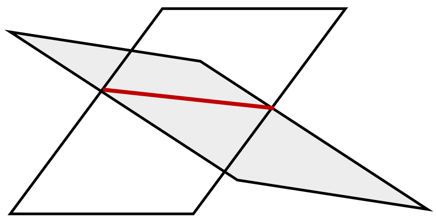
7. (CONSCAM/CM GARÇA/2018) As afirmações a seguir se referem a noções básicas de Geometria

I- Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.
II- Se dois planos têm uma reta comum, eles são coplanares.
III- Se dois planos têm uma única reta comum, eles são secantes.

Após classificá-las como Verdadeiras (V) ou Falsas (F), o resultado obtido será:
A) V, V, V.
B) V, F, V.
C) F, V, F.
D) F, F, V.
E) F, F, F.

Comentários:
I- Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.
Falso. Elas devem ter **um único** ponto em comum.

II- Se dois planos têm uma reta comum, eles são coplanares.
Falso. Observe o contraexemplo:



III- Se dois planos têm uma única reta comum, eles são secantes.
Correto! Seria o caso da figura que mostramos no item anterior.

Gabarito: LETRA D.

8. (AVANÇASP/CM TABOÃO DA SERRA/2022) A sombra de Rodrigo projetada no chão, com a parede de sua casa, formava, em uma determinada hora, 122°.Das alternativas abaixo, qual apresenta corretamente esse ângulo?

A) ângulo agudo.

B) ângulo reto.

C) ângulo obtuso.

D) ângulo raso.

E) ângulo nulo.

Comentários:

Sabemos que um ângulo **entre 90° e 180°** é conhecido como **obtuso**. Logo, podemos marcar letra C.

Gabarito: LETRA C.

9. (AVANÇASP/ISS - LOUVEIRA/2022) Das alternativas abaixo, qual apresenta de forma correta um ângulo reto?

A) 70°.

B) 85°.

C) 90°.

D) 100°.

E) 180°.

Comentários:

Galera, **um ângulo reto é aquele que mede 90°**. Sendo assim, podemos marcar acertadamente a letra C.

Gabarito: LETRA C.

10. (FEPESE/PREF. B. CAMBORIÚ/2022) O ângulo, em graus, cuja terça parte do suplementar excede a metade do complementar em 19 graus é:

A) Menor que 22.

B) Maior que 22 e menor que 25.

C) Maior que 25 e menor que 28.

D) Maior que 28 e menor que 31.

E) Maior que 31.

Comentários:

- Dois ângulos são **complementares** quando sua soma é igual a 90°.

Lembre-se que:

- Dois ângulos são **suplementares** quando sua soma é igual a 180°.

Seja x o ângulo que estamos procurando.

O suplementar de x é $180° - x$.
O complementar de x é $90° - x$.

A questão fala que **a terça parte do suplementar** excede **a metade do complementar em 19°**. Logo:

$$\frac{180° - x}{3} = \frac{90° - x}{2} + 19$$

Resolvendo para determinar x:

$$\frac{180° - x}{3} = \frac{90° - x + 38}{2}$$

$$360° - 2x = 270° - 3x + 114$$

$$x = -90° + 114$$

$$\boxed{x = 24°}$$

Observe, portanto, que **o ângulo procurado é 24°**. Com isso, podemos marcar a letra B.

Gabarito: LETRA B.

Inéditas

11. (Questão Inédita) Assinale a alternativa que apresenta os ângulos 30°, 45°, 60° e 90°, nessa ordem, em radianos.

A) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{2}$
B) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$
C) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$
D) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}$ e π
E) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{8}$ e 2π

Comentários:
Esses ângulos vocês precisam ter na cabeça! Frequentemente aparecem em prova!

1) Convertendo 30° em radianos:

Se 180° equivale a π rad, então 30° equivale a x. Com isso, podemos esquematizar:

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & \longleftrightarrow & \pi \text{ rad} \\ 30^\circ & \longleftrightarrow & x \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

$$180x = 30\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{30\pi}{180} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{6}} \textbf{ rad}$$

2) Convertendo 45° em radianos:

Se 180° equivale a π rad, então 45° equivale a x. Com isso, podemos esquematizar:

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & \longleftrightarrow & \pi \text{ rad} \\ 45^\circ & \longleftrightarrow & x \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

$$180x = 45\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{45\pi}{180} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}} \textbf{ rad}$$

3) Convertendo 60° em radianos:

Se 180° equivale a π rad, então 60° equivale a x. Com isso, podemos esquematizar:

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & \longleftrightarrow & \pi \text{ rad} \\ 60^\circ & \longleftrightarrow & x \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

$$180x = 60\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{60\pi}{180} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}} \textbf{ rad}$$

4) Convertendo 90° em radianos:

Se 180° equivale a π rad, então 90° equivale a x. Com isso, podemos esquematizar:

$$180° \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$

$$90° \longleftrightarrow x$$

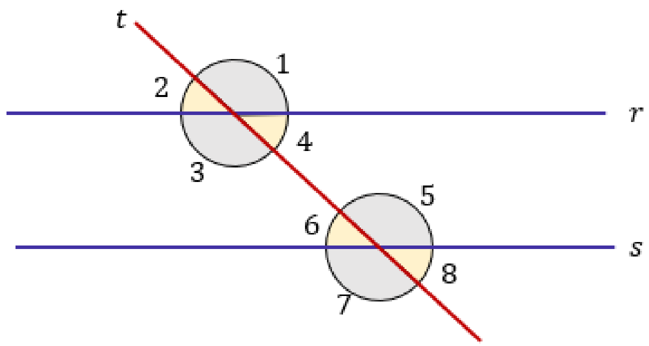
Multiplicando cruzado.

$$180x = 90\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{90\pi}{180} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}}$$

Com isso, a alternativa correta é aquela que trouxe $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}}$ **e** $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$.

Gabarito: LETRA B.

12. (Questão Inédita) Observe a figura abaixo:



Agora, assinale a alternativa incorreta.

A) Os ângulos 2 e 4 são opostos pelo vértice.

B) Os ângulos 4 e 6 são alternos internos.

C) Os ângulos 3 e 6 são colaterais externos.

D) Os ângulos 5 e 4 são colaterais internos.

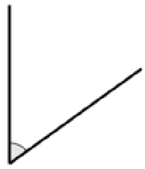
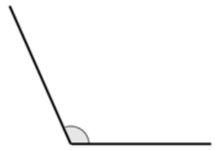
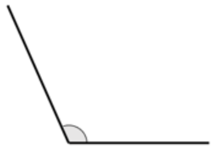
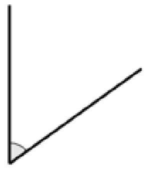
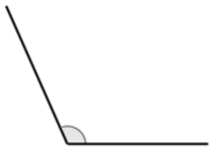
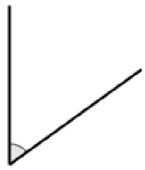
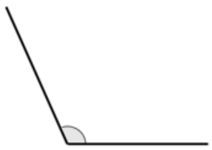
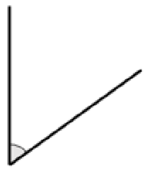
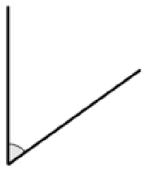
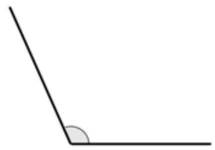
E) Os ângulos 2 e 3 são alternos externos.

Comentários:

A alternativa incorreta é a letra C. Perceba que **3 e 6 são internos com relação às retas r e s**. Dessa forma, eles não são "externos". O correto seria: **os ângulos 3 e 6 são colaterais <u>internos</u>.**

Gabarito: LETRA C.

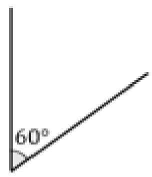
13. (Questão Inédita) Assinale a alternativa que contém corretamente um ângulo agudo, um ângulo reto e um ângulo obtuso, nessa ordem.

	Ângulo Agudo	Ângulo Reto	Ângulo Obtuso
A)			
B)			
C)			
D)			
E)			

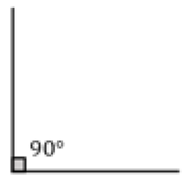
Comentários:

Vamos fazer uma revisão!

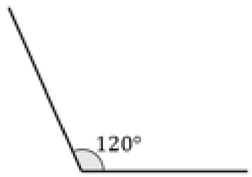
Um **ângulo agudo** é todo ângulo **entre 0° e 90°.** Por exemplo:



Por sua vez, um **ângulo reto** corresponde **exatamente a um ângulo de 90**°.



Por fim, um **ângulo obtuso** é todo ângulo **entre 90° e 180°**.



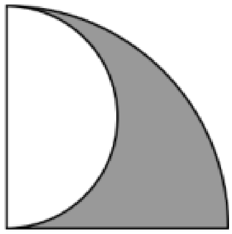
Gabarito: LETRA E.

QUESTÕES COMENTADAS

Circunferências

FGV

1. (FGV/CODEMIG/2015) A região sombreada na figura é conhecida como "barbatana de tubarão" e foi construída a partir de um quadrante de círculo de raio 4 e de um semicírculo.



A área dessa "barbatana de tubarão" é:

A) 2π

B) $5\pi/2$

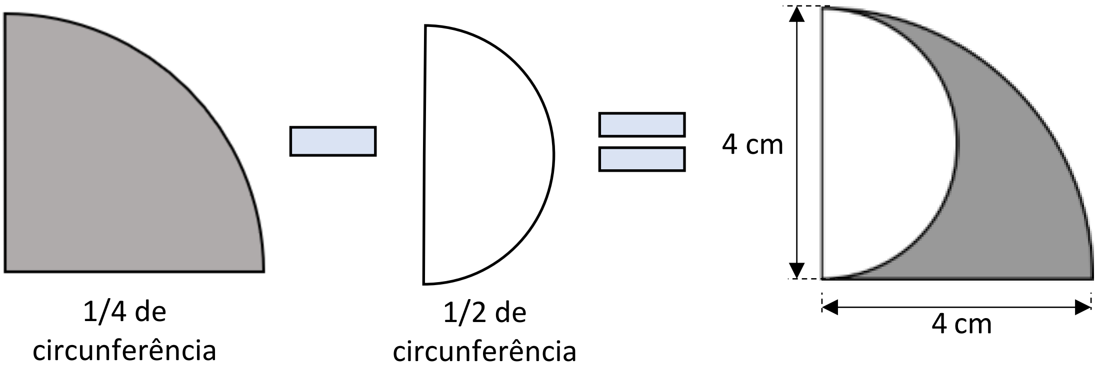
C) 3π

D) $7\pi/2$

E) 4π

Comentários:

Vamos esquematizar a situação.



Vamos primeiro calcular a área do quadrante circular (A_1), como o raio dele é "4", ficamos com:

$$A_1 = \frac{\pi R^2}{4} \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} \quad \rightarrow \quad A_1 = 4\pi$$

Além disso, devemos calcular a área de um semicírculo (A_2). Note que "4" é o diâmetro desse semicírculo. Consequentemente, como **o raio é metade do diâmetro**, temos que o raio desse semicírculo é "2".

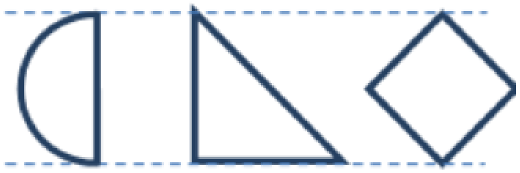
$$A_2 = \frac{\pi r^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_2 = 2\pi$$

A área da barbatana vai ser dada pela **subtração da área do quadrante circular pela área do semicírculo**.

$$A_{barbatana} = A_1 - A_2 \quad \rightarrow \quad A_{barbatana} = 4\pi - 2\pi \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{barbatana} = 2\pi}$$

Gabarito: LETRA A.

2. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Considere o semicírculo, o triângulo retângulo e o quadrado mostrados abaixo.



Sabendo-se que o diâmetro no semicírculo, os catetos do triângulo retângulo e a diagonal do quadrado têm o mesmo tamanho, é correto concluir que:

A) apenas o semicírculo e o quadrado têm a mesma área;

B) apenas o quadrado e o triângulo têm a mesma área;

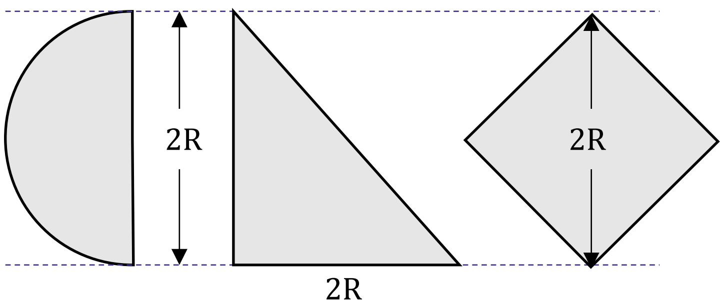
C) apenas o semicírculo e o triângulo têm a mesma área;

D) todas as três figuras têm áreas diferentes;

E) as três figuras têm a mesma área.

Comentários:

Vamos esquematizar melhor a situação, chamando de R o raio do semicírculo.



Agora, devemos calcular todas as áreas em função de R.

- A área do semicírculo é **metade da área da circunferência**.

$$A_{semicírculo} = \frac{\pi R^2}{2}$$

- A área do triângulo retângulo é o **produto dos catetos dividido por 2**.

$$A_{triângulo} = \frac{(2R)\cdot(2R)}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{triângulo} = 2R^2}$$

- A área do quadrado é o lado elevado ao quadrado.

$$A_{quadrado} = L^2$$

Note que **não temos o lado do quadrado, <u>mas sim sua diagonal</u>, que vale 2R**. Lembre-se que a diagonal do quadrado é dada por:

$$d = L\sqrt{2}$$

Assim,

$$2R = L\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad L = \frac{2R}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad L = R\sqrt{2}$$

Com isso, podemos calcular a área do quadrado em função de R.

$$A_{quadrado} = \left(R\sqrt{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{quadrado} = 2R^2}$$

Portanto, observe que apenas as áreas do quadrado e do triângulo são iguais, conforme alternativa B.

Gabarito: LETRA B.

3. (FGV/BANESTES/2018) Em uma praça há uma pista de corrida circular com 50m de raio. Um corredor deu 7 voltas completas nessa pista. Esse corredor percorreu, aproximadamente:

A) 2000m;
B) 2200m;
C) 2400m;
D) 2800m;
E) 3000m;

Comentários:

Opa, para resolver essa questão precisaremos encontrar o comprimento dessa pista. Lembre-se:

$$C = 2\pi R$$

Como essa pista tem **50 metros de raio**:

$$C = 2\pi \cdot 50 \quad \rightarrow \quad C = 100\pi$$

O corredor deu **7 voltas na pista**, o que significa que devemos multiplicar esse comprimento por 7.

$$D = 7 \cdot 100\pi \quad \rightarrow \quad D = 700\pi$$

O enunciado pede o resultado aproximado, de modo que temos que usar $\boldsymbol{\pi \approx 3{,}14}$.

$$D \approx 700 \cdot 3{,}14 \quad \rightarrow \quad D \approx 2198\ m$$

A alternativa com o **resultado mais próximo** é a B.

Gabarito: LETRA B.

4. (FGV/PREF. SALVADOR/2017) A região formada por todos os pontos de um plano que estão a, no máximo, 2 cm de distância de um segmento de reta AB contido nesse plano, tem área (24 + 4π) cm². A medida do segmento de reta AB é de

A) 2 cm

B) 3 cm

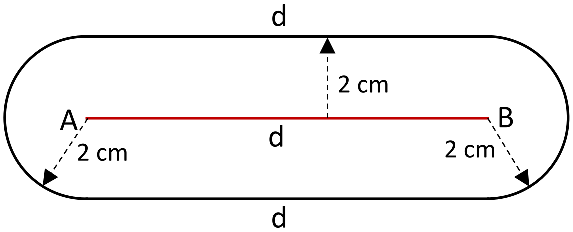
C) 4 cm

D) 6 cm

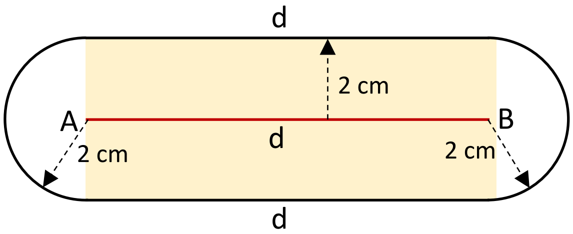
E) 8 cm

Comentários:

Vamos tentar desenhar essa região!

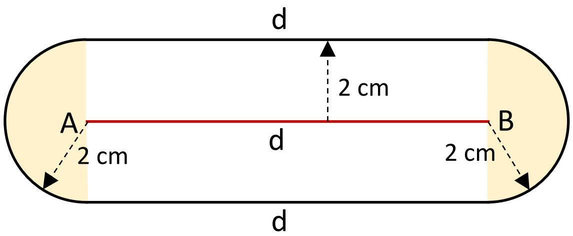


Note que **a área dessa região é igual a área de um <u>retângulo</u> mais a área de uma <u>circunferência</u>**.



Observe o retângulo! Um dos seus lados tem comprimento **"d" igual ao comprimento do segmento** que estamos procurado e o outro lado tem comprimento igual a 4, pois **coincide com o diâmetro do semicírculo**. Com isso, a área do retângulo destacado é dada por:

$$A_r = 4d$$



Observe que os dois semicírculos formam, juntos, um **círculo completo**. Sendo assim, sua área é dada por:

$$A_c = \pi r^2 \quad \rightarrow \quad A_c = 4\pi$$

A área da região é a soma dessas duas áreas que encontramos.

$$A_t = A_r + A_c$$

$$A_t = 4d + 4\pi$$

O enunciado disse que essa área também é igual a **(24 + 4π).** Com isso, podemos igualar esses dois resultados.

$$4d + 4\pi = 24 + 4\pi$$

$$4d = 24$$

$$\boxed{d = 6}$$

Gabarito: LETRA D.

5. (FGV/ALESP/2002) Se uma circunferência tem um raio unitário (1cm), a medida de um ângulo central, em radianos:

A) é igual ao arco por ele subtendido.

B) é numericamente igual à medida do arco por ele subtendido.

C) é 1 cm.

D) é igual a um radiano.

Comentários:

Na teoria, vimos uma relação muito importante entre os elementos do enunciado!

$$L = \alpha R$$

Nessa fórmula, "L" representa o comprimento do arco, α é a medida do ângulo central em radianos e R é o raio da circunferência. Como o questão forneceu um **raio unitário**, a fórmula fica:

$$L = \alpha \cdot 1 \qquad \rightarrow \qquad L = \alpha$$

Note que **quando o raio da circunferência é 1**, o ângulo central (α) é **numericamente igual** ao comprimento do arco (L). Com isso, podemos marcar a alternativa B.

Professor, o que ele quer dizer quando fala "numericamente igual"?

Primeiramente, note que **o comprimento do arco é dado em centímetros** (nessa questão).

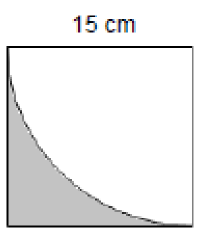
Por sua vez, **o ângulo central está em radianos**.

1 cm **não é a mesma coisa** de 1 rad! Que isso fique claro! No entanto, podemos dizer que tais medidas encontradas são numericamente iguais, pois **o número** "1" é o valor dessas duas medidas.

Gabarito: LETRA B.

FCC

6. (FCC/SABESP/2019) Verifica-se na figura abaixo, um quadrado e um arco de circunferência.



O perímetro da região cinza é:

A) $30 + \left(\frac{15}{2}\right)\pi$

B) $30 + \left(\frac{2}{15}\right)\pi$

C) $15 + \left(\frac{15}{2}\right)\pi$

D) $15 + \left(\frac{2}{15}\right)\pi$

E) 30

Comentários:

Lembre-se que o perímetro nada mais é do que a soma dos lados. A região cinza possui três lados**: dois deles coincidem com o lado do quadrado** e **o terceiro é o comprimento de um quarto de circunferência**.

Ademais, tenha em mente que o perímetro (comprimento) de uma circunferência pode ser encontrado por meio da seguinte relação:

$$C = 2\pi R$$

De acordo com a figura, **o raio da circunferência é o próprio lado do quadrado**, ou seja, **15 cm.** Sendo assim,

$$C = 2\pi \cdot 15 \quad \rightarrow \quad C = 30\pi$$

Como **apenas um quarto da circunferência está dentro do quadrado**, então o comprimento que estamos procurando é um quarto do que achamos acima:

$$\frac{C}{4} = \frac{30\pi}{4} = \frac{15\pi}{2}$$

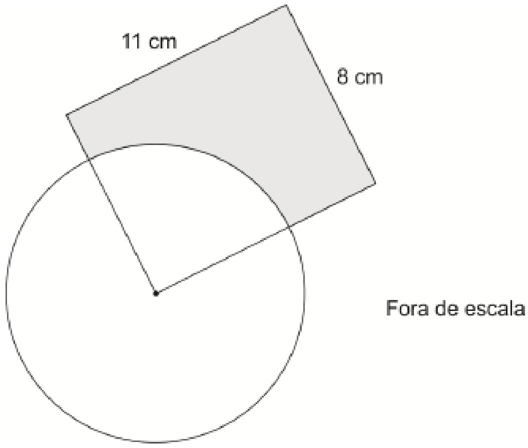
Com isso, podemos encontrar o perímetro da figura da seguinte forma:

$$\text{Perímetro} = 15 + 15 + \frac{15\pi}{2}$$

$$\textbf{Perímetro} = \mathbf{30} + \frac{\mathbf{15\pi}}{\mathbf{2}}$$

Gabarito: LETRA A.

7. (FCC/PREF. SJRP/2019) Um dos vértices de um retângulo de lados 11 cm e 8 cm é o centro de uma circunferência, conforme mostra a figura abaixo.



Sabendo que a área da parte sombreada da figura é $\frac{352-\pi}{4}$ cm², o raio da circunferência, em cm, mede:

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

Comentários:

Pessoal, o que devíamos perceber nessa questão é que um quarto da circunferência está "entrando" no retângulo e diminuindo sua área. Sabemos disso pois **o vértice do retângulo coincide com o centro da circunferênci**a, fazendo com que **o ângulo do setor formado seja de 90°**. Ora, um setor com 90° corresponde 1/4 de um círculo, uma vez que ele perfaz um total de 360°.

Dito isso, podemos concluir que a área sombreada é igual a **área do retângulo subtraída da área de um quarto da circunferência**.

$$A_{sombreada} = A_{retângulo} - \frac{A_{circulo}}{4}$$

O enunciado disse que a área sombreada é $\mathbf{\frac{352-\pi}{4}\ cm^2}$. Além disso, podemos calcular a área do retângulo, pois conhecemos os seus lados.

$$\text{A}_{\text{retângulo}} = 11 \cdot 8 \quad \rightarrow \quad \text{A}_{\text{retângulo}} = 88\ \text{cm}^2$$

Sendo assim,

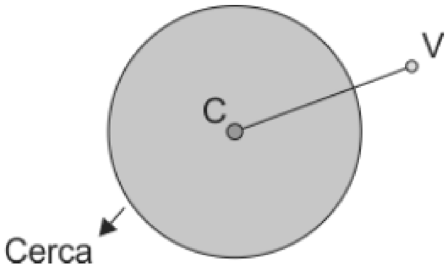
$$\mathbf{\frac{352-\pi}{4}} = 88 - \frac{A_{círculo}}{4} \quad \rightarrow \quad 88 - \frac{\pi}{4} = 88 - \frac{A_{círculo}}{4} \quad \rightarrow \quad A_{círculo} = \pi\ \ cm^2$$

Sabemos que **a área da circunferência é dada por πR^2**. Logo,

$$\pi R^2 = \pi \quad \rightarrow \quad R = 1 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA A.

8. (FCC/SEDU-ES/2018) Um celeiro circular de raio 9 metros e centro C está cercado para que os animais não possam entrar. Uma vaca, indicada por V, está fora do celeiro e amarrada por uma corda de comprimento $CV = 12$ metros. Essa vaca pode pastar em qualquer local que esteja fora do celeiro e ao alcance da extensão da corda que a amarra, conforme mostra a figura abaixo.



Adotando $\pi = 3$, a área total que está ao alcance da vaca para que ela possa pastar, em m², é igual a

A) 120.

B) 27.

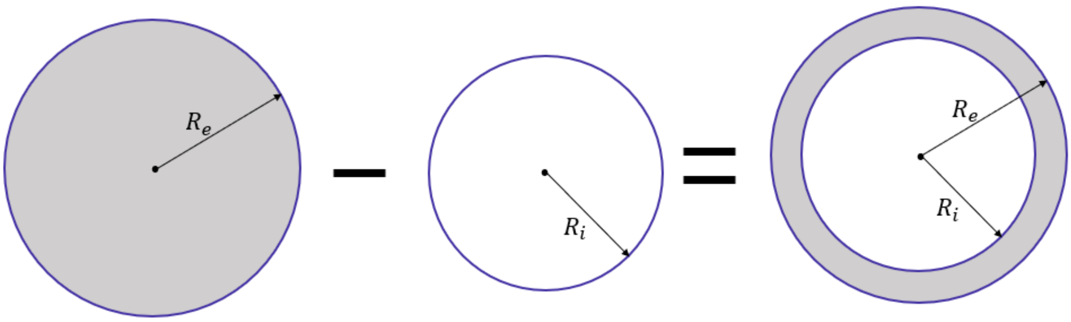
C) 169.

D) 189.

E) 18.

Comentários:

Pessoal, temos uma situação de coroa circular!! Relembre-se:



Fazendo um paralelo com a questão, a circunferência maior é formada pela corda amarrada no centro do celereiro. Dessa forma, temos que $R_e = 12\ m$. Por sua vez, a circunferência menor é a delimitada pela cerca. Como essa **cerca delimita o celereiro**, que tem raio igual a 9 m, então $R_i = 9$ **m**.

A área total que a vaca terá para pastar **será exatamente a área da coroa circular** sombreada na figura acima. Podemos encontrá-la da seguinte forma:

$$A_{coroa} = A_{externo} - A_{interno} \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \pi R_e^2 - \pi R_i^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{coroa} = \pi\left(R_e^2 - R_i^2\right)}$$

Substituindo $R_e = 12$ e $R_i = 9$, ficamos com:

$$A_{coroa} = \pi(12^2 - 9^2) \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \pi(144 - 81) \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = 63\pi\ m^2$$

A questão pede para considerarmos $\pi = 3$. Assim,

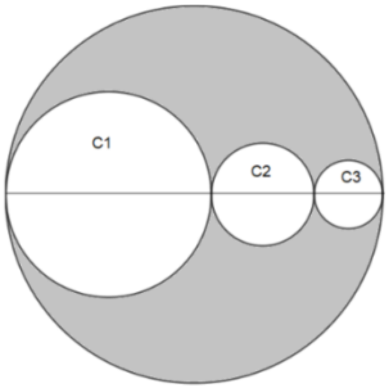
$$A_{coroa} = 63 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{coroa} = 189\ m^2}$$

Gabarito: LETRA D.

CEBRASPE

9. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Julgue o item subsequente, relativos a geometria.

Considere que, na figura a seguir, os raios dos círculos internos C1, C2 e C3 sejam, respectivamente, iguais a r, $r/2$ e $r/3$, em que r é um número real positivo. Nesse caso, a área da parte em cinza é igual a $2\pi r^2$.



Comentários:

O primeiro passo é perceber que o diâmetro do círculo maior **é a soma do diâmetro de todos os círculos** menores (C1, C2 e C3). Com isso,

$$D = 2r + r + \frac{2r}{3} \quad \rightarrow \quad D = \frac{11r}{3}$$

Com o valor do diâmetro, podemos encontrar **o raio**.

$$R = \frac{D}{2} \quad \rightarrow \quad R = \frac{11r}{6}$$

E agora, com o valor do raio, podemos encontrar **a área do círculo maior (exterior).**

$$A = \pi \cdot \left(\frac{11r}{6}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A = \frac{121\pi r^2}{36}$$

Essa é a área do círculo "grandão". Agora, para determinar a área da parte em cinza, precisamos **"tirar" as áreas dos círculos C1, C2 e C3** dessa área do círculo maior. Sendo assim,

- Área do Círculo C1:

$$A_1 = \pi R_1^2 \quad \rightarrow \quad A_1 = \pi r^2$$

- Área do Círculo C2:

$$A_2 = \pi R_2^2 \quad \rightarrow \quad A_2 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{\pi r^2}{4}$$

- Área do Círculo C3:

$$A_3 = \pi R_3^2 \quad \rightarrow \quad A_3 = \pi \left(\frac{r}{3}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A_3 = \frac{\pi r^2}{9}$$

Agora, podemos encontrar a área da parte cinza:

$$A_{cinza} = A - A_1 - A_2 - A_3$$

$$A_{cinza} = \frac{121\pi r^2}{36} - \pi r^2 - \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{9} \quad \rightarrow \quad A_{cinza} = \frac{85\pi r^2}{36} - \frac{13\pi r^2}{36} \quad \rightarrow \quad A_{cinza} = \frac{72\pi r^2}{36}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_{cinza} = 2\pi r^2}}$$

Gabarito: CERTO.

10. (CESPE/IFF/2018) Um quadrado tem todos os seus vértices sobre uma circunferência de 4 cm de raio. Nesse caso, a área desse quadrado é igual a

A) 4 cm²

B) 8 cm²

C) 16 cm²

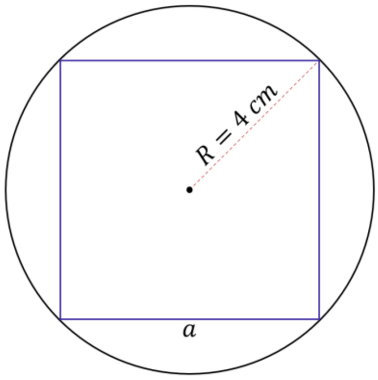
D) 32 cm²

E) 64 cm²

Comentários:

Temos um quadrado que está dentro de uma circunferência. Essa circunferência raio igual a 4 cm. Queremos determinar a área do quadrado.

Lembre-se que a área de um quadrado nada mais é do que **comprimento do lado elevado ao quadrado**. Tudo bem? Acompanhe como fica a esquematização do problema:



Note que **o raio da circunferência é igual a metade da diagonal do quadrado (d)**. Lembre-se:

$$d = a\sqrt{2}$$

Em outras palavras, temos que **a diagonal do quadrado coincide com diâmetro da circunferência**. Portanto, podemos determinar quanto vale "a".

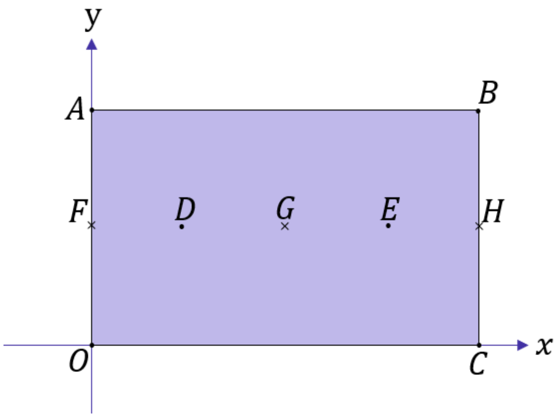
$$8 = a\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{8}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = 4\sqrt{2}\ cm}$$

Com o lado encontrado, podemos calcular a sua área.

$$A_Q = a^2 \quad \rightarrow \quad A_Q = \left(4\sqrt{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A_Q = 16 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_Q = 32\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA D.

11. (CESPE/SEDUC-AL/2017) A figura seguinte mostra, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, em que a unidade de medida é o metro, uma região retangular OABC. O lado OA mede 600 m e o lado OC mede 800 m.

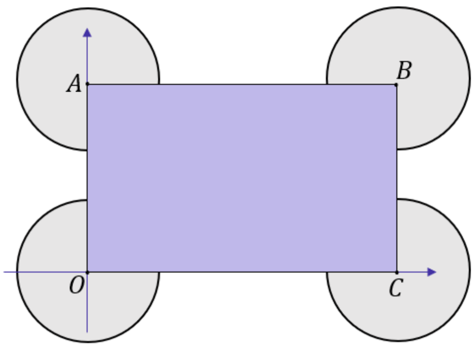


A figura mostra também os pontos F = ponto médio de OA, H = ponto médio de CB, G = centro do retângulo OABC, D = ponto médio de FG, e E = ponto médio de GH. Nos pontos O, A, B, C, D e E foram instalados pontos de acesso à Internet — wi-fi. Nessa configuração, o usuário consegue se conectar à Internet desde que o seu smartphone esteja a 200 m ou menos de qualquer desses pontos de acesso. Com base nessas informações e na figura apresentada, julgue o próximo item.

Na parte externa ao retângulo OABC, o acesso à Internet a partir dos referidos pontos de acesso se restringe a uma região em que a área é inferior a 384.000 m².

Comentários:

Galera, os pontos de acesso **localizados nos vértices** do retângulo são os que possibilitarão wi-fi na região externa. Note que esses pontos de acessos alcançam uma região de **200 metros ao redor**, formando uma espécie de "área circular". Observe o esquema abaixo.



Observe que cada ponto alcança uma área externa equivalente a **3/4 de uma circunferência** de raio igual a 200 metros. Sabendo que **a área de uma circunferência é πR^2**, então a área externa fica:

$$A_{externa} = \frac{3}{4} \cdot \pi R^2$$

Vamos considerar $\boldsymbol{\pi = 3,14}$.

$$A_{externa} = \frac{3}{4} \cdot (3{,}14) \cdot 200^2 \quad \rightarrow \quad A_{externa} = \frac{3}{4} \cdot 125600 \quad \rightarrow \quad A_{externa} = 94200\ m^2$$

Como devemos **considerar os 4 pontos**, então basta multiplicar esse resultado por 4 para obter a área total.

$$A_{externa\ total} = 4 \cdot 94200 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{externa\ total} = 376.800\ m^2}$$

Note que a área é realmente **inferior a 382.000 m²**. Logo, item correto.

Gabarito: CERTO.

