Aula 04

Banco do Brasil - Matemática - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

28 de Dezembro de 2022

Índice

TEORIA DOS CONJUNTOS

Introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição de Conjunto

Iniciaremos o nosso estudo da matemática pela **Teoria dos Conjuntos**. A escolha desse conteúdo é **cuidadosamente pensada** para que você possa formar **uma base sólida,** que lhe servirá de alicerce na construção de toda matemática necessária a sua prova.

A palavra "conjunto" significa exatamente o que você deve estar pensando: uma espécie de **grupo**, **lista** ou **uma coleção** de determinado objeto. Observe alguns exemplos de **como podemos representar** conjuntos na matemática:

- $A = \{a, b, c, d, e\}$
- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

O conjunto A é formado pelas **5 primeiras letras** no nosso alfabeto. O conjunto B é formado por **5 números pares**. O conjunto C é formado por **10 números ímpares**. Você pode estar se perguntando: *só podemos fazer conjuntos de números e letras?*

A resposta é não! Podemos criar conjuntos de basicamente qualquer coisa, desde um conjunto representando **os funcionários de determinada empresa** a **conjuntos formados por outros conjuntos!** Por exemplo, o conjunto E lista alguns professores de exatas do Estratégia Concursos.

- $E = \{Francisco, Eduardo, Vinicius, Luana, Djefferson\}$

Primeiramente, note que um conjunto muitas vezes aparecerá com seus elementos listados **dentro de um par de chaves**. Por isso, sempre que for escrever algum conjunto, não esqueça de colocar seus elementos aqui dentro: $\{\ \}$. É também usual as pessoas nomearem seus conjuntos com letras maiúsculas, mas **isso não é mandatório, nem necessário,** em algumas situações.

Relação de Pertinência

Quando um elemento faz parte de determinado conjunto, dizemos que **o elemento PERTENCE ao conjunto**. Essa relação de pertinência **entre um elemento e um conjunto** é representada pelo símbolo $\in$.

- $b \in A$: **Lemos**: b **pertence** a A;
- $4 \in B$: **Lemos**: 4 **pertence** a B;
- $15 \in C$: **Lemos**: 15 **pertence** a C.

Atente-se à simbologia! Podemos dizer que um elemento **não pertence** a um determinado conjunto. Para isso, utilizamos o símbolo "não pertence": $\notin$.

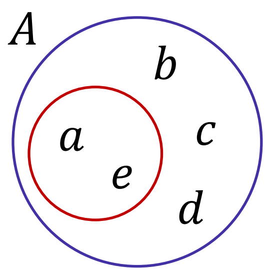
- $z \notin A$: z **não pertence** a A;
- $100 \notin B$: 100 **não pertence** a B;
- $Beltrano \notin E$: $Beltrano$ **não pertence** a E.

Relação de Inclusão

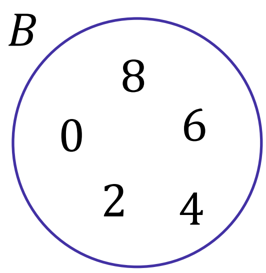
Existe mais um tipo de relação que devemos estudar: **a relação de inclusão**. Nesse tipo de relação, é estabelecido **um relacionamento entre dois conjuntos** e não mais entre um elemento e outro conjunto. Para isso, usamos uma simbologia específica que você deverá guardar: $\subset, \not\subset, \supset$ ***e*** $\not\supset$. Vamos ver com calma o que cada um deles diz! Considere: $\boldsymbol{A = \{a, b, c, d, e\}}$, $\boldsymbol{B = \{0, 2, 4, 6, 8\}}$ e $\boldsymbol{C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}}$.

- $\{a, e\} \subset A$: **Lemos**: $\{a, e\}$ **está contido** em A;
- $\{0, 2, 8\} \subset B$: **Lemos**: $\{0, 2, 8\}$ **está contido** em B;

Perceba que agora não estamos estabelecemos uma relação entre um elemento e um conjunto**. A relação de inclusão envolve <u>2 conjuntos</u>!** Diante disso, podemos introduzir um novo termo: **o subconjunto**. O subconjunto nada mais é do que **parte de um conjunto maior**. Quando dizemos, por exemplo, que $\boldsymbol{\{a, e\}}$ **está contido em $\boldsymbol{A}$**, estamos dizendo, com outras palavras, que $\{a, e\}$ é um subconjunto de $\boldsymbol{A}$.



O diagrama acima ajuda a compreender a relação de inclusão. Observe que **o conjunto $\boldsymbol{\{a, e\}}$ está inteiramente contido em $\boldsymbol{A}$**. Nessas condições, dizemos que $\{a, e\}$ está contido em A ou ainda que $\{a, e\}$ é um subconjunto de A. Algumas vezes, você poderá ver **o termo "parte" sendo usado como sinônimo de subconjunto**. Agora, imagine a seguinte situação:



Nesse caso, temos que $\{a, e\} \not\subset B$: **Lemos**: $\{a, e\}$ não está contido em B ou $\{a, e\}$ não é um subconjunto de B. Vamos ver mais alguns exemplos de quando **um conjunto não está contido em outro**:

- $\{a, e, f\} \not\subset A$
- $\{1, 3, 5\} \not\subset B$
- $\{0, 1\} \not\subset C$
- $\{Sicrano, Beltrano\} \not\subset E$

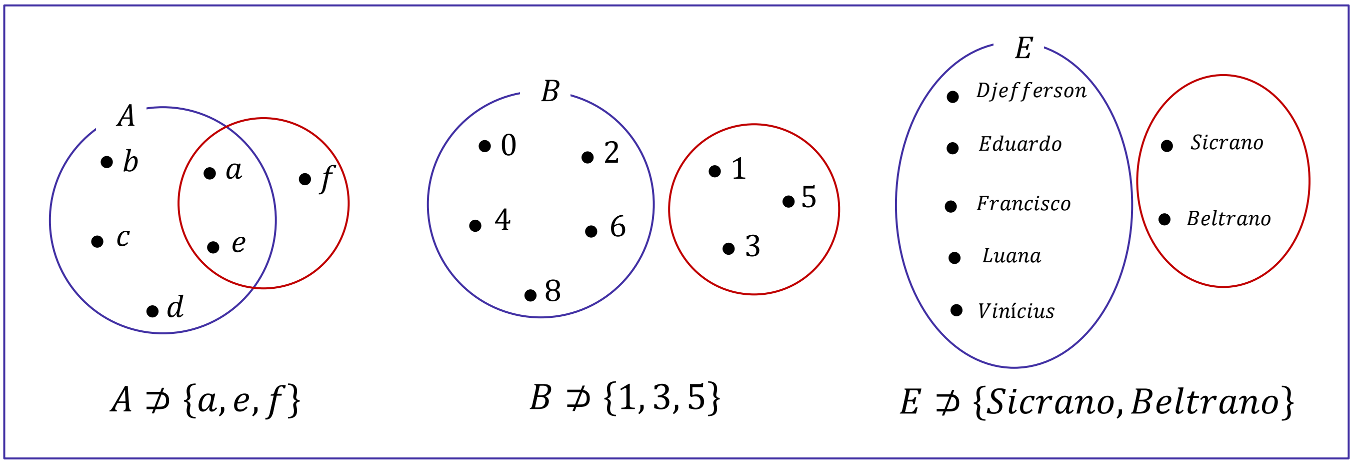
Perceba que **basta um elemento do conjunto não pertencer** ao conjunto maior que **não poderemos estabelecer uma relação de inclusão** entre os dois conjuntos e, portanto, dizemos que um não está contido no outro. Pessoal, **se $\{a, e\}$ está contido em A,** então também podemos dizer que ***A* contém $\{a, e\}$**. Quando queremos expressar essa ideia de que um conjunto maior contém determinado subconjunto, utilizamos o símbolo $\supset$.

