Até agora
maximizando lucros
$x$: caixas com
molho picante
$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
A partir de agora
$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ou $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

**Funções Receita**

A Acrosonic fabrica um sistema de caixas de som portáteis que pode ser comprado completamente montado ou na forma de kit. As equações de demanda que relacionam os preços unitários $p$ e $q$, com as quantidades demandadas semanais $x$ e $y$ das versões montadas ou kit do sistema de caixas de som, são dadas por

$$p = 300 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y \quad e \quad q = 240 - \frac{1}{8}x - \frac{3}{8}y$$

(a) Qual é a função receita total $R(x, y)$?

(b) Qual o domínio da função $R$?

$$\begin{aligned} R(x, y) &= xp + yq && (1) \\ &= x\left(300 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y\right) + y\left(240 - \frac{1}{8}x - \frac{3}{8}y\right) && (2) \\ &= -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y && (3) \end{aligned}$$

$300 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y \geq 0$
$240 - \frac{1}{8}x - \frac{3}{8}y \geq 0$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$y = -2x + 2400$
$y = -\frac{1}{3}x + 640$
2400 640 400 306 1000
Onde hachurar?
$x = 0, y = 0 \Rightarrow 300 \geq 0$
$x = 0, y = 0 \Rightarrow 240 \geq 0$
Domínio

**Derivadas parciais**

$$\begin{array}{rccc} f: & A \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

**Produtividade de um País**

A produção de certo país sul-americano é dada pela função

$$f(x, y) = 20x^{3/4}y^{1/4}$$

quando $x$ unidades de mão-de-obra e $y$ unidades de capital são usadas.

(a) Qual é a produtividade marginal de mão-de-obra e a produtividade marginal de capital quando as quantidades gastas com mão-de-obra e capital são de 256 unidades e 16 unidades, respectivamente?

(b) O governo deveria, desta vez, encorajar investimento em capital em vez de um gasto com maior mão-de-obra, a fim de aumentar a produtividade no país?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 20 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{3/4-1} y^{1/4} = 15x^{-1/4}y^{1/4}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(256,16) = 15 \cdot 256^{-1/4}16^{1/4} = 7.5$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 20x^{3/4} \cdot \frac{1}{4} \cdot y^{1/4-1} = 5x^{3/4}y^{-3/4}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(256,16) = 5 \cdot 256^{3/4}16^{-3/4} = 40$$

produtividade marginal
de mão-de-obra
produtividade marginal
de capital

- A produtividade aumenta 7.5 unidades para cada aumento de uma unidade em gasto de mão-de-obra (o gasto em capital é mantido constante e igual a 16 unidades
- A produtividade aumenta 40 unidades para cada aumento de uma unidade em capital (o gasto em mão de obra é mantido constante e igual a 256 unidades)

SIM

$f$

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

## Derivadas Parciais de Segunda Ordem

$f_{xx}$
$f_{yy}$
$f_{xy}$
$f_{yx}$

$f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^2$

$f_x = 3x^2 - 6xy + 3y^2$

$f_y = -3x^2 + 6xy + 2y$

$f_{xx} = 6x - 6y$

$f_{xy} = -6x + 6y$

$f_{yx} = -6x + 6y$

$f_{yy} = 6x + 2$

## Sua vez
## Funções Receita

A receita semanal total (em dólares) da Country Workshop associada à fabricação e à venda de suas mesas de escritório é dada pela função

$$R(x,y) = -0.2x^2 - 0.25y^2 - 0.2xy + 200x + 160y$$

onde $x$ representa o número de unidades acabadas fabricadas e $y$ representa o número de unidades sem acabamento produzidas e vendidas a cada semana. Calcule $\dfrac{\partial R}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial R}{\partial y}$ quando $x = 300$ e $y = 250$. Interprete seus resultados.

**Resposta:**

- $\$30/$unidade em mesas acabadas
- $-\$25/$unidades em mesas inacabadas
- A receita semanal aumenta $\$30/$unidade para cada mesa acabada adicional produzida quando o nível de produção de mesas inacabadas permanece fixo em 250.
- A receita semanal diminui $\$25/$unidade quando cada mesa inacabada adicional é produzida e o nível de produção de mesas acabadas permanece fixo em 300.

Calcule as derivadas de segunda ordem das funções:

(a) $f(x, y) = x^2y + xy^3$

(b) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + x - 2y$

Resposta:

(a)
- $f_{xx} = 2y$
- $f_{xy} = 2x + 3y^2 = f_{yx}$
- $f_{yy} = 6xy$

(b)
- $f_{xx} = 2$
- $f_{xy} = f_{yx} = -2$
- $f_{yy} = 4$

## Determinando extremos locais

1. Determine os pontos críticos de $f(x, y)$ resolvendo o sistema de equações simultâneas

$$\begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{aligned}$$

2. Realize o teste da segunda derivada: Seja

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

Neste caso,

(a) $D(a, b) > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$ implicam que $f(x, y)$ tem um máximo local no ponto $(a, b)$

(b) $D(a, b) > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$ implicam que $f(x, y)$ tem um mínimo local no ponto $(a, b)$

(c) $D(a, b) < 0$ implica que $f(x, y)$ não tem nem um ponto de máximo local nem um mínimo local no ponto $(a, b)$

(d) $D(a, b) = 0$ implica que o teste é inconclusivo, de forma que alguma outra técnica deve ser usada para resolver o problema

**Maximizando Lucro**

A receita total semanal (em dólares) da Acrosonic obtida na produção e venda dos sistemas alto-falantes portáteis é dada por

$$R(x,y) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y$$

onde $x$ denota o número de unidades completamente montadas e $y$ denota o número de kits produzidos e vendidos por semana.