CESGRANRIO

12. (CESGRANRIO/LIQUIGAS/2018) Carlos e Eduardo estão em um pátio circular e notaram que, se ambos estivessem sobre a circunferência que limita o pátio, então a maior distância que um deles poderia ficar do outro mediria 24 metros. Ao notarem isso, eles se dispuseram em posições que realizam tal distância máxima. Se Eduardo ficar parado em sua posição, e Carlos caminhar até ele, pela circunferência do pátio, então, a medida mínima do comprimento percorrido por Carlos, em metros, será mais próxima de

A) 30

B) 15

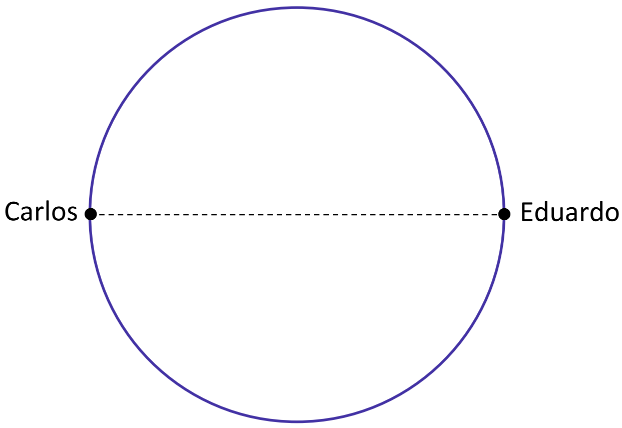
C) 45

D) 38

E) 70

Comentários:

Questão bem legal envolvendo circunferências! Vamos desenhar!



Note que a distância máxima entre Carlos e Eduardo é exatamente **o <u>diâmetro</u> da circunferência**. Como ele vale **24 metros** (de acordo com o enunciado), podemos encontrar o raio.

$$\mathrm{R} = \frac{24}{2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{R} = 12\ \mathrm{m}$$

A questão pergunta **qual a distância entre Carlos e Eduardo**, quando eles percorrem a circunferência. A distância entre os dois é exatamente **metade do comprimento da circunferência**.

$$Distância = \frac{C}{2} \quad \rightarrow \quad Distância = \frac{2\pi R}{2} \quad \rightarrow \quad Distância = \pi R$$

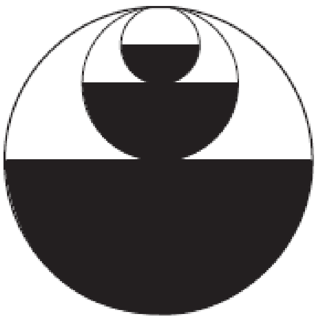
Substituindo $R = 12$ e $\pi = 3{,}14$, ficamos com:

$$\text{Distância} = 12 \cdot 3{,}14 \quad \rightarrow \quad \mathbf{Distância = 37,68\ m}$$

Comparando com as alternativas, vemos que **a mais próxima é a letra D**.

Gabarito: LETRA D.

13. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2014) A figura a seguir foi construída de modo que cada círculo menor tangencia um diâmetro do círculo imediatamente maior no seu centro. A área pintada mede 63 cm².



A área do círculo maior, em cm², vale

A) 76

B) 84

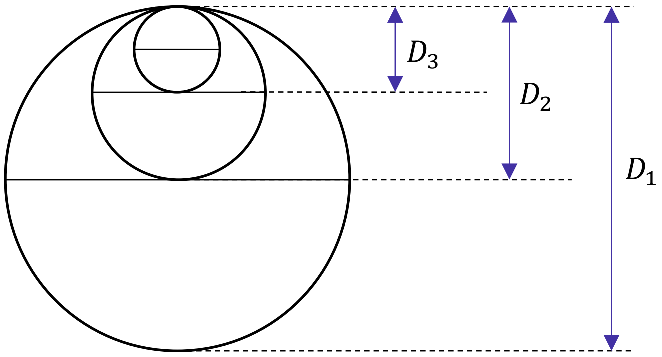
C) 90

D) 93

E) 96

Comentários:

Questão bem interessante!! A primeira coisa que quero que vocês percebam **é a relação entre os diâmetros das circunferências**. Para isso, observe a figura abaixo.



Ora, veja que **o diâmetro de uma sempre será igual ao dobro do <u>imediatamente</u> menor**. Sendo assim,

$$\mathrm{D}_2 = 2\mathrm{D}_3 \quad \text{e} \quad \mathrm{D}_1 = 2\mathrm{D}_2 = 4R_3$$

Vamos escrever em função dos raios.

$$\mathrm{R}_2 = 2\mathrm{R}_3 \quad \text{e} \quad \mathrm{R}_1 = 2\mathrm{R}_2 = 4R_3$$

Agora, vamos analisar as áreas. Perceba que **as áreas escuras são sempre metade da área da circunferência**. Vamos fazer isso, **tentando escrever tudo em função de R_3.**

$$A_1 = \frac{\pi R_1^2}{2} \rightarrow A_1 = \frac{\pi(4R_3)^2}{2} \rightarrow A_1 = \frac{16\pi R_3^2}{2} \rightarrow A_1 = 8\pi R_3^2$$

$$A_2 = \frac{\pi R_2^2}{2} \rightarrow A_2 = \frac{\pi(2R_3)^2}{2} \rightarrow A_2 = \frac{4\pi R_3^2}{2} \rightarrow A_2 = 2\pi R_3^2$$

$$A_3 = \frac{\pi R_3^2}{2}$$

De acordo com o enunciado, **a área pintada mede 63 cm².** Logo,

$$A_1 + A_2 + A_3 = 63$$

$$8\pi R_3^2 + 2\pi R_3^2 + \frac{\pi R_3^2}{2} = 63 \rightarrow \frac{20\pi R_3^2 + \pi R_3^2}{2} = 63 \rightarrow \frac{21\pi R_3^2}{2} = 63 \rightarrow \pi R_3^2 = 6$$

Pessoal, **com o valor de "πR_3^2"** já conseguimos responder a questão. Afinal, metade da área do círculo maior é:

$$A_1 = 8\pi R_3^2$$

Substituindo $\pi R_3^2 = 6$:

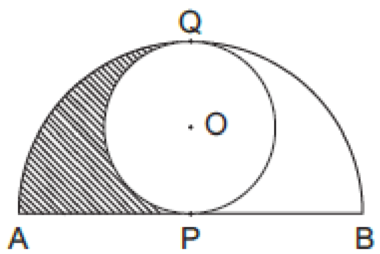
$$A_1 = 8 \cdot 6 \quad \rightarrow \quad A_1 = 48 \text{ cm}^2$$

A área do círculo maior **é o dobro**.

$$A = 2A_1 = 2 \cdot 48 = 96 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA E.

14. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2009)



A figura acima ilustra um círculo de centro em O e raio igual a 1 cm, inscrito em um semicírculo. P é o ponto médio do segmento AB. O círculo tangencia o semicírculo em P e Q. Os pontos O, P e Q são colineares. A área hachurada vale, em cm²,

A) 3π

B) 2π

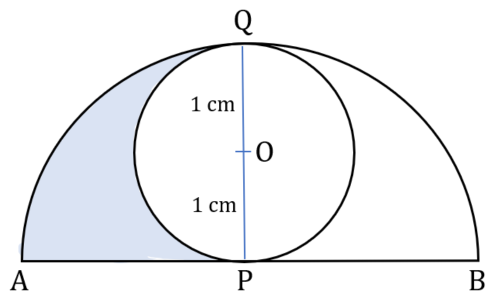
C) $3\pi/2$

D) π

E) $\pi/2$

Comentários:

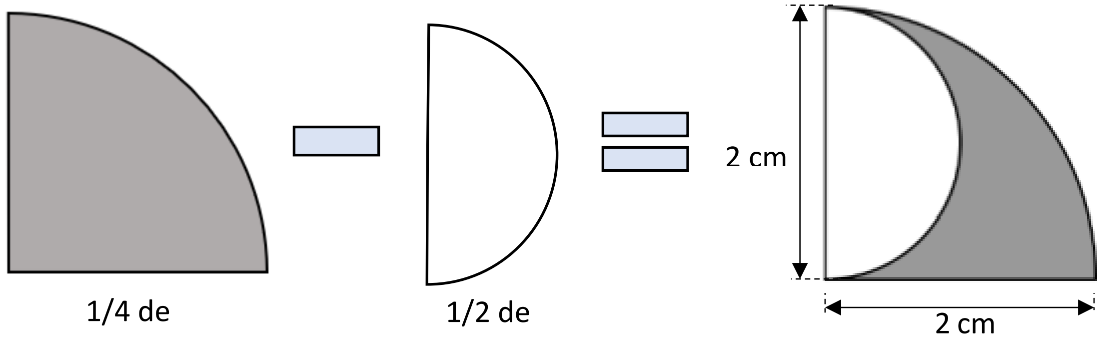
Vamos analisar a figura do enunciado com calma para tirarmos algumas conclusões.



Pessoal, perceba que **o diâmetro do círculo menor é igual ao raio do semicírculo**! Logo,

$$AP = QP = PB = 2 \text{ cm}$$

A área hachurada equivale a um quarto da circunferência maior, **descontada** de metade da área da circunferência inscrita! Vou desenhar para ficar mais fácil de visualizar o que vamos fazer:



Sendo assim,

$$A_{hachurada} = \frac{A_{maior}}{4} - \frac{A_{menor}}{2}$$

$$A_{hachurada} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_{hachurada} = \pi - \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{hachurada} = \frac{\pi}{2}}$$

Gabarito: LETRA E.

Outras Bancas

15. (FUNDATEC/BM RS/2022) Um círculo de raio r tem área πr^2. Se dobrarmos o seu raio, teremos que a sua área aumenta:

A) 2 vezes.

B) 4 vezes.

C) 6 vezes.

D) 8 vezes.

E) 10 vezes.

Comentários:

Se um círculo tem raio "r", então sua área é dada por:

$$A = \pi r^2$$

Agora, se **o círculo passa a ter raio igual a "2r"**, sua nova área é dada por:

$$S = \pi \cdot (2r)^2 \quad \rightarrow \quad S = \pi \cdot 4r^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S = 4\pi r^2}$$

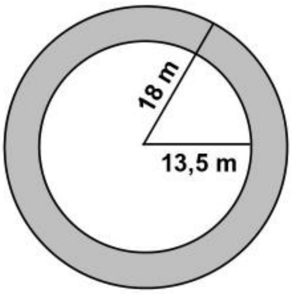
Ora, como $A = \pi r^2$, podemos usar esse fato na expressão acima:

$$S = 4A$$

Ou seja, **a área aumenta 4 vezes**!

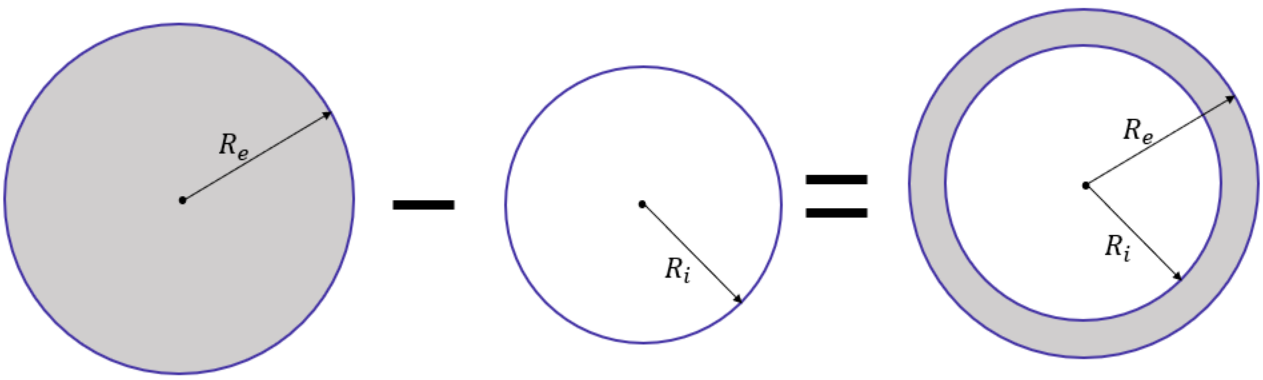
Gabarito: LETRA B.

16. (FUNPAR/PM-PR/2021) Um irrigador distribui água numa região circular, de raio 13,5 m. Devido a um defeito, esse irrigador precisou ser trocado por outro, que passou a irrigar uma região circular de raio 18 m. Assinale a alternativa que apresenta a área da parte cinza, indicada na figura abaixo, que corresponde à região que passou a ser coberta pelo segundo irrigador, além daquela coberta pelo primeiro. Use $\pi = \frac{22}{7}$



A) 346,50 m².
B) 396,00 m².
C) 409,50 m².
D) 445,50 m².
E) 495,00 m².

Comentários:
Ótima questão para treinarmos um pouco o que vimos na teoria sobre coroa circular!



Dessa forma, a área da coroa é dada por:

$$A_{coroa} = \pi\left(R_e^2 - R_i^2\right)$$

Com as informações do enunciado, podemos fazer:

$$A_{coroa} = \frac{22}{7} \cdot (18^2 - 13{,}5^2) \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \frac{22}{7} \cdot (324 - 182{,}25) \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \frac{22 \cdot 141{,}75}{7}$$

$$\boxed{A_{coroa} = 445{,}5\ \text{m}^2}$$

Gabarito: LETRA D.

17. (FUNDATEC/PREF. AMETISTA DO SUL/2021) Quantos metros mede a circunferência de um círculo cujo diâmetro é igual a 18 m? (utilizar $\pi = 3{,}14$).

A) 56,52.
B) 70,65.
C) 84,78.
D) 98,91
E) 113,04.

Comentários:

Lembre-se que **o comprimento de uma circunferência** é dado por:

$$C = 2\pi R$$

Se a circunferência em questão tem 18 metros de diâmetro, então **seu raio é metade desse valor**, ou seja, **9** metros. Com isso:

$$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 \quad \rightarrow \quad \boxed{C = 56{,}52\ \text{m}}$$

Gabarito: LETRA A.

18. (INST. CONSULPLAN/CM BARBACENA/2022) Para delimitar um lote circular recentemente adquirido, o proprietário planeja instalar uma cerca com arame liso. Sabe-se que o lote possui diâmetro de 24 metros e o arame é vendido em rolos com 36 metros cada. Considerando que $\pi = 3{,}14$ e que o proprietário deseja uma cerca com 4 faixas de arame liso, quantas unidades de rolo, no mínimo, ele deverá comprar?

A) 7
B) 8

C) 9
D) 10

Comentários:
Inicialmente, vamos calcular **o comprimento** desse lote circular.

$$C = 2\pi R$$

Como o diâmetro é 24 metros, sabemos que **o raio é metade desse valor**, ou seja, 12 metros.

$$\mathrm{C} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{C} = 75{,}36 \text{ m}$$

Observe que o proprietário deseja uma cerca com **4 faixas de arame liso**, então precisaremos de uma quantidade equivalente a **quatro vezes o comprimento da circunferência**.

$$\mathrm{A} = 4\mathrm{C} \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{A} = 4 \cdot 75{,}36 \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{A} = 301{,}44 \text{ m}$$

Para determinar **quantas unidades** de rolo (n) serão necessárias, devemos dividir a quantidade de arame A pelo comprimento do rolo (**36 metros**).

$$n = \frac{301{,}44}{36} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{n = 8{,}37}}$$

Serão necessários **mais de oito rolos** de arame. Portanto, o proprietário deverá comprar, no mínimo, **nove**.

Gabarito: LETRA C.

19. (FUNDATEC/PREF. CANDELÁRIA/2022) Uma pessoa caminha em volta de uma praça circular que contém 1800 m de diâmetro. Nesse percurso, realizado 4 vezes na semana, ela dá uma volta e meia. Quantos quilômetros essa pessoa caminha ao todo durante uma semana? Considere $\pi = 3$.
A) 56,7 km.
B) 32,4 km.
C) 8,1 km.
D) 5,67 km.
E) 3,24 km.

Comentários:
Se a praça possui 1800 metros de diâmetro, então **o raio é metade desse valor**, ou seja, 900 metros. Para calcular o comprimento dessa praça, usamos a fórmula que vimos na teoria:

$$C = 2\pi R \qquad \rightarrow \qquad C = 2 \cdot 3 \cdot 900 \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{C} = 5.400 \text{ m}$$

Como essa pessoa dá **uma volta e meia**, a distância percorrida por ela é:

$$\mathrm{d} = 1{,}5 \cdot 5.400 \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{d} = 8.100\ \mathrm{m}$$

Durante a semana, são **4 caminhadas** dessas realizadas. Logo,

$$\mathrm{d_t} = 4 \cdot 8.100 \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{d_t} = 32.400\ \mathrm{m}$$

Para acharmos o resultado em quilômetros, devemos **dividir o resultado por 1.000**.

$$\boxed{\mathrm{d_t} = 32{,}4\ \mathrm{km}}$$

Gabarito: LETRA B.

20. (FUNDATEC/PREF. VACARIA/2021) Se o comprimento de uma circunferência é 36π , então a medida do raio dessa circunferência é:

A) 36.
B) 18.
C) 9.
D) 3.
E) 1.

Comentários:

Nessa questão, devemos realizar **o processo inverso**! Temos o comprimento e queremos o raio.

$$C = 2\pi R$$

$$36\pi = 2\pi R$$

$$R = \frac{36\pi}{2\pi}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R = 18}}$$

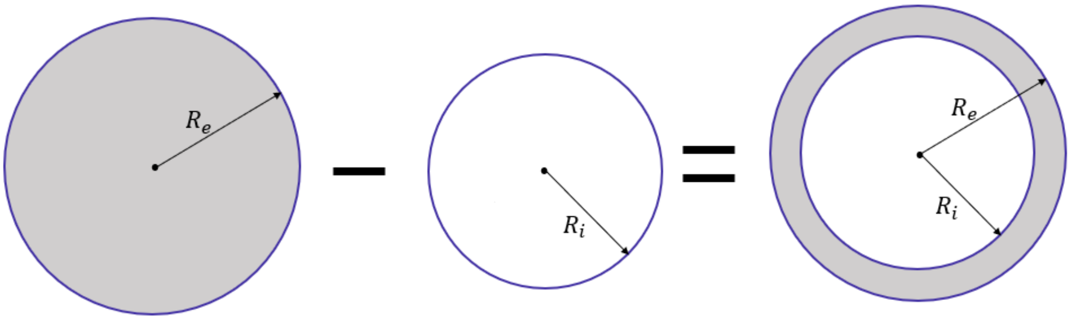
Gabarito: LETRA B.

21. (INST. AOCP/PREF. PINHAIS/2022) Uma fonte de águas será instalada na praça da igreja matriz de Pinhais. Ela terá o formato de uma coroa circular, com o raio maior medindo 12 m e o raio menor medindo 10 m. Considerando $\pi = 3$, qual é a área molhada dessa fonte de águas?

A) 44 m².

B) 72 m².
C) 94 m².
D) 104 m².
E) 132 m².

Comentários:
Questão sobre a área da coroa circular! Vimos isso na teoria!



Dessa forma, a **área da coroa** é dada por:

$$A_{coroa} = \pi(R_e^2 - R_i^2)$$

Temos o **raio maior (externo)** e o **raio menor (interno)**. Com isso, podemos calcular a área.

$$A_{coroa} = 3 \cdot (12^2 - 10^2)$$

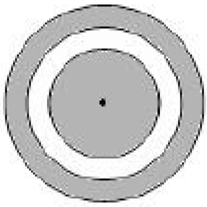
$$A_{coroa} = 3 \cdot (144 - 100)$$

$$A_{coroa} = 3 \cdot 44$$

$$\boxed{A_{coroa} = 132\ m^2}$$

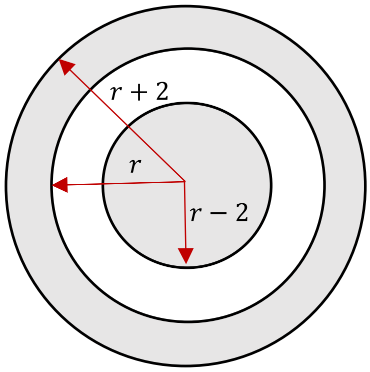
Gabarito: LETRA E.

22. (DIRENS/EEAR/2020) A figura dada apresenta três círculos concêntricos cujos raios (em cm) são números naturais pares e consecutivos. Dado que as áreas hachuradas são iguais, é verdade que a soma dos três raios é ___ cm.



A) 12
B) 18
C) 24
D) 30

Comentários:
Vamos lá! Quero **destacar os raios** para vocês:



Observe que como os raios são **números pares consecutivos**, escolhi chamá-los de "$r - 2$", "r" e "$r + 2$". Basicamente, a questão afirma que **a área do círculo interno é igual a área da coroa**. Assim:

$$A_{círculo} = A_{coroa}$$

$$\pi(r-2)^2 = \pi[(r+2)^2 - r^2]$$

$$r^2 - 4r + 4 = r^2 + 4r + 4 - r^2$$

$$r^2 = 8r$$

$$\boxed{r = 8}$$

Com o **raio intermediário**, podemos determinar os outros dois raios:

$$r + 2 = 10 \qquad\qquad r - 2 = 6$$

A questão pede **a soma dos três raios**.

$$\boxed{\mathbf{6 + 8 + 10 = 24}}$$

Gabarito: LETRA C.

23. (IBADE/PREF. VILHENA/2019) A distância entre os centros de duas circunferências tangentes exteriormente é de 60 cm. Sabendo-se que a razão entre seus raios é de 5/7, qual o diâmetro de cada circunferência?

A) 30 cm e 42 cm

B) 50 cm e 70 cm

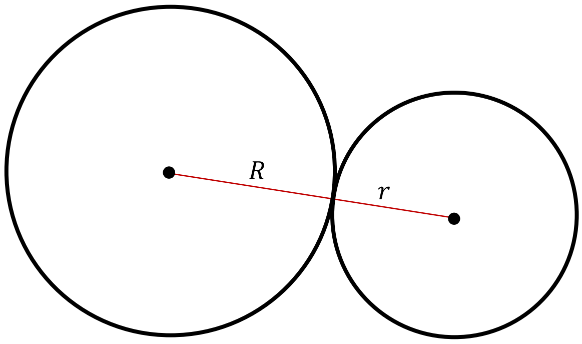
C) 20 cm e 28 cm

D) 60 cm e 84 cm

E) 70 cm e 98 cm

Comentários:

Vamos desenhar essas circunferências.



Como a distância entre os centros é de 60 cm, podemos escrever:

$$R + r = 60 \qquad (1)$$

Como a razão entre os raios é 5/7:

$$\frac{r}{R} = \frac{5}{7} \qquad (2)$$

Temos duas equações e duas incógnitas, podemos resolver o sistema. Usando (2) em (1):

$$R + \frac{5R}{7} = 60 \quad \rightarrow \quad \frac{12R}{7} = 60 \quad \rightarrow \quad \boxed{R = 35}$$

Com o raio da circunferência maior (R), é possível encontrar o r.

$$35 + r = 60 \quad \rightarrow \quad \boxed{r = 25}$$

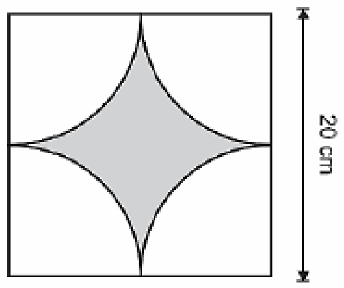
O enunciado pede os diâmetros! Ou seja:

$$D = 2R \quad \rightarrow \quad D = 70$$

$$d = 2r \quad \rightarrow \quad d = 50$$

Gabarito: LETRA B.

24. (IDECAN/PREF. DAMIANÓPOLIS/2016) Qual é o valor da área formada pela figura cinza dentro do quadrado a seguir?



A) $68\ cm^2$
B) $80\ cm^2$
C) $86\ cm^2$
D) $92\ cm^2$

Comentários:
Questão bem legal. Observe que **a área cinza** é igual a área do quadrado menos a área de uma circunferência.

Como assim, professor? Uma circunferência?

Ora, são **quatro setores de 90°**. Quando combinamos esses setores obtemos uma circunferência completa! Primeiramente, vamos calcular a área do quadrado:

$$\mathrm{A_q = L^2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_q = 20^2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_q = 400\ cm^2}$$

Por sua vez, **o diâmetro da circunferência é 20 cm**. Assim, o raio é 10 cm.

$$\mathrm{A_c = \pi R^2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_c = 3{,}14 \cdot 10^2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_c = 314\ cm^2}$$

Quando fazemos a subtração:

$$\mathrm{A = A_q - A_c} \quad \rightarrow \quad \mathrm{A = 400 - 314} \quad \rightarrow \quad \mathrm{A = 86\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA C.

25. (FUNDATEC/PREF. CORUMBÁ/2018) Se uma circunferência tiver o valor de seu raio quadruplicado, podemos afirmar que a área da mesma será aumentada em:

A) Trinta e duas vezes.

B) Dezesseis vezes.

C) Oito vezes.

D) Quatro vezes.

E) Duas vezes.

Comentários:

A área de uma circunferência de raio R é dada por:

$$A = \pi R^2$$

Se **quadruplicarmos o raio**, a nova área passa a ser:

$$A' = \pi(4R)^2$$

$$A' = 16\pi R^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{A' = 16A}}$$

Logo, **a área aumenta 16 vezes**.

Gabarito: LETRA B.

QUESTÕES COMENTADAS

Triângulos

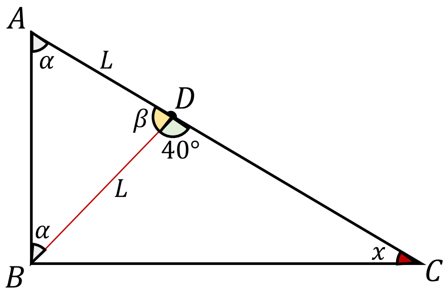
FGV

1. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Em um triângulo retângulo ABC, considere um ponto D, sobre a hipotenusa AC tal que o comprimento do segmento AD é igual ao comprimento do segmento DB. Se o ângulo BDC mede 40°, o ângulo BCD mede

a) 70°.
b) 60°.
c) 50°.
d) 40°.
e) 30°.

Comentários:

Vamos desenhar a situação proposta no enunciado.



Coloquei no desenho todas as informações que o enunciado nos passou. Agora, **queremos encontrar o ângulo "x"**, destacado em vermelho. Preliminarmente, note que no ponto D temos dois ângulos que quando somados resultam em um **ângulo raso (180°)**.

$$40° + \beta = 180° \qquad \rightarrow \qquad \beta = 140°$$

Com o valor de β, conseguimos determinar o valor de α, pois a soma dos ângulos internos do triângulo BDA **deve ser igual a 180°.**

$$\alpha + \alpha + \beta = 180° \qquad \rightarrow \qquad 2\alpha + 140° = 180° \qquad \rightarrow \qquad 2\alpha = 40° \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 20°$$

Você pode estar se perguntando o porquê de ter dois α no triângulo BDA. Observe que o enunciado nos disse que o comprimento do segmento BD é igual ao do segmento AD. Sendo assim, temos um **triângulo isósceles** e, como consequência, **os ângulos opostos a esses lados devem ser iguais**.

Pronto! Uma vez descoberto α, podemos encontrar o ângulo "x". Para isso, devemos lembrar que **ABC é um triângulo retângulo.** Sendo assim, podemos usar que a soma dos ângulos internos é igual a 180°.

$$\alpha + 90° + x = 180°$$

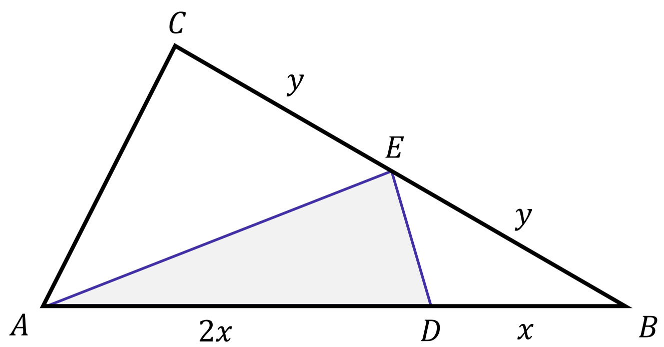
$$x + 110° = 180 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 70°}$$

Gabarito: LETRA A.

2. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Considere um triângulo ABC. Seja D um ponto sobre o lado AB tal que o comprimento de AD é o dobro do comprimento de DB. Seja E o ponto médio do lado BC.
Se a área do triângulo ADE mede 6 cm², a área do triângulo ABC, em cm², mede

a) 24.
b) 18.
c) 15.
d) 12.
e) 9.

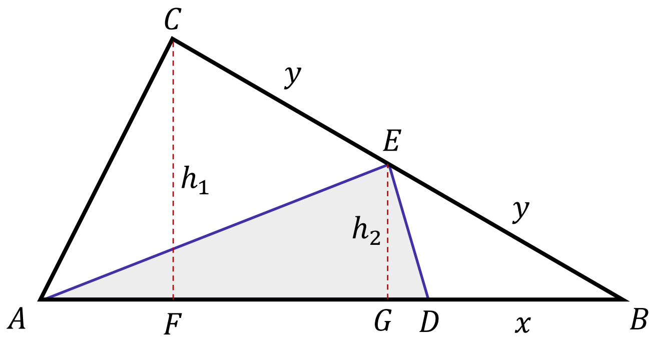
Comentários:
Inicialmente, vamos desenhar a situação do enunciado.



Em um primeiro momento, essa é a figura que conseguimos desenhar com as informações da questão. Note que o enunciado falou que a área destacada em amarelo (triângulo ADE) **vale 6 cm²**. Com ela, devemos determinar a área do triângulo maior, o ABC. Sempre que você trabalhar com áreas de triângulos, **é válido pensar em alturas**. Afinal, uma das formas de encontrar a área de um triângulo é por:

$$S = \frac{bh}{2}$$

Sendo assim, vamos traçar as alturas dos triângulos ADE e ABC.



No desenho acima, h_1 representa a altura do triângulo ABC, enquanto "F" é o pé dessa altura.

Por sua vez, h_2 representa a altura do triângulo ADE, enquanto "G" é o pé dessa altura.

Observe que **os triângulos CBF e EGB são semelhantes**. Logo:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{2y}{y} \quad \rightarrow \quad \frac{h_1}{h_2} = 2$$

Pronto, temos uma **relação entre as alturas dos triângulos** em estudo.

Agora, vamos escrever as áreas para cada um deles.

$$S_{ABC} = AB \cdot \frac{h_1}{2} \quad \rightarrow \quad S_{ABC} = \frac{3xh_1}{2} \qquad (1)$$

Note que a base AB é a soma de "2x" mais "x", o que **resulta em um comprimento "3x"** para o segmento.

$$S_{ADE} = AD \cdot \frac{h_2}{2} \quad \rightarrow \quad S_{ADE} = \frac{2xh_2}{2} \quad \rightarrow \quad S_{ADE} = xh_2 \qquad (2)$$

Observe as expressões (1) e (2). Vamos dividi-las membro a membro.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{3xh_1}{2}}{xh_2} \quad \rightarrow \quad \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$

Na equação acima, devemos **substituir** as informações:

$$S_{ADE} = 6 \quad e \quad \frac{h_1}{h_2} = 2$$

$$\frac{S_{ABC}}{6} = \frac{3}{2} \cdot 2$$

Isolando S_{ABC}:

$$\mathrm{S_{ABC}} = 3 \cdot 6 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{S_{ABC} = 18\ \mathrm{cm}^2}}$$

Gabarito: LETRA B.

3. (FGV/SENADO/2022) João dispõe de objetos de madeira na forma de triângulos com um ângulo reto. Há triângulos de dois tipos: os de tipo 1 possuem dois catetos iguais medindo 1cm, os de tipo 2 também possuem dois catetos iguais, mas medindo 3 cm. Para montar um quadrado com 9 cm de lado todo preenchido de triângulos, João pode escolher usar

a) 70 triângulos de tipo 1 e 10 triângulos de tipo 2.

b) 81 triângulos de tipo 1 e 8 triângulos de tipo 2.

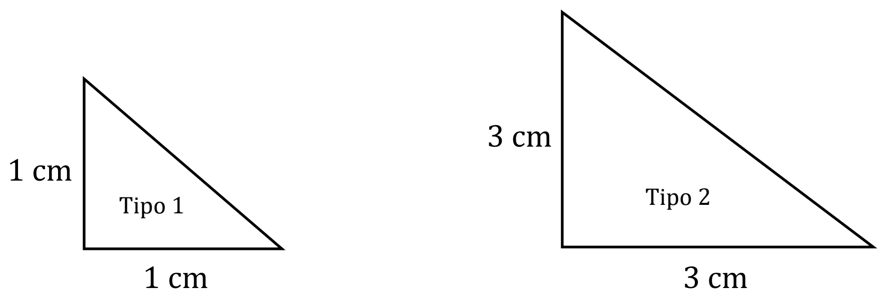
c) 102 triângulos de tipo 1 e 6 triângulos de tipo 2.

d) 88 triângulos de tipo 1 e 8 triângulos de tipo 2.

e) 72 triângulos de tipo 1 e 10 triângulos de tipo 2.

Comentários:

Inicialmente, vamos fazer os desenhos pertinentes.



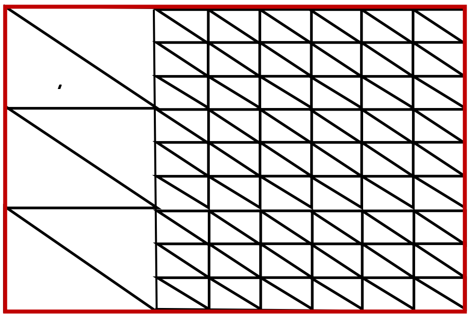
Agora, vamos calcular cada uma das **áreas desses triângulos** pois precisaremos delas!

$$\mathrm{A_1} = \frac{1 \cdot 1}{2} \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{A_1} = 0{,}5\ \mathrm{cm}^2$$

$$\mathrm{A_2} = \frac{3 \cdot 3}{2} \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{A_2} = 4{,}5\ \mathrm{cm}^2$$

Pronto, com essas áreas em mãos, vamos entender melhor o problema.

Queremos fazer um quadrado todo preenchido apenas esses dois tipos de triângulos. Seria algo como o desenho abaixo (**situação <u>exemplificativa</u>**):



Os triângulos menores seriam o triângulo do tipo 1, enquanto os triângulos maiores, o do tipo 2.

Nosso problema é encontrar quantos **triângulos do tipo 1** e quantos do **tipo 2** precisamos para formar um **quadrado de 9 cm de lado**. Esse quadrado possui a seguinte área:

$$\mathrm{A_Q} = 9^2 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathrm{A_Q = 81\ cm^2}}$$

Observe que, como vamos preencher esse quadrado, ao somarmos as áreas dos triângulos do tipo 1 com a do tipo 2, **devemos totalizar a área do quadrado**. Para saber quantos triângulos do tipo 1 e quantos do tipo 2 usaremos, precisaremos usar as alternativas a nosso favor!