- $A \supset \{a, e\}$: A **contém** $\{a, e\}$
- $B \supset \{0, 2, 8\}$: B **contém** $\{0, 2, 8\}$
- $C \supset \{1, 3, 5, 19\}$: C **contém** $\{1, 3, 5, 19\}$
- $E \supset \{Francisco, Eduardo\}$: E **contém** $\{Francisco, Eduardo\}$

Analogamente, podemos estender o raciocínio para quando queremos dizer que determinado conjunto **não contém outro**. Nessas situações, utilizamos $\not\supset$.

- $A \not\supset \{a, e, f\}$: A **não contém** $\{a, e, f\}$
- $C \not\supset \{0, 1\}$: C **não contém** $\{0, 1\}$
- $E \not\supset \{Sicrano, Beltrano\}$ -- E **não contém** $\{Sicrano, Beltrano\}$

ESQUEMATIZANDO



(PREF. DE PINHAIS/2019) Considerando os conjuntos $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, assinale a alternativa CORRETA:

A) O conjunto A está contido no conjunto B.

B) O conjunto B está contido no conjunto A.

C) O conjunto C está contido no conjunto B.

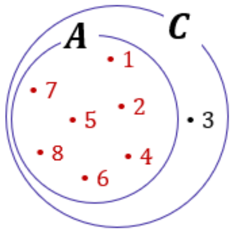
D) O conjunto C está contido no conjunto A.

E) O conjunto A está contido no conjunto C.

Comentários:

$$\boldsymbol{C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}$$

Observe que os elementos destacados em vermelho **são exatamente todos os elementos do conjunto A**. Perceba, portanto, que **A está contido em C**. Para facilitar a visualização, veja o diagrama a seguir.



Gabarito: Letra E.

Igualdade entre Conjuntos

Pessoal, dois conjuntos são considerados iguais (ou idênticos) se eles possuem **exatamente os mesmos elementos!** Todo elemento que estiver em um deve necessariamente estar no outro. Por exemplo, considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 2, 1\}$. Nessa situação, podemos escrever que $A = B$.

Professor, mas a ordem está diferente!

Não importa! O importante é que todos elementos de A são os mesmos elementos de B.

(MPE-GO/2022) Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{0, 8, 2\}$ e $\{x, y, 2\}$ são iguais, podemos afirmar que:

A) $x = 0$ e $y = 8$

B) $x + y = 8$

C) $x < y$

D) $x + 2y = 8$

Comentários:

Para que os dois conjuntos sejam iguais, **seus elementos devem ser iguais**. Note que o "2" já aparece nos dois conjuntos, então não vamos nos preocupar com ele.

$$\{0, 8, 2\}$$

$$\{x, y, 2\}$$

Com isso, observe que **podemos ter duas situações**.

1ª situação) $x = 0$ e $y = 8$

2ª situação) $x = 8$ e $y = 0$

Sabendo disso, vamos analisar as alternativas.

A) $x = 0$ e $y = 8$

Errado. Essa é a nossa primeira situação, que não é necessariamente verdade. Também é uma possibilidade o caso em que $x = 8$ e $y = 0$.

B) $x + y = 8$

Correto. Esse é nosso gabarito, pessoal. Verifique que **independentemente da situação**, sempre vamos ter $x + y = 8$. Afinal, sempre um vai ser 0 (zero) e o outro será 8 (oito), de forma que a soma é sempre 8 (oito).

C) $x < y$

Errado. Essa afirmação é verdade apenas para a primeira situação. Como podemos ter o caso em que $x = 8$ e $y = 0$, tem-se também que x pode ser maior que y.

D) $x + 2y = 8$

Errado. Essa equação é válida apenas para a segunda situação. No caso em que $x = 0$ e $y = 8$, já é possível verificar que ela é inválida.

Gabarito: LETRA B.

Subconjuntos

Vamos aprofundar um pouco o nosso estudo sobre **os subconjuntos**. Para começar, tente dizer quais são os subconjuntos do conjunto $A = \{a, b\}$. *Pronto?* Observe como fica:

Conjunto	Subconjuntos
$A = \{a, b\}$	$\emptyset$
	$\{a\}$
	$\{b\}$
	$\{a, b\}$

A tabela acima lista todos os subconjuntos que podemos formar utilizando o conjunto A. Sabendo disso, podemos escrever as seguintes relações:

- $\emptyset \subset A$
- $\{a\} \subset A$
- $\{b\} \subset A$
- $\{a, b\} \subset A$

Devemos falar um pouco do **conjunto vazio e conjunto unitário**. O conjunto vazio, como o próprio nome sugere, **é um conjunto que não possui elementos**! É representado por meio do **símbolo** $\emptyset$ mas também pode aparecer como um simples par de chaves $\{\ \}$. Já **o conjunto unitário** é todo conjunto que **possui um único elemento**!

TOME NOTA!

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

Seja X um conjunto genérico, então:

$$\emptyset \subset X \qquad ou \qquad \{\ \} \subset X$$

Observe que $\{a, b\} \subset A$, indicando que **qualquer conjunto é também um subconjunto de si mesmo**! Seja $B = \{a, b, c\}$. Vamos listar os seus subconjuntos também?

Conjunto	Subconjuntos
$B = \{a, b, c\}$	$\emptyset$
	$\{a\}$
	$\{b\}$
	$\{c\}$
	$\{a, b\}$
	$\{a, c\}$
	$\{b, c\}$
	$\{a, b, c\}$

Quando um subconjunto de B é diferente do próprio B, chamamos ele de **subconjunto próprio de B**. Por exemplo, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ são subconjuntos próprios de B. Já o subconjunto $\{a, b, c\}$ é denominado **impróprio** pois é igual ao próprio B! Com os conjuntos listados na tabela acima são subconjuntos de B, então podemos escrever:

- $\emptyset \subset B$
- $\{a\} \subset B$
- $\{b\} \subset B$
- $\{c\} \subset B$
- $\{a, b\} \subset B$
- $\{a, c\} \subset B$
- $\{b, c\} \subset B$
- $\{a, b, c\} \subset$

Pessoal, observe que **os subconjuntos de um conjunto são apenas diferentes combinações de seus elementos**. Portanto, se você precisar listar os subconjuntos, siga os seguintes passos:

Passo 1: O primeiro conjunto que você deve anotar como subconjunto é o **conjunto vazio**.

Passo 2: Depois, transforme em subconjunto cada elemento, um por um.