O custo total semanal em razão da produção desses sistemas de alto-falantes é de

$$C(x,y) = 180x + 140y + 5000$$

dólares, onde $x$ e $y$ têm o mesmo significado que anteriormente.

Determine quantas unidades montadas e quantos kits a Acrosonic deve produzir semanalmente para maximizar seu lucro.

## Lucro semanal

$$\begin{aligned}
L(x,y) &= R(x,y) - C(x,y) \\
&= \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y\right) - (180x + 140y + 5000) \\
&= -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5000
\end{aligned}$$

$$L(x,y) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5000$$

## Derivadas parciais

$$\begin{aligned}
L_x &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 120 = 0 \\
L_y &= -\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x + 100 = 0
\end{aligned}$$

Isolando $y$: $y = -2x + 480$
Substituindo $y$ na segunda equação
$-\frac{3}{4}(-2x + 480) - \frac{1}{4}x + 100 = 0$
$6x - 1440 - x + 400 = 0$
$x = 208$
$y = -2 \cdot 208 + 480 \;\Rightarrow y = 64$

## Derivadas de segunda ordem

$$L_{xx} = -\frac{1}{2} \qquad L_{xy} = -\frac{1}{4} \qquad L_{yy} = -\frac{3}{4}$$

$$D(x,y) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

$$D(208,64) = \frac{5}{16} > 0$$

$$L_{xx}(208,64) < 0$$

O ponto $(208,64)$ fornece ponto de máximo
Qual o maior lucro?

$$L(208,64) = -\frac{1}{4}208^2 - \frac{3}{8}64^2 - \frac{1}{4}208 \cdot 64 + 120 \cdot 208 + 100 \cdot 64 - 5000 = 10680$$

O maior lucro semanal possível é $\$10.680,00$ e é obtido quando se produzem 208 unidades completamente montadas e 64 kits

**Questão motivadora:**
Considere que a função de produção de um país seja dada por

$$P(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$$

em que

$L$: investimento em trabalho

$K$: investimento em capital

Suponha que a cesta de insumo atual é de $(10.000, 625)$. Determine as proporções que devem ser acrescentadas a $K$ e a $L$ em $(10.000, 625)$ para aumentar a produção mais rapidamente.

## Comprimento (norma) de um vetor

$v = (v_1, v_2)$

$$\| v \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$v = (v_1, v_2, v_3)$

$$\| v \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

**Exemplo**

A norma do vetor $v = (1, -2, 3)$ é
$\| v \| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$
A norma do vetor $v = (-3, 4)$ é
$\| v \| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
Um vetor de norma igual a 1 é chamado **vetor unitário**
$v = (0, 0, 1)$
$\| v \| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$
$v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
$\| v \| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$
**é unitário**

**Como obter um vetor unitário?**
Dado um vetor não nulo v, o vetor

$$u = \left(\frac{1}{\| v \|}\right) v$$

é um vetor unitário na direção de v
**Exemplo**
Determine um vetor unitário na direção do vetor $v = (1, -2, 3)$
$\| v \| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$
$u = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -2, 3) = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$
$\| u \| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{14}})^2 + (\frac{-2}{\sqrt{14}})^2 + (\frac{3}{\sqrt{14}})^2} = \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{4}{14} + \frac{9}{14}} = \sqrt{\frac{14}{14}} = 1$

**Definição**
O **produto escalar** ou **interno** de dois vetores v e u é definido por

$$v \cdot u = \begin{cases} 0, & se \ \ v = \overrightarrow{0} \ \ ou \ \ u = \overrightarrow{0} \\ \| v \| \| u \| cos\theta, & se \ \ v \neq \overrightarrow{0} \ \ e \ \ u \neq \overrightarrow{0} \end{cases}$$

em que $\theta$ é o ângulo entre $u$ e $v$.
**Teorema**
O **produto escalar** ou **interno**, $v \cdot u$, entre dois vetores é dado por

$$v \cdot u = v_1 u_1 + v_2 u_2,$$

se $v = (v_1, v_2)$ e $u = (u_1, u_2)$
O **produto escalar** ou **interno**, $v \cdot u$, entre dois vetores é dado por

$$v \cdot u = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3,$$

se $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$
$u = (1, -2, 0)$ e $v = (0, 2, 3)$
$u \cdot v = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 3 = -4$