A estratégia vai ser a seguinte: usar as quantidades das alternativas para calcular a área do possível quadrado formado. **Se a área encontrada resultar nos 81 cm²**, então essa alternativa é a nossa resposta.

Se a área encontrada for diferente de 81 cm², então as quantidades dessa alternativa **não vão formar o quadrado procurado** de área igual a 81 cm². Tudo bem? Vamos lá!

a) 70 triângulos de tipo 1 e 10 triângulos de tipo 2.
Errado. Ora, se temos **70 triângulos do tipo 1** e **10 triângulos do tipo 2**, então ficamos com:

$$A = 70A_1 + 10A_2$$

Usando os valores das áreas que encontramos:

$$A = 70 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 4{,}5 \qquad \rightarrow \qquad A = 35 + 45 \qquad \rightarrow \qquad A = 80\ cm^2$$

Observe que a área formada por essa quantidade de triângulos **não fechou** nosso quadrado de área de 81 cm². Logo, essa combinação não pode ser nossa resposta.

b) 81 triângulos de tipo 1 e 8 triângulos de tipo 2.
Errado. Vamos repetir o processo aqui. Se temos **81 triângulos do tipo 1** e **8 triângulos do tipo 2**, então:

$$A = 81A_1 + 8A_2$$

$$A = 81 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 4{,}5 \quad \rightarrow \quad A = 40{,}5 + 36 \quad \rightarrow \quad A = 76{,}5\ cm^2$$

Mais uma vez a área formada por essa quantidade de triângulos **não fechou** o quadrado de área de 81 cm². Logo, essa combinação não pode ser nossa resposta.

c) 102 triângulos de tipo 1 e 6 triângulos de tipo 2.
Errado. Temos **102 triângulos do tipo 1** e **6 triângulos do tipo 2**, então:

$$A = 102A_1 + 6A_2$$

$$A = 102 \cdot 0{,}5 + 6 \cdot 4{,}5 \quad \rightarrow \quad A = 51 + 27 \quad \rightarrow \quad A = 78\ cm^2$$

Mais uma vez a área formada por essa quantidade de triângulos **não fechou** o quadrado de área de 81 cm². Logo, essa combinação não pode ser nossa resposta.

d) 88 triângulos de tipo 1 e 8 triângulos de tipo 2.
Errado. Temos **88 triângulos do tipo 1** e **8 triângulos do tipo 2**, então:

$$A = 88A_1 + 8A_2$$

$$A = 88 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 4{,}5 \quad \rightarrow \quad A = 44 + 36 \quad \rightarrow \quad A = 80\ cm^2$$

Mais uma vez a área formada por essa quantidade de triângulos **não fechou** o quadrado de área de 81 cm². Logo, essa combinação não pode ser nossa resposta.

e) 72 triângulos de tipo 1 e 10 triângulos de tipo 2.
Correto. Por fim, temos uma alternativa com **72 triângulos de tipo 1** e **10 triângulos de tipo 2**. Logo:

$$A = 72A_1 + 10A_2$$

$$A = 72 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 4{,}5 \quad \rightarrow \quad A = 36 + 45 \quad \rightarrow \quad \boxed{A = 81\ cm^2}$$

Opa! Encontramos. Note que a área formada por essa quantidade de triângulos **bate** justamente com a área do quadrado procurado. Sendo assim, **é a única alternativa possível** dentre as apresentadas.

Gabarito: LETRA E.

4. (FGV/PM-SP/2022) Considere o triângulo retângulo ABC cujos lados medem:

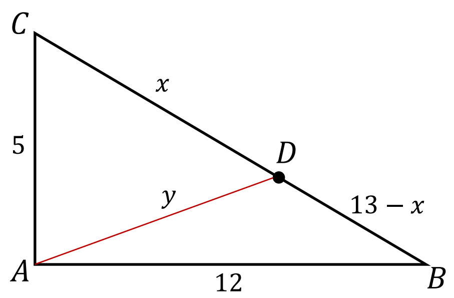
$$AB = 12, AC = 5 \; e \; BC = 13$$

Seja D um ponto sobre o lado BC tal que os triângulos ABD e ACD tenham perímetros iguais. A área do triângulo ABD é

a) 30.
b) 90/13.
c) 15/2.
d) 25/2.
e) 60/13.

Comentários:

O primeiro passo é desenhar o triângulo retângulo descrito no enunciado.



O que é importante notarmos de imediato?

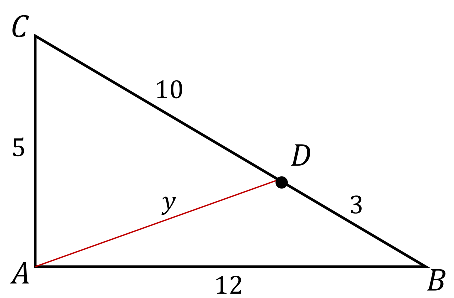
- Que não sabemos o comprimento do segmento "AD". Por esse motivo, vamos chamar ele de "y".
- Que se **BC vale 13**, então D divide BC em um segmento de comprimento "x" e outro de "13-x".

Como o enunciado disse que **os perímetros dos triângulos ABD e ACD são iguais**, então podemos escrever:

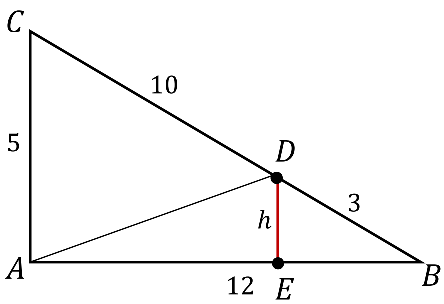
$$5 + x + y = 13 - x + y + 12$$

$$5 + x = 25 - x \quad \rightarrow \quad 2x = 20 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 10}$$

Opa! Determinamos "x". Vamos atualizar nossa imagem.



Note que continuamos sem saber o "y", mas vamos pensar um pouco! *Será que precisamos dele mesmo?* Queremos apenas a área do triângulo ADB! Para determiná-la, seria interessante encontrarmos o seguinte segmento:



Observe que **o triângulo BDE é <u>semelhante</u> ao triângulo ABC**. Logo:

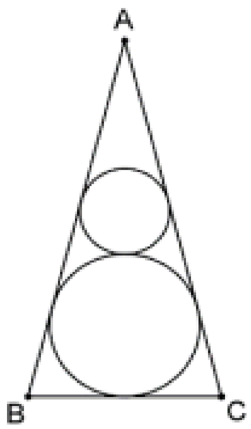
$$\frac{h}{5} = \frac{3}{13} \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{15}{13}$$

Pronto! Agora vamos calcular a área do triângulo ABD:

$$S_{ABD} = \frac{AB \cdot h}{2} \qquad \rightarrow \qquad S_{ABD} = \frac{12 \cdot \frac{15}{13}}{2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{S_{ABD} = \frac{90}{13}}$$

Gabarito: LETRA B.

5. (FGV/SEAD-AP/2022) No triângulo ABC da figura a seguir, a altura relativa à base BC mede 15 e o raio da circunferência inscrita nele mede 3.

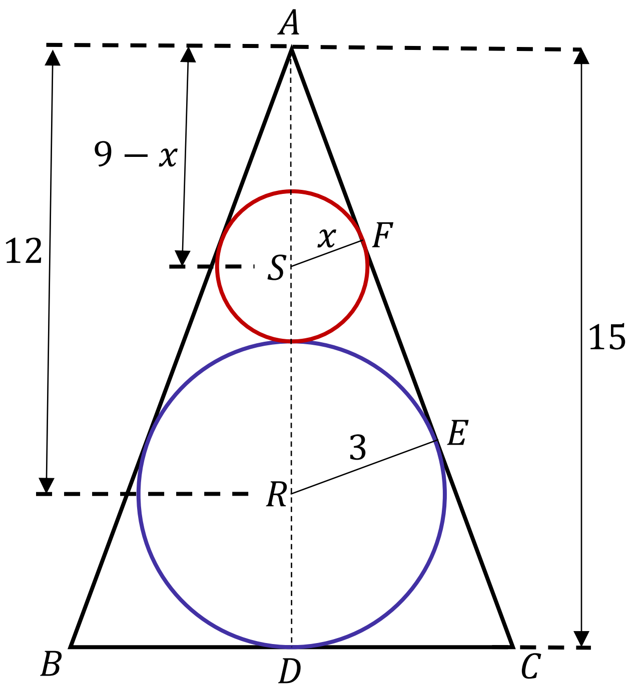


Uma circunferência menor é tangente à circunferência inscrita no triângulo ABC e tangente, também, aos lados AB e AC. O raio dessa circunferência menor mede

a) 5/3.
b) 7/4.
c) 8/5.
d) 9/5.
e) 15/8.

Comentários:

Devemos fazer nosso próprio desenho com as informações do enunciado nele (e mais algumas outras!).



Bom, pessoal, vamos analisar esse desenho! Vou explicar tudo o que foi feito.

- A circunferência roxa é a circunferência inscrita pois está dentro do triângulo e **tangencia todos os seus três lados**. Por sua vez, **a circunferência vermelha tangencia apenas *dois lados*** e a circunferência roxa.

- Além dos pontos A, B e C que são os vértices dos triângulos, nomeei alguns outros pontos importantes:

  - D é o pé da altura;
  - E e F são pontos de tangência;
  - R e S são os centros das circunferências.

- Observe que **a altura AD foi dada na questão e vale 15**.

- Observe que **o raio RE foi dado na questão e vale 3**.

- **Chamamos o raio procurado de x**.

Sobre as outras medidas no desenho, elas foram obtidas da seguinte forma:

- O segmento AR (**que vale 12**) é obtido quando **subtraímos o raio da circunferência inscrita da altura AD**.

$$15 - 3 = 12$$

- O segmento AS (**que vale $9 - x$**) é obtido quando subtraímos o diâmetro da circunferência inscrita (6) e o raio da circunferência menor (x) da altura AD (15).

$$15 - 6 - x = 9 - x$$

Professor, por que precisamos saber a medida desses segmentos?

Pois **eles são as hipotenusas dos triângulos retângulos ARE e ASF**. Além disso, esses triângulos são semelhantes e usaremos essa semelhança para determinar o valor do raio da circunferência menor.

Observe que como **ARE e ASF são triângulos semelhantes**, podemos escrever:

$$\frac{AS}{AR} = \frac{SF}{RE}$$

Substituindo:

$$\frac{9 - x}{12} = \frac{x}{3}$$

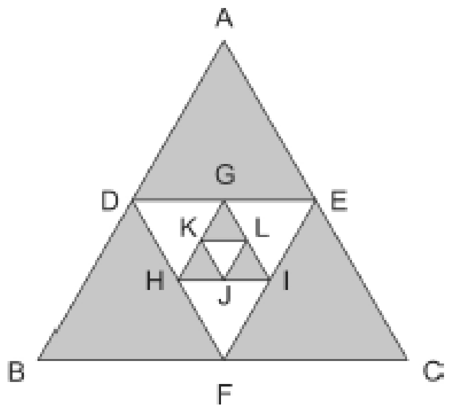
$$12x = 27 - 3x$$

$$15x = 27 \quad \rightarrow \quad x = \frac{27}{15} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{9}{5}}$$

Gabarito: LETRA D.

FCC

6. (FCC/SABESP/2019) O triângulo ABC, de área 64 cm², foi dividido pelos segmentos DE, DF, EF, em quatro triângulos congruentes. O triângulo DEF, por sua vez, foi dividido pelos segmentos GH, HI e GI, em quatro triângulos congruentes, o mesmo acontecendo com o triângulo GHI através dos segmentos JK, KL, LJ.



Assim sendo, a área da região sombreada na figura é, em cm²,

A) 60

B) 63

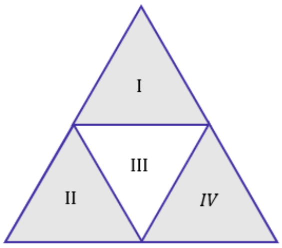
C) 64

D) 51

E) 48

Comentários:

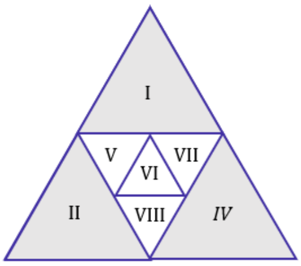
O triângulo ABC, **de área 64 cm²**, foi dividido em quatro triângulos iguais. Portanto, para encontrar a área d e cada um deles, basta dividirmos 64 por 4.



Assim,

$$A_I = A_{II} = A_{III} = A_{IV} = \frac{64}{4} = 16 \text{ cm}^2$$

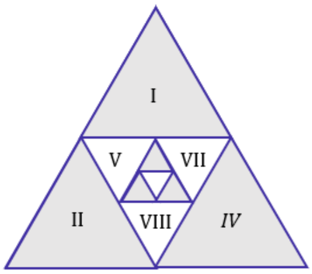
Depois dessa divisão, é a vez do triângulo III ser dividido em quatro triângulos iguais.



Logo, **as áreas dos triângulos V, VI, VII e VIII são iguais** a área do antigo triângulo III dividido por 4.

$$A_V = A_{VI} = A_{VII} = A_{VIII} = \frac{16}{4} = 4\ cm^2$$

Por fim, **o triângulo VI também é dividido em mais 4 "mini triângulos" congruentes**. Assim, a área de cada mini triângulo será calculada pela divisão da área do triângulo VI por 4.



$$A_{mini} = \frac{4}{4} = 1\ cm^2$$

Note que a área sombreada é formada pela área dos triângulos I, II e III **mais a área de três mini triângulos**. Assim,

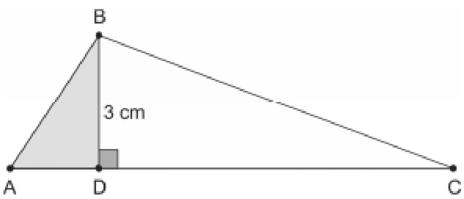
$$A_{sombreada} = A_I + A_{II} + A_{III} + 3 \cdot A_{mini}$$

$$A_{sombreada} = 16 + 16 + 16 + 3 \cdot 1$$

$$A_{sombreada} = 48 + 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{sombreada} = 51\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA D.

7. (FCC/PREF. SJRP/2019) Em um triângulo ABC a altura BD relativa ao lado AC mede 3 cm, conforme mostra a figura.



Sabendo que o segmento CD é 6 cm maior que o segmento AD e que a área do triângulo BCD é o quádruplo da área do triângulo ABD, a área do triângulo ABC, em cm², é:

A) 12

B) 15

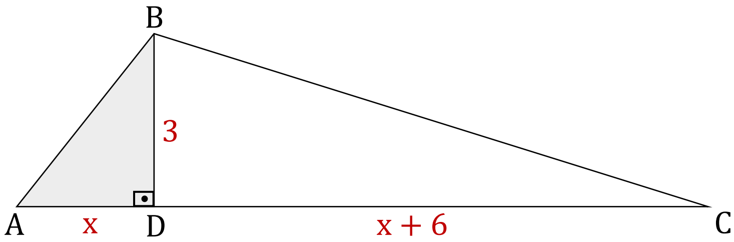
C) 18

D) 21

E) 24

Comentários:

Vamos desenhar melhor a figura do enunciado, com as informações que foram passadas.



Note que **os triângulos ABD e BCD são retângulos**. Logo, suas áreas podem ser calculadas pelo produto dos catetos dividido por dois.

$$S_{ABD} = \frac{3x}{2}$$

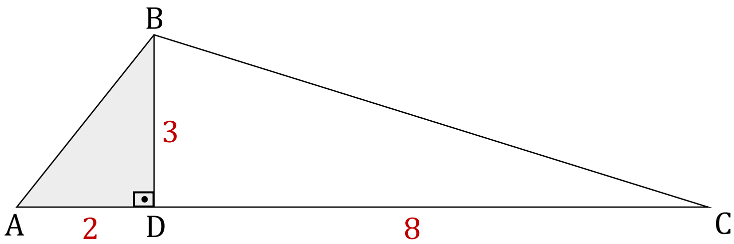
$$S_{BDC} = \frac{3 \cdot (x+6)}{2}$$

O enunciado disse que **a área do triângulo BCD é o quádruplo da área do triângulo ABD**.

$$S_{BDC} = 4S_{ABD} \quad \rightarrow \quad \frac{3 \cdot (x+6)}{2} = 4 \cdot \frac{3x}{2}$$

$$3 \cdot (x+6) = 12x \quad \rightarrow \quad 3x + 18 = 12x \quad \rightarrow \quad 9x = 18 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 2\ cm}$$

A área do triângulo ABC pode ser encontrada pelo produto da base AC pela altura BD, depois dividimos por 2. Como determinarmos o valor de "x", sabemos agora quanto vale a base.



$$S_{ABC} = \frac{3 \cdot 10}{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{S_{ABC} = 15\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA B.

8. (FCC/SEDU-ES/2018) A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC mede 12 cm. Se um dos catetos do triângulo ABC mede 15 cm, a medida do outro cateto, em centímetros, é igual a

A) 24.

B) 18.

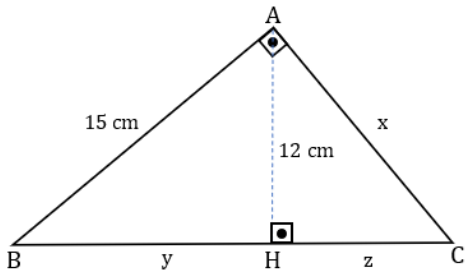
C) 22.

D) 16.

E) 20.

Comentários:

A melhor coisa é desenhar o triângulo com todas as informações do enunciado.



A questão pede o outro cateto, que no nosso desenho é o lado AC: "x". Para começar, note que **o triângulo ABH é retângulo**, de forma que podemos aplicar o teorema de Pitágoras para determinar "y".

$$15^2 = 12^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = 225 - 144 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{81} \quad \rightarrow \quad y = 9\ cm$$

Além disso, perceba que **os triângulos ABH e AHC são semelhantes**. Sendo assim, podemos escrever:

$$\frac{12}{y} = \frac{z}{12} \quad \rightarrow \quad yz = 144 \quad \rightarrow \quad z = \frac{144}{9} \quad \rightarrow \quad z = 16\ cm$$

Por fim, como **AHC é um triângulo retângulo**, também podemos usar **o teorema de Pitágoras** e escrever:

$$\mathrm{x}^2 = 12^2 + \mathrm{z}^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{x}^2 = 144 + 256 \quad \rightarrow \quad \mathrm{x}^2 = 400 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 20\ cm}$$

Gabarito: LETRA E.

CEBRASPE

9. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Considere que um triângulo ABC tenha lados com as seguintes medidas: 3 cm, 5 cm e 7 cm. Se o triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC e tem perímetro 25 cm, então o menor lado do triângulo DEF é 5 cm.

Comentários:
Temos todos os lados do triângulo ABC, conseguimos calcular o perímetro (2p).

$$2p_{ABC} = 3 + 5 + 7 \quad \rightarrow \quad 2p_{ABC} = 15 \text{ cm}$$

Como também temos **o perímetro do triângulo DEF**, podemos calcular **a razão de semelhança (k)**.

$$k = \frac{2p_{ABC}}{2p_{DEF}} \quad \rightarrow \quad k = \frac{15}{25} \quad \rightarrow \quad k = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad k = 0{,}6$$

Agora, com a razão de semelhança, conseguimos calcular **o menor lado do triângulo DEF** $(\boldsymbol{l_{DEF}})$. Para isso, devemos utilizar também **o menor lado do triângulo ABC** $(\boldsymbol{l_{ABC}})$, ou seja, 3 cm.

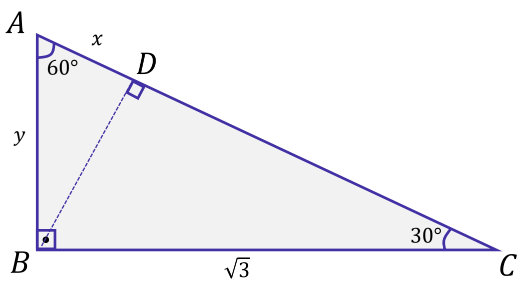
$$k = \frac{l_{ABC}}{l_{DEF}} \quad \rightarrow \quad l_{DEF} = \frac{l_{ABC}}{k} \quad \rightarrow \quad l_{DEF} = \frac{3}{0{,}6} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{l_{DEF} = 5 \text{ cm}}}$$

Gabarito: CERTO.

10. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Seja ABC um triângulo com $A\hat{B}C = 90°$ e $A\hat{C}B = 30°$. Se $\overline{BC} = \sqrt{3}$ cm e se a altura com relação ao vértice B encontra o segmento $\overline{AC}$ no ponto D, então o comprimento do segmento $\overline{AD}$ é 1 cm.

Comentários:
Vamos esquematizar o triângulo ABC com as informações do item!



Queremos determinar "x"! Para isso, precisaremos primeiro encontrar "y".

$$\tan 30° = \frac{y}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{3} \tan 30°$$

A tangente de 30° é uma daquelas que **você precisa decorar**! Trata-se de um ângulo notável! Vamos revisitar aquela tabela!

	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Com isso,

$$y = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \text{y} = 1 \text{ cm}$$

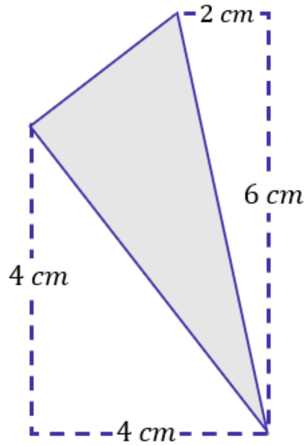
Agora, com o valor de "y", podemos encontrar "x", observando **o triângulo ADB**.

$$\cos 60° = \frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad x = y \cdot \cos 60° \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x = \frac{1}{2}\ \text{cm}}}$$

Note que **"x" é igual a 0,5 cm**. O item afirma que é igual a 1 cm. Logo, está **errado**.

Gabarito: ERRADO.

11. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) O triângulo ABC mostrado a seguir está inscrito no retângulo incompleto, de lados pontilhados. As medidas dos lados do retângulo podem ser observadas na figura seguinte.



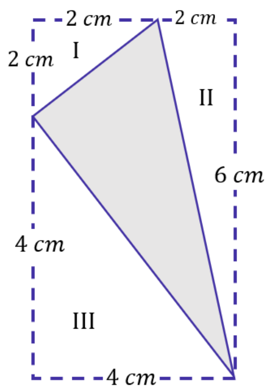
O valor da área do triangulo ABC apresentado anteriormente é igual a

A) 6 cm²

B) 7 cm²

C) 8 cm²
D) 12 cm²
E) 16 cm²

Comentários:
Vamos desenhar o retângulo **completo.**



Note que temos três regiões que são triângulos retângulos. Se pegarmos **a área do retângulo e subtrair a área dessas regiões, vamos obter a área cinza**. Assim,

- Área do Retângulo: **produto dos lados**.

$$A_R = 4 \cdot 6 \qquad \rightarrow \qquad A_R = 24\ cm^2$$

- Área do Triângulo Retângulo: **produto dos catetos dividido por 2**.

$$A_I = \frac{2 \cdot 2}{2} \qquad \rightarrow \qquad A_I = 2\ cm^2$$

$$A_{II} = \frac{2 \cdot 6}{2} \qquad \rightarrow \qquad A_{II} = 6\ cm^2$$

$$A_{III} = \frac{4 \cdot 4}{2} \qquad \rightarrow \qquad A_{III} = 8\ cm^2$$

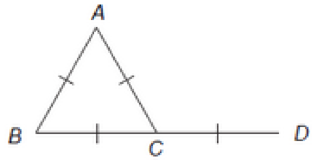
Com cada uma das áreas das regiões, podemos determinar **a área do triângulo cinza**.

$$A_{cinza} = A_R - A_I - A_{II} - A_{III}$$
$$A_{cinza} = 24 - 2 - 6 - 8$$
$$\boldsymbol{A_{cinza} = 8\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA C.

CESGRANRIO

12. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) Um arame de extremidades C e D e 8 cm de comprimento é dobrado de modo a formar um triângulo equilátero ABC mantendo os pontos B, C e D alinhados, conforme a Figura a seguir.



Qual a distância, em centímetros, entre os pontos A e D?

A) $\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{3}$

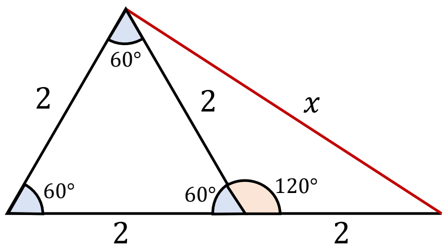
C) $4\sqrt{3}$

D) 2

E) 4

Comentários:

O arame tem **8 centímetros**. Para formar **o triângulo <u>equilátero</u>**, devemos dobrá-lo em **segmentos iguais**.



Com isso, note que **o lado do triângulo fica igual a 2**. Afinal, ainda "sobra" o segmento CD, de medida igual ao lado do triângulo. Para determinar o "x", podemos aplicar <u>a lei dos cossenos</u>, já que sabemos que o ângulo oposto é 120°.

$$x^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 120°$$

$$x^2 = 4 + 4 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad x^2 = 8 + 4 \quad \rightarrow \quad x^2 = 12 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 2\sqrt{3}\ cm}$$

Gabarito: LETRA B.

13. (CESGRANRIO/IBGE/2016) Considere as seguintes definições:

1 - Um triângulo é chamado de escaleno quando os seus lados possuem comprimentos diferentes.

2 - Um triângulo é chamado de isósceles quando há dois de seus lados com o mesmo comprimento.

3 - Um triângulo é chamado de equilátero quando todos os seus lados possuem o mesmo comprimento.

De acordo com as definições apresentadas, um triângulo não é escaleno quando, e apenas quando, ele

A) é isósceles.

B) é isósceles, mas não é equilátero.

C) não é isósceles.

D) não é equilátero, nem é isósceles.

E) não é equilátero.

Comentários:

Note que para o triângulo ser escaleno, ele deve ter **todos os lados com medidas diferentes**. Agora, vamos analisar as alternativas.

A) é isósceles.

Correto. É isso mesmo, pessoal. Note que basta que o triângulo seja isósceles, que ele não será escaleno. Afinal, em um triângulo isósceles, teremos obrigatoriamente **dois lados iguais**. No entanto, deveríamos entender *o examinador também considerou os triângulos equiláteros como isósceles*.

B) é isósceles, mas não é equilátero.

Errado. Se o triângulo é equilátero, ele também não será escaleno. Observe que pela definição do enunciado, um triângulo equilátero também é isósceles, afinal, há três (e, consequentemente, há dois) lados iguais.

C) não é isósceles.

Errado. Se não é isósceles, **pode ser escaleno**.

D) não é equilátero, nem é isósceles.

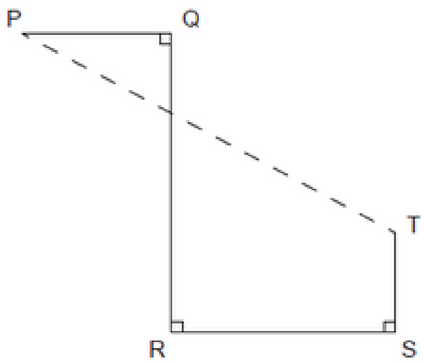
Errado. Se não é equilátero, nem isósceles, **então será escaleno**.

E) não é equilátero.

Errado. Se o triângulo não é equilátero, **ele ainda pode ser escaleno ou isósceles**.

Gabarito: LETRA A.

14. (CESGRANRIO/IBGE/2016) Na Figura a seguir, PQ mede 6 cm, QR mede 12 cm, RS mede 9 cm, e ST mede 4 cm.



A distância entre os pontos P e T, em cm, mede

A) 17

B) 21

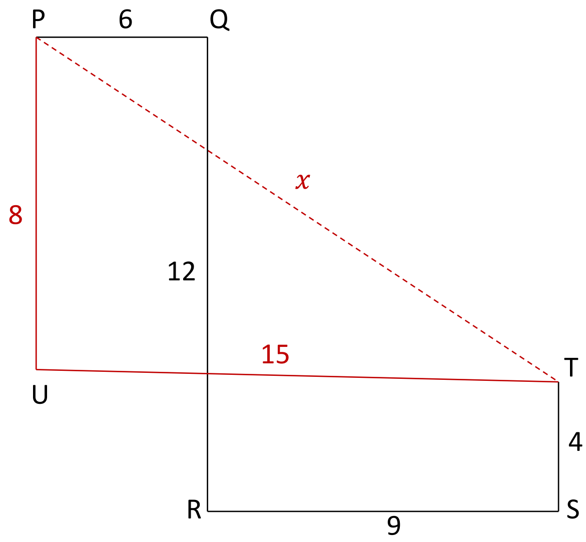
C) 18

D) 20

E) 19

Comentários:

Vamos desenhar melhor essa figura, de forma a expormos os comprimentos dos lados.



A intenção foi montarmos **o triângulo retângulo PTU**, pois aí a distância entre os pontos **P e T é exatamente a medida da sua hipotenusa**. Para encontrarmos a medida dos catetos UP e UT, fazemos o seguinte:

I) Para UP, basta percebermos que **QR mede 12 cm e ST mede 4**. Pela própria geometria esquematizada, o cateto *UP é a diferença* $12 - 4 = 8$ *cm*.

II) De forma análoga, o cateto UT é obtido considerando que **PQ mede 6 e RS mede 9**. Com isso, pela própria forma que esquematizamos, conseguimos depreender que *UT é a soma das medidas de PQ e RS.*

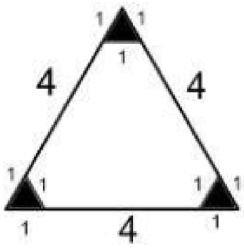
Beleza, com os catetos do triângulo encontrado, agora é só usar o teorema de Pitágoras para encontramos a medida "x".

$$x^2 = 8^2 + 15^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 64 + 224 \quad \rightarrow \quad x^2 = 289 \quad \rightarrow \quad x = 17 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA A.

Outras Bancas

15. (RBO/ISS-BH/2022) Na figura a seguir, temos um triângulo equilátero de lado 6 dm, e em cada vértice desse triângulo, temos triângulo equilátero de lado 1 dm.



O percentual do triângulo de lado 6 dm, que está escurecido, é de, aproximadamente,

A) 6,67%.

B) 7,33%.

C) 8,33%.

D) 9,00%.

E) 10,2%

Comentários:

Questão sobre a área do **triângulo <u>equilátero</u>**! O primeiro passo é lembrar da fórmula:

$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Agora, vamos calcular **a área do triângulo equilátero de 6 dm de lado**.

$$A_M = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A_M = \frac{36\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A_M = 9\sqrt{3}\ \text{dm}^2$$

Depois, precisamos encontrar a área do triângulo menor, que está escurecido. Note que esses triângulos menores também **são equiláteros e possuem 1 dm de lado**. Logo:

$$A_m = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A_m = \frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{dm}^2$$

Opa, temos **a área de 1 triângulo escurecido, mas são 3 deles na figura**! Assim:

$$A_t = 3A_m \quad \rightarrow \quad A_t = \frac{3\sqrt{3}}{4}\ \text{dm}^2$$

Para descobrir o percentual do triângulo maior que está escurecido, dividimos A_t por A_M.

$$\frac{A_t}{A_m} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{9\sqrt{3}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{A_t}{A_m} = \frac{1}{12} \qquad \rightarrow \qquad \frac{A_t}{A_m} = 0{,}0833\ldots$$

Sendo assim, o percentual é dado pela multiplicação do resultado acima **por 100**.

$$\boxed{\frac{A_t}{A_m} = 8,33\%}$$

Gabarito: LETRA C.

16. (FUNDATEC/PREF. FLORES DA CUNHA/2022) Analise as assertivas a seguir:

I. Todo triângulo retângulo tem um ângulo reto.
II. Todo triângulo retângulo tem catetos e hipotenusa.
III. Os ângulos internos de um triângulo retângulo possuem medidas iguais.

Quais estão corretas?
A) Apenas I.
B) Apenas II.
C) Apenas I e II.
D) Apenas II e III.
E) I, II e III.

Comentários:
Vamos analisar as assertivas.

I. Todo triângulo retângulo tem um ângulo reto.
Certo. É exatamente a presença de um **ângulo reto (90 graus)** que caracteriza o triângulo retângulo.

II. Todo triângulo retângulo tem catetos e hipotenusa.
Certo. Todo triângulo retângulo tem **dois catetos e uma hipotenusa**. A relação entre esses elementos é dada pelo **Teorema de Pitágoras**.

III. Os ângulos internos de um triângulo retângulo possuem medidas iguais.
Errado. Todo triângulo tem três ângulos. No triângulo retângulo, um desses ângulos será o de 90 graus. No entanto, os outros dois ângulos podem assumir quaisquer valores, **não necessariamente iguais**.

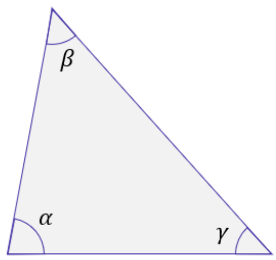
Gabarito: LETRA C.

17. (IDECAN/IBGE/2022) Considere as seguintes afirmações abaixo:

I. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°.
II. Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
III. Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

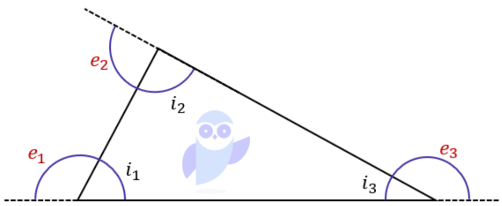
Assinale o item correto:
A) Somente I está correta.
B) Somente II está correta.
C) Somente I e II estão corretas.
D) Somente II e III estão corretas
E) Todas as afirmações estão corretas.

Comentários:
I. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°.
Certo. É um resultado muito importante no contexto do estudo dos triângulos! Anote ele.



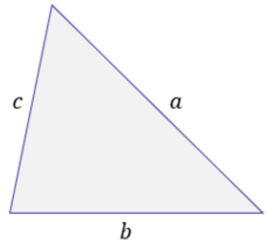
$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

II. Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
Certo também! É um resultado menos comum, mas igualmente importante. Nós demonstramos na teoria!



$$\boxed{e_1 = i_2 + i_3}$$

III. Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.
Certo. É o que conhecemos como desigualdade triangular, também interpretada como uma **condição de existência** para o triângulo.



$$a < b + c \qquad b < a + c \qquad c < a + b$$

Gabarito: LETRA E.