Passo 3: Em seguida, escreva os subconjuntos formado por pares de elementos.

Passo 4: Acabando os pares, pegue os trios e assim sucessivamente.

Seguindo essa receita, vamos listar os subconjuntos de $C = \{1, 2, 3\}$?

Passo 1: Você não deve esquecer que **o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto**, portanto:

$$\emptyset$$

Passo 2: Transformando cada elemento em um subconjunto, **um por um**.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$$

Passo 3: Escrever os subconjuntos formado por **pares** de elementos.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}$$

Passo 4: Ir para os trios.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}, \{1, 2, 3\}$$

Como o conjunto C só possui 3 elementos, encerramos por aqui! Listamos todos os subconjuntos dele. Observe que quando tínhamos um conjunto com **2 elementos, obtivemos 4 subconjuntos**. Ao aumentar um elemento no conjunto, **passamos a ter 8 subconjuntos**. Será que é possível estabelecer uma fórmula para calcular **o número de subconjuntos baseado na quantidade de elementos de um conjunto**?

É possível sim e **a fórmula é bem simples**. Seja $n(A)$ **o número de elementos de um conjunto** A. Então, **o número de subconjuntos de** A**,** n_{S_A}, é dado por:

$$\boxed{n_{S_A} = 2^{n(A)}}$$

Por exemplo, vamos voltar no conjunto $C = \{1, 2, 3\}$. Como ele tem **<u>três</u> elementos**, para encontrar o número de subconjuntos de C, fazemos assim:

$$n_{S_C} = 2^{n(C)} \quad \rightarrow \quad n_{S_C} = 2^3 \quad \rightarrow \quad n_{S_C} = 8$$

Logo, C tem **<u>oito</u> subconjuntos**.

(Polícia Federal/2021) Considere os seguintes conjuntos:

P = {todos os policiais federais em efetivo exercício no país}
P_1 = {policiais federais em efetivo exercício no país e que têm até 1 ano de experiência no exercício do cargo}
P_2 = {policiais federais em efetivo exercício no país e que têm até 2 anos de experiência no exercício do cargo}
P_3 = {policiais federais em efetivo exercício no país e que têm até 3 anos de experiência no exercício do cargo}

e, assim, sucessivamente. Com base nessas informações, julgue o item que se seguem.

P_2 é subconjunto de P_1.

Comentários

Galera, para que P_2 seja um subconjunto de P_1, P_2 **precisa estar contido em** P_1. De acordo com o enunciado, P_2 representa os policiais federais em exercício no país com até 2 anos de experiência, enquanto P_1 são aqueles com até 1 ano de experiência.

Observe que um policial que possuísse **um ano <u>e meio</u> de experiência**, pertenceria a P_2, mas não a P_1. Logo, não podemos dizer que P_2 é um subconjunto de P_1, uma vez que podem existir elementos em P_2 que não estejam em P_1.

Gabarito: ERRADO.

(IDAF-AC/2020) Quantos subconjuntos possui o conjunto das vogais?

A) 10

B) 25

C) 32

D) 50

Comentários

Seja $\boldsymbol{V}$ o conjunto formado por **todas as vogais**, então temos que: $V = \{a, e, i, o, u\}$

O conjunto acima **possui 5 elementos**, sabemos que o número de subconjuntos de um conjunto depende da quantidade de elementos e é dado através de uma fórmula.

$$n_{S_V} = 2^{n(V)} \quad \rightarrow \quad n_{S_V} = 2^5 \quad \rightarrow \quad n_{S_V} = 32$$

Gabarito: Letra C.

Conjunto das Partes

Você sabia que **podemos juntar todos os subconjuntos de um conjunto para formar um novo conjunto**? Esse novo conjunto formado é denominado **conjunto das partes** e é representado pelo **símbolo** $\wp$. Por exemplo, os **conjuntos das partes** de $A = \{a, b\}$ e de $B = \{a, b, c\}$ são:

$$\wp(A) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\wp(B) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Observe que $\wp(A)$ e $\wp(B)$ são **conjuntos formados por outros conjuntos**! Note ainda que **a sua quantidade de elementos é exatamente a quantidade de subconjuntos** calculada pela fórmula $\boldsymbol{nS_A = 2^{n(A)}}$. Um outro ponto que chamamos atenção é que, no conjunto das partes, listamos **o conjunto vazio** $\{\ \}$ explicitamente com um dos seus elementos.

(PREF. PETROLINA/2019) Dado um conjunto A, representa-se por $\wp(A)$ o conjunto formado por todos os subconjuntos de A – o chamado conjunto das partes que também costuma ser representado por 2^A. Se $A = \{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}\}$, qual das alternativas seguintes NÃO é elemento de $\wp(A)$?

A) ϕ

B) $\{\phi, 1\}$

C) $\{1, \{\phi, 1\}\}$

D) $\{\phi, \{\phi\}\}$

E) $\{1, \{1\}\}$

Comentários:

O jeito mais imediato de resolver a questão **é listar todos os subconjuntos de $\boldsymbol{A}$**. Perceba que teremos $2^4 =$ **$\mathbf{16}$ subconjuntos**. Para nos auxiliar, vamos usar uma tabela. Vale também destacar que **$\boldsymbol{\phi}$ representa o conjunto vazio** e você deve lembrar que **o conjunto vazio é sempre subconjunto** de qualquer conjunto.

Conjunto	Subconjuntos	
$\{\boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\phi}\}, \mathbf{1}, \{\mathbf{1}\}\}$	$\boldsymbol{\phi}$	$\{\{\phi\}, 1\}$
	$\{\phi\}$	$\{\{\phi\}, \{1\}\}$
	$\{\{\phi\}\}$	$\{\mathbf{1}, \{\mathbf{1}\}\}$
	$\{1\}$	$\{\phi, \{\phi\}, 1\}$
	$\{\{1\}\}$	$\{\phi, 1, \{1\}\}$
	$\{\boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\phi}\}\}$	$\{\phi, \{\phi\}, \{1\}\}$
	$\{\boldsymbol{\phi}, \mathbf{1}\}$	$\{\{\phi\}, 1, \{1\}\}$
	$\{\phi, \{1\}\}$	$\{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}$

Ao listar os subconjuntos do conjunto A, percebemos que apenas o conjunto $\{\mathbf{1}, \{\boldsymbol{\phi}, \mathbf{1}\}\}$ não é elemento de $\wp(A)$. Isso acontece, pois, o conjunto **$\{\boldsymbol{\phi}, \mathbf{1}\}$ não é elemento de A**.

▪

Gabarito: Letra C.

Observe o conjunto F exemplificado abaixo.

$$F = \{1, 2, 3, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{W\}\}$$

Assim como o conjunto das partes, ***F* é um conjunto que possui como elemento outros conjuntos**. Note que o conjunto **$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ é um elemento de $\boldsymbol{F}$**. Nessas situações, e somente nelas, podemos escrever $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \in \boldsymbol{F}$. Galera, muita atenção aqui! **$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ não é um subconjunto de F, é um elemento!** Perceba que ele está listado juntamente com os demais elementos!