**Exemplo**

Determine o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$

$v = (x, y)$

$cos\theta = \dfrac{x}{\| v \|}$

$cos\frac{\pi}{6} = \dfrac{x}{1}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$sen\theta = \dfrac{y}{\| v \|}$

$sen\frac{\pi}{6} = \dfrac{y}{1}$

$y = \frac{1}{2}$

$v = (x, y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

$\| v \| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

Verificando se v é unitário

**Sobre o gráfico de uma função de $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$**
**Limitações das derivadas parciais**

https://docplayer.es/49657923-Leccion-11-derivadas-parciales-y-direccionales-gradiente-introduccion-al-calculo-infinitesimal-i-t-i-gestion.html

**Derivada direcional**

Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de $z$ em $(x_0, y_0)$ na direção de um vetor unitário arbitrário $u = (a, b)$. Para fazê-lo devemos considerar a superfície $S$ com equação $z = f(x, y)$ e tomar $z_0 = f(x_0, y_0)$. Então o ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ está em $S$. O plano vertical que passa por $P$ na direção de $u$ intercepta $S$ em uma curva $C$. A inclinação da reta tangente $T$ a $C$ em $P$ é a taxa de variação de $z$ na direção de $u$.

**Derivada direcional**

Se $f$ é uma função diferenciável de $x$ e $y$, então $f$ tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $u = (a, b)$ e

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

**Exemplo**

Encontre a derivada direcional $D_u f(x,y)$ se

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

e $u$ é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$. Qual é $D_u f(1,2)$?

$$\begin{aligned} D_u f(x,y) &= f_x(x,y)cos\frac{\pi}{6} + f_y(x,y)sen\frac{\pi}{6} && (4) \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2} && (5) \\ &= \frac{1}{2}[3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y] && (6) \end{aligned}$$

$$D_u f(1,2) = \tfrac{1}{2}[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + (8 - 3\sqrt{3})(2)] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

Se $f$ é uma função de duas variáveis $x$ e $y$, então o **gradiente** de $f$ é a função vetorial $\triangledown f$ definida por

$$\triangledown f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$$

Lembrando que derivada direcional é dada por

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

em que $u = (a,b)$
Temos,

$$D_u f(x,y) = \triangledown f(x,y) \cdot u.$$

**Exemplo**
Determine a derivada direcional da função $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2,-1)$ na direção do vetor $v = (2,5)$.
$f_x(x,y) = 2xy^3$
$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4$
**Vetor gradiente**
$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (2xy^3, 3x^2y^2 - 4)$
**Verificando se o vetor $v$ é unitário**
$\| v \| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \neq 1$
$u = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{\sqrt{29}}(2,5) = (\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}})$
$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u = (2xy^3, 3x^2y^2 - 4) \cdot (\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}})$

$$= 2xy^3 \frac{2}{\sqrt{29}} + (3x^2y^2 - 4)\frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$D_u f(2,-1) = 2(2)(-1)^3 \frac{2}{\sqrt{29}} + (3(2)^2(-1)^2 - 4)\frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

**Teorema**
Suponha que $f$ seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_u f(\mathbf{x})$ é $|\nabla f(\mathbf{x})|$ ocorre quando $u$ tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

**Demonstração:**

Lembre que $v \cdot u = \| v \| \| u \| \, cos\theta, se \;\; v \neq \overrightarrow{0} \;\; e \;\; u \neq \overrightarrow{0}$

$\theta$ é o ângulo entre $u$ e $v$.

$D_u f = \nabla f \cdot u = \| \nabla f \| \| u \| \; cos\theta = \| \nabla f \| \, cos\theta$

Lembre-se que cosseno é uma função limitada entre $-1$ e 1.

Logo,

$-1 \leq cos\theta \leq 1 \Leftrightarrow - \| \nabla f \| \leq \| \nabla f \| \, cos\theta \leq \| \nabla f \|$

$\Leftrightarrow - \| \nabla f \| \leq D_u f \leq \| \nabla f \|$

Menor
valor
de $D_u f$

Maior
valor
de $D_u f$

$= 1$

Quando ocorre o maior valor $D_u f$?
Quando $cos\theta$ atingir o maior valor
Menor valor do $cos\theta = -1$
Maior valor do $cos\theta = 1$
$\theta = 0, \theta \in [0, 2\pi)$
$\nabla f \parallel u$
$- \| \nabla f \| \leq \| \nabla f \| cos\theta \leq \| \nabla f \|$
$\Rightarrow$
paralelos

$P_K = 4\frac{3}{4}K^{\frac{3}{4}-1}L^{\frac{1}{4}} = 3K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}$
$P_L = 4\frac{1}{4}K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}-1} = K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}$
$\triangledown P(K, L) = (3K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}, K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}})$
$\triangledown P(10.000, 625) = (3 \cdot 10.000^{-\frac{1}{4}} \cdot 625^{\frac{1}{4}}, 10.000^{\frac{3}{4}} \cdot 625^{-\frac{3}{4}}) = (1.5, 8)$
Devemos acrescentar $K$ e $L$ em uma proporção de 1.5 para 8.