18. (DIRENS/EEAR/2020) Em relação aos triângulos, marque V para verdadeiro e F para falso. Em seguida, assinale a alternativa com a sequência correta.

( ) Triângulo acutângulo é todo triângulo que possui dois lados agudos.
( ) Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360°.
( ) Triângulo obtusângulo é todo triângulo que possui um dos ângulos internos obtuso.
( ) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

A) F - V - V - V
B) V - F - F - F
C) F - F - F - V
D) V - V - V - F

Comentários:
Vamos analisar!

(**F**) Triângulo acutângulo é todo triângulo que possui dois lados agudos.
Falso, moçada! Para ser acutângulo, o triângulo deve possuir **todos os seus ângulos agudos**!

(**V**) Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360°.
Verdadeiro! Demonstramos isso na nossa teoria!

(**V**) Triângulo obtusângulo é todo triângulo que possui um dos ângulos internos obtuso.
Verdadeiro! É isso mesmo, pessoal! Em um **triângulo obtusângulo**, um dos ângulos internos obtuso (maior que 90° e menor que 180°).

(**V**) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Verdadeiro, também! Essa demonstração também se encontra na nossa teoria.

Gabarito: LETRA A.

19. (FEPESE/PREF. MAFRA/2021) Os lados de um triângulo medem 4, 6 e 10 centímetros. Um segundo triângulo é semelhante ao primeiro e tem perímetro igual a 60 cm. Logo, o maior lado do segundo triângulo mede:

A) 60 cm.
B) 20 cm.
C) 18 cm.
D) 40 cm.
E) 30 cm.

Comentários:

Nessa questão, precisamos calcular a razão de semelhança (k) entre esses triângulos. Para isso, usaremos os lados do triângulo dados no enunciado para **calcular um dos perímetros ($2p$).**

$$2p = 4 + 6 + 10 \qquad \rightarrow \qquad 2p = 20$$

Com os dois perímetros, conseguimos calcular k.

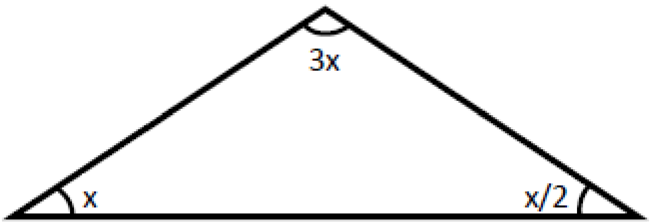
$$k = \frac{60}{20} \qquad \rightarrow \qquad k = 3$$

Para calcular o maior lado do segundo triângulo, precisamos **multiplicar a razão de semelhança k pelo maior lado do primeiro triângulo**.

$$L = 10 \cdot 3 \qquad \rightarrow \qquad L = 30$$

Gabarito: LETRA E.

20. (IDECAN/SES DF/2014) Observe a figura a seguir.



Qual é o valor de x?

A) 20°.

B) 40°.
C) 45°.
D) 90°.
E) 180°.

Comentários:
Sabemos que **a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a <u>180°</u>**. Sendo assim:

$$x + 3x + \frac{x}{2} = 180°$$

$$\frac{9x}{2} = 180° \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{x = 40°}}$$

Gabarito: LETRA B.

21. (FEPESE/FCEE/2022) Um terreno triangular tem todos os lados com a mesma medida de 20 metros cada lado. Artur comprou 1/8 do referido terreno, logo, a área (em metros quadrados) do terreno que Artur comprou é:
A) Maior que 45.
B) Maior que 40 e menor que 45.
C) Maior que 35 e menor que 40.
D) Maior que 30 e menor que 35.
E) Menor que 30.

Comentários:
Temos um **triângulo <u>equilátero</u>** de lado igual a 20 metros! Vimos que a área de um triângulo equilátero é:

$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Usando $L = 20$:

$$A = \frac{20^2\sqrt{3}}{4} \qquad \rightarrow \qquad A = 100\sqrt{3}$$

Nessa questão, vamos usar $\sqrt{3} = 1{,}73$. Assim:

$$\mathrm{A} = 100 \cdot 1{,}73 \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{A} = 173\ \mathrm{m}^2$$

Como **Artur comprou 1/8 do terreno**, ele ficou com:

$$A_r = \frac{A}{8} \quad \rightarrow \quad A_r = \frac{173}{8} \quad \rightarrow \quad \boxed{A_r = 21,65\ m^2}$$

Gabarito: LETRA E.

22. (QUADRIX/CRMV/2022) A área A de um triângulo de lados a, b e c pode ser calculada pela fórmula de Herão:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

em que p é o semiperímetro (metade do perímetro) do triângulo. A fórmula recebeu esse nome em homenagem ao matemático e mecânico grego Herão de Alexandria. Considerando essas informações, julgue o item.

A área de um triângulo com lados iguais a 15 cm, 34 cm e 35 cm é menor que a área de um triângulo com lados iguais a 13 cm, 40 cm e 45 cm.

Comentários:
Questão bem legal para treinarmos a **fórmula de Herão**. Nela, precisaremos calcular a área de dois triângulos e depois compará-las.

- Triângulo com lados iguais a 15 cm, 34 cm e 35 cm.

1º passo) Cálculo do perímetro (2p):

$$2p = 15 + 34 + 35 \quad \rightarrow \quad 2p = 84$$

Como a fórmula usa o semiperímetro (p):

$$p = \frac{84}{2} \quad \rightarrow \quad p = 42$$

2º passo) Colocar tudo na fórmula.

$$A_1 = \sqrt{42 \cdot (42-15) \cdot (42-34) \cdot (42-35)}$$

$$A_1 = \sqrt{42 \cdot 27 \cdot 8 \cdot 7}$$

$$\boxed{A_1 = \sqrt{63.504}}$$

- Triângulo com lados iguais a 13 cm, 40 cm e 45 cm.

1º passo) Cálculo do perímetro (2p):

$$2p = 13 + 40 + 45 \quad \rightarrow \quad 2p = 98$$

Como a fórmula usa o semiperímetro (p):

$$p = \frac{98}{2} \quad \rightarrow \quad p = 49$$

2º passo) Colocar tudo na fórmula.

$$A_2 = \sqrt{49 \cdot (49 - 13) \cdot (49 - 40) \cdot (49 - 45)}$$

$$A_2 = \sqrt{49 \cdot 36 \cdot 9 \cdot 4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_2 = \sqrt{63.504}}}$$

Perceba que não precisamos nos preocupar com o valor das raízes, pois **as duas são iguais**. Sendo assim, o **item erra** ao afirmar que um triângulo possui área menor do que o outro.

Gabarito: ERRADO.

23. (Inst. AOCP/CBM-PA/2022) A respeito dos entes da geometria plana e espacial, é correto afirmar que

A) a mediatriz é a reta que divide um ângulo ao meio.
B) a mediana de uma circunferência é tangente à circunferência e forma um ângulo reto com o diâmetro.
C) a bissetriz divide um triângulo em dois triângulos de mesma área.
D) a circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes dos extremos de um segmento.
E) em um triângulo equilátero, a mediana e a bissetriz de um mesmo ângulo coincidem.

Comentários:

Vamos comentar cada alternativa!

A) a ~~**mediatriz**~~ é a reta que divide um ângulo ao meio.
Errado, pessoal! O correto seria bissetriz.

B) a ~~**mediana de uma circunferência**~~ é tangente à circunferência e forma um ângulo reto com o diâmetro.
Errado, falamos de mediana no contexto dos triângulos, não de circunferências.

C) a ~~**bissetriz**~~ divide um triângulo em dois triângulos de mesma área.

Errado! A bissetriz divide um ângulo ao meio!

D) a circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes ~~**dos extremos de um segmento**~~.
Errado. A circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos (em um plano) equidistantes de um ponto central (centro da circunferência).

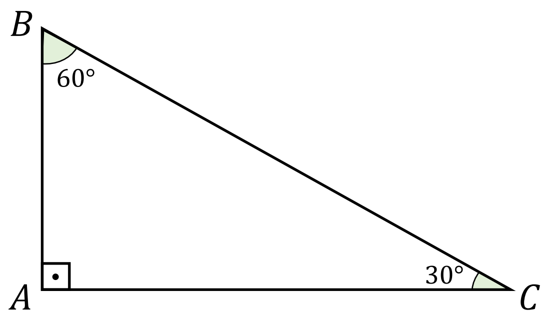
E) em um triângulo equilátero, a mediana e a bissetriz de um mesmo ângulo coincidem.
Isso mesmo! No triângulo equilátero, a mediana, a bissetriz e a altura coincidem.

Gabarito: LETRA E.

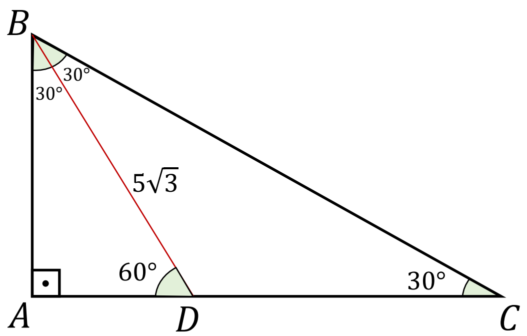
24. (Inst. AOCP/ITEP-RN/2021) Considere o triângulo retângulo ABC, retângulo em A. Sabe-se que $\widehat{C} = 30°$ e que a medida da bissetriz interna relativa ao ângulo $\widehat{B}$ é igual a $5\sqrt{3}\,u$. Nessas condições, a medida do lado AC, oposto ao vértice B, é

A) $15\sqrt{2}\,u$
B) $15\sqrt{2}/2\ \ u$
C) $15\sqrt{3}/2\,u$
D) $15\sqrt{3}\,u$
E) $15\sqrt{3}/4\,u$

Comentários:
Vamos desenhar esse **triângulo** com as informações do enunciado.



Observe que se o ângulo é reto em A e se C é 30°, então **B só pode medir 60°** (pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°). Agora, a **bissetriz relativa** ao ângulo $\widehat{B}$, vai dividir esse ângulo ao meio.



Observe que **o triângulo ABD formado também é retângulo**, de forma que podemos usar o $\mathbf{sen\,60°}$ para determinar a medida do lado AB.

$$\text{sen}\,60° = \frac{\text{AB}}{BD} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{5\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad AB = \frac{15}{2}$$

Com o valor de AB, podemos determinar AC por meio da $\mathbf{tan\,30°}$.

$$\tan 30° = \frac{AB}{AC} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{15}{2}}{AC} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{AC = \frac{5\sqrt{3}}{2}}}$$

Gabarito: LETRA C.

Vunesp

25. (VUNESP/PREF. TAUBATÉ/2022) Um mestre de obras precisa de um pedaço de madeira cortada em formato de triângulo retângulo, com o maior lado medindo 37 cm, e o menor lado medindo 12 cm. O perímetro desse pedaço de madeira triangular deve ser de

A) 81 cm

B) 82 cm

C) 83 cm

D) 84 cm

E) 85 cm

Comentários:

Moçada, o maior lado de um triângulo retângulo é a hipotenusa. Sendo assim, a medida de **37 cm corresponde à medida da <u>hipotenusa</u>**. Por sua vez, o **12 cm é um dos catetos**. Com essas duas informações, podemos usar o Teorema de Pitágoras para determinar o outro cateto.

$$h^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad 37^2 = 12^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 1369 - 144 \quad \rightarrow \quad b^2 = 1225$$

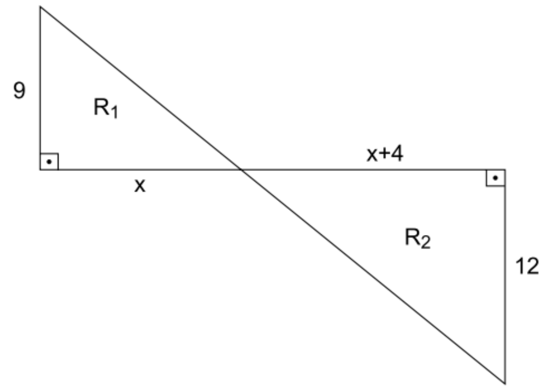
$$\boxed{b = 35 \text{ cm}}$$

Pronto, temos todos os lados do triângulo. Para determinar o perímetro, temos que **somar todos eles**.

$$2p = h + a + b \quad \rightarrow \quad 2p = 37 + 35 + 12 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{2p = 84\ cm}}$$

Gabarito: LETRA D.

26. (VUNESP/TJ-SP/2017) A figura seguinte, cujas dimensões estão indicadas em metros, mostra as regiões R_1 e R_2, ambas com formato de triângulos retângulos, situadas em uma praça e destinadas a atividades de recreação infantil para faixas etárias distintas.



Se a área de R_1 é 54 m², então o perímetro de R_2 é, em metros, igual a

A) 40.

B) 42.

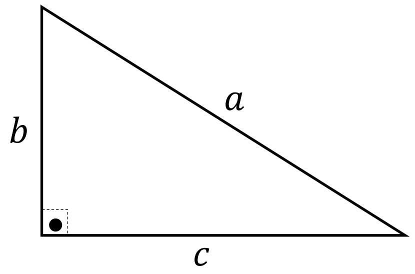
C) 54.

D) 48.

E) 36.

Comentários:

Pessoal, temos dois triângulos retângulos. Na teoria, vimos que a área do triângulo retângulo é calculada da seguinte forma:



$$A_T = \frac{bc}{2}$$

Note que **os catetos de R_1 são "9" e "x"**. Além disso, sabemos **que a área de R_1 é 54 cm²**. Com isso,

$$\frac{9x}{2} = 54 \quad \rightarrow \quad 9x = 108 \quad \rightarrow \quad x = \frac{108}{9} \quad \rightarrow \quad x = 12 \text{ cm}$$

Com o valor de "x", podemos concluir que o cateto "$x + 4$" de R_2 vale, na verdade, 16 cm.

- A questão pede o perímetro de R_2, ou seja, **a soma de todos os lados do triângulo**. Note que ainda não sabemos a hipotenusa. Para encontrá-la, vamos usar o teorema de Pitágoras.

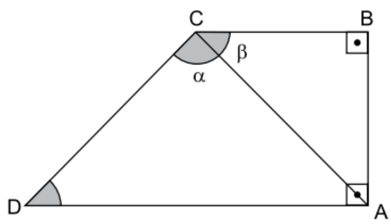
$$H^2 = 16^2 + 12^2 \quad \rightarrow \quad H^2 = 256 + 144 \quad \rightarrow \quad H^2 = 400 \quad \rightarrow \quad H = 20\ cm$$

Pronto! **Temos a hipotenusa e os dois catetos de R_2**. Para obter o perímetro, basta somarmos tudo!

$$Perímetro\ de\ R_2 = 20 + 16 + 12 \quad \rightarrow \quad Perímetro\ de\ R_2 = 48\ cm$$

Gabarito: LETRA D.

27. (VUNESP/TJ-SP/2015) Na figura, o trapézio retângulo ABCD é dividido por uma de suas diagonais em dois triângulos retângulos isósceles, de lados $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DC}$.

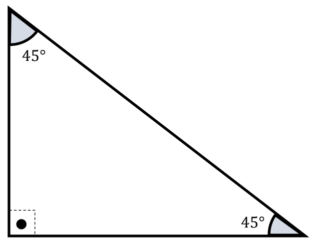


Desse modo, é correto afirmar que a soma das medidas dos ângulos α e β é igual a

A) 125°.
B) 115°.
C) 110°.
D) 135°.
E) 130°.

Comentários:

Em um triângulo retângulo, teremos um ângulo reto (90°). Quando ele é isóscele, os outros ângulos serão iguais a 45°, conforme mostra a figura abaixo.



Qual o motivo disso? Vamos lá! Lembre-se que **a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°**.

$$a + b + c = 180°$$

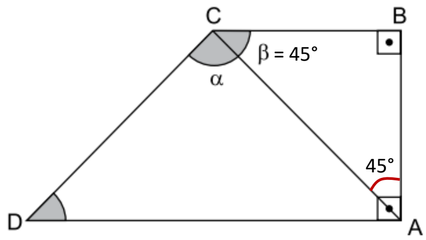
- Quando o triângulo é retângulo, **um dos ângulos é igual a 90°**. Vamos dizer que seja "a". Logo,

$$90° + b + c = 180° \quad \rightarrow \quad b + c = 90°$$

- Quando o triângulo é isóscele, **ele possui dois ângulos iguais**. Portanto, $b = c = x$.

$$x + x = 90° \quad \rightarrow \quad 2x = 90° \quad \rightarrow \quad x = 45°$$

Assim, em um triângulo retângulo isósceles, sempre **teremos um ângulo de 90° e outros dois de 45°**. Agora, vamos para a questão em si. De acordo com o enunciado, tínhamos **um trapézio que foi dividido em dois triângulos retângulos isósceles**. Sendo assim, vamos olhar atentamente para a figura dada no enunciado.



Observe que **ABC é um dos triângulos retângulos**. Se já temos o ângulo de 90° em B, então os demais serão de 45°, já que é um triângulo retângulo isósceles. Com isso, já podemos dizer que $\boldsymbol{\beta = 45°}$ Falta determinarmos α. Como **DCA é outro triângulo retângulo isósceles**, então α mede 90° ou 45°. Para decidir qual dois é o valor de α, podemos ir por tentativa, para ganhar velocidade.

Se α fosse 45°, a soma de α e β seria 90°. **Não há alternativa com esse valor**. Consequentemente, α não pode ser 45° e **o único valor que sobra para ele é 90°**. Com isso,

$$\alpha + \beta = 45° + 90° = 135°$$

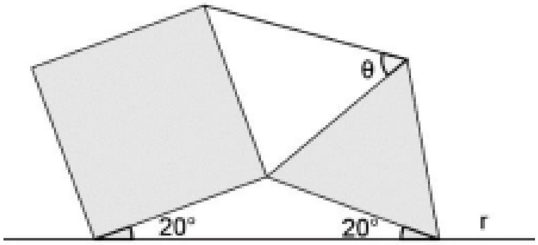
Gabarito: LETRA D.

QUESTÕES COMENTADAS

Quadriláteros

FGV

1. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Na figura abaixo aparecem um quadrado e um triângulo equilátero (sombreados), cada um deles com um vértice na reta r, e um lado fazendo 20° com a reta r.



O ângulo assinalado com a letra θ mede

a) 40°.

b) 45°.

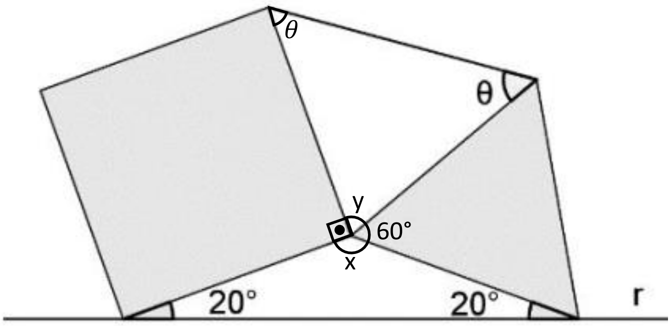
c) 50°.

d) 55°.

e) 60°.

Comentários:

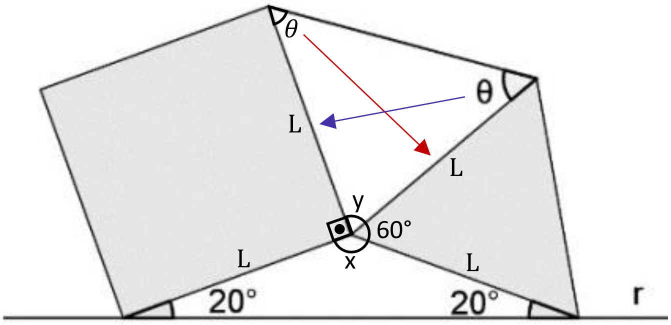
Vamos fazer algumas anotações na imagem do enunciado.



Agora, vamos fazer algumas considerações sobre o desenho.

Note que temos (em cinza) um **quadrado** e um **triângulo equilátero**. Com isso, seus ângulos internos são 90° e 60°, respectivamente. Além disso, o triângulo que está abaixo deles **é um triângulo <u>isósceles</u>**, pois possui dois ângulos iguais a 20°.

O fato do triângulo inferior ser isósceles nos informa que **o lado do quadrado é igual ao lado do triângulo**. Sendo assim, **os ângulos internos opostos a esses lados devem ser iguais**. Observe que desenhei mais um ângulo θ no triângulo superior.



Com essas considerações, vamos para os cálculos. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Sendo assim, para o **triângulo inferior** temos:

$$20^\circ + x + 20^\circ = 180^\circ \quad \rightarrow \quad x + 40^\circ = 180^\circ \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 140^\circ}$$

Com o valor de "x", conseguimos determinar "y", pois sabemos que em uma volta completa temos 360°.

$$y + 90^\circ + x + 60^\circ = 360^\circ$$

$$y + 150^\circ + 140^\circ = 360^\circ$$

$$y + 290^\circ = 360^\circ \quad \rightarrow \quad \boxed{y = 70^\circ}$$

Agora, com o valor de "y", finalmente conseguimos determinar θ. Para isso, devemos usar novamente o seguinte fato: **a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°**. No **triângulo superior**, ficamos:

$$y + \theta + \theta = 180^\circ \quad \rightarrow \quad 2\theta + 70^\circ = 180^\circ \quad \rightarrow \quad 2\theta = 110^\circ \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\theta = 55^\circ}}$$

Gabarito: LETRA D.

2. (FGV/SEJUSP-MG/2022) Partindo de um retângulo, Eduardo construiu dois outros retângulos, R1 e R2. As dimensões do retângulo R1 são a metade das dimensões do retângulo inicial e as dimensões do retângulo R2 são o dobro das dimensões do retângulo inicial. A razão entre a área do retângulo R2 e a área do retângulo R1 é

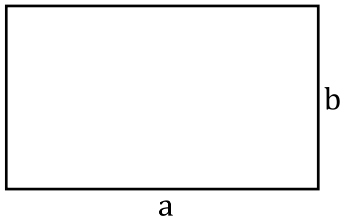
a) 32.

b) 16.

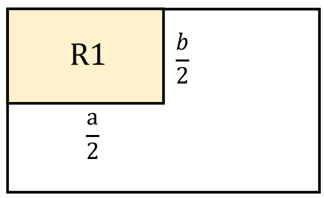
c) 8.

d) 4.
e) 2.

Comentários:
Vamos desenhar com calma! Primeiramente, considere o retângulo original:



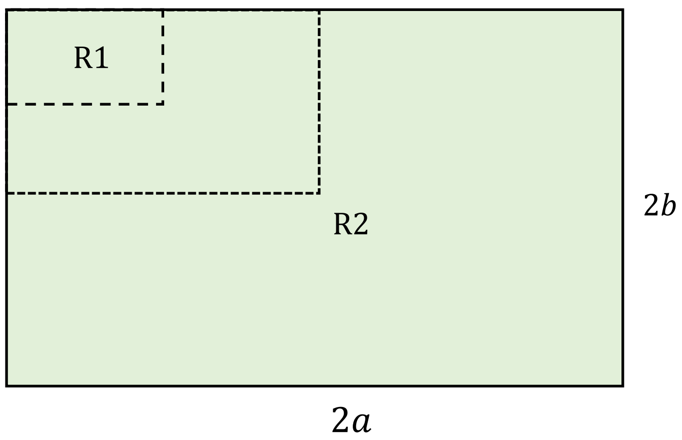
Agora, vamos desenhar o retângulo R1 (destacado em amarelo) que possui lados iguais **a metade** do original;



Observe que **a área** desse retângulo é igual a:

$$A_{R1} = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) \quad \rightarrow \quad A_{R1} = \frac{ab}{4}$$

Por sua vez, quando desenhamos **o retângulo R2** (destacado em verde), temos:



Como R2 tem dimensões iguais **ao dobro** das dimensões do retângulo original, então seus lados medem “2a” e “2b”. A sua área, portanto, é dada por:

$$A_{R2} = (2a)(2b) \quad \rightarrow \quad A_{R2} = 4ab$$

O enunciado pede **a razão entre essas duas áreas**. Logo,

$$k = \frac{A_{R2}}{A_{R1}} \quad \rightarrow \quad k = \frac{4ab}{\frac{ab}{4}} \quad \rightarrow \quad k = 4 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{k = 16}$$

Gabarito: LETRA B.

3. (FGV/SEAD-AP/2022) Um quadrado está inscrito em um círculo de raio R. Cada um dos menores arcos do círculo determinado por um lado do quadrado é refletido no respectivo lado. A área da região delimitada por esses 4 arcos refletidos é:

a) $(\pi - 1)R^2$.

b) $(\pi - \sqrt{2})R^2$.

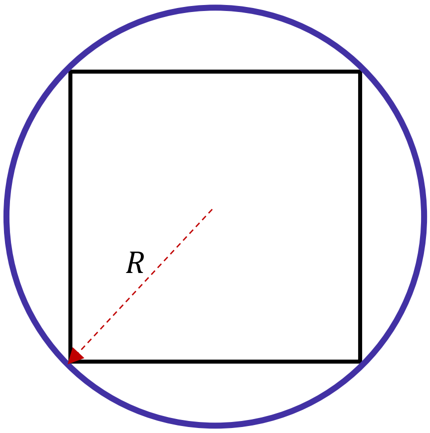
c) $(3\sqrt{2} - \pi)R^2$.

d) $(4 - \pi)R^2$.

e) $(4\sqrt{2} - \pi)R^2$.

Comentários:

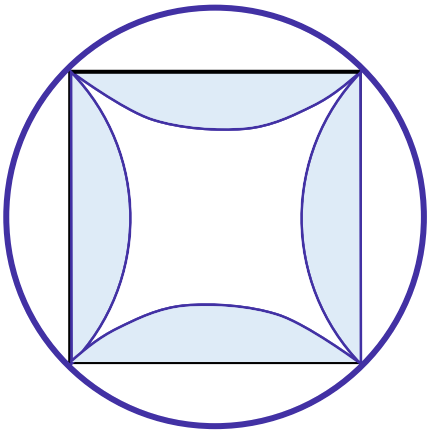
Vamos desenhar a situação proposta pelo enunciado!



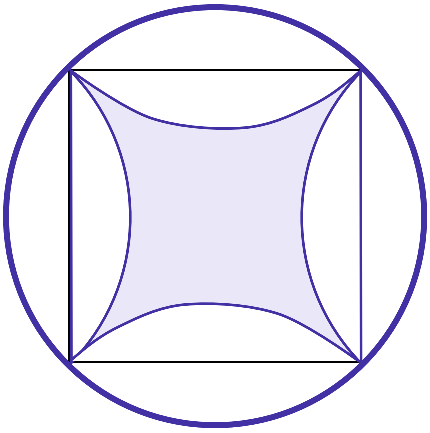
Pronto, esse é um quadrado inscrito em um círculo de R. Observe que a diagonal do quadrado (d) é igual ao diâmetro do círculo (2R). Sendo assim, podemos encontrar o lado do quadrado (L) em função de R.

$$d = L\sqrt{2} = 2R \quad \rightarrow \quad L = \frac{2R}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{L = R\sqrt{2}}$$

Vamos guardar esse resultado. Agora, devemos refletir os menores arcos do círculo no respectivo lado.



A área procurada é a área delimitada por esses arcos refletidos. Vamos destacá-la!

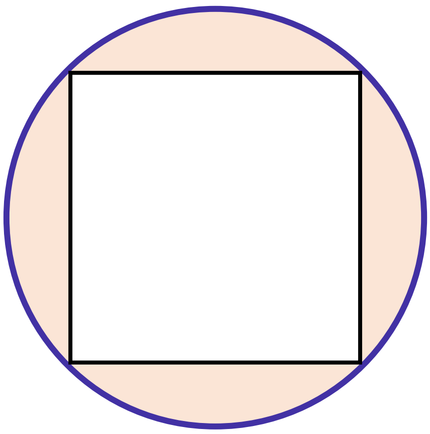


Pronto, queremos essa área interna (que está pintada de roxo claro). Observe que ela é igual a área do quadrado (A_q) **menos** a área dos quatro arcos (A_a): $A = A_q - A_a$

Inicialmente, já podemos calcular **a área do quadrado**:

$$A_q = L^2 \quad \rightarrow \quad A_q = \left(R\sqrt{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A_q = 2R^2$$

Agora, observe que a área dos arcos é a área do círculo menos a área do quadrado!



Professor, mas não queremos as áreas dos arcos refletidos?

Queremos! Mas **os arcos refletidos possuem a mesma área dos arcos "originais"!** Sendo assim:

$$A_a = A_c - A_q$$

$$A_a = \pi R^2 - 2R^2 \quad \rightarrow \quad A_a = (\pi - 2)R^2$$

Pronto! Agora devemos fazer:

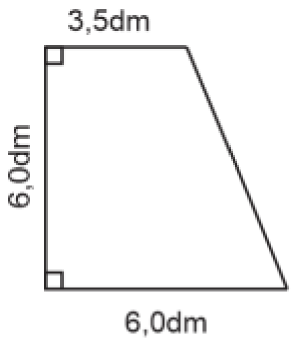
$$A = A_q - A_a$$

$$A = 2R^2 - (\pi - 2)R^2$$

$$A = 2R^2 - \pi R^2 + 2R^2 \quad \rightarrow \quad A = 4R^2 - \pi R^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = (4 - \pi)R^2}}$$

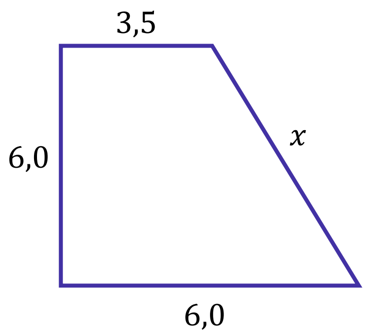
Gabarito: LETRA D.

4. (FGV/FEMPAR/2022) Uma chapa de metal foi recortada de modo a produzir um trapézio retângulo conforme ilustra a figura a seguir.

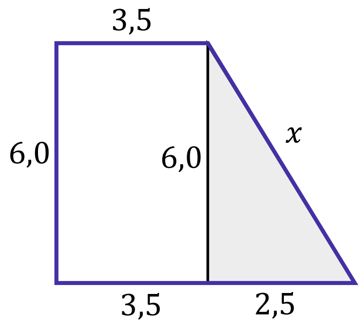


Com as medidas indicadas na figura, é possível calcular o seu perímetro, que vale
a) 21,5 dm.
b) 22,0 dm.
c) 22,5 dm.
d) 23,0 dm.
e) 23,5 dm

Comentários:
Lembre-se que o perímetro (2p) de um polígono é **a soma de todos os lados**. Agora, observe que no trapézio da questão está faltando um lado. Portanto, é ele que devemos encontrar!



Observe que o segmento que mede "x" parece uma hipotenusa! Considere o seguinte triângulo retângulo:



"x" é realmente a **hipotenusa** do triângulo destacado em cinza! Como temos os catetos, podemos usar o Teorema de Pitágoras para determinar o seu valor.

$$x^2 = 6^2 + 2{,}5^2$$

$$x^2 = 36 + 6{,}25$$

$$x^2 = 42{,}25$$

$$x = 6{,}5$$

Pronto! **Temos todos os lados do trapézio**, agora basta somá-los!

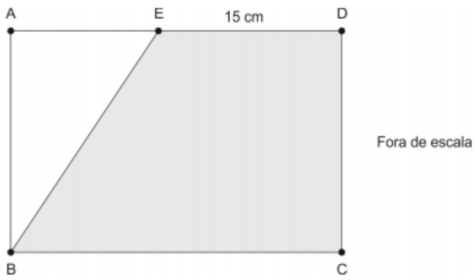
$$2p = 6 + 6 + 3{,}5 + 6{,}5 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{2p = 22 \text{ dm}}$$

Obs.: o perímetro de uma figura plana é representado por "2p" enquanto o "p" é o semiperímetro.

Gabarito: LETRA B.

FCC

5. (FCC/PREF. SJRP/2019) O ponto E pertence ao lado AD do retângulo ABCD e ED=15 cm, conforme mostra a figura.



Sabendo que a área do retângulo ABCD é 336 cm² e que a área do trapézio BCDE é 273 cm², a medida, em cm, do lado AB, é:

A) 14

B) 15

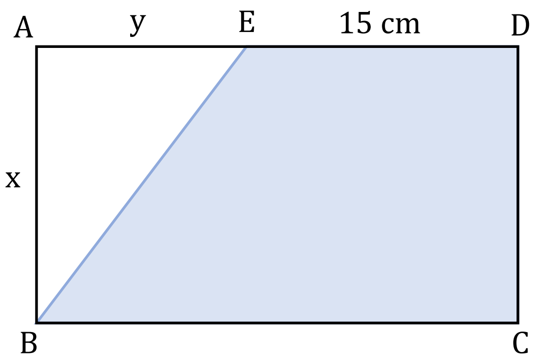
C) 16

D) 17

E) 18

Comentários:

Pessoal, vamos redesenhar essa figura, colocando as informações que ainda não temos.



A área do retângulo ABCD é 336 cm². Assim,

$$x(y+15)=336 \quad \rightarrow \quad xy+15x=336 \quad (1)$$

A área do trapézio BCDE é 273 cm². Logo,

$$\frac{(15+15+y)x}{2}=273 \quad \rightarrow \quad 30x+xy=546 \quad (2)$$

(1) e (2) formam um sistema com **duas equações e duas incógnitas**. Podemos resolvê-lo. Subtraindo (1) de (2), membro a membro, ficamos:

$$(30x + xy) - (15x + xy) = 546 - 336$$

$$30\text{x} - 15\text{x} = 210 \quad \rightarrow \quad 15\text{x} = 210 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 14\ cm}$$

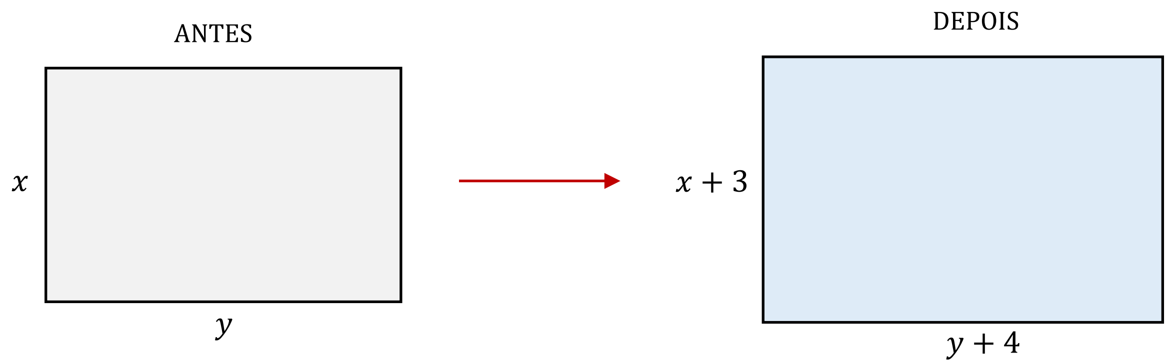
Gabarito: LETRA A.