- $1 \in F$
- $2 \in F$
- $3 \in F$
- $\{a, b, c\} \in F$
- $\{d, e, f\} \in F$
- $\{W\} \in F$

E nesses casos, *quando usaremos a relação de inclusão?* Veja alguns exemplos de subconjuntos de F:

- $\{1\} \subset F$
- $\{1,2\} \subset F$
- $\{1,2,3\} \subset F$
- $\{\{a,b,c,\}\} \subset F$
- $\{\{W\}\} \subset F$
- $\{\{a,b,c,\},\{d,e,f\},\{W\}\} \subset F$

Observe que, para representar os subconjuntos que contém outros conjuntos, utilizamos, sem problema algum, dois pares de chaves. Tenha bastante cuidado em questões que tragam esse tipo de abordagem! Já vi muitas bancas se enrolarem ao cobrar questões com essa temática, pois desconhecem que conjuntos podem sim ser elementos de outros conjuntos e que podemos estabelecer uma relação de pertinência nessas situações.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. JEQUIÉ/2018) Considerando o conjunto $A = \{\Omega, \Delta, \{\Delta\}\}$ qual das afirmações abaixo não está correta?

A) $\Omega \in \mathrm{A}$

B) $\Omega \subset \mathrm{A}$

C) $\{\Delta\} \subset A$

D) $\{\Delta\} \in A$

Comentários:

Os elementos de A são: Δ, $\{\Delta\}$ e Ω. Logo: $\begin{cases} \Delta \in \mathrm{A}; \\ \{\Delta\} \in A; \\ \Omega \in \mathrm{A}. \end{cases}$

Essa pequena análise permite concluir que **as alternativas A e D estão corretas** e, portanto, não podem ser nosso gabarito, já que **ele procura a alternativa incorreta**. Observe que como **Δ é um elemento de A**, então podemos dizer que **$\{\Delta\}$ é um subconjunto de A**.

Dessa forma, é também correto escrever que $\{\Delta\} \subset \mathrm{A}$. *Opa, espere aí, professor! Então podemos dizer nessa situação que $\{\Delta\} \subset A$ e $\{\Delta\} \in A$?* Isso! **Essa conclusão somente é válida pois Δ e $\{\Delta\}$ são elementos de um mesmo conjunto**!

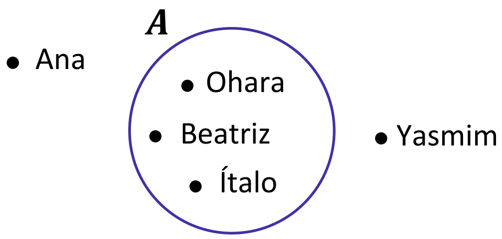
Ao escrever que $\{\Delta\} \subset \mathrm{A}$ estamos nos referindo ao subconjunto $\{\Delta\}$ que existe pois Δ é um elemento de A. **Quando escrevemos $\{\Delta\} \in A$, estamos nos referindo ao elemento $\{\Delta\}$, que é explicitamente declarado**. O subconjunto associado ao elemento $\{\Delta\}$ é representado com mais um par de chaves: $\{\{\Delta\}\}$. Nessa situação, dizemos que $\{\{\Delta\}\} \subset A$.

Com isso, a única alternativa que pode estar errada é a **letra B**, pois **Ω é um elemento de A e, portanto, o correto seria $\Omega \in \mathrm{A}$**.

União, Intersecção, Complementar e Diferença

Representação por Diagramas

Você deve ter visto ao longo da aula que **apareceram alguns conjuntos na forma de diagramas**. Esse tipo de representação é extremamente útil na resolução de questões, pois **possibilita uma melhor compreensão do problema**. Por exemplo, seja $\boldsymbol{A}$ o conjunto de funcionários de uma determinada empresa.



Todos aqueles que estão dentro do conjunto $\boldsymbol{A}$ **representam funcionários da empresa**. **Quem está fora, não é funcionário da empresa**. Olhando simplesmente para o diagrama, podemos dizer que:

- $Ohara \in A$;
- $Beatriz \in A$;
- $Italo \in A$;
- $Yasmim \notin A$;
- $Ana \notin A$.

Esses diagramas são bastante conhecidos no meio matemático e possuem um nome especial: são os **Diagramas de Venn-Euler** ou, simplesmente, **Diagramas de Venn**. Esse tipo de representação é utilizado principalmente quando **precisamos representar vários conjuntos ao mesmo tempo**. Nos tópicos a seguir, usaremos bastante esses diagramas e você logo ficará habituado.

Existem diferentes maneiras de representarmos os conjuntos. A primeira dela é como estamos fazendo desde o começo da aula, como por exemplo, em $V = \{a, e, i, o, u\}$. Chamamos esse tipo de representação de "**representação por enumeração**".

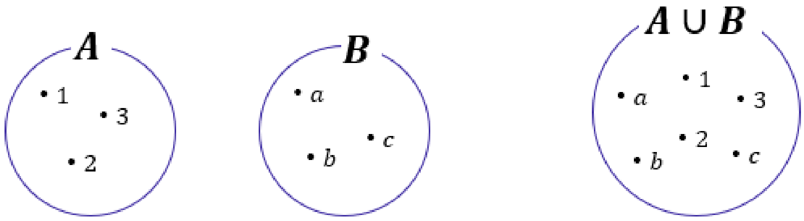
Ademais, temos a **representação por propriedade**. Para entender melhor, considere o mesmo conjunto V citado anteriormente. Ele também poderia ser escrito da seguinte forma: $\boldsymbol{V = \{x \mid x \text{ é vogal}\}}$.

Na prática, podemos ler tal conjunto da seguinte forma: **V é o conjunto dos elementos de x, tal que x é vogal**. Lemos essa barrinha vertical como **"tal que"**. **Não esqueça!**

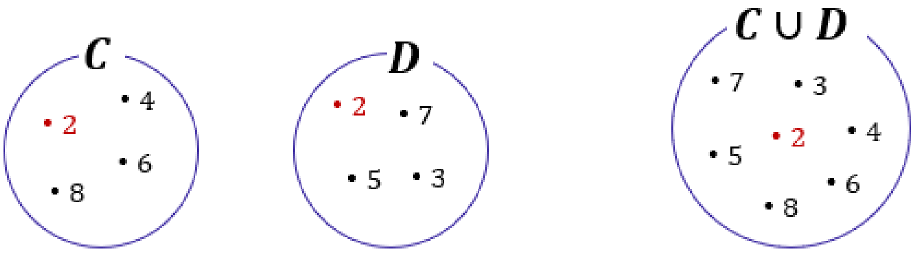
Por fim, temos a **representação por diagramas** que estudamos agora a pouco! Fechou?

União

Nessa parte da nossa aula, veremos que existem **várias operações** que os conjuntos podem se submeter. A mais conhecida talvez seja **a união (ou reunião) de conjuntos**. A união de conjuntos é representada pelo **símbolo** $\cup$ e, basicamente, **funde dois conjuntos em um só**.



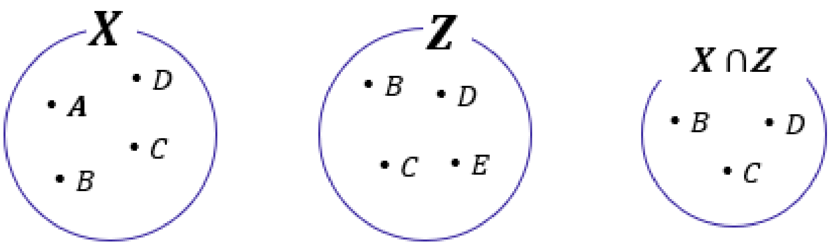
No diagrama acima, temos que $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Quando fazemos a união de A e B, criamos um conjunto que possui **todos os elementos dos dois conjuntos**, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$. Haverá casos em que os conjuntos possuirão um mesmo elemento e, quando for necessário fazer a união dos dois, **você não precisará escrever duas vezes o elemento repetido**. Observe um exemplo nos diagramas abaixo.



Note que **o 2 é um elemento comum aos dois conjuntos**: $C = \{2, 4, 8, 6\}$ e $D = \{2, 3, 5, 7\}$. Nessas situações, quando fazemos a união de conjuntos que possuem elementos em comum, **esse elemento não vai aparecer duas vezes no conjunto união**! Confira que $C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, **o 2 aparece apenas uma vez**.

Intersecção

A operação que seleciona **os elementos comuns entre dois ou mais conjuntos é denominada intersecção e é representada por** $\cap$. Por exemplo, nos diagramas acima o número 2 é o único elemento comum entre C e D. Logo, o conjunto intersecção será formado apenas pelo elemento 2: $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D} = \{\mathbf{2}\}$. Veja mais um exemplo abaixo.



Temos que $X = \{A, B, C, D\}$ e $Z = \{B, C, D, E\}$. São dois conjuntos distintos, mas que **possuem alguns elementos em comum**. Os elementos B, C e D aparecem nos 2 conjuntos e formam o conjunto intersecção: $\boldsymbol{X \cap Z = \{B, C, D\}}$. Vamos treinar um pouco esses conceitos?

HORA DE PRATICAR!

(PREF. ÂNGULO/2020) Sejam os conjuntos $A = \{0,1,3,5,7\}$, $B = \{0,2,4,6,8\}$ e $C = \{0,14,15\}$, assinale a alternativa correta.

A) $A \cap B \cap C = \{0\}$
B) $A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 14, 15\}$
C) $B \cap C = \{2, 4, 6, 8, 14, 15\}$
D) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15\}$

Comentários:

Devemos verificar alternativa por alternativa.

A) $A \cap B \cap C = \{0\}$

Alternativa correta. Nessa alternativa, devemos buscar **a intersecção dos três conjuntos** dados no enunciado. A intersecção é formada pelos **elementos que são comuns aos três conjuntos**. Por exemplo, **observe que o número 0 pertence tanto ao conjunto $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$**. Logo, com certeza o 0 é elemento de $A \cap B \cap C$. Observe que **não há nenhum outro elemento que aparece nos três conjuntos**. Com isso, podemos dizer que, de fato, $A \cap B \cap C = \{0\}$.

B) $A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 14, 15\}$

Alternativa incorreta. Para obter a união de dois conjuntos, **juntamos todos os elementos dos dois conjuntos** e se houver elementos repetidos, basta escrevê-los apenas uma vez, eles não vão contar duas vezes. Veja, no entanto, que **o $\boldsymbol{0}$ é elemento de $\boldsymbol{A}$ e de $\boldsymbol{C}$, mas não aparece no conjunto união dos dois**.

C) $B \cap C = \{2,4,6,8,14,15\}$

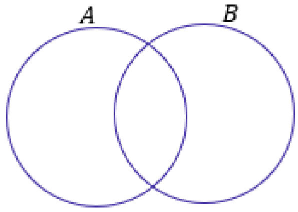
Alternativa incorreta. A intersecção representa apenas os elementos em comum entre dois ou mais conjuntos. *Quais são os elementos em comum entre B e C?* O **número 0 é o único elemento comum aos dois**. Logo, $B \cap C = \{0\}$.

D) $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,15\}$

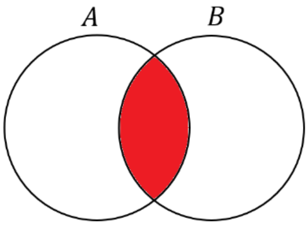
Alternativa incorreta. Note que o conjunto está quase correto, o único erro seria a presença desse elemento "15". **O "15" não faz parte de A nem B**, portanto, **não pode fazer parte do conjunto que é a união dos dois**. Esse é o erro da alternativa.

Gabarito: Letra A.

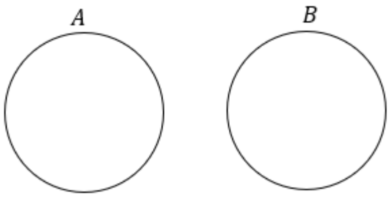
Quando dois conjuntos **possuem elementos em comum**, podemos representá-los assim:



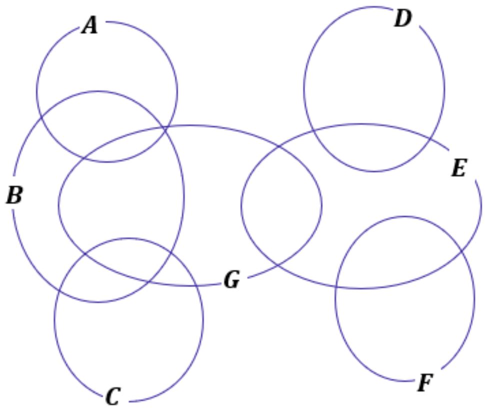
Essa região comum representa exatamente a sua intersecção. Os elementos que estão na região em **vermelho** abaixo **pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B**.



Caso os conjuntos não possuam elementos em comum, isto é, **não haja intersecção entre os dois**, nós vamos chamá-los de **disjuntos** e os representaremos utilizando círculos afastados um do outro.



(CM MONTE ALTO/2019) Observe o diagrama de conjuntos e considere que há elementos em todas as suas regiões.



A partir dessa disposição, é correto afirmar que

A) há elemento de G que é também elemento de A e C.

B) qualquer elemento que esteja em dois desses conjuntos, certamente pode estar em qualquer um desses sete conjuntos.

C) qualquer elemento de G, que não esteja em E, certamente estará em A ou em B ou em C

D) qualquer elemento que esteja em três desses conjuntos, certamente está em C e em D.

E) há elemento de G que também é elemento de A, mas não é elemento de B.

Comentários:

Vamos verificar alternativa por alternativa

A) há elemento de G que é também elemento de A e C.