6. (FCC/AGED-MA/2018) Uma empresa designou para recreação de seus funcionários um espaço retangular de dimensões inteiras e diferentes da unidade, em metros, cuja área é 793 m². Sabe-se que a área de um retângulo é o produto de suas duas dimensões. No último mês, a empresa aumentou a dimensão maior desse espaço retangular em 4 metros e a menor em 3 metros. Feito isso, a área de recreação dos funcionários aumentou em

A) 247 m²
B) 12 m²
C) 315 m²
D) 189 m²
E) 49 m²

Comentários:

Vamos desenhar a situação proposta pelo enunciado.



Antes do aumento, a área do espaço era de 793 m². Com isso, podemos escrever:

$$xy = 793$$

Aqui devemos atentar para uma informação muito importante do enunciado:

"... um espaço retangular de **dimensões** **inteiras** e **diferentes** **da unidade** ..."

Assim, os valores de "x" e "y" não podem ser "quebrados" ou iguais a "1".

Quando fazemos **a decomposição de 793 em números primos**, obtemos:

$$793 = 13 \cdot 61$$

Como, pelo desenho, consideramos que **"x" é a menor dimensão** e **"y" a maior**, podemos concluir que:

$$x = 13 \quad e \quad y = 61$$

Dessa forma, **após o aumento de 3 e 4 metros em cada um dos lados**, ficamos com a seguinte área:

$$S = (13 + 3) \cdot (61 + 4) \quad \rightarrow \quad S = 16 \cdot 65 \quad \rightarrow \quad S = 1.040 \text{ m}^2$$

Com o valor das duas áreas, podemos calcular de quanto foi o aumento.

$$\text{Aumento} = 1040 - 793 \quad \rightarrow \quad \mathbf{Aumento = 247\ m^2}$$

Gabarito: LETRA A.

7. (FCC/SABESP/2018) De um quadrado de papel cujo lado mede 12 cm, recorta-se de um dos vértices um quadrado cujo lado é igual a 2 cm e do vértice oposto recorta-se outro quadrado cujo lado é igual a 4 cm. Após a retirada desses dois quadrados recortados a figura restante apresenta a área de

A) 124 cm².
B) 68 cm².
C) 84 cm².
D) 36 cm².
E) 164 cm².

Comentários:

Temos um quadrado cujo **lado mede 12 cm**. Sua área é:

$$S_1 = 12^2 \quad \rightarrow \quad S_1 = 144 \text{ cm}^2$$

O quadrado de **2 cm de lado** retirado de um dos vértices tem área igual a:

$$S_2 = 2^2 \quad \rightarrow \quad S_2 = 4 \text{ cm}^2$$

O quadrado de **4 cm de lado** retirado do outro vértice tem área igual a:

$$S_3 = 4^2 \quad \rightarrow \quad S_3 = 16 \text{ cm}^2$$

Ora, como **recortamos os dois últimos quadrados do quadrado maior**, a área resultante da figura será:

$$S = S_1 - S_2 - S_3 \quad \rightarrow \quad S = 144 - 4 - 16$$

$$\mathbf{S = 124\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA A.

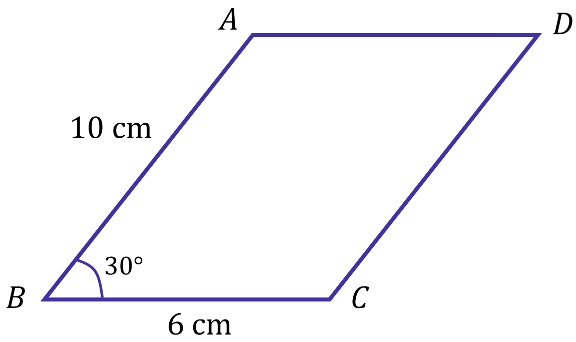
CEBRASPE

8. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

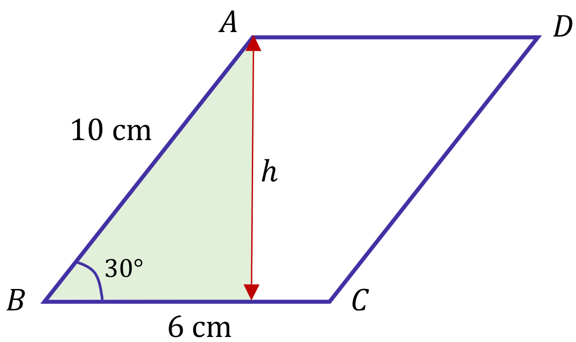
Um paralelogramo $ABCD$ com $\overline{AB} = 10\ cm$, $\overline{BC} = 6\ cm$ e $A\hat{B}C = 30°$ tem área igual a 30 cm^2.

Comentários:

Vamos desenhar esse paralelogramo!



Para calcular **a área desse paralelogramo**, precisamos primeiramente encontrar sua altura.



Note que **"h" é o cateto oposto do ângulo de 30°**, enquanto **o lado AB é a hipotenusa** do triângulo destacado em verde. Sendo assim, podemos escrever:

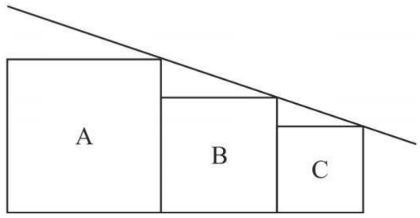
$$\text{sen}\,30° = \frac{h}{10} \quad \rightarrow \quad h = 10 \cdot \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{h = 5\ cm}}$$

Com a altura, podemos encontrar a área **multiplicando a base BC por h.**

$$A = BC \cdot h \quad \rightarrow \quad A = 6 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \boxed{A = 30\ \text{cm}^2}$$

Gabarito: CERTO.

9. (CESPE/SEFAZ-RS/2019) Os quadrados A, B e C foram colocados lado a lado, de modo que uma reta contém os três vértices superiores, como mostra a figura a seguir



Se a área do quadrado A for 24 cm², e a área do quadrado C for 6 cm², então a área do quadrado B será igual a

A) 9 cm²

B) 10 cm²

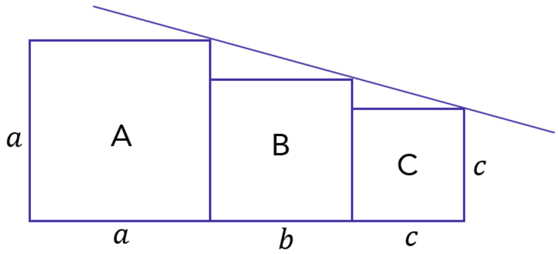
C) 12 cm²

D) 15 cm²

E) 18 cm²

Comentários:

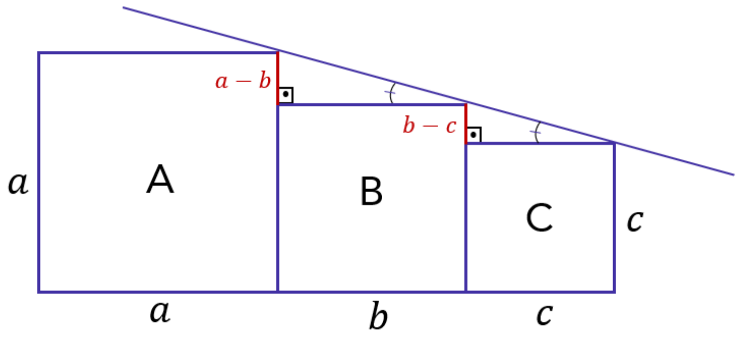
Vamos esquematizar, **destacando os lados** de cada quadrado.



Lembre-se que **os lados de um quadrado são todos iguais**. Portanto, os lados do quadrado A medem todos uma mesma quantidade "a". Analogamente, os lados de B medem um mesmo valor "b". O enunciado trouxe as áreas dos quadrados A e C. **Com essas áreas, conseguimos determinar o valor dos lados**.

$$A_A = a^2 \quad \rightarrow \quad 24 = a^2 \quad \rightarrow \quad a = 2\sqrt{6}\ cm$$
$$A_C = c^2 \quad \rightarrow \quad 6 = c^2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{6}\ cm$$

Agora que temos os lados dos quadrados A e C, você deve estar se perguntando como faremos para encontrar o lado de B. Para isso, **precisamos encontrar uma relação que envolva esses valores**. A reta desenhada sobre os quadrados não veio por acaso. Ela está aí para ajudá-lo a perceber que **os triângulos retângulos formados por ela são semelhantes**.



Agora, podemos **usar semelhança de triângulos** para encontrar uma relação entre os lados.

$$\frac{a-b}{b} = \frac{b-c}{c}$$

Fazendo **meio pelos extremos**, ficamos com:

$$b^2 - bc = ac - bc \quad \rightarrow \quad b^2 = ac \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_B = b^2 = ac}$$

Pessoal, observe que encontramos direto **o valor da área de B**. Logo, para encontrarmos a resposta da questão, basta substituirmos os valores.

$$A_B = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_B = 12\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA C.

10. (CESPE/TJ-PR/2019) O carpinteiro José cortou um retângulo de madeira medindo 80 cm de comprimento por 60 cm de largura. Ele precisa cortar outro retângulo, com a mesma área do primeiro, mas com comprimento um quarto maior que o daquele outro. Desse modo, em relação à largura do primeiro retângulo, a largura do segundo deverá

A) diminuir um terço.

B) diminuir um quinto.

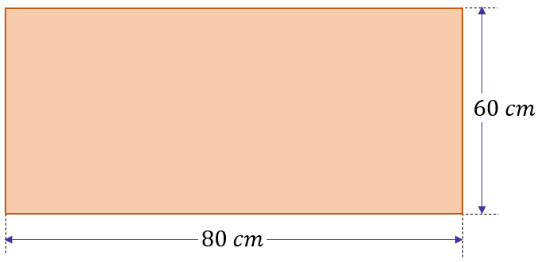
C) aumentar três vezes.

D) aumentar um quinze avos.

E) aumentar trinta e seis quinze avos.

Comentários:

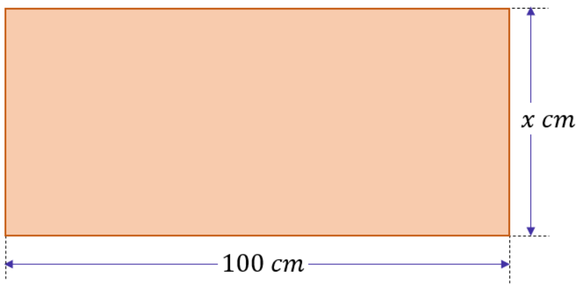
José cortou um retângulo de madeira medindo 80 cm x 60 cm. Assim, temos algo do tipo:



A área de um retângulo é o produto dos seus lados.

$$A = 80 \cdot 60 \quad \rightarrow \quad A = 4800\ cm^2$$

Ele quer cortar outro retângulo com essa **mesma área** e **com comprimento um quarto maior que 80 cm**. Ora, **um quarto de 80 cm é 20 cm**. Assim, o comprimento do novo retângulo será $80 + 20 = 100\ cm$.



A questão nos pergunta **qual deve ser a largura do novo retângulo** para que a área continue a mesma. Para determinar isso, podemos usando novamente a fórmula da área.

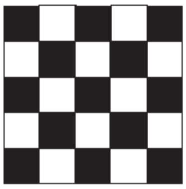
$$4800 = 100 \cdot x \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 48\ cm}$$

Note, portanto, que a largura deve diminuir de 60 cm para 48 cm, para que a área continue igual. A diminuição foi de 12 unidades. Observe que **12 é exatamente um quinto de 60**. Assim, podemos marcar a letra B.

Gabarito: LETRA B.

CESGRANRIO

11. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) A Figura mostra um tabuleiro 5x5, composto por 25 quadradinhos idênticos. A área total do tabuleiro é de 500 cm².



A soma das áreas, em cm², de todos os quadradinhos escuros desse tabuleiro é igual a

A) 240

B) 250

C) 260

D) 270

E) 280

Comentários:

Pessoal, questão para aquecermos! **São 25 quadradinhos, todos idênticos**. Como **a área total do tabuleiro é de 500 m²**, para encontrarmos a área de um único quadradinho, basta dividirmos essa área total pela quantidade de quadradinhos. Assim,

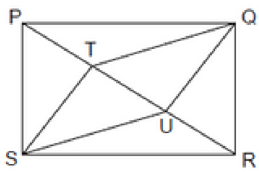
$$\text{Área de } 1 \text{ quadradinho} = \frac{500}{25} \qquad \rightarrow \qquad \text{Área de } 1 \text{ quadradinho} = 20 \text{ cm}^2$$

Se contarmos a quantidade de quadradinhos escuros, **encontramos 13**. Logo, **a soma** das áreas de todos os quadradinhos escuros é dada por:

$$S = 13 \cdot 20 \qquad \rightarrow \qquad S = 260 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA C.

12. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Em um retângulo de lados PQ = 12 cm e QR = 9 cm, os pontos T e U dividem a diagonal em três segmentos iguais, como ilustrado na Figura abaixo.



A área do quadrilátero STQU, em cm², é igual a

A) 108

B) 72

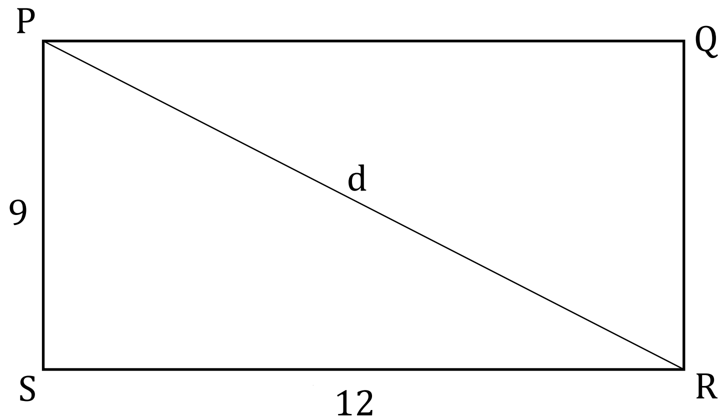
C) 54

D) 48

E) 36

Comentários:

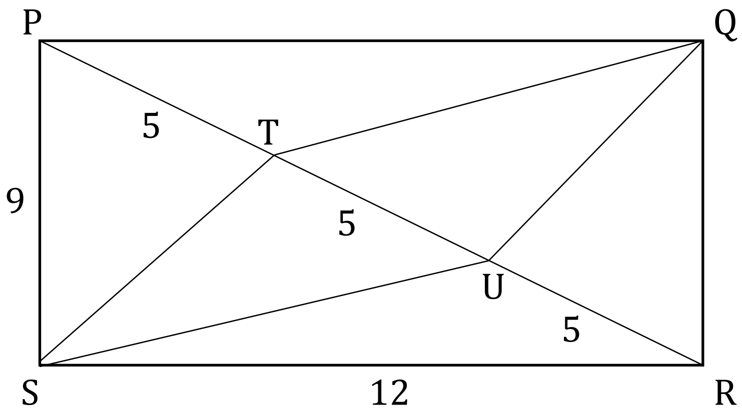
Vamos bem com calma. A primeira informação que precisamos é saber a diagonal. Afinal, ela é quem está sendo dividida em três pedaços iguais. Para encontrá-la, é importante percebemos o seguinte:



Observe que a diagonal é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 12 e 9. Vamos aplicar o Teorema de Pitágoras para determiná-la.

$$d^2 = 12^2 + 9^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = 144 + 81 \quad \rightarrow \quad d^2 = 225 \quad \rightarrow \quad d = 15$$

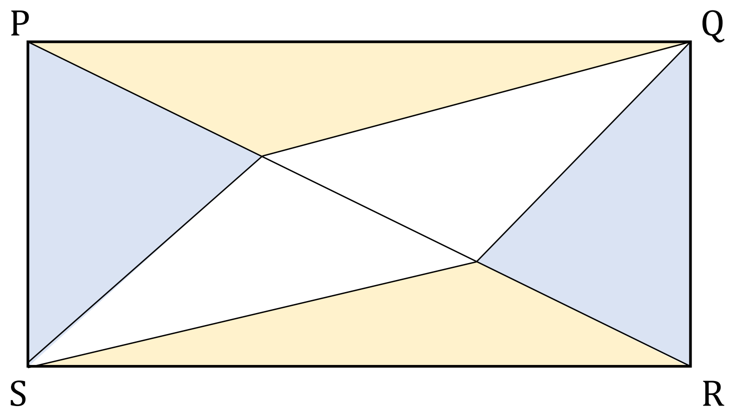
Como os pontos T e U dividem a diagonal em três segmentos iguais, cada segmento medirá 5 cm. Veja.



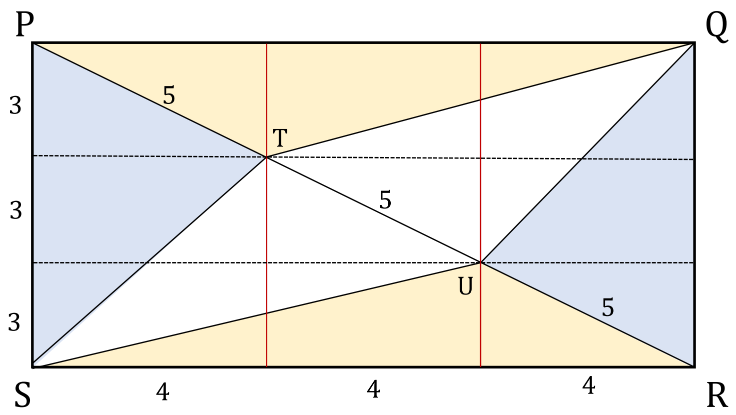
Qual vai ser nossa estratégia para determinar a área do quadrilátero STQU? Primeiramente, determinaremos **a área do quadrilátero PQSR**. Como estamos diante de um retângulo, basta multiplicarmos os lados, observe:

$$S_{PQRS} = 9 \cdot 12 \quad \rightarrow \quad \mathbf{S_{PQRS} = 108\ cm^2}$$

Sabemos a área total do retângulo, para determinar a área do quadrilátero SQTU, devemos subtrair da área total, a área dos seguintes triângulos:



Perceba que são **dois triângulos beges iguais** e **dois triângulos azuis**, também iguais. Você deve estar se perguntando como faremos para encontrar essas áreas. Para isso, precisaremos riscar um pouco essa figura.



Não se assuste! Tente ver que quando dividimos as diagonais em segmentos iguais, as horizontais e verticais que passam pelos pontos T e U **dividirão os lados do triângulo também em partes iguais**. Um jeito de perceber isso é por meio dos **triângulos retângulos de hipotenusas iguais a 5**. Com eles, podemos lembrar do triângulo retângulo pitagórico de catetos 3 e 4.

Com isso em mente, podemos concluir que **a altura do triângulo bege é igual a 3** e **a altura do triângulo azul é igual a 4**. Logo, é possível calcularmos as áreas.

$$S_{\text{triângulo bege}} = \frac{12 \cdot 3}{2} \quad \rightarrow \quad S_{\text{triângulo bege}} = 18 \text{ cm}^2$$

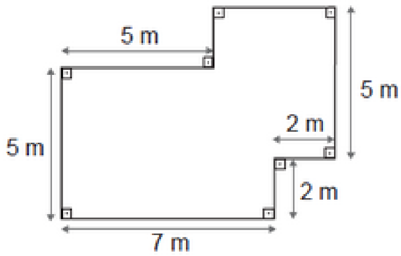
$$S_{\text{triângulo azul}} = \frac{9 \cdot 4}{2} \quad \rightarrow \quad S_{\text{triângulo azul}} = 18 \text{ cm}^2$$

Agora, para determinarmos **a área do quadrilátero STQU**, devemos fazer:

$$S_{STQU} = S_{PQRS} - 2S_{bege} - 2S_{azul} \quad \rightarrow \quad S_{STQU} = 108 - 36 - 36 \quad \rightarrow \quad S_{STQU} = 36 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA E.

13. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) A planta baixa do estoque de uma empresa está representada pela Figura abaixo. Todas as medidas indicadas estão na unidade metro, e todos os ângulos indicados na Figura são retos.

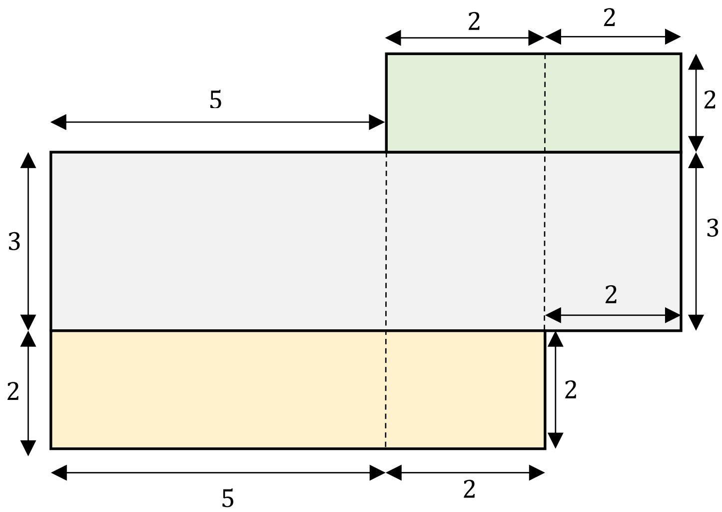


A medida da área do estoque, em metros quadrados, é

A) 32
B) 45
C) 49
D) 55
E) 63

Comentários:

Para calcularmos **a área do estoque**, devemos dividir a planta da seguinte forma:



Calcularemos *a área de cada um dos retângulos destacados*. Note também que dividi algumas medidas para facilitar a visualização dos lados de cada um desses triângulos.

$$S_{\text{verde}} = 4 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad S_{\text{verde}} = 8 \text{ m}^2$$

$$S_{\text{cinza}} = 3 \cdot 9 \quad \rightarrow \quad S_{\text{cinza}} = 27 \text{ m}^2$$

$$S_{\text{bege}} = 7 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad S_{\text{bege}} = 14 \text{ m}^2$$

Logo, a área do estoque é dada por:

$$S_{\text{estoque}} = S_{\text{verde}} + S_{\text{cinza}} + S_{\text{bege}} \quad \rightarrow \quad S_{\text{estoque}} = 8 + 27 + 14 \quad \rightarrow \quad \mathbf{S_{estoque} = 49\ m^2}$$

Gabarito: LETRA C.

Outras Bancas

14. (IBFC/IBGE/2022) Ao analisar a cobertura territorial sobre sua responsabilidade, o coordenador riscou no mapa um retângulo de modo que representasse a maior área possível da região a ser trabalhada por sua equipe. Se as medidas dos lados desse retângulo são 4,5 cm e 6 cm, então a medida da área desse retângulo, em m² é igual a:

A) 0,27

B) 0,027

C) 0,0027

D) 2,7

E) 0,000027

Comentários:

Atenção aqui, pessoal. A questão pede a área em **m²** e os lados do retângulo estão em centímetros. Logo, o primeiro passo é **transformar "cm" em "m"**. Para isso, basta dividir esses valores por 100.

$$a = 4{,}5\ \text{cm} = 0{,}045\ \text{m}$$

$$b = 6\ \text{cm} = 0{,}06\ \text{m}$$

A área de um retângulo é calculada pelo **produto dos lados**. Logo,

$$A = ab \quad \rightarrow \quad A = 0{,}045 \cdot 0{,}06 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 0{,}0027\ \mathrm{m}^2}}$$

Gabarito: LETRA C.

15. (NUCEPI UESPI/PM-PI/2022) Durante uma manifestação na Avenida Frei Serafim em Teresina, os soldados Emanuel, Fábio e Gilson foram designados para acompanhar o evento. Quando retornaram ao quartel, o comandante indagou sobre o número de pessoas que participaram da manifestação. Emanuel informou que foi ocupada uma faixa retangular da Avenida, medindo 14 m por 176 m, pelos manifestantes. Fábio disse que, em média, havia 4 pessoas por metro quadrado. Por sua vez, Gilson fez as contas e informou ao comandante, de maneira correta, o número total de manifestantes. O número informado por Gilson foi de aproximadamente

A) 12.000 pessoas.

B) 11.000 pessoas.

C) 10.000 pessoas.
D) 9.000 pessoas.
E) 8.000 pessoas.

Comentários:
Note que a área ocupada foi uma **faixa retangular medindo 14 m por 176 m**. Sabemos que a área de um retângulo é dada pelo produto dos lados. Sendo assim,

$$A = 14 \cdot 176 \qquad \rightarrow \qquad A = 2464 \text{ m}^2$$

Para determinar o total de pessoas, devemos **multiplicar a área pela quantidade de pessoas por m²**.

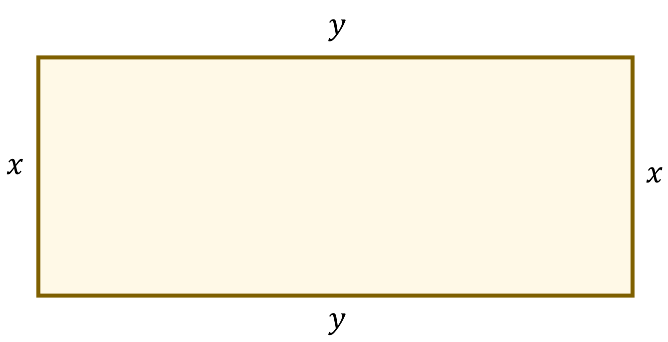
$$\text{Total de Pessoas} = 2464 \cdot 4 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\textbf{Total de Pessoas} = \mathbf{9856}}$$

Note que a alternativa que mais se aproxima do nosso resultado é a C.

Gabarito: LETRA C.

16. (AOCP/CM BAURU/2022) João, servidor da Câmara, possui um sítio que usa para descanso aos fins de semana. Ele pretende construir um galinheiro no sítio. Para isso, deseja utilizar um rolo com 200 metros de tela que ele já possui. Se a forma que João escolheu é a retangular e ele usará a tela em todos os lados do retângulo, qual é a área máxima que o galinheiro pode ter?
A) 1.600 m²
B) 2.000 m²
C) 2.400 m²
D) 2.500 m²
E) 2.700 m²

Comentários:
Questão bem legal! Vamos desenhar um pouco.



Observe que **o perímetro desse retângulo deve totalizar a quantidade de tela** que João tem disponível.

$$2x + 2y = 200 \quad \rightarrow \quad x + y = 100 \quad (1)$$

A área desse retângulo é dada por:

$$A = xy \quad (2)$$

Vamos isolar "x" em (1) e substituir em (2):

$$A = x(100 - x) \quad \rightarrow \quad A = 100x - x^2$$

Note que A **é uma função de segundo grau em "x"**. Se você já estudou funções, sabe que o valor máximo (ou mínimo) dessa função acontece no **"x" do vértice**.

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \rightarrow \quad x_v = -\frac{100}{2 \cdot (-1)} \quad \rightarrow \quad x_v = 50$$

Ou seja, **para que a área seja máxima, x deve ser igual a 50**. Quando usamos esse valor em (1), determinamos que **"y" também deve ser igual a 50**. Com os valores de "x" e "y", podemos encontrar a área máxima.

$$A_{max} = 50 \cdot 50 \quad \rightarrow \quad \boxed{A_{max} = 2500 \text{ m}^2}$$

Gabarito: LETRA D.

17. (RBO/PREF. NAVEGANTES/2022) O perímetro de um retângulo é 38 cm e o comprimento supera a largura em cinco unidades. A área desse retângulo é:

A) 60 cm².
B) 68 cm².
C) 84 cm².
D) 96 cm².
E) 98 cm².

Comentários:

Vamos chamar o comprimento do retângulo de "C" e a largura de "L". Se **o perímetro é 38 cm**:

$$2C + 2L = 38 \quad \rightarrow \quad C + L = 19 \quad (1)$$

Como o comprimento supera a largura **em cinco unidades**:

$$C = L + 5 \quad (2)$$

Podemos usar (2) em (1) para determinar L.

$$(L + 5) + L = 19$$

$$2L = 14$$

$$L = 7\ cm$$

Com o valor de L, achamos o valor de C:

$$C = 7 + 5 \quad \rightarrow \quad C = 12\ cm$$

Por fim, com **o comprimento (C) e a largura (L) do retângulo**, podemos achar sua área:

$$\mathrm{A} = \mathrm{CL} \quad \rightarrow \quad \mathrm{A} = 12 \cdot 7 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{A = 84\ cm^2}}$$

Gabarito: LETRA C.

18. (FEPESE/FCEE/2022) Joana tem dois terrenos. Um terreno tem formato triangular, sendo que a base mede 14 metros e a altura mede 15 metros. O outro terreno tem formato de um quadrado, sendo que um dos lados do terreno mede 11 metros. Logo, a área do terreno maior excede a área do terreno menor em quantos metros quadrados?

A) 18
B) 17
C) 16
D) 15
E) 14

Comentários:

Precisamos calcular a área do triângulo e a área do quadrado.

- Área do triângulo.

$$A_t = \frac{base \cdot altura}{2} \quad \rightarrow \quad A_t = \frac{14 \cdot 15}{2} \quad \rightarrow \quad A_t = 105\ m^2$$

- Área do quadrado.

$$A_q = lado^2 \quad \rightarrow \quad A_q = 11^2 \quad \rightarrow \quad A_q = 121\ m^2$$

A questão quer a diferença entre essas duas áreas:

$$\mathrm{dif} = \mathrm{A_q} - \mathrm{A_t} \quad \rightarrow \quad \mathrm{dif} = 121 - 105 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{dif = 16\ m^2}}$$

Gabarito: LETRA C.

19. (QUADRIX/CAU SC/2022) A razão entre as medidas da altura e do comprimento de uma bandeira é igual a 0,6. Se o perímetro dessa bandeira é igual a 4,8 metros, então a sua altura é igual a

A) 9 decímetros.

B) 12 decímetros.

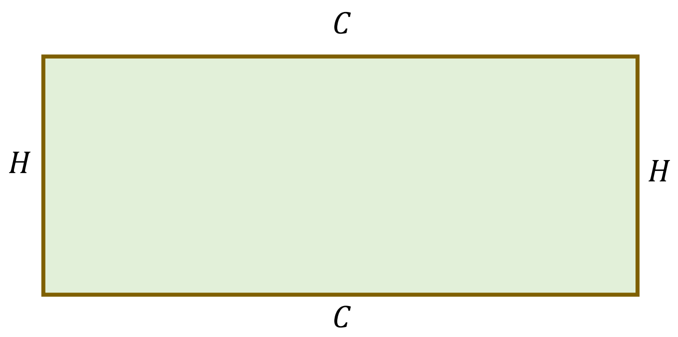
C) 15 decímetros.

D) 18 decímetros.

E) 21 decímetros.

Comentários:

Considere o seguinte retângulo:



Se o **perímetro** dessa bandeira mede **4,8 metros**, então podemos equacionar:

$$2C + 2H = 4{,}8 \qquad \rightarrow \qquad C + H = 2{,}4 \qquad (1)$$

A **razão entre a altura é o comprimento é 0,6**. Logo:

$$\frac{H}{C} = 0{,}6 \qquad \rightarrow \qquad H = 0{,}6C \qquad (2)$$

Usando (2) em (1):

$$C + 0{,}6C = 2{,}4 \qquad \rightarrow \qquad 1{,}6C = 2{,}4 \qquad \rightarrow \qquad C = \frac{2{,}4}{1{,}6} \qquad \rightarrow \qquad C = 1{,}5\ m$$

Com o valor do **comprimento da bandeira**, podemos determinar H:

$$H = 0{,}6 \cdot 1{,}5 \qquad \rightarrow \qquad H = 0{,}9\ m$$

Cuidado! A questão quer a altura **em decímetros**. Lembre-se que 1 dm = 0,1 m. Logo:

$$\boxed{\mathbf{H = 0,9\ m = 9\ dm}}$$

Gabarito: LETRA A.

20. (Inst. AOCP/CBM-PA/2022) Um trapézio ABCD, de base maior AB e base menor CD, é dado de tal maneira que o ângulo DAB mede 60° e o ângulo ABC mede 30°. Se a altura do trapézio é igual a $3\sqrt{3}$ cm e a base menor mede 6 cm, então a razão entre a área do trapézio e sua altura, em centímetros, é igual a

A) 6

B) 12

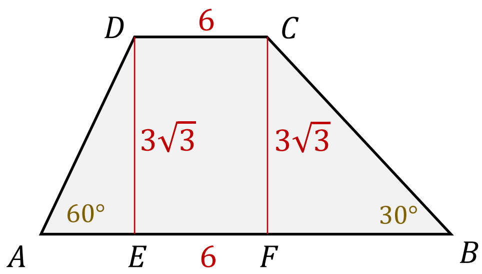
C) 18

D) $6\sqrt{3}$

E) $18\sqrt{3}$

Comentários:

Vamos desenhar esse trapézio!



Observe que desenhei duas alturas! Uma para delimitar o triângulo retângulo ADE e outra para delimitar o triângulo retângulo CBF. Com isso, **a distância EF é a própria base menor** e, para determinar a base maior, precisamos apenas de AE e FB.

- Do **triângulo ADE**, podemos escrever:

$$\tan 60° = \frac{DE}{AE} \quad \rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{AE} \quad \rightarrow \quad AE = 3$$

- Do **triângulo CBF**, podemos escrever:

$$\tan 30° = \frac{DE}{BF} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{BF} \quad \rightarrow \quad BF = 9$$

Pronto! Agora podemos determinar a base maior (B).

$$B = 3 + 6 + 9 \quad \rightarrow \quad B = 18$$

A questão pede **a <u>razão</u> entre a área e a altura do trapézio**. Observe:

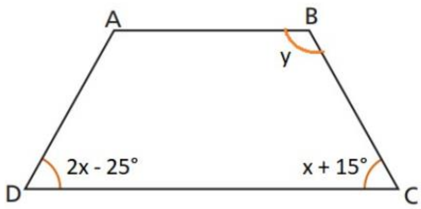
$$S = \frac{(B+b)h}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{S}{h} = \frac{(B+b)}{2}$$

Agora é só usar os valores que temos.

$$\frac{S}{h} = \frac{18+6}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{S}{h} = 12}$$

Gabarito: LETRA B.