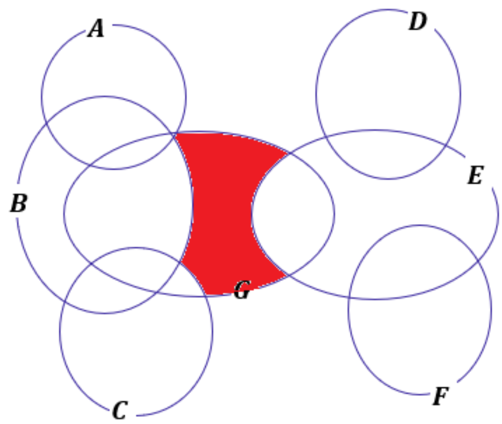
Alternativa incorreta. Observe que A e C **são conjuntos disjuntos**, isto é, **não possuem elementos em comum** e por isso **não há intersecção entre os dois**. Se A e C são conjuntos disjuntos, não pode existir um elemento em G que seja **ao mesmo tempo elemento de A e de C**, pois isso implicaria em um elemento comum aos três simultaneamente.

B) qualquer elemento que esteja em dois desses conjuntos, certamente pode estar em qualquer um desses sete conjuntos.

Alternativa correta. Todos os conjuntos fazem intersecção com pelo menos um outro conjunto! Dessa forma, **haverá sempre um elemento de qualquer conjunto que também pertencerá a outro**!

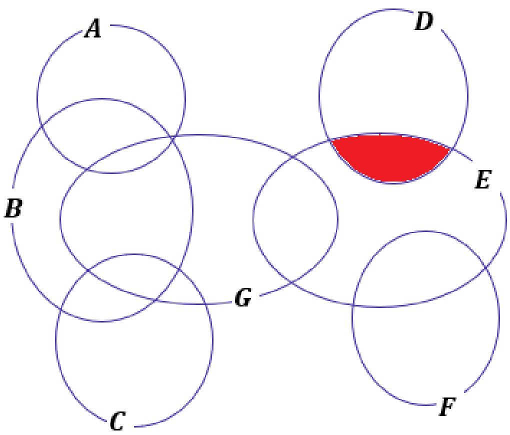
C) qualquer elemento de G, que não esteja em E, certamente estará em A ou em B ou em C

Alternativa incorreta. Mesmo não estando em E, **um elemento em G pode estar somente em G**.
Não podemos afirmar necessariamente que estará em A ou em B ou em C. Veja a região destacada abaixo.



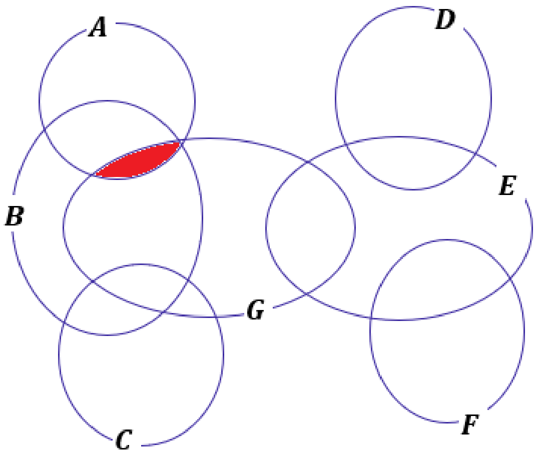
D) qualquer elemento que esteja em três desses conjuntos, certamente está em C e em D.

Alternativa incorreta. D **só faz** intersecção com E. Desse modo, um elemento de D só poder estar, **no máximo, em dois conjuntos**.



E) há elemento de G que também é elemento de A, mas não é elemento de B.

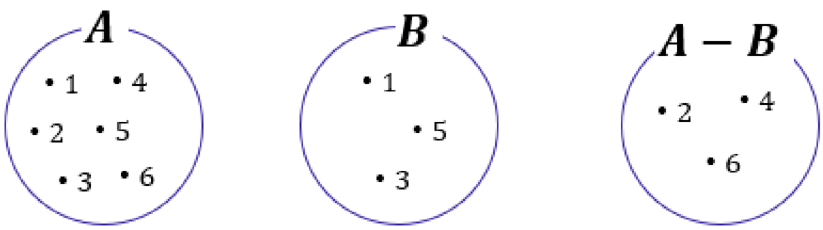
Alternativa incorreta. **Todo elemento de G que também é elemento de A também pertence a B**.



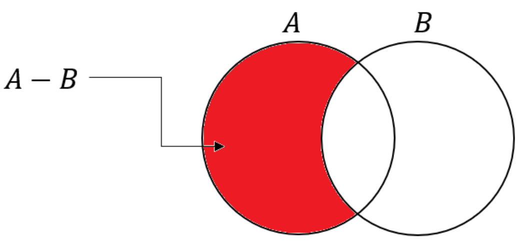
Gabarito: Letra B**.**

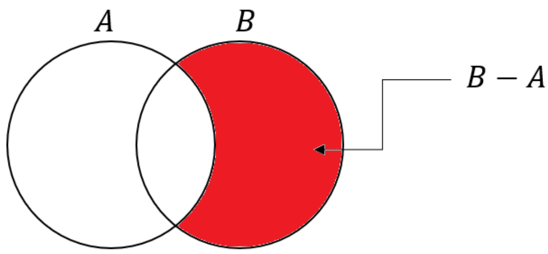
Diferença

Existe uma outra operação que é muito importante para a sua prova! Essa operação **é a diferença ou, como também é conhecida, a subtração de conjuntos**! O conjunto diferença é representado por $\boldsymbol{A-B}$ e é formado por **todos os elementos de A que não são elementos de B**! Por exemplo, considere os conjuntos:

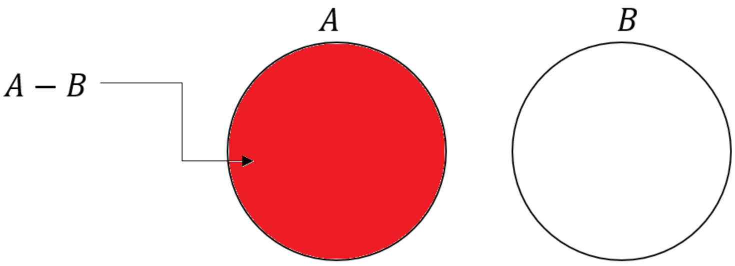


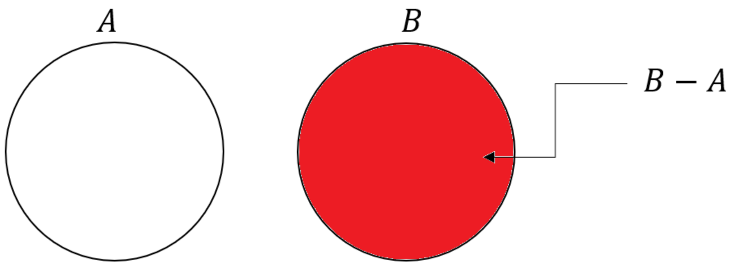
Observe que $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Para encontrar $A - B$, devemos selecionar **os elementos de A que não são elementos de B**! Ou seja, **aqueles elementos que são apenas elementos de A**! Observe que A e B possuem em comum os seguintes elementos: $A \cap B = \{1, 3, 5\}$. Logo, se $A = \{\mathbf{1}, 2, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6\}$, então o $A - B = \{2, 4, 6\}$. Em diagramas, também é possível representar o conjunto diferença.





Um detalhe importante é que se A e B são **conjuntos disjuntos**, então $\boldsymbol{A - B = A}$ ***e*** $\boldsymbol{B - A = B}$. Veja como essa informação pode ser representada:





Vamos fazer alguns **exemplos numéricos** para visualizar ainda melhor essa última situação.

Considere os conjuntos $A = \{10, 20, 30\}$ e $B = \{40, 50\}$. Primeiramente, note que os conjuntos são disjuntos. *Mas qual é o motivo mesmo para eles serem disjuntos, professor?*

A e B são disjuntos pois não possuem elementos em comum! Nenhum sequer!! São totalmente diferentes um outro. *Tudo bem?!* Agora, lembre-se que **$\boldsymbol{A - B}$ é o conjunto de elementos formados por todos os elementos de A que não são elementos de B**.

Ora, nesse nosso exemplo, **<u>todos</u> os elementos de A não são elementos de B**!! Sendo assim, podemos escrever que:

$$A - B = \{10, 20, 30\} = A$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. LINHARES/2020) Dados os três conjuntos numéricos:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$,
$B = \{0,2,4,6\}$,
$C = \{1,3,5,7,9\}$.

O resultado de $(A - B) \cap C$ é igual a:

A) $\{1,3,5\}$
B) $\{1,3,5,7,9\}$
C) $\{0,1,3,5,7,9\}$
D) $\{2,4,6\}$
E) $\{0\}$

Comentários:

Primeiramente, devemos **fazer a diferença entre o conjunto A e B**. Lembre-se, quando tivermos a diferença entre dois conjuntos, por exemplo, $A - B$, estamos procurando **o conjunto dos elementos de A que não são elementos de B**. Na nossa questão, temos que:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$B = \{0,2,4,6\}$$

Primeira pergunta: **quais elementos estão ao mesmo tempo em A e em B**? Observe que **2, 4 e 6** são os três **elementos comuns** aos dois conjuntos. ***Segunda pergunta:*** que conjunto é formado quando eu removo esses elementos em comum do conjunto A? **É exatamente o conjunto diferença**!

$$A = \{1, \mathbf{2}, 3, \mathbf{4}, 5, \mathbf{6}\}$$
$$A - B = \{1, 3, 5\}$$

A questão não termina aqui. Ainda devemos fazer a intersecção desse conjunto com o C. **Note que C possui todos os três elementos do nosso conjunto diferença**. Portanto, **coincidentemente**, vamos ter que:

$$(A - B) \cap C = \{1, 3, 5\}$$

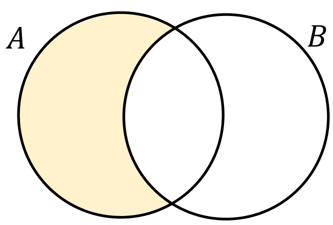
Gabarito: Letra A.

(PREF. SÃO GONÇALO/2022) Sejam A e B conjuntos definidos da seguinte maneira:

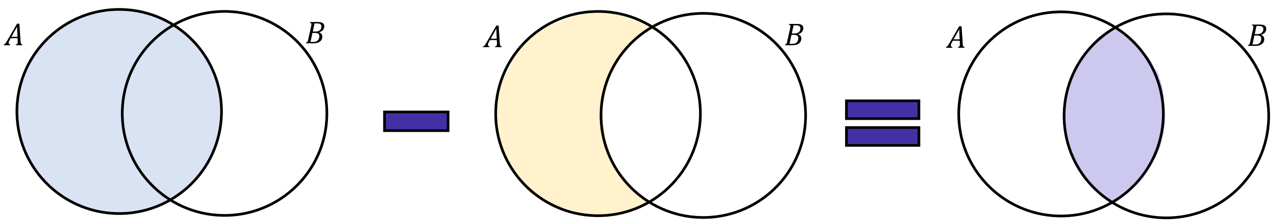
A = {pessoas que moram em São Gonçalo}
B= {pessoas que trabalham em Niterói}

O conjunto A – (A – B) representa o conjunto cujos elementos são pessoas que:
A) moram em São Gonçalo e trabalham em Niterói
B) moram em Niterói e trabalham em São Gonçalo
C) moram em São Gonçalo e não trabalham em Niterói
D) moram em Niterói e não trabalham em São Gonçalo

Comentários:
Você lembra que $A - B$ é o conjunto formado por **todos os elementos de A que não são elementos de B**. Por meio de diagramas, podemos representar esse conjunto como a seguinte região:



A questão pede o conjunto $A - (A - B)$. Vamos encontrá-lo por meio de diagramas.



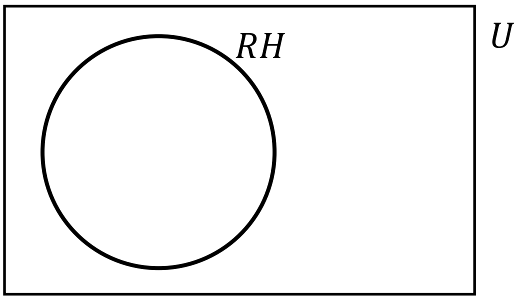
A em azul — A − B em amarelo = A − (A − B) em roxo

Com isso, observe que o conjunto $\boldsymbol{A - (A - B)}$ **corresponde <u>exatamente</u> à intersecção dos dois conjuntos**. Se A é composto pelas pessoas que **moram em São Gonçalo** e B é composto pelas pessoas que **trabalham em Niterói**, então $A - (A - B)$ é o conjunto formado pelas pessoas que moram em São Gonçalo <u>e</u> trabalham em Niterói.

Gabarito: LETRA A.

Complementar

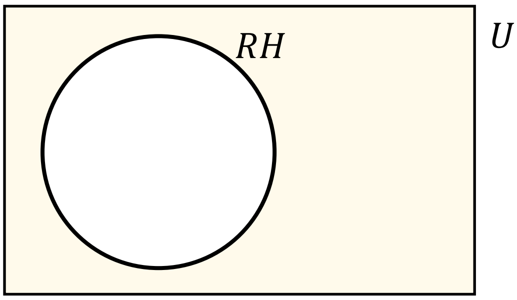
Quando falamos de um determinado conjunto, normalmente **estamos destacando determinado grupo dentro de um universo maior**. Por exemplo, podemos formar um conjunto dos funcionários especializados em RH de uma empresa. Esse grupo de funcionários foi retirado de um conjunto maior: **o conjunto formado por todos os funcionários da empresa**. Acompanhe o diagrama abaixo.



Observe que o conjunto formado por aqueles especializados em RH está contido dentro de um conjunto U. **Esse conjunto maior é frequentemente chamado de conjunto universo** e, nesse exemplo, poderia representar **o conjunto de todos os funcionários da empresa**.

Quer um outro exemplo? Imagine um conjunto formado por todas as vogais: $V = \{a, e, i, o, u\}$. Em um problema que estamos trabalhando com esse conjunto, qual seria o conjunto universo? O conjunto universo nessa situação seria o conjunto formado por todas as letras do alfabeto: $U = \{a, b, c, d, e, f, \dots, x, y, z\}$.