21. (IDECAN/AGRAER MS/2022) Seja o trapézio $ABCD$ isósceles, de base $\overline{DC}$. Determine o valor de $S = x + y$.



A) S = 125°
B) S = 150°
C) S = 165°
D) S = 175°
E) S = 180°

Comentários:

No trapézio isósceles, temos que $\widehat{D} = \widehat{C}$:

$$2x - 25° = x + 15° \quad \rightarrow \quad x = 40°$$

Por sua vez, $\widehat{A} = \widehat{B} = y$. Com isso e sabendo que a soma dos ângulos internos de um trapézio é 360°, podemos equacionar:

$$y + y + (2 \cdot 40° - 25°) + (40° + 15°) = 360°$$

$$2y + 55° + 55° = 360°$$

$$2y = 250°$$

$$y = 125°$$

Como queremos a **soma $\boldsymbol{x+y}$**:

$$S = x + y \quad \rightarrow \quad S = 40° + 125° \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{S = 165°}}$$

Gabarito: LETRA C.

22. (FUNDATEC/CARRIS/2021) Os aparelhos de televisão são medidos em polegadas através da sua medida diagonal. Se uma polegada equivale a 2,5 cm, podemos dizer que uma televisão de 42 polegadas tem medida diagonal de:

A) 100 cm.
B) 1,05 m.
C) 1,05 cm.
D) 42 m.
E) 420 cm.

Comentários:

Questão que envolve transformação de unidades! Vamos dar uma revisada. Para transformar de polegadas para centímetros, devemos **multiplicar** o valor em polegadas pela **equivalência de uma polegada em centímetros** (2,5 cm). Assim:

$$d = 2{,}5 \cdot 42 \quad \rightarrow \quad d = 105\ cm$$

Observe que o resultado correto está **em metros**, ou seja, devemos dividir o resultado acima por 100.

$$\boxed{d = 1{,}05\ m}$$

Gabarito: LETRA B.

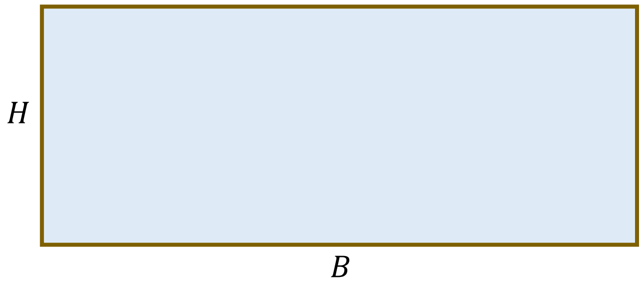
23. (QUADRIX/CORE TO/2021) Um retângulo é tal que seu perímetro mede 68 cm e sua base excede a altura em 14 cm. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

A altura do retângulo é igual a 10 cm.

Comentários:

Questão bem parecida com uma que já fizemos anteriormente!

Considere o seguinte retângulo:



Se o **perímetro** desse retângulo mede **68 cm**, então podemos equacionar:

$$2B + 2H = 68 \qquad \rightarrow \qquad B + H = 34 \qquad (1)$$

A base excede a altura em 14 cm. Logo:

$$B = H + 14 \qquad (2)$$

Usando (2) em (1):

$$(H + 14) + H = 34 \qquad \rightarrow \qquad 2H = 20 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{H = 10\ cm}$$

Gabarito: CERTO.

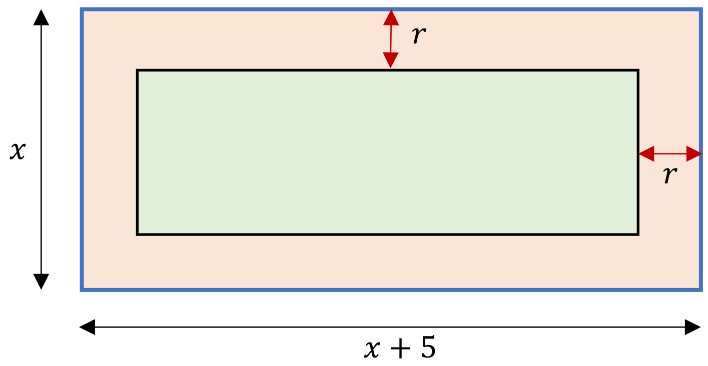
Vunesp

24. (VUNESP/ALESP/2022) Um terreno retangular tem o lado maior com 5 metros a mais que o lado menor. A prefeitura exige que haja um recuo em cada lado para realizar construções. Realizando os recuos obrigatórios, o proprietário perde 75 m² da área do terreno para a construção da casa. Essa perda corresponde à décima parte da área total do terreno. Com essas informações, é correto afirmar que a medida do contorno desse terreno é, em metros, igual a

A) 110
B) 105
C) 120
D) 115
E) 100

Comentários:

Vamos desenhar um pouco.



Agora, vamos analisar as informações do enunciado!

- O lado maior do retângulo tem 5 metros a mais do que o lado menor. Por esse motivo, **os lados do retângulo são "x" e "x+5"**.

- A prefeitura exige um recuo. Chamamos esse recuo de "r".

A área em "bege" é a área perdida do terreno, **valendo 75 m²**.

Com essas informações, já podemos concluir algumas coisas.

- Como essa perda equivale à decima parte da área do terreno, então **a área total é 750 m²**. Sendo assim,

$$x(x+5) = 750 \quad \rightarrow \quad x^2 + 5x - 750 = 0$$

É uma equação de segundo grau. Vamos usar **Bhaskara** para resolvê-la.

- Cálculo do Discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-750) \quad \rightarrow \quad \Delta = 25 + 3000 \quad \rightarrow \quad \Delta = 3025$$

- Cálculo das Raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{3025}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm 55}{2}$$

$$x' = \frac{-5 + 55}{2} \quad \rightarrow \quad x' = \frac{50}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{x' = 25}$$

$$x'' = \frac{-5 - 55}{2} \quad \rightarrow \quad x'' = \frac{-60}{2} \quad \rightarrow \quad x'' = -30$$

Como estamos trabalhando com medidas, **o valor negativo não faz sentido para nós**, apenas o positivo. Assim, $x = 25$. Como o outro lado do retângulo é **5 metros maior**, $x + 5 = 30$. A questão pede o valor do perímetro (contorno) desse terreno. Com isso:

$$\text{perímetro} = 30 + 30 + 25 + 25 \quad \rightarrow \quad \text{perímetro} = 60 + 50 \quad \rightarrow \quad \boxed{\textbf{perímetro} = \mathbf{110\ m}}$$

Gabarito: LETRA A.

25. (VUNESP/ALESP/2022) Comprei um terreno quadrado e em seguida comprei outro, retangular, cuja largura é igual ao lado do terreno quadrado, e o comprimento tem 3 metros a mais que a largura. Sabendo que a área total dos dois terrenos é de 324 m², a diferença entre as áreas desses dois terrenos é, em metros quadrados, igual a

A) 38

B) 42

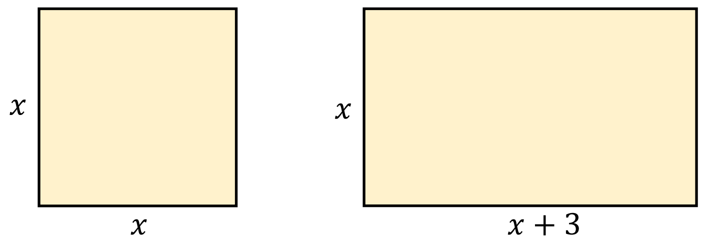
C) 40

D) 44

E) 36

Comentários:

Opa, vamos desenhar mais um pouco!



Temos dois terrenos, um quadrado e outro retângulo. As medidas de cada um estão na figura acima.

Como **a soma das áreas dos terrenos é igual a 324**, podemos escrever:

$$A_q + A_r = 324 \quad \rightarrow \quad x^2 + x(x+3) = 324$$

Desenvolvendo um pouco,

$$2x^2 + 3x - 324 = 0$$

É uma equação de segundo grau. Vamos usar **Bhaskara** para resolvê-la.

- Cálculo do Discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-324) \quad \rightarrow \quad \Delta = 9 + 2592 \quad \rightarrow \quad \Delta = 2601$$

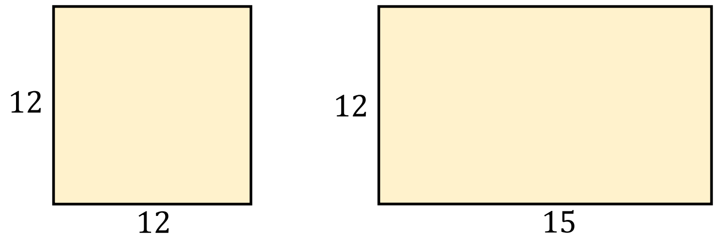
- Cálculo das Raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{2601}}{2 \cdot 2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-3 \pm 51}{4}$$

$$x' = \frac{-3 + 51}{4} \quad \rightarrow \quad x' = \frac{48}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x' = 12}}$$

$$x'' = \frac{-3 - 51}{4} \quad \rightarrow \quad x'' = \frac{-54}{4} \quad \rightarrow \quad x'' = -13{,}5$$

O resultado negativo não importa para nós! O motivo disso é o fato de que estamos trabalhando com medidas. Naturalmente, **elas são valores positivos**. Portanto, ficamos com a seguinte situação:



- Área do Quadrado:

$$A_q = 12^2 \quad \rightarrow \quad A_q = 144 \text{ m}^2$$

- Área do Retângulo:

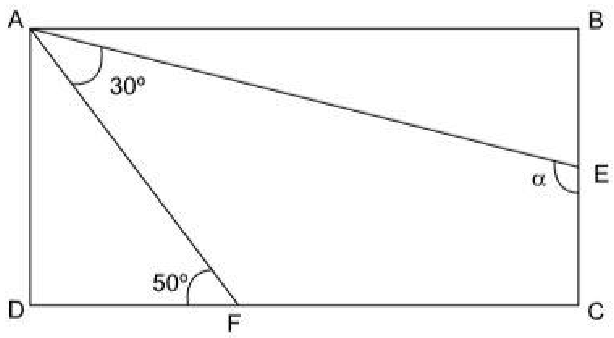
$$A_r = 12 \cdot 15 \quad \rightarrow \quad A_r = 180 \text{ m}^2$$

A questão pede a diferença entre essas duas áreas.

$$\text{Dif} = 180 - 144 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{Dif} = 36 \text{ m}^2}$$

Gabarito: LETRA E.

26. (VUNESP/ Prefeitura Municipal de Piracicaba (SP)/2020) O retângulo ABCD foi dividido em 3 regiões, conforme mostra a figura.



A medida do ângulo indicado por α no quadrilátero AECF é

A) 100°.

B) 110°.

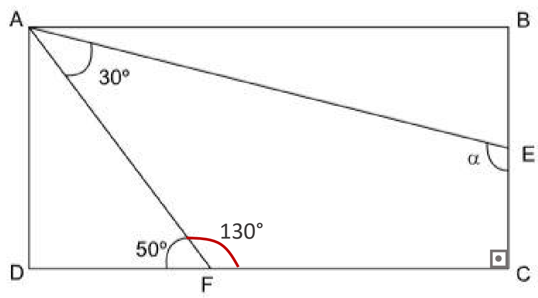
C) 120°.

D) 130°.

E) 140°.

Comentários:

Nessa questão, precisamos lembrar que **a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°**. Assim,



Note que **o suplementar de 50° é 130°**. Com isso, podemos somar os ângulos internos do quadrilátero AECF e igualar essa soma a 360°. Observe como fica:

$$30° + 130° + \alpha + 90° = 360° \quad \rightarrow \quad 250° + \alpha = 360° \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 110°}$$

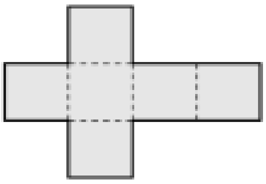
Gabarito: LETRA B.

QUESTÕES COMENTADAS

Polígonos

FGV

1. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) O polígono da figura abaixo foi feito com a reunião de quadrados iguais.



O perímetro do polígono é igual a 112 cm. A área desse polígono em cm² é igual a

a) 256.

b) 294.

c) 320.

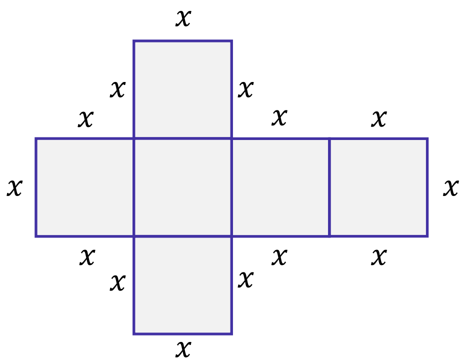
d) 384.

e) 396.

Comentários:

Sabemos que o perímetro de uma figura plana é **a soma de todos os seus lados**.

Observe que o polígono da questão é **formado por 6 (seis) quadrados**, cada um com lado "x".



Sendo assim, vamos somar todos esses lados e **igualar a 112**.

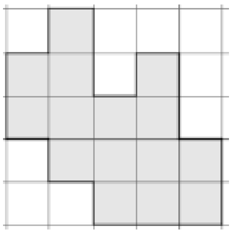
$$14x = 112 \quad \rightarrow \quad x = \frac{112}{14} \quad \rightarrow \quad x = 8$$

A figura é formada por 6 (seis) quadrados. **Cada quadrado tem área igual a x^2.** Logo, a área (S) total da figura é dada por:

$$S = 6x^2 \quad \rightarrow \quad S = 6 \cdot 8^2 \quad \rightarrow \quad S = 6 \cdot 64 \quad \rightarrow \quad \boxed{S = 384\ \text{cm}^2}$$

Gabarito: LETRA D.

2. (FGV/SEFAZ-AM/2022) A figura abaixo mostra um polígono sombreado desenhado sobre um quadriculado (papel coberto com linhas horizontais e verticais formando pequenos quadrados iguais).



O perímetro do polígono é de 132 cm. A área desse polígono, em cm², é igual a

A) 468

B) 504

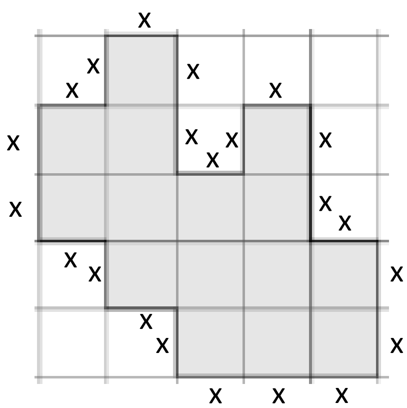
C) 540

D) 576

E) 612

Comentários:

Pessoal, a FGV parece estar gostando bastante dessas questões. Para resolvê-la, **temos que contar os quadrados na mão mesmo!** Note que o enunciado forneceu o perímetro. Com esse valor, conseguimos determinar o lado de cada quadradinho. Por sua vez, com o lado, conseguimos achar a área do quadrado e, por fim, do polígono. Veja só!



Lembre-se que o perímetro é a soma das medidas de todos os lados do polígono. Assim, da figura acima:

$$22x = 132 \quad \rightarrow \quad x = \frac{132}{22} \quad \rightarrow \quad x = 6$$

Pronto! Descobrimos o lado do quadradinho. Para calcular sua área, basta elevar esse valor ao quadrado.

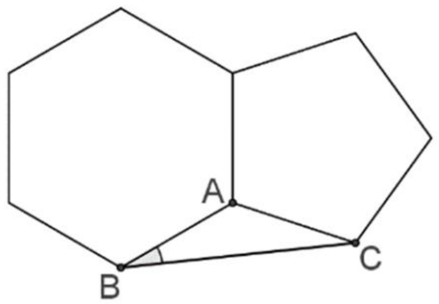
$$A_q = 6^2 \quad \rightarrow \quad A_q = 36$$

Observe que **o polígono da questão é formado por 15 quadradinhos**. Portanto, sua área é dada por:

$$A_p = 15A_q \quad \rightarrow \quad A_p = 15 \cdot 36 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{A_p = 540}}$$

Gabarito: LETRA C.

3. (FGV/IMBEL/2021) A figura a seguir mostra dois polígonos regulares com um lado comum.



O ângulo ABC, assinalado na figura mede

A) 16°

B) 18°

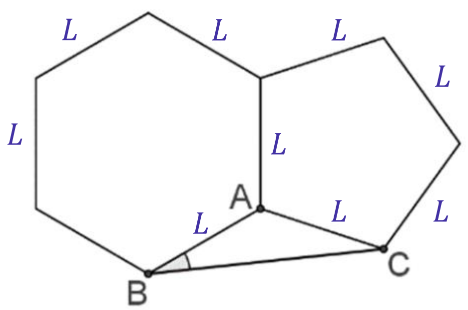
C) 20°

D) 22°

E) 24°

Comentários:

O primeiro passo é notar que os polígonos são regulares e possuem um mesmo lado em comum! Com isso, esses dois polígonos **possuem todos os seus lados iguais**! Vamos chamar esse lado de L.



Perceber isso é importante pois assim vemos que **o triângulo ABC é um triângulo isósceles**. Isso implica que os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são iguais. Agora, precisamos saber **quanto vale cada um dos ângulos internos** do hexágono e do pentágono. A soma dos ângulos internos de um polígono de "n" lados é dada por:

$$S_n = (n-2) \cdot 180°$$

- Para o hexágono (n=6).

$$S_6 = (6-2) \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_6 = 4 \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_6 = 720°$$

Como **o hexágono é regular**, então todos os seus ângulos internos são iguais a:

$$\alpha = \frac{720°}{6} \quad \rightarrow \quad \alpha = 120°$$

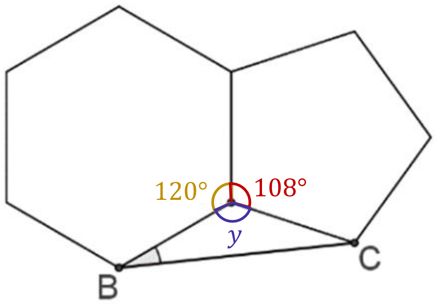
- Para o pentágono (n=5).

$$S_5 = (5-2) \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_5 = 3 \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_5 = 540°$$

Como **o pentágono é regular**, então todos os seus ângulos internos são iguais a:

$$\beta = \frac{540°}{5} \quad \rightarrow \quad \beta = 108°$$

De posse dessas informações, podemos complementar nossa figura.



Note que **a soma dos ângulos no círculo acima deve totalizar os 360°**. Sendo assim:

$$120° + 108° + y = 360° \quad \rightarrow \quad 228° + y = 360° \quad \rightarrow \quad y = 360° - 228° \quad \rightarrow \quad y = 132°$$

Por fim, sabemos que **a soma dos ângulos em um triângulo é 180°**. Logo,

$$x + x + y = 180° \quad \rightarrow \quad 2x + 132° = 180° \quad \rightarrow \quad 2x = 48° \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 24°}$$

Gabarito: LETRA E.

4. (FGV/PC-RJ/2021) A Figura 1 mostra uma placa retangular com 9 cm de base e 6 cm de altura. Dessa placa foram retirados quatro triângulos equiláteros de 3 cm de lado cada um, formando a Figura 2.

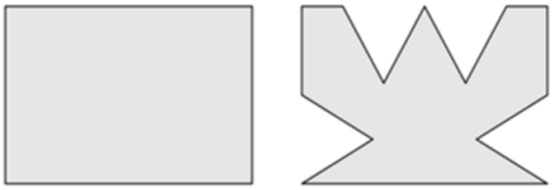


Figura 1 Figura 2

O perímetro da Figura 2, em cm, é:

A) 24;
B) 30;
C) 36;
D) 42;
E) 54.

Comentários:

Galera, o perímetro nada mais é do que **a soma de todos os lados da figura**. Com isso, note que a figura 1 tem perímetro igual a:

$$\text{Perímetro Fig. 1} = 9 + 6 + 9 + 6 \quad \rightarrow \quad \text{Perímetro Fig. 1} = 30$$

Agora, observe que cada vez que recortamos um triângulo equilátero da figura 1, retiramos 3 cm de lado, mas adicionamos mais 2 lados na figura, cada um com 3 cm também. **O saldo desse recorte é 3 cm a mais de lado**.

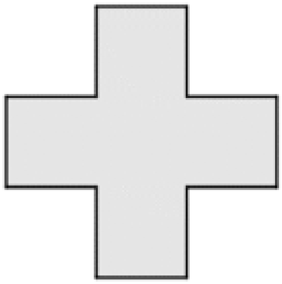
$$Saldo \quad = \quad -3 + 3 + 3 \quad = \quad 3$$

Ou seja, cada vez que recortamos o triângulo, **adicionamos 3 cm no perímetro**. Como foram recortados 4 triângulos, o perímetro da nova figura é:

$$\text{Perímetro Fig. 2} = 30 + 4 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\textbf{Perímetro Fig. 2} = \mathbf{42}}$$

Gabarito: LETRA D.

5. (FGV/IMBEL/2021) Na figura a seguir, todos os segmentos são iguais e todos os ângulos são retos.



O perímetro dessa figura é de 96 cm. A área dessa figura, em cm², é

A) 300;

B) 320;

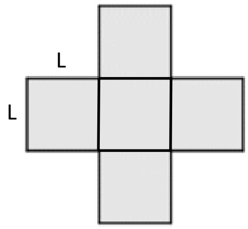
C) 350;

D) 360;

E) 400.

Comentários:

Observe que **a figura possui 12 lados iguais a "L"**. Esse lado "L" também é o lado do quadrado.



Podemos **encontrar o valor de "L"** pois sabemos o perímetro.

$$12L = 96 \quad \rightarrow \quad L = \frac{96}{12} \quad \rightarrow \quad L = 8$$

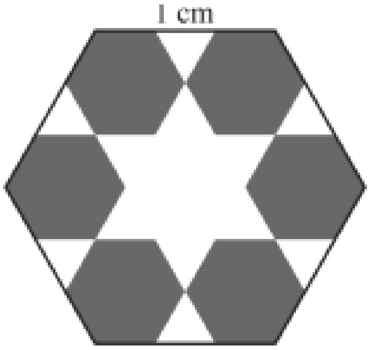
Note que **a figura é formada por 5 quadrados de lado L**. Sendo assim:

$$S = 5L^2 \quad \rightarrow \quad S = 5 \cdot 8^2 \quad \rightarrow \quad S = 5 \cdot 64 \quad \rightarrow \quad \boxed{S = 320}$$

Gabarito: LETRA B.

CEBRASPE

6. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) A figura a seguir ilustra a primeira etapa de um processo recursivo que, a partir de um hexágono regular em que os lados medem 1 cm de comprimento, constroem-se 6 novos hexágonos regulares.



Nesse processo, os lados do hexágono externo são divididos em 3 partes iguais e, conforme mostra a figura, são construídos outros 6 hexágonos regulares; em cada um deles, o comprimento dos lados é igual a $\frac{1}{3}$. Na segunda etapa, dividem-se os lados desses 6 novos hexágonos em 3 partes iguais, e constroem-se, de maneira semelhante à primeira etapa, outros 36 hexágonos regulares. Esse processo pode seguir indefinidamente.

Nessa situação, sabendo-se que, se o comprimento dos lados de um hexágono regular for igual a L cm, a área desse hexágono será igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$ cm² é correto concluir que a soma das áreas dos hexágonos obtidos na 5.ª etapa do processo recursivo descrito é igual a

A) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \sqrt{3}$ cm²

B) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \sqrt{3}$ cm²

C) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \sqrt{3}$ cm²

D) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \sqrt{3}$ cm²

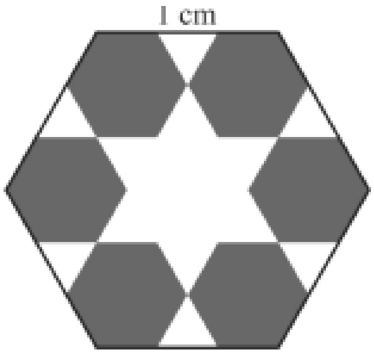
E) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \sqrt{3}$ cm²

Comentários:

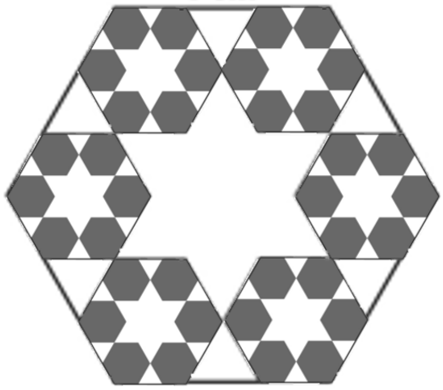
Vamos lá. É interessante perceber que começamos com **um hexágono de 1 cm de comprimento**. À medida que o processo segue, os novos hexágonos possuem lado 1/3 do hexágono de origem. Devemos descrever as etapas.

- **Etapa 0:** Tínhamos um grande hexágono de lado igual a 1 cm.

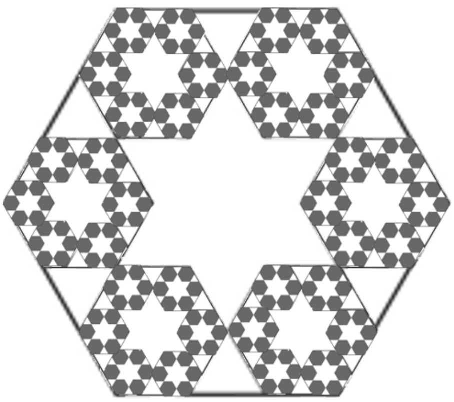
- **Etapa 1:** Dentro do hexágono, desenhamos **6 mini hexágonos**, cada um com lado igual a 1/3 cm.



- **Etapa 2:** Dentro de cada mini hexágono desenhado anteriormente, desenhamos hexágonos ainda menores. **Eles possuem lado igual a um terço do lado do "original"**, ou seja, 1/9 cm. Como tínhamos 6 hexágonos anteriormente e cada hexágono cabe mais 6 mini hexágonos, ficaremos então com 36 deles.



- **Etapa 3:** Repetimos o processo. Tínhamos 36 mini hexágonos, desenharemos mais 6 em cada um deles. Ficaremos então com $36 \cdot 6 = 216$. O lado deles será um terço do de origem, assim, $1/27$ cm.



- **Etapa 4:** Dentro de cada um dos 216 mini hexágonos, desenharemos mais 6. Ficaremos com $216 \cdot 6 = 1296$. O lado deles será $1/81$ cm.

- **Etapa 5:** Teremos $1296 \cdot 6 = 7776$ mini hexágonos. O lado será igual a um terço de 1/81, isto é, 1/243 cm.

O enunciado fala que **a área de um hexágono** é dada pela fórmula:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$$

Logo, sabendo que o mini hexágono que obtemos com a 5ª etapa tem lado $1/243 = 1/3^5$ cm, podemos encontrar sua área.

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3^5}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^9} \;\; cm^2$$

No entanto, **essa área é de apenas um único mini hexágono**. Na 5ª etapa, temos $7776 = 6^5$ deles. Assim,

$$A_T = 6^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^9} \quad \rightarrow \quad A_T = (2^5 \cdot 3^5) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^9} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_T = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \sqrt{3}\;\; cm^2}$$

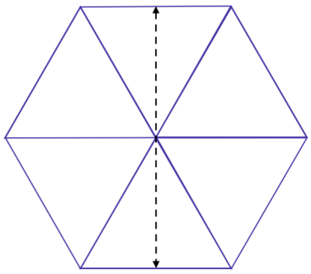
Gabarito: LETRA A.

7. (CESPE/FUB/2018) A figura a seguir mostra uma mesa em que o tampo é um hexágono regular cujo lado mede 80 cm.

Julgue o item que se segue, a respeito da geometria do tampo dessa mesa.

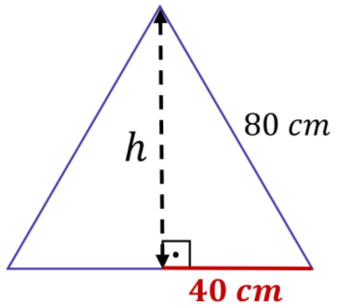
A distância entre dois lados paralelos do tampo da mesa é superior a 1,3 m.

Comentários:
Em outras palavras, o item quer saber a distância representada pela linha pontilhada no desenho abaixo:



$80\ cm$

Lembre-se que **um hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros**. Assim, a distância entre dois lados paralelos é igual ao **dobro da altura de um desses triângulos**. Acompanhe o esquema.



Observe que podemos utilizar o **teorema de Pitágoras** para determinar a altura h.

$$80^2 = h^2 + 40^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = 6400 - 1600 \quad \rightarrow \quad h^2 = 4800 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{h = 40\sqrt{3}\ cm}$$

Descobrimos a altura do triângulo. No entanto, a distância entre os lados paralelos é duas vezes esse valor.

$$d = 2 \cdot h \quad \rightarrow \quad d = 2 \cdot 40\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad d = 80\sqrt{3}\ cm$$

Pessoal, uma das poucas raízes que **devemos lembrar o valor aproximado** é a $\sqrt{3}$. Guarde com você que:

$$\sqrt{3} \cong 1{,}73$$

Assim, quando usamos esse valor para calcular d, ficamos com:

$$d \cong 138{,}4\ \boldsymbol{cm} \qquad \text{ou} \qquad d \cong 1{,}384\ \boldsymbol{m}$$

Repare que o item afirma que **a distância é superior a 1,3 metros**. Logo, está correto.

Gabarito: CERTO.

Outras Bancas

8. (AOCP/SED-MS/2022) Considere os seguintes polígonos, todos de mesmo perímetro: triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular. Sendo A_1 a área do triângulo equilátero, A_2 a área do quadrado e A_3 a área do hexágono, o valor de $\frac{A_1+A_3}{A_2}$ é:

A) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

B) $\frac{5\sqrt{2}}{9}$

C) $\frac{10\sqrt{3}}{9}$

D) $\frac{10\sqrt{2}}{9}$
E) 10

Comentários:
Vamos lá! As áreas de cada um dos polígonos citados são as seguintes:

- Triângulo Equilátero:

$$A_1 = \frac{L_1^2\sqrt{3}}{4}$$

L_1 é o lado do triângulo.

- Quadrado:

$$A_2 = L_2^2$$

L_2 é o lado do quadrado.

- Hexágono Regular:

$$A_3 = \frac{3L_3^2\sqrt{3}}{2}$$

L_3 é o lado do hexágono.

O enunciado nos diz que **todos os polígonos possuem o mesmo perímetro**. Vamos chamá-lo de P. Lembre-se que o perímetro nada mais é que **a soma de todos os lados do polígono**.

- Para o triângulo equilátero:

$$P = 3L_1 \qquad \rightarrow \qquad L_1 = \frac{P}{3}$$

- Para o quadrado:

$$P = 4L_2 \qquad \rightarrow \qquad L_2 = \frac{P}{4}$$

- Para o hexágono regular:

$$P = 6L_3 \quad \rightarrow \quad L_3 = \frac{P}{6}$$

Com os lados em função do perímetro, podemos reescrever as fórmulas das áreas.

- **Triângulo Equilátero:**

$$A_1 = \frac{L_1^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{\left(\frac{P}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{A_1 = \frac{P^2\sqrt{3}}{36}}$$

- **Quadrado:**

$$A_2 = L_2^2 \quad \rightarrow \quad A_2 = \left(\frac{P}{4}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{A_2 = \frac{P^2}{16}}$$

- **Hexágono Regular:**

$$A_3 = \frac{3L_3^2\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad A_3 = \frac{3\left(\frac{P}{6}\right)^2\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{A_3 = \frac{3P^2\sqrt{3}}{72}}$$

Pronto! Todas as áreas estão em função de P. Agora, vamos calcular **a razão que o enunciado pediu**.

$$k = \frac{A_1 + A_3}{A_2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\frac{P^2\sqrt{3}}{36} + \frac{3P^2\sqrt{3}}{72}}{\frac{P^2}{16}} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\frac{5P^2\sqrt{3}}{72}}{\frac{P^2}{16}} \quad \rightarrow \quad k = \frac{80\sqrt{3}}{72}$$

Vamos **simplificar a fração por 8**.

$$\boxed{k = \frac{10\sqrt{3}}{9}}$$

Gabarito: LETRA C.

9. (RBO/ISS-BH/2022) A partir do conceito: "Dado um polígono convexo qualquer, diagonal é o segmento que une dois vértices não consecutivos". Assim, um triângulo não possui diagonais, pois, como só possui três vértices, não é possível unir dois vértices não consecutivos, o quadrado possui duas diagonais e partir de um dos vértices, encontramos, apenas um outro vértice não consecutivo, enquanto, que no pentágono convexo temos 5 diagonais, e nesse polígono encontramos a partir de um vértice, dois outros vértices não consecutivos. A partir dessas informações, monta-se a tabela a seguir.

Nome do Polígono	Número de lados	Número de diagonais	A partir de um dos vértices, o número de vértices não consecutivos
Triângulo	3	0	0
Quadrado	4	2	1
Pentágono	5	5	2
Hexágono	6	9	3
Heptágono	7	14	4

Verifica-se que existe uma certa regularidade entre o número de lados, número de diagonais e o número de vértices não consecutivos contados a partir de um dos vértices. Então, o número de diagonais de um polígono convexo que possui 102 lados é igual a

A) 4.852.
B) 4.947.
C) 4.998.
D) 5.049.
E) 5.100.

Comentários:

Pessoal, **o número de diagonais** de um polígono convexo de "n" lados é dado pela seguinte relação:

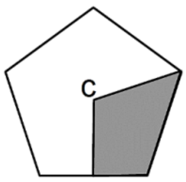
$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

O enunciado quer o número de diagonais de um polígono com **102 lados**. Assim,

$$d = \frac{102 \cdot (102-3)}{2} \quad \rightarrow \quad d = \frac{102 \cdot 99}{2} \quad \rightarrow \quad d = 51 \cdot 99 \quad \rightarrow \quad \boxed{d = 5.049}$$

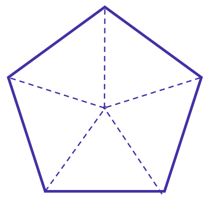
Gabarito: LETRA D.

10. (UNIRV/PREF. RIO VERDE/2022) A figura representa um pentágono regular com centro no ponto C. A porcentagem sombreada no interior desse pentágono é



A) 20%
B) 25%
C) 30%
D) 40%

Comentários:
Pessoal, vamos dar uma olhada melhor no pentágono regular.