Quando estamos falando de conjunto universo, um novo conceito surge: **o conjunto complementar**. Lembre-se do conjunto que inventamos com os funcionários de uma empresa especializados em RH. *Qual o complementar desse conjunto?* Seria o conjunto formado por **todos os outros funcionários da empresa que não são especializados em RH!** Vamos mostrar no diagrama.



O complementar do conjunto RH é representado pela **parte pintada em amarelo**. *E no nosso exemplo das letras?* Qual o complementar do conjunto formado apenas pelas vogais? Ora, é **o conjunto formado por todas as outras letras que não são vogais, isto é, o conjunto das consoantes**! Para determinar o complementar de qualquer conjunto, **é de fundamental importância conseguir identificar qual é o conjunto universo**.

A notação utilizada para representar o complementar de um conjunto X é $\boldsymbol{X^C}$ **ou** $\boldsymbol{\overline{X}}$. Representamos o conjunto complementar com esse "expoente" C ou uma barra em cima. Ademais, podemos definir o conjunto complementar utilizando o que acabamos de ver **sobre conjunto diferença**.

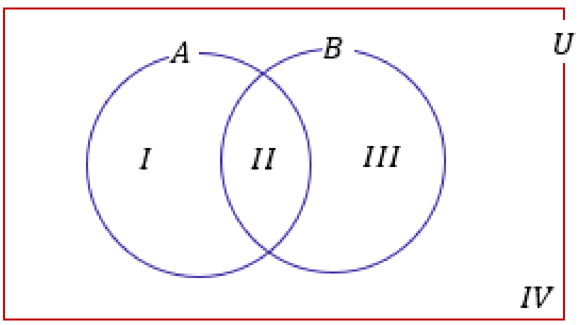
TOME NOTA!

$$\boxed{\overline{X} = X^C = U - X}$$

Veja que utilizando a definição acima, temos que o conjunto complementar X^C é formado por **tudo que está no conjunto universo, mas não está em X**. Vamos fazer algumas questões para aplicar o que acabamos de ver?

HORA DE PRATICAR!

(PREF. NOVO HAMBURGO/2020) A é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol e B é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, conforme representado no diagrama:



Com base nessas informações, é correto afirmar que

A) a região I representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, mas não dominam o idioma espanhol.

B) a região II representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.

C) a região III representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol, mas não dominam o idioma inglês.

D) a região IV representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.

E) U representa o conjunto de todas as pessoas que não dominam nenhum desses dois idiomas.

Comentários:

Vamos analisar cada uma das alternativas tendo em mente que:

• A é o conjunto das pessoas que **dominam ESPANHOL**;

• B é o conjunto das pessoas que **dominam INGLÊS**.

A) a região I representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, mas não dominam o idioma espanhol.

Alternativa incorreta. A região I representa o conjunto de todas as pessoas que **dominam o idioma ESPANHOL**, mas **não dominam o idioma INGLÊS**.

B) a região II representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.

Alternativa correta. A região comum aos 2 conjuntos representa **as pessoas que dominam os dois idiomas**.

C) a região III representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol, mas não dominam o idioma inglês.

Alternativa incorreta. A região III representa o conjunto de todas as pessoas que **dominam o idioma INGLÊS**, mas **não dominam o idioma ESPANHOL**.

D) a região IV representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.

Alternativa incorreta. A região IV é **toda área fora dos dois conjuntos**. Isso significa que ela representa aqueles **não dominam nenhum dos dois idiomas**.

E) U representa o conjunto de todas as pessoas que não dominam nenhum desses dois idiomas.

Alternativa incorreta. U é o **conjunto universo** e representa todos aqueles que **dominam ou não os idiomas**.

Gabarito: Letra B.

Princípio da Inclusão-Exclusão

Pessoal, muitas vezes vamos precisar **determinar o número de elementos de um conjunto**. Essa tarefa de contar **pode ficar um pouco complicada quando temos elementos que pertencem a mais de um conjunto**, pois, nesses casos, **devemos eliminar as repetições** para não contar o mesmo elemento duas vezes.

Nesse sentido, surge o Princípio da Inclusão-Exclusão (PIE). Esse princípio possibilita uma contagem exata da quantidade de elementos **de um conjunto formado pela união de vários outros, mesmo que contenham intersecções**.

➢ 2 Conjuntos

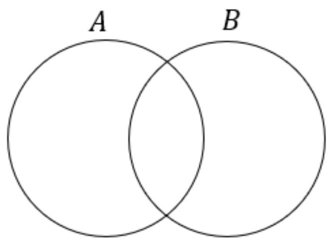
Imagine **dois conjuntos A e B com elementos em comum**. Se $n(A)$ é o número de elementos de A e $n(B)$ é o número de elementos de B, quanto vale $n(A \cup B)$?

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}}$$

Vamos tentar entender o caminho das pedras para chegar na relação acima. Considere os conjuntos:

- $A = \{1, 2, 3\} \quad \Longrightarrow \quad n(A) = 3$
- $B = \{3, 4, 5\} \quad \Longrightarrow \quad n(B) = 3$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \Longrightarrow \quad n(A \cup B) = 5$
- $A \cap B = \{3\} \quad \Longrightarrow \quad n(A \cap B) = 1$



Observe que **apesar da união entre A e B ser uma espécie de fusão entre os dois conjuntos**, o número de elementos na união, na maioria dos casos, **não é a soma direta do número de elementos de A com o número de elementos de B**.

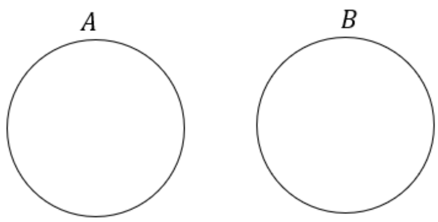
Perceba que **o elemento 3 aparece tanto em A como em B** e ao somar o número de elementos dos dois conjuntos **devemos considerar que estamos somando o mesmo elemento duas vezes!** É por isso esse motivo que devemos subtrair a quantidade de elementos que estão na intersecção. Já para **conjuntos disjuntos** temos que:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}}$$

pois:

$$\boldsymbol{n(A \cap B) = 0}.$$



HORA DE PRATICAR!

(PREF. SÃO GONÇALO/2022) Em uma empresa na qual trabalham 116 pessoas, sabe-se que:

- 72 têm ensino médio completo;
- 64 sabem usar o EXCEL;
- 35 têm ensino médio completo e sabem usar o EXCEL.

O número de funcionários dessa empresa que não têm ensino médio completo e não sabem usar o EXCEL é:
A) 13
B) 14
C) 15
D) 16

Comentários:
Vamos usar o **Princípio da Inclusão-Exclusão** para resolver esse problema. Inicialmente, considere "**M**" como o conjunto formado por todos aqueles que têm o ensino médio. Além disso, considere "**X**" como o conjunto formado por todos aqueles que sabem usar o EXCEL. Com as informações do enunciado, temos que:

$$n(M) = 72 \qquad n(X) = 64 \qquad n(M \cap X) = 35$$

Do princípio da inclusão-exclusão, sabemos que:

$$n(M \cup X) = n(M) + n(X) - n(M \cap X)$$

Substituindo as