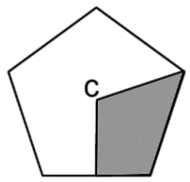


Note que podemos considerar **a área de um pentágono como a soma da área desses 5 triângulos**. Como o pentágono é regular, então **as áreas desses triângulos são iguais**. Desse modo, podemos escrever:

$$A_p = 5A_T$$

Em que A_T é a área de **1 triângulo** desse dentro do pentágono.

Agora, visualize novamente a imagem da questão.



Observe que a área hachurada é exatamente **a área de 1 triângulo mais a metade do triângulo vizinho**. Com isso, podemos escrever que:

$$A_h = 1{,}5A_T$$

Para determinar a porcentagem, fazemos:

$$\frac{A_h}{A_p} = \frac{1{,}5A_t}{5A_t} \quad \rightarrow \quad \frac{A_h}{A_p} = \frac{1{,}5}{5} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{A_h}{A_p} = 0{,}3}$$

Logo, a área hachurada corresponde a **30% da área total**.

Gabarito: LETRA C.

11. (IBFC/TCM-RJ/2016) Sabe-se que a soma dos ângulos internos de um polígono é igual a 1260°. Se esse polígono é regular, então cada ângulo externo desse polígono é igual a:
A) 140°

B) 40°
C) 126°
D) 54°

Comentários:
Vamos lá! Lembre-se que **a soma dos ângulos internos** de um polígono é dada pela fórmula:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Como o enunciado já nos forneceu que $\boldsymbol{S_i = 1260°}$, então podemos usar a fórmula acima para encontrar o número de lados "n" desse polígono.

$$(n-2) \cdot 180° = 1260°$$

$$n - 2 = 7$$

$$n = 9$$

Pronto! Descobrimos que **o polígono da questão possui 9 lados**. Como estamos lidando com um polígono regular, **todos os seus ângulos internos <u>são iguais</u>**. Assim, para encontrar o valor desse ângulo interno é suficiente fazermos:

$$i = \frac{S_i}{9} \quad \rightarrow \quad i = \frac{1260°}{9} \quad \rightarrow \quad i = 140°$$

Com o valor do **ângulo interno**, encontramos o ângulo externo, pois sabemos que são **<u>suplementares</u>**.

$$i + e = 180° \quad \rightarrow \quad e = 180° - 140° \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{e = 40°}}$$

Gabarito: LETRA B.

12. (QUADRIX/CRB 6/2014 - adaptada) Sabendo-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é 360°, qual é a soma dos ângulos internos de um polígono de 20 lados?
A) 3010°
B) 3240°
C) 3000°
D) 2550°
E) 2000°

Comentários:
Essa questão exige a aplicação direta da fórmula que vimos na teoria.

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Estamos interessados na **soma dos ângulos internos** de um polígono de 20 lados ($\boldsymbol{n = 20}$).

$$S_i = (20 - 2) \cdot 180°$$

$$S_i = 18 \cdot 180°$$

$$\boxed{\boldsymbol{S_i = 3240°}}$$

Gabarito: LETRA B.

13. (CONSULPLAN/PREF. MACAÍBA/2022) Em um undecágono regular, polígono de 11 lados, nenhuma de suas diagonais passa pelo seu centro, pois o seu número de lados é ímpar. Dessa forma, qual é o número total de diagonais desse polígono?

A) 33
B) 44
C) 55
D) 66

Comentários:

Questão para treinarmos a fórmula do número de diagonais.

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Como queremos saber **o número de diagonais de um polígono de <u>11 lados</u>** ($n = 11$):

$$d = \frac{11 \cdot 8}{2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{d = 44}}$$

Gabarito: LETRA B.

14. (QUADRIX/CRB 6/2014) Quantas diagonais tem um polígono de 15 lados, sabendo-se que diagonal é o segmento de reta que une dois lados não consecutivos de um polígono?

A) 90
B) 40
C) 180
D) 100
E) 80

Comentários:

A última sobre diagonais! Essas são para fixar mesmo!

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Queremos **o número de diagonais de um polígono de <u>15 lados</u>** ($n = 15$).

$$d = \frac{15 \cdot 12}{2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{d = 90}$$

Gabarito: LETRA A.

15. (FUNDATEC/PREF. VACARIA/2021) Um hexágono regular de perímetro 18 tem a área de:

A) $9\sqrt{3}$

B) $18\sqrt{3}$

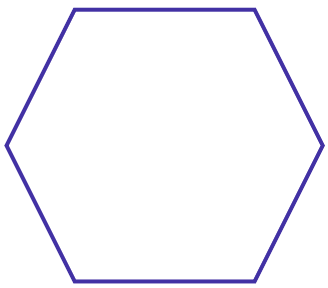
C) $23\sqrt{3}/2$.

D) $25\sqrt{3}/2$

E) $27\sqrt{3}/2$

Comentários:

Vamos lembrar da "cara" de um **hexágono regular**:



O hexágono regular possui **todos os seus seis lados <u>iguais</u>**. Sendo assim, seu perímetro é:

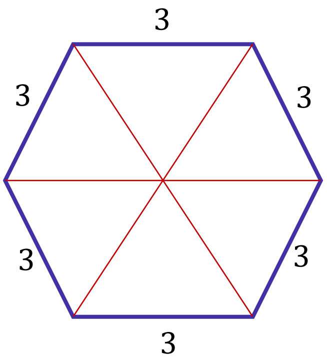
$$2p = 6L$$

Em que "L" é o lado do hexágono.

O enunciado afirma que **o hexágono tem perímetro igual a 18**. Logo:

$$6L = 18 \qquad \rightarrow \qquad L = 3$$

Vamos desenhar novamente o hexágono, agora com detalhes a mais!



Observe que o hexágono regular pode ser visto como a **união de 6 triângulos equiláteros**. Sendo assim, sua área pode ser calculada **a partir da área de um triângulo equilátero**, mas multiplicada por 6.

$$A_{hex} = 6A_t \quad \rightarrow \quad A_{hex} = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A_{hex} = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$$

Pronto! Agora, é só **substituir o valor de "L"** que encontramos.

$$A_{hex} = \frac{3 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{A_{hex} = \frac{27\sqrt{3}}{2}}$$

Gabarito: LETRA E.

16. (DIRENS/EEAR/2020) A diferença entre as medidas de um ângulo interno de um dodecágono regular e de um ângulo interno de um octógono também regular é

A) 15°
B) 25°
C) 30°
D) 40°

Comentários:

Um **dodecágono regular possui 12 lados**. Sendo assim, a soma dos ângulos internos de um dodecágono é:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

$$S_i = (12-2) \cdot 180°$$

$$S_i = 10 \cdot 180°$$

$$S_i = 1800°$$

Como estamos trabalhando com um polígono regular, **todos os seus ângulos internos são iguais**. Logo, para determinarmos seu valor, basta dividirmos a soma dos ângulos internos por "n".

$$\alpha = \frac{S_i}{n} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{1800°}{12} \quad \rightarrow \quad \alpha = 150°$$

Vamos repetir esse mesmo procedimento para o octógono ($\boldsymbol{n = 8}$).

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

$$S_i = (8 - 2) \cdot 180°$$

$$S_i = 6 \cdot 180°$$

$$S_i = 1080°$$

O ângulo interno do octógono regular é dado por:

$$\beta = \frac{S_i}{n} \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{1080°}{8} \quad \rightarrow \quad \beta = 135°$$

Pronto! A questão pede **a diferença** entre esses dois ângulos.

$$\alpha - \beta = 150° - 135° \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\alpha - \beta = 15°}}$$

Gabarito: LETRA A.

17. (QUADRIX/SEDF/2021) Um polígono de 1.000 lados é chamado de quiliágono. A respeito do quiliágono regular, julgue o item.

O ângulo externo é igual a 21' 36”.

Comentários:

Vimos na teoria que a soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é igual a 360°. Em um polígono regular, também teremos **todos os ângulos externos iguais**. Assim, para encontrar o valor do ângulo externo é suficiente **dividirmos 360° por n**.

$$\alpha_e = \frac{360°}{n}$$

Em um quiliágono, temos $n = 1000$. Assim:

$$\alpha_e = \frac{360°}{1000} \qquad \rightarrow \qquad \alpha_e = 0{,}36°$$

O item trouxe o ângulo **em minutos e segundos**. Para fazer a conversão, precisamos saber que:

$$60' = 1° \qquad \text{e} \qquad 1' = 60''$$

Com isso:

$$\alpha_e = 0{,}36° = 0{,}36 \cdot 60' = 21{,}6'$$

Como $0{,}6' = 36''$:

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha_e = 21'36''}}$$

Gabarito: CERTO.

LISTA DE QUESTÕES

Introdução

Outras Bancas

1. (OMNI/PREF. LENÇOIS PTA/2021) Consideremos três pontos A, B e C em um plano π, análise as opções abaixo e marque aquela que tem uma afirmação verdadeira.

A) Entre os pontos A, B e C, sempre é possível desenhar um triângulo.

B) O segmento AB, ou seja, o segmento de reta que começa no ponto A e termina no ponto B, tem uma quantidade finita de pontos.

C) A reta que passa pelos pontos A e B, pode passar também pelo ponto C.

D) A, B e C não podem estar todos no plano π.

2. (AOCP/PREF. TERESÓPOLIS/2021) Sabe-se que a diferença entre o dobro do suplemento de um ângulo x e os dois quintos da medida desse mesmo ângulo x é zero. Dessa forma, é correto afirmar que a medida do ângulo x é igual a

A) 180°

B) 150°

C) 120°

D) 90°

E) 30°

3. (AOCP/PREF. TERESÓPOLIS/2021) Em um plano, considere duas retas r e s, distintas e paralelas entre si, e uma reta t transversal à reta r e à reta s, determinando ângulos em suas intersecções. Em relação aos ângulos determinados por essas três retas, é correto afirmar que

A) no total, são determinados 10 ângulos nas intersecções dessas três retas.

B) os pares de ângulos que estão entre as retas r e s e estão em posições alternadas em relação à reta t são denominados ângulos alternos externos.

C) os pares de ângulos que não estão entres as retas r e s e estão em posições alternadas em relação à reta t são denominados ângulos alternos internos.

D) os pares de ângulos que estão entre as retas r e s e estão do mesmo lado em relação à reta t são denominados ângulos colaterais internos.

E) os pares de ângulos que não estão entre as retas r e s e estão do mesmo lado em relação à reta t são denominados ângulos alternos.

4. (INST. EXCELÊNCIA/PREF. TAUBATÉ/2019) Conforme o estudo de ângulos e retas, analise as seguintes afirmativas:

I - Duas retas são perpendiculares se formarem um ângulo reto.

II - Duas retas concorrentes e não perpendiculares formam dois ângulos agudos.

III - Duas retas concorrentes e não perpendiculares formam dois ângulos obtusos.

IV - Duas retas paralelas entre si formam um ângulo raso de 180°.

Está CORRETO o que se afirma em:

A) I, II e III.

B) I, II e IV.

C) I, III e IV.

D) Nenhuma das alternativas.

5. (SGP-J/PREF. JOINVILLE/2019) Qual das afirmações a seguir é falsa:

A) Dois pontos determinam uma única reta;

B) Por um ponto passam infinitas retas;

C) Por um ponto passam infinitos planos;

D) Por uma reta passam infinitos planos;

E) Um plano contém infinitas retas.

6. (CONSCAM/SAEEDOCO/2018) De acordo com os conceitos primitivos da Geometria Plana, assinale a alternativa correta.

A) Duas retas coplanares são concorrentes quando não possuem ponto comum.

B) Por um ponto dado no plano passa-se somente uma reta.

C) As retas e semirretas coplanares possuem as mesmas características.

D) As retas paralelas coplanares classificam-se em distintas e coincidentes.

E) Em um plano existe somente uma reta.

7. (CONSCAM/CM GARÇA/2018) As afirmações a seguir se referem a noções básicas de Geometria

I- Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.

II- Se dois planos têm uma reta comum, eles são coplanares.

III- Se dois planos têm uma única reta comum, eles são secantes.

Após classificá-las como Verdadeiras (V) ou Falsas (F), o resultado obtido será:

A) V, V, V.

B) V, F, V.

C) F, V, F.

D) F, F, V.

E) F, F, F.

8. (AVANÇASP/CM TABOÃO DA SERRA/2022) A sombra de Rodrigo projetada no chão, com a parede de sua casa, formava, em uma determinada hora, 122°.Das alternativas abaixo, qual apresenta corretamente esse ângulo?

A) ângulo agudo.

B) ângulo reto.

C) ângulo obtuso.

D) ângulo raso.

E) ângulo nulo.

9. (AVANÇASP/ISS - LOUVEIRA/2022) Das alternativas abaixo, qual apresenta de forma correta um ângulo reto?

A) 70°.

B) 85°.

C) 90°.

D) 100°.

E) 180°.

10. (FEPESE/PREF. B. CAMBORIÚ/2022) O ângulo, em graus, cuja terça parte do suplementar excede a metade do complementar em 19 graus é:

A) Menor que 22.

B) Maior que 22 e menor que 25.

C) Maior que 25 e menor que 28.

D) Maior que 28 e menor que 31.

E) Maior que 31.

Inéditas

11. (Questão Inédita) Assinale a alternativa que apresenta os ângulos 30°, 45°, 60° e 90°, nessa ordem, em radianos.

A) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{2}$

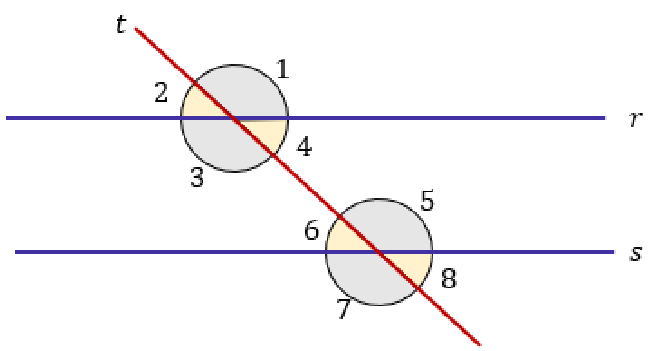
B) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$

C) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$

D) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}$ e π

E) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{8}$ e 2π

12. (Questão Inédita) Observe a figura abaixo:



Agora, assinale a alternativa incorreta.

A) Os ângulos 2 e 4 são opostos pelo vértice.

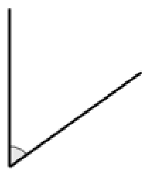
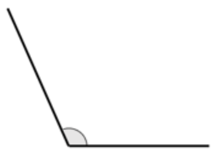
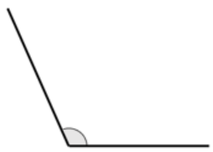
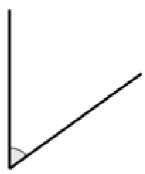
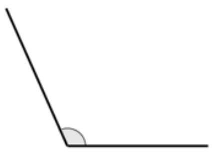
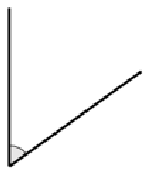
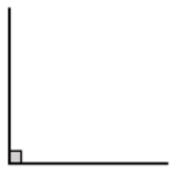
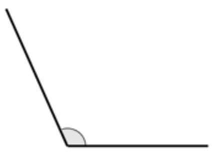
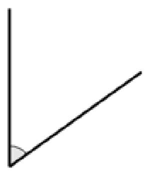
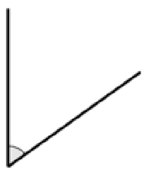
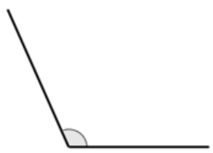
B) Os ângulos 4 e 6 são alternos internos.

C) Os ângulos 3 e 6 são colaterais externos.

D) Os ângulos 5 e 4 são colaterais internos.

E) Os ângulos 2 e 3 são alternos externos.

13. (Questão Inédita) Assinale a alternativa que contém corretamente um ângulo agudo, um ângulo reto e um ângulo obtuso, nessa ordem.

	Ângulo Agudo	Ângulo Reto	Ângulo Obtuso
A)			
B)			
C)			
D)			
E)			

Gabarito

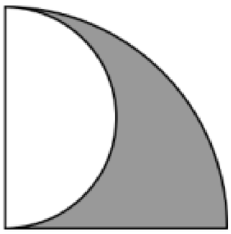
1. LETRA C
2. LETRA B
3. LETRA D
4. LETRA A
5. LETRA A
6. LETRA D
7. LETRA D
8. LETRA C
9. LETRA C
10. LETRA B
11. LETRA B
12. LETRA C
13. LETRA E

LISTA DE QUESTÕES

Circunferências

FGV

1. (FGV/CODEMIG/2015) A região sombreada na figura é conhecida como "barbatana de tubarão" e foi construída a partir de um quadrante de círculo de raio 4 e de um semicírculo.



A área dessa "barbatana de tubarão" é:

A) 2π

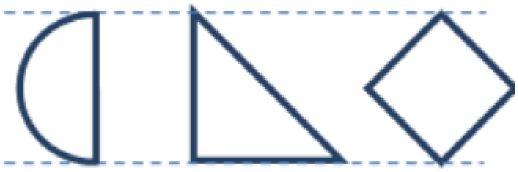
B) $5\pi/2$

C) 3π

D) $7\pi/2$

E) 4π

2. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Considere o semicírculo, o triângulo retângulo e o quadrado mostrados abaixo.



Sabendo-se que o diâmetro no semicírculo, os catetos do triângulo retângulo e a diagonal do quadrado têm o mesmo tamanho, é correto concluir que:

A) apenas o semicírculo e o quadrado têm a mesma área;

B) apenas o quadrado e o triângulo têm a mesma área;

C) apenas o semicírculo e o triângulo têm a mesma área;

D) todas as três figuras têm áreas diferentes;

E) as três figuras têm a mesma área.

3. (FGV/BANESTES/2018) Em uma praça há uma pista de corrida circular com 50m de raio. Um corredor deu 7 voltas completas nessa pista. Esse corredor percorreu, aproximadamente:

A) 2000m;

B) 2200m;

C) 2400m;

D) 2800m;

E) 3000m;

4. (FGV/PREF. SALVADOR/2017) A região formada por todos os pontos de um plano que estão a, no máximo, 2 cm de distância de um segmento de reta AB contido nesse plano, tem área (24 + 4π) cm². A medida do segmento de reta AB é de

A) 2 cm

B) 3 cm

C) 4 cm

D) 6 cm

E) 8 cm

5. (FGV/ALESP/2002) Se uma circunferência tem um raio unitário (1cm), a medida de um ângulo central, em radianos:

A) é igual ao arco por ele subtendido.

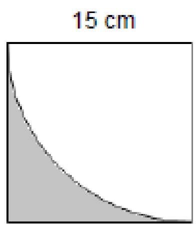
B) é numericamente igual à medida do arco por ele subtendido.

C) é 1 cm.

D) é igual a um radiano.

FCC

6. (FCC/SABESP/2019) Verifica-se na figura abaixo, um quadrado e um arco de circunferência.



O perímetro da região cinza é:

A) $30 + \left(\frac{15}{2}\right)\pi$

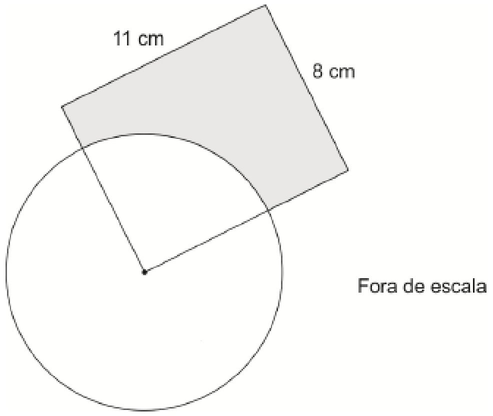
B) $30 + \left(\frac{2}{15}\right)\pi$

C) $15 + \left(\frac{15}{2}\right)\pi$

D) $15 + \left(\frac{2}{15}\right)\pi$

E) 30

7. (FCC/PREF. SJRP/2019) Um dos vértices de um retângulo de lados 11 cm e 8 cm é o centro de uma circunferência, conforme mostra a figura abaixo.



Sabendo que a área da parte sombreada da figura é $\frac{352-\pi}{4}$ cm², o raio da circunferência, em cm, mede:

A) 1.

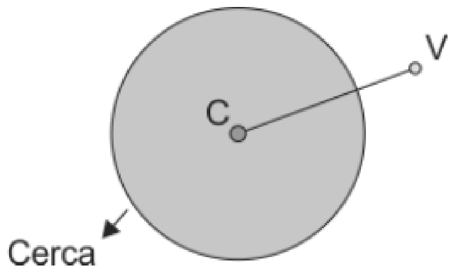
B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

8. (FCC/SEDU-ES/2018) Um celeiro circular de raio 9 metros e centro C está cercado para que os animais não possam entrar. Uma vaca, indicada por V, está fora do celeiro e amarrada por uma corda de comprimento $CV = 12$ metros. Essa vaca pode pastar em qualquer local que esteja fora do celeiro e ao alcance da extensão da corda que a amarra, conforme mostra a figura abaixo.



Adotando $\pi = 3$, a área total que está ao alcance da vaca para que ela possa pastar, em m², é igual a

A) 120.

B) 27.

C) 169.

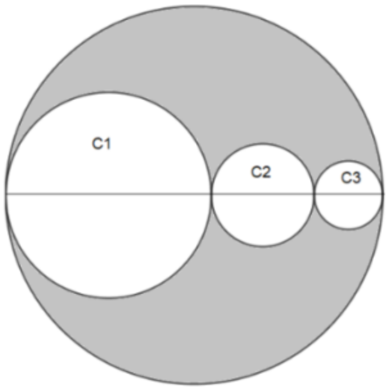
D) 189.

E) 18.

CEBRASPE

9. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Julgue o item subsequente, relativos a geometria.

Considere que, na figura a seguir, os raios dos círculos internos C1, C2 e C3 sejam, respectivamente, iguais a r, $r/2$ e $r/3$, em que r é um número real positivo. Nesse caso, a área da parte em cinza é igual a $2\pi r^2$.



10. (CESPE/IFF/2018) Um quadrado tem todos os seus vértices sobre uma circunferência de 4 cm de raio. Nesse caso, a área desse quadrado é igual a

A) 4 cm²

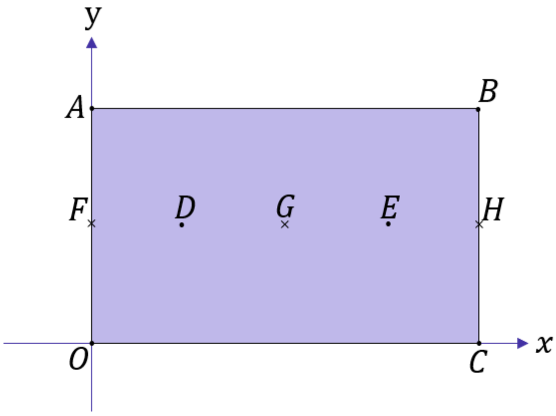
B) 8 cm²

C) 16 cm²

D) 32 cm²

E) 64 cm²

11. (CESPE/SEDUC-AL/2017) A figura seguinte mostra, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, em que a unidade de medida é o metro, uma região retangular OABC. O lado OA mede 600 m e o lado OC mede 800 m.



A figura mostra também os pontos F = ponto médio de OA, H = ponto médio de CB, G = centro do retângulo OABC, D = ponto médio de FG, e E = ponto médio de GH. Nos pontos O, A, B, C, D e E foram instalados

pontos de acesso à Internet — wi-fi. Nessa configuração, o usuário consegue se conectar à Internet desde que o seu smartphone esteja a 200 m ou menos de qualquer desses pontos de acesso. Com base nessas informações e na figura apresentada, julgue o próximo item.

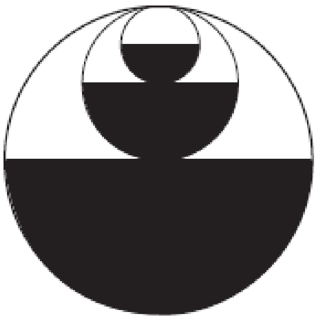
Na parte externa ao retângulo OABC, o acesso à Internet a partir dos referidos pontos de acesso se restringe a uma região em que a área é inferior a 384.000 m².

CESGRANRIO

12. (CESGRANRIO/LIQUIGAS/2018) Carlos e Eduardo estão em um pátio circular e notaram que, se ambos estivessem sobre a circunferência que limita o pátio, então a maior distância que um deles poderia ficar do outro mediria 24 metros. Ao notarem isso, eles se dispuseram em posições que realizam tal distância máxima. Se Eduardo ficar parado em sua posição, e Carlos caminhar até ele, pela circunferência do pátio, então, a medida mínima do comprimento percorrido por Carlos, em metros, será mais próxima de

A) 30
B) 15
C) 45
D) 38
E) 70

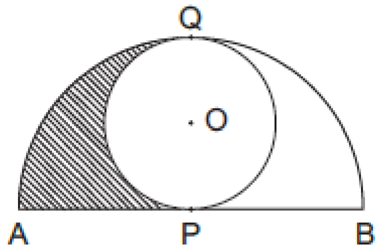
13. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2014) A figura a seguir foi construída de modo que cada círculo menor tangencia um diâmetro do círculo imediatamente maior no seu centro. A área pintada mede 63 cm².



A área do círculo maior, em cm², vale

A) 76
B) 84
C) 90
D) 93
E) 96

14. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2009)



A figura acima ilustra um círculo de centro em O e raio igual a 1 cm, inscrito em um semicírculo. P é o ponto médio do segmento AB. O círculo tangencia o semicírculo em P e Q. Os pontos O, P e Q são colineares. A área hachurada vale, em cm²,

A) 3π

B) 2π

C) $3\pi/2$

D) π

E) $\pi/2$

Outras Bancas

15. (FUNDATEC/BM RS/2022) Um círculo de raio r tem área πr^2. Se dobrarmos o seu raio, teremos que a sua área aumenta:

A) 2 vezes.

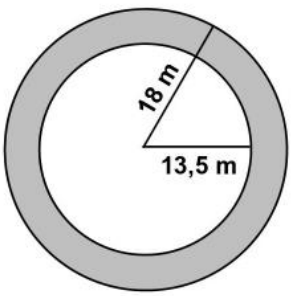
B) 4 vezes.

C) 6 vezes.

D) 8 vezes.

E) 10 vezes.

16. (FUNPAR/PM-PR/2021) Um irrigador distribui água numa região circular, de raio 13,5 m. Devido a um defeito, esse irrigador precisou ser trocado por outro, que passou a irrigar uma região circular de raio 18 m. Assinale a alternativa que apresenta a área da parte cinza, indicada na figura abaixo, que corresponde à região que passou a ser coberta pelo segundo irrigador, além daquela coberta pelo primeiro. Use $\pi = \frac{22}{7}$



A) 346,50 m².

B) 396,00 m².
C) 409,50 m².
D) 445,50 m².
E) 495,00 m².

17. (FUNDATEC/PREF. AMETISTA DO SUL/2021) Quantos metros mede a circunferência de um círculo cujo diâmetro é igual a 18 m? (utilizar $\pi = 3,14$).
A) 56,52.
B) 70,65.
C) 84,78.
D) 98,91
E) 113,04.

18. (INST. CONSULPLAN/CM BARBACENA/2022) Para delimitar um lote circular recentemente adquirido, o proprietário planeja instalar uma cerca com arame liso. Sabe-se que o lote possui diâmetro de 24 metros e o arame é vendido em rolos com 36 metros cada. Considerando que $\pi = 3,14$ e que o proprietário deseja uma cerca com 4 faixas de arame liso, quantas unidades de rolo, no mínimo, ele deverá comprar?
A) 7
B) 8
C) 9
D) 10

19. (FUNDATEC/PREF. CANDELÁRIA/2022) Uma pessoa caminha em volta de uma praça circular que contém 1800 m de diâmetro. Nesse percurso, realizado 4 vezes na semana, ela dá uma volta e meia. Quantos quilômetros essa pessoa caminha ao todo durante uma semana? Considere $\pi = 3$.
A) 56,7 km.
B) 32,4 km.
C) 8,1 km.
D) 5,67 km.
E) 3,24 km.

20. (FUNDATEC/PREF. VACARIA/2021) Se o comprimento de uma circunferência é 36π , então a medida do raio dessa circunferência é:
A) 36.
B) 18.
C) 9.
D) 3.
E) 1.

21. (INST. AOCP/PREF. PINHAIS/2022) Uma fonte de águas será instalada na praça da igreja matriz de Pinhais. Ela terá o formato de uma coroa circular, com o raio maior medindo 12 m e o raio menor medindo 10 m. Considerando $\pi = 3$, qual é a área molhada dessa fonte de águas?

A) 44 m².

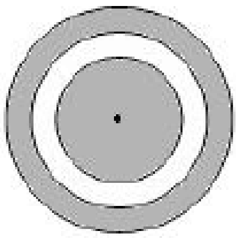
B) 72 m².

C) 94 m².

D) 104 m².

E) 132 m².

22. (DIRENS/EEAR/2020) A figura dada apresenta três círculos concêntricos cujos raios (em cm) são números naturais pares e consecutivos. Dado que as áreas hachuradas são iguais, é verdade que a soma dos três raios é ___ cm.



A) 12

B) 18

C) 24

D) 30

23. (IBADE/PREF. VILHENA/2019) A distância entre os centros de duas circunferências tangentes exteriormente é de 60 cm. Sabendo-se que a razão entre seus raios é de 5/7, qual o diâmetro de cada circunferência?

A) 30 cm e 42 cm

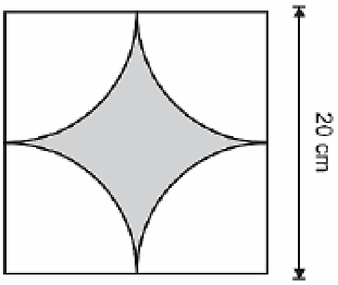
B) 50 cm e 70 cm

C) 20 cm e 28 cm

D) 60 cm e 84 cm

E) 70 cm e 98 cm

24. (IDECAN/PREF. DAMIANÓPOLIS/2016) Qual é o valor da área formada pela figura cinza dentro do quadrado a seguir?



A) $68\ cm^2$
B) $80\ cm^2$
C) $86\ cm^2$
D) $92\ cm^2$

25. (FUNDATEC/PREF. CORUMBÁ/2018) Se uma circunferência tiver o valor de seu raio quadruplicado, podemos afirmar que a área da mesma será aumentada em:

A) Trinta e duas vezes.
B) Dezesseis vezes.
C) Oito vezes.
D) Quatro vezes.
E) Duas vezes.

GABARITO

1. LETRA A
2. LETRA B
3. LETRA B
4. LETRA D
5. LETRA B
6. LETRA A
7. LETRA A
8. LETRA D
9. CERTO
10. LETRA D
11. CERTO
12. LETRA D
13. LETRA E
14. LETRA E
15. LETRA B
16. LETRA D
17. LETRA A
18. LETRA C
19. LETRA B
20. LETRA B
21. LETRA E
22. LETRA C
23. LETRA B
24. LETRA C
25. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES

Triângulos

FGV

1. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Em um triângulo retângulo ABC, considere um ponto D, sobre a hipotenusa AC tal que o comprimento do segmento AD é igual ao comprimento do segmento DB. Se o ângulo BDC mede 40°, o ângulo BCD mede

a) 70°.

b) 60°.

c) 50°.

d) 40°.

e) 30°.

2. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Considere um triângulo ABC. Seja D um ponto sobre o lado AB tal que o comprimento de AD é o dobro do comprimento de DB. Seja E o ponto médio do lado BC.
Se a área do triângulo ADE mede 6 cm², a área do triângulo ABC, em cm², mede

a) 24.

b) 18.

c) 15.

d) 12.

e) 9.

3. (FGV/SENADO/2022) João dispõe de objetos de madeira na forma de triângulos com um ângulo reto. Há triângulos de dois tipos: os de tipo 1 possuem dois catetos iguais medindo 1cm, os de tipo 2 também possuem dois catetos iguais, mas medindo 3 cm. Para montar um quadrado com 9 cm de lado todo preenchido de triângulos, João pode escolher usar

a) 70 triângulos de tipo 1 e 10 triângulos de tipo 2.

b) 81 triângulos de tipo 1 e 8 triângulos de tipo 2.

c) 102 triângulos de tipo 1 e 6 triângulos de tipo 2.

d) 88 triângulos de tipo 1 e 8 triângulos de tipo 2.

e) 72 triângulos de tipo 1 e 10 triângulos de tipo 2.

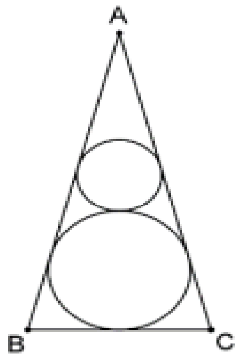
4. (FGV/PM-SP/2022) Considere o triângulo retângulo ABC cujos lados medem:

$$AB = 12, AC = 5 \; e \; BC = 13$$

Seja D um ponto sobre o lado BC tal que os triângulos ABD e ACD tenham perímetros iguais. A área do triângulo ABD é

a) 30.
b) 90/13.
c) 15/2.
d) 25/2.
e) 60/13.

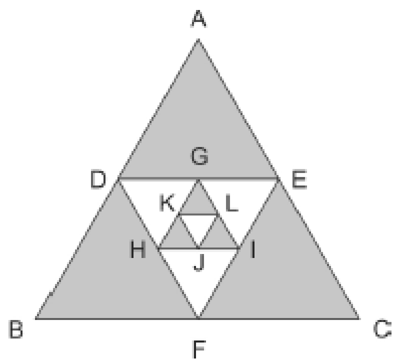
5. (FGV/SEAD-AP/2022) No triângulo ABC da figura a seguir, a altura relativa à base BC mede 15 e o raio da circunferência inscrita nele mede 3.



Uma circunferência menor é tangente à circunferência inscrita no triângulo ABC e tangente, também, aos lados AB e AC. O raio dessa circunferência menor mede
a) 5/3.
b) 7/4.
c) 8/5.
d) 9/5.
e) 15/8.

FCC

6. (FCC/SABESP/2019) O triângulo ABC, de área 64 cm², foi dividido pelos segmentos DE, DF, EF, em quatro triângulos congruentes. O triângulo DEF, por sua vez, foi dividido pelos segmentos GH, HI e GI, em quatro triângulos congruentes, o mesmo acontecendo com o triângulo GHI através dos segmentos JK, KL, LJ.



Assim sendo, a área da região sombreada na figura é, em cm², ,

A) 60

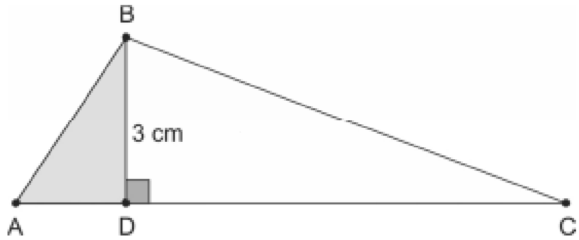
B) 63

C) 64

D) 51

E) 48

7. (FCC/PREF. SJRP/2019) Em um triângulo ABC a altura BD relativa ao lado AC mede 3 cm, conforme mostra a figura.



Sabendo que o segmento CD é 6 cm maior que o segmento AD e que a área do triângulo BCD é o quádruplo da área do triângulo ABD, a área do triângulo ABC, em cm², é:

A) 12

B) 15

C) 18

D) 21

E) 24

8. (FCC/SEDU-ES/2018) A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC mede 12 cm. Se um dos catetos do triângulo ABC mede 15 cm, a medida do outro cateto, em centímetros, é igual a

A) 24.

B) 18.

C) 22.

D) 16.

E) 20.

CEBRASPE

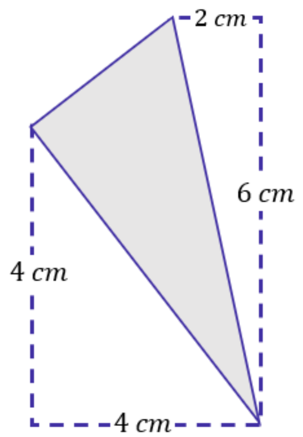
9. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Considere que um triângulo ABC tenha lados com as seguintes medidas: 3 cm, 5 cm e 7 cm. Se o triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC e tem perímetro 25 cm, então o menor lado do triângulo DEF é 5 cm.

10. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Seja ABC um triângulo com $A\hat{B}C = 90°$ e $A\hat{C}B = 30°$. Se $\overline{BC} = \sqrt{3}$ cm e se a altura com relação ao vértice B encontra o segmento $\overline{AC}$ no ponto D, então o comprimento do segmento $\overline{AD}$ é 1 cm.

11. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) O triângulo ABC mostrado a seguir está inscrito no retângulo incompleto, de lados pontilhados. As medidas dos lados do retângulo podem ser observadas na figura seguinte.

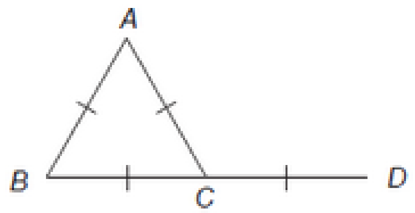


O valor da área do triangulo ABC apresentado anteriormente é igual a

A) 6 cm²
B) 7 cm²
C) 8 cm²
D) 12 cm²
E) 16 cm²

CESGRANRIO

12. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) Um arame de extremidades C e D e 8 cm de comprimento é dobrado de modo a formar um triângulo equilátero ABC mantendo os pontos B, C e D alinhados, conforme a Figura a seguir.



Qual a distância, em centímetros, entre os pontos A e D?

A) $\sqrt{3}$

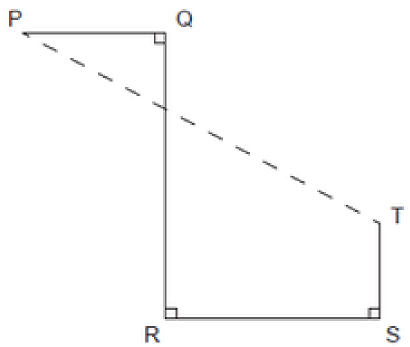
B) $2\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{3}$
D) 2
E) 4

13. (CESGRANRIO/IBGE/2016) Considere as seguintes definições:

1 - Um triângulo é chamado de escaleno quando os seus lados possuem comprimentos diferentes.
2 - Um triângulo é chamado de isósceles quando há dois de seus lados com o mesmo comprimento.
3 - Um triângulo é chamado de equilátero quando todos os seus lados possuem o mesmo comprimento.

De acordo com as definições apresentadas, um triângulo não é escaleno quando, e apenas quando, ele
A) é isósceles.
B) é isósceles, mas não é equilátero.
C) não é isósceles.
D) não é equilátero, nem é isósceles.
E) não é equilátero.

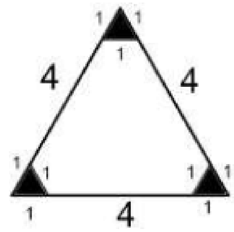
14. (CESGRANRIO/IBGE/2016) Na Figura a seguir, PQ mede 6 cm, QR mede 12 cm, RS mede 9 cm, e ST mede 4 cm.



A distância entre os pontos P e T, em cm, mede
A) 17
B) 21
C) 18
D) 20
E) 19

Outras Bancas

15. (RBO/ISS-BH/2022) Na figura a seguir, temos um triângulo equilátero de lado 6 dm, e em cada vértice desse triângulo, temos triângulo equilátero de lado 1 dm.



O percentual do triângulo de lado 6 dm, que está escurecido, é de, aproximadamente,

A) 6,67%.

B) 7,33%.

C) 8,33%.

D) 9,00%.

E) 10,2%

16. (FUNDATEC/PREF. FLORES DA CUNHA/2022) Analise as assertivas a seguir:

I. Todo triângulo retângulo tem um ângulo reto.
II. Todo triângulo retângulo tem catetos e hipotenusa.
III. Os ângulos internos de um triângulo retângulo possuem medidas iguais.

Quais estão corretas?

A) Apenas I.

B) Apenas II.

C) Apenas I e II.

D) Apenas II e III.

E) I, II e III.

17. (IDECAN/IBGE/2022) Considere as seguintes afirmações abaixo:

I. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°.
II. Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
III. Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

Assinale o item correto:

A) Somente I está correta.

B) Somente II está correta.

C) Somente I e II estão corretas.

D) Somente II e III estão corretas

E) Todas as afirmações estão corretas.

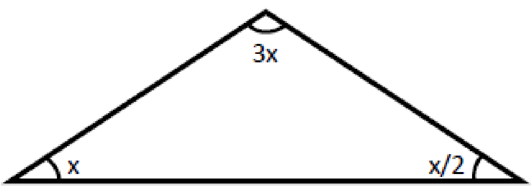
18. (DIRENS/EEAR/2020) Em relação aos triângulos, marque V para verdadeiro e F para falso. Em seguida, assinale a alternativa com a sequência correta.

( ) Triângulo acutângulo é todo triângulo que possui dois lados agudos.
( ) Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360°.
( ) Triângulo obtusângulo é todo triângulo que possui um dos ângulos internos obtuso.
( ) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

A) F - V - V - V
B) V - F - F - F
C) F - F - F - V
D) V - V - V - F

19. (FEPESE/PREF. MAFRA/2021) Os lados de um triângulo medem 4, 6 e 10 centímetros. Um segundo triângulo é semelhante ao primeiro e tem perímetro igual a 60 cm. Logo, o maior lado do segundo triângulo mede:
A) 60 cm.
B) 20 cm.
C) 18 cm.
D) 40 cm.
E) 30 cm.

20. (IDECAN/SES DF/2014) Observe a figura a seguir.



Qual é o valor de x?
A) 20°.
B) 40°.
C) 45°.
D) 90°.
E) 180°.

21. (FEPESE/FCEE/2022) Um terreno triangular tem todos os lados com a mesma medida de 20 metros cada lado. Artur comprou 1/8 do referido terreno, logo, a área (em metros quadrados) do terreno que Artur comprou é:
A) Maior que 45.

B) Maior que 40 e menor que 45.
C) Maior que 35 e menor que 40.
D) Maior que 30 e menor que 35.
E) Menor que 30.

22. (QUADRIX/CRMV/2022) A área A de um triângulo de lados a, b e c pode ser calculada pela fórmula de Herão:

$$\boldsymbol{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

em que p é o semiperímetro (metade do perímetro) do triângulo. A fórmula recebeu esse nome em homenagem ao matemático e mecânico grego Herão de Alexandria. Considerando essas informações, julgue o item.

A área de um triângulo com lados iguais a 15 cm, 34 cm e 35 cm é menor que a área de um triângulo com lados iguais a 13 cm, 40 cm e 45 cm.

23. (Inst. AOCP/CBM-PA/2022) A respeito dos entes da geometria plana e espacial, é correto afirmar que
A) a mediatriz é a reta que divide um ângulo ao meio.
B) a mediana de uma circunferência é tangente à circunferência e forma um ângulo reto com o diâmetro.
C) a bissetriz divide um triângulo em dois triângulos de mesma área.
D) a circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes dos extremos de um segmento.
E) em um triângulo equilátero, a mediana e a bissetriz de um mesmo ângulo coincidem.

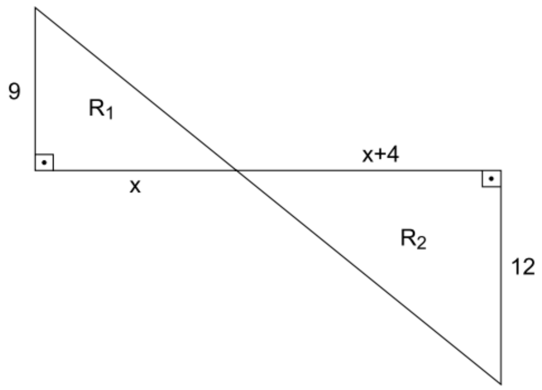
24. (Inst. AOCP/ITEP-RN/2021) Considere o triângulo retângulo ABC, retângulo em A. Sabe-se que $\widehat{C} = 30°$ e que a medida da bissetriz interna relativa ao ângulo $\widehat{B}$ é igual a $5\sqrt{3}\ u$. Nessas condições, a medida do lado AC, oposto ao vértice B, é
A) $15\sqrt{2}\,u$
B) $15\sqrt{2}/2\ \ u$
C) $15\sqrt{3}/2\,u$
D) $15\sqrt{3}\,u$
E) $15\sqrt{3}/4\,u$

Vunesp

25. (VUNESP/PREF. TAUBATÉ/2022) Um mestre de obras precisa de um pedaço de madeira cortada em formato de triângulo retângulo, com o maior lado medindo 37 cm, e o menor lado medindo 12 cm. O perímetro desse pedaço de madeira triangular deve ser de
A) 81 cm
B) 82 cm

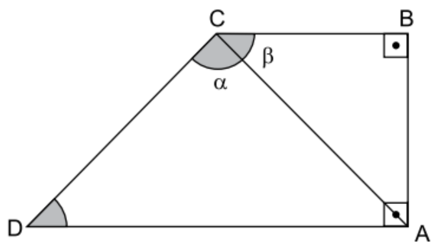
C) 83 cm
D) 84 cm
E) 85 cm

26. (VUNESP/TJ-SP/2017) A figura seguinte, cujas dimensões estão indicadas em metros, mostra as regiões R_1 e R_2, ambas com formato de triângulos retângulos, situadas em uma praça e destinadas a atividades de recreação infantil para faixas etárias distintas.



Se a área de R_1 é 54 m², então o perímetro de R_2 é, em metros, igual a
A) 40.
B) 42.
C) 54.
D) 48.
E) 36.

27. (VUNESP/TJ-SP/2015) Na figura, o trapézio retângulo ABCD é dividido por uma de suas diagonais em dois triângulos retângulos isósceles, de lados $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DC}$.



Desse modo, é correto afirmar que a soma das medidas dos ângulos α e β é igual a
A) 125°.
B) 115°.
C) 110°.
D) 135°.
E) 130°.

GABARITO

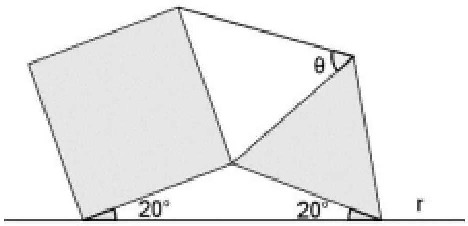
1. LETRA A
2. LETRA B
3. LETRA E
4. LETRA B
5. LETRA D
6. LETRA D
7. LETRA B
8. LETRA E
9. CERTO
10. ERRADO
11. LETRA C
12. LETRA B
13. LETRA A
14. LETRA A
15. LETRA C
16. LETRA C
17. LETRA E
18. LETRA A
19. LETRA E
20. LETRA B
21. LETRA E
22. ERRADO
23. LETRA E
24. LETRA C
25. LETRA D
26. LETRA D
27. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES

Quadriláteros

FGV

1. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Na figura abaixo aparecem um quadrado e um triângulo equilátero (sombreados), cada um deles com um vértice na reta r, e um lado fazendo 20° com a reta r.



O ângulo assinalado com a letra θ mede

a) 40°.

b) 45°.

c) 50°.

d) 55°.

e) 60°.

2. (FGV/SEJUSP-MG/2022) Partindo de um retângulo, Eduardo construiu dois outros retângulos, R1 e R2. As dimensões do retângulo R1 são a metade das dimensões do retângulo inicial e as dimensões do retângulo R2 são o dobro das dimensões do retângulo inicial. A razão entre a área do retângulo R2 e a área do retângulo R1 é

a) 32.

b) 16.

c) 8.

d) 4.

e) 2.

3. (FGV/SEAD-AP/2022) Um quadrado está inscrito em um círculo de raio R. Cada um dos menores arcos do círculo determinado por um lado do quadrado é refletido no respectivo lado. A área da região delimitada por esses 4 arcos refletidos é:

a) $(\pi - 1)R^2$.

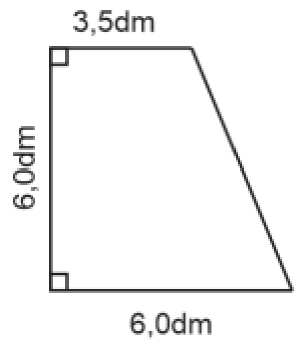
b) $(\pi - \sqrt{2})R^2$.

c) $(3\sqrt{2} - \pi)R^2$.

d) $(4 - \pi)R^2$.

e) $(4\sqrt{2} - \pi)R^2$.

4. (FGV/FEMPAR/2022) Uma chapa de metal foi recortada de modo a produzir um trapézio retângulo conforme ilustra a figura a seguir.

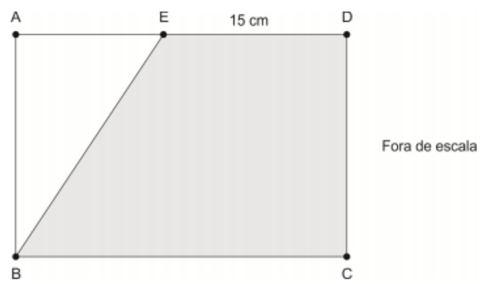


Com as medidas indicadas na figura, é possível calcular o seu perímetro, que vale

a) 21,5 dm.
b) 22,0 dm.
c) 22,5 dm.
d) 23,0 dm.
e) 23,5 dm

FCC

5. (FCC/PREF. SJRP/2019) O ponto E pertence ao lado AD do retângulo ABCD e ED=15 cm, conforme mostra a figura.



Sabendo que a área do retângulo ABCD é 336 cm² e que a área do trapézio BCDE é 273 cm², a medida, em cm, do lado AB, é:

A) 14
B) 15
C) 16
D) 17
E) 18

6. (FCC/AGED-MA/2018) Uma empresa designou para recreação de seus funcionários um espaço retangular de dimensões inteiras e diferentes da unidade, em metros, cuja área é 793 m². Sabe-se que a

área de um retângulo é o produto de suas duas dimensões. No último mês, a empresa aumentou a dimensão maior desse espaço retangular em 4 metros e a menor em 3 metros. Feito isso, a área de recreação dos funcionários aumentou em

A) 247 m²

B) 12 m²

C) 315 m²

D) 189 m²

E) 49 m²

7. (FCC/SABESP/2018) De um quadrado de papel cujo lado mede 12 cm, recorta-se de um dos vértices um quadrado cujo lado é igual a 2 cm e do vértice oposto recorta-se outro quadrado cujo lado é igual a 4 cm. Após a retirada desses dois quadrados recortados a figura restante apresenta a área de

A) 124 cm².

B) 68 cm².

C) 84 cm².

D) 36 cm².

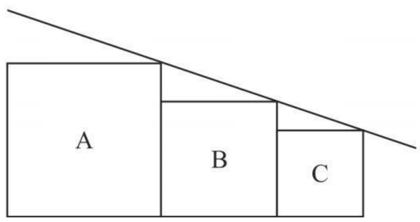
E) 164 cm².

CEBRASPE

8. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Um paralelogramo $ABCD$ com $\overline{AB} = 10\ cm$, $\overline{BC} = 6\ cm$ e $A\hat{B}C = 30°$ tem área igual a $30\ cm^2$.

9. (CESPE/SEFAZ-RS/2019) Os quadrados A, B e C foram colocados lado a lado, de modo que uma reta contém os três vértices superiores, como mostra a figura a seguir



Se a área do quadrado A for 24 cm², e a área do quadrado C for 6 cm², então a área do quadrado B será igual a

A) 9 cm²

B) 10 cm²

C) 12 cm²

D) 15 cm²

E) 18 cm²

10. (CESPE/TJ-PR/2019) O carpinteiro José cortou um retângulo de madeira medindo 80 cm de comprimento por 60 cm de largura. Ele precisa cortar outro retângulo, com a mesma área do primeiro, mas com comprimento um quarto maior que o daquele outro. Desse modo, em relação à largura do primeiro retângulo, a largura do segundo deverá

A) diminuir um terço.

B) diminuir um quinto.

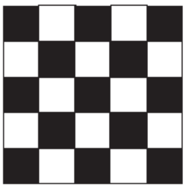
C) aumentar três vezes.

D) aumentar um quinze avos.

E) aumentar trinta e seis quinze avos.

CESGRANRIO

11. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) A Figura mostra um tabuleiro 5x5, composto por 25 quadradinhos idênticos. A área total do tabuleiro é de 500 cm².



A soma das áreas, em cm², de todos os quadradinhos escuros desse tabuleiro é igual a

A) 240

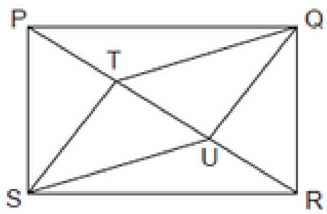
B) 250

C) 260

D) 270

E) 280

12. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Em um retângulo de lados PQ = 12 cm e QR = 9 cm, os pontos T e U dividem a diagonal em três segmentos iguais, como ilustrado na Figura abaixo.



A área do quadrilátero STQU, em cm², é igual a

A) 108

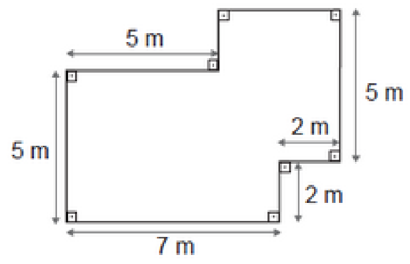
B) 72

C) 54

D) 48

E) 36

13. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) A planta baixa do estoque de uma empresa está representada pela Figura abaixo. Todas as medidas indicadas estão na unidade metro, e todos os ângulos indicados na Figura são retos.



A medida da área do estoque, em metros quadrados, é

A) 32

B) 45

C) 49

D) 55

E) 63

Outras Bancas

14. (IBFC/IBGE/2022) Ao analisar a cobertura territorial sobre sua responsabilidade, o coordenador riscou no mapa um retângulo de modo que representasse a maior área possível da região a ser trabalhada por sua equipe. Se as medidas dos lados desse retângulo são 4,5 cm e 6 cm, então a medida da área desse retângulo, em m² é igual a:

A) 0,27

B) 0,027

C) 0,0027

D) 2,7

E) 0,000027

15. (NUCEPI UESPI/PM-PI/2022) Durante uma manifestação na Avenida Frei Serafim em Teresina, os soldados Emanuel, Fábio e Gilson foram designados para acompanhar o evento. Quando retornaram ao quartel, o comandante indagou sobre o número de pessoas que participaram da manifestação. Emanuel informou que foi ocupada uma faixa retangular da Avenida, medindo 14 m por 176 m, pelos manifestantes. Fábio disse que, em média, havia 4 pessoas por metro quadrado. Por sua vez, Gilson fez as contas e informou ao comandante, de maneira correta, o número total de manifestantes. O número informado por Gilson foi de aproximadamente

A) 12.000 pessoas.

B) 11.000 pessoas.

C) 10.000 pessoas.

D) 9.000 pessoas.

E) 8.000 pessoas.

16. (AOCP/CM BAURU/2022) João, servidor da Câmara, possui um sítio que usa para descanso aos fins de semana. Ele pretende construir um galinheiro no sítio. Para isso, deseja utilizar um rolo com 200 metros de tela que ele já possui. Se a forma que João escolheu é a retangular e ele usará a tela em todos os lados do retângulo, qual é a área máxima que o galinheiro pode ter?

A) 1.600 m²

B) 2.000 m²

C) 2.400 m²

D) 2.500 m²

E) 2.700 m²

17. (RBO/PREF. NAVEGANTES/2022) O perímetro de um retângulo é 38 cm e o comprimento supera a largura em cinco unidades. A área desse retângulo é:

A) 60 cm².

B) 68 cm².

C) 84 cm².

D) 96 cm².

E) 98 cm².

18. (FEPESE/FCEE/2022) Joana tem dois terrenos. Um terreno tem formato triangular, sendo que a base mede 14 metros e a altura mede 15 metros. O outro terreno tem formato de um quadrado, sendo que um dos lados do terreno mede 11 metros. Logo, a área do terreno maior excede a área do terreno menor em quantos metros quadrados?

A) 18

B) 17

C) 16

D) 15

E) 14

19. (QUADRIX/CAU SC/2022) A razão entre as medidas da altura e do comprimento de uma bandeira é igual a 0,6. Se o perímetro dessa bandeira é igual a 4,8 metros, então a sua altura é igual a

A) 9 decímetros.

B) 12 decímetros.

C) 15 decímetros.

D) 18 decímetros.

E) 21 decímetros.

20. (Inst. AOCP/CBM-PA/2022) Um trapézio ABCD, de base maior AB e base menor CD, é dado de tal maneira que o ângulo DAB mede 60° e o ângulo ABC mede 30°. Se a altura do trapézio é igual a $3\sqrt{3}$ cm e a base menor mede 6 cm, então a razão entre a área do trapézio e sua altura, em centímetros, é igual a

A) 6

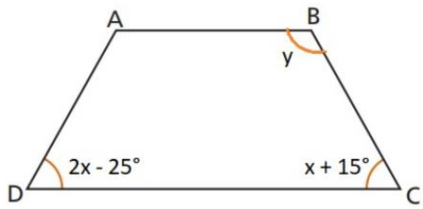
B) 12

C) 18

D) $6\sqrt{3}$

E) $18\sqrt{3}$

21. (IDECAN/AGRAER MS/2022) Seja o trapézio $ABCD$ isósceles, de base $\overline{DC}$. Determine o valor de $S = x + y$.



A) S = 125°

B) S = 150°

C) S = 165°

D) S = 175°

E) S = 180°

22. (FUNDATEC/CARRIS/2021) Os aparelhos de televisão são medidos em polegadas através da sua medida diagonal. Se uma polegada equivale a 2,5 cm, podemos dizer que uma televisão de 42 polegadas tem medida diagonal de:

A) 100 cm.

B) 1,05 m.

C) 1,05 cm.

D) 42 m.

E) 420 cm.

23. (QUADRIX/CORE TO/2021) Um retângulo é tal que seu perímetro mede 68 cm e sua base excede a altura em 14 cm. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

A altura do retângulo é igual a 10 cm.

Vunesp

24. (VUNESP/ALESP/2022) Um terreno retangular tem o lado maior com 5 metros a mais que o lado menor. A prefeitura exige que haja um recuo em cada lado para realizar construções. Realizando os recuos obrigatórios, o proprietário perde 75 m² da área do terreno para a construção da casa. Essa perda corresponde à décima parte da área total do terreno. Com essas informações, é correto afirmar que a medida do contorno desse terreno é, em metros, igual a

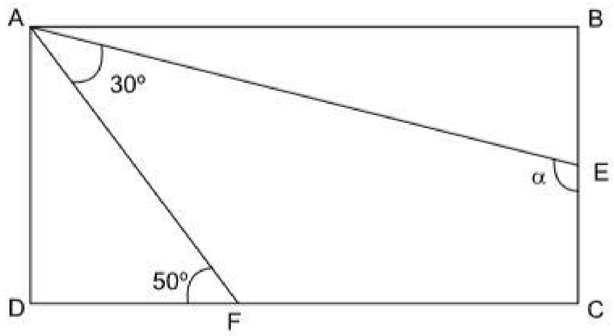
A) 110

B) 105
C) 120
D) 115
E) 100

25. (VUNESP/ALESP/2022) Comprei um terreno quadrado e em seguida comprei outro, retangular, cuja largura é igual ao lado do terreno quadrado, e o comprimento tem 3 metros a mais que a largura. Sabendo que a área total dos dois terrenos é de 324 m², a diferença entre as áreas desses dois terrenos é, em metros quadrados, igual a

A) 38
B) 42
C) 40
D) 44
E) 36

26. (VUNESP/ Prefeitura Municipal de Piracicaba (SP)/2020) O retângulo ABCD foi dividido em 3 regiões, conforme mostra a figura.



A medida do ângulo indicado por α no quadrilátero AECF é

A) 100°.
B) 110°.
C) 120°.
D) 130°.
E) 140°.

GABARITO

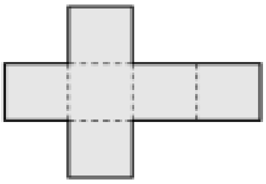
1. LETRA D
2. LETRA B
3. LETRA D
4. LETRA B
5. LETRA A
6. LETRA A
7. LETRA A
8. CERTO
9. LETRA C
10. LETRA B
11. LETRA C
12. LETRA E
13. LETRA C
14. LETRA C
15. LETRA C
16. LETRA D
17. LETRA C
18. LETRA C
19. LETRA A
20. LETRA B
21. LETRA C
22. LETRA B
23. CERTO
24. LETRA A
25. LETRA E
26. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES

Polígonos

FGV

1. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) O polígono da figura abaixo foi feito com a reunião de quadrados iguais.



O perímetro do polígono é igual a 112 cm. A área desse polígono em cm² é igual a

a) 256.

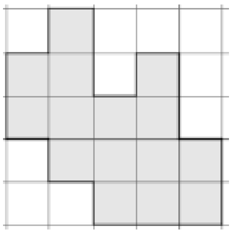
b) 294.

c) 320.

d) 384.

e) 396.

2. (FGV/SEFAZ-AM/2022) A figura abaixo mostra um polígono sombreado desenhado sobre um quadriculado (papel coberto com linhas horizontais e verticais formando pequenos quadrados iguais).



O perímetro do polígono é de 132 cm. A área desse polígono, em cm², é igual a

A) 468

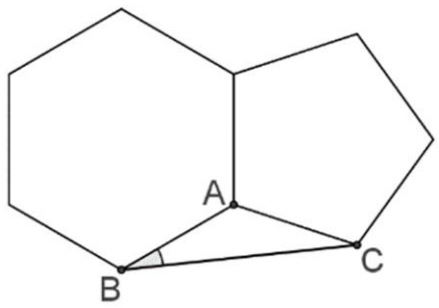
B) 504

C) 540

D) 576

E) 612

3. (FGV/IMBEL/2021) A figura a seguir mostra dois polígonos regulares com um lado comum.



O ângulo ABC, assinalado na figura mede

A) 16°

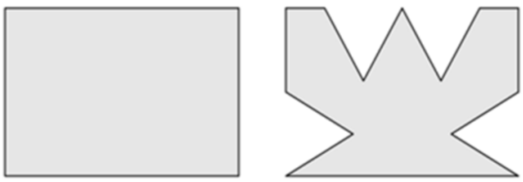
B) 18°

C) 20°

D) 22°

E) 24°

4. (FGV/PC-RJ/2021) A Figura 1 mostra uma placa retangular com 9 cm de base e 6 cm de altura. Dessa placa foram retirados quatro triângulos equiláteros de 3 cm de lado cada um, formando a Figura 2.



O perímetro da Figura 2, em cm, é:

A) 24;

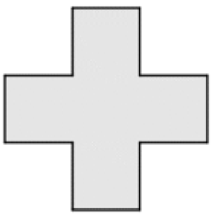
B) 30;

C) 36;

D) 42;

E) 54.

5. (FGV/IMBEL/2021) Na figura a seguir, todos os segmentos são iguais e todos os ângulos são retos.



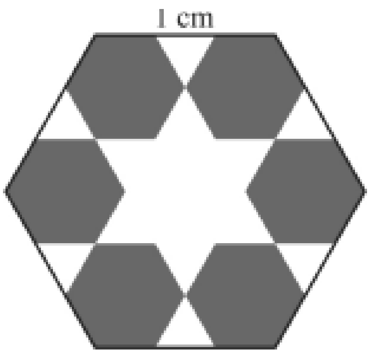
O perímetro dessa figura é de 96 cm. A área dessa figura, em cm², é

A) 300;

B) 320;
C) 350;
D) 360;
E) 400.

CEBRASPE

6. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) A figura a seguir ilustra a primeira etapa de um processo recursivo que, a partir de um hexágono regular em que os lados medem 1 cm de comprimento, constroem-se 6 novos hexágonos regulares.



Nesse processo, os lados do hexágono externo são divididos em 3 partes iguais e, conforme mostra a figura, são construídos outros 6 hexágonos regulares; em cada um deles, o comprimento dos lados é igual a $\frac{1}{3}$. Na segunda etapa, dividem-se os lados desses 6 novos hexágonos em 3 partes iguais, e constroem-se, de maneira semelhante à primeira etapa, outros 36 hexágonos regulares. Esse processo pode seguir indefinidamente.

Nessa situação, sabendo-se que, se o comprimento dos lados de um hexágono regular for igual a L cm, a área desse hexágono será igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$ cm² é correto concluir que a soma das áreas dos hexágonos obtidos na 5.ª etapa do processo recursivo descrito é igual a

A) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \sqrt{3}$ cm²

B) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \sqrt{3}$ cm²

C) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \sqrt{3}$ cm²

D) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \sqrt{3}$ cm²

E) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \sqrt{3}$ cm²

7. (CESPE/FUB/2018) A figura a seguir mostra uma mesa em que o tampo é um hexágono regular cujo lado mede 80 cm.

Julgue o item que se segue, a respeito da geometria do tampo dessa mesa.

A distância entre dois lados paralelos do tampo da mesa é superior a 1,3 m.

Outras Bancas

8. (AOCP/SED-MS/2022) Considere os seguintes polígonos, todos de mesmo perímetro: triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular. Sendo A_1 a área do triângulo equilátero, A_2 a área do quadrado e A_3 a área do hexágono, o valor de $\frac{A_1+A_3}{A_2}$ é:

A) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

B) $\frac{5\sqrt{2}}{9}$

C) $\frac{10\sqrt{3}}{9}$

D) $\frac{10\sqrt{2}}{9}$

E) 10

9. (RBO/ISS-BH/2022) A partir do conceito: “Dado um polígono convexo qualquer, diagonal é o segmento que une dois vértices não consecutivos”. Assim, um triângulo não possui diagonais, pois, como só possui três vértices, não é possível unir dois vértices não consecutivos, o quadrado possui duas diagonais e partir de um dos vértices, encontramos, apenas um outro vértice não consecutivo, enquanto, que no pentágono convexo temos 5 diagonais, e nesse polígono encontramos a partir de um vértice, dois outros vértices não consecutivos. A partir dessas informações, monta-se a tabela a seguir.

Nome do Polígono	Número de lados	Número de diagonais	A partir de um dos vértices, o número de vértices não consecutivos
Triângulo	3	0	0
Quadrado	4	2	1
Pentágono	5	5	2
Hexágono	6	9	3
Heptágono	7	14	4

Verifica-se que existe uma certa regularidade entre o número de lados, número de diagonais e o número de vértices não consecutivos contados a partir de um dos vértices. Então, o número de diagonais de um polígono convexo que possui 102 lados é igual a

A) 4.852.

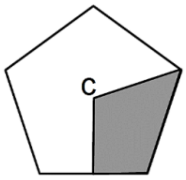
B) 4.947.

C) 4.998.

D) 5.049.

E) 5.100.

10. (UNIRV/PREF. RIO VERDE/2022) A figura representa um pentágono regular com centro no ponto C. A porcentagem sombreada no interior desse pentágono é



A) 20%

B) 25%

C) 30%

D) 40%

11. (IBFC/TCM-RJ/2016) Sabe-se que a soma dos ângulos internos de um polígono é igual a 1260°. Se esse polígono é regular, então cada ângulo externo desse polígono é igual a:

A) 140°

B) 40°

C) 126°

D) 54°

12. (QUADRIX/CRB 6/2014 - adaptada) Sabendo-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é 360°, qual é a soma dos ângulos internos de um polígono de 20 lados?

A) 3010°

B) 3240°

C) 3000°

D) 2550°

E) 2000°

13. (CONSULPLAN/PREF. MACAÍBA/2022) Em um undecágono regular, polígono de 11 lados, nenhuma de suas diagonais passa pelo seu centro, pois o seu número de lados é ímpar. Dessa forma, qual é o número total de diagonais desse polígono?

A) 33

B) 44

C) 55

D) 66

14. (QUADRIX/CRB 6/2014) Quantas diagonais tem um polígono de 15 lados, sabendo-se que diagonal é o segmento de reta que une dois lados não consecutivos de um polígono?

A) 90

B) 40

C) 180

D) 100

E) 80

15. (FUNDATEC/PREF. VACARIA/2021) Um hexágono regular de perímetro 18 tem a área de:

A) $9\sqrt{3}$

B) $18\sqrt{3}$

C) $23\sqrt{3}/2$.

D) $25\sqrt{3}/2$

E) $27\sqrt{3}/2$

16. (DIRENS/EEAR/2020) A diferença entre as medidas de um ângulo interno de um dodecágono regular e de um ângulo interno de um octógono também regular é

A) 15°

B) 25°

C) 30°

D) 40°

17. (QUADRIX/SEDF/2021) Um polígono de 1.000 lados é chamado de quiliágono. A respeito do quiliágono regular, julgue o item.

O ângulo externo é igual a 21' 36”.

Gabarito

1. LETRA D
2. LETRA C
3. LETRA E
4. LETRA D
5. LETRA B
6. LETRA A
7. CERTO
8. LETRA C
9. LETRA D
10. LETRA C
11. LETRA B
12. LETRA B
13. LETRA B
14. LETRA A
15. LETRA E
16. LETRA A
17. CERTO

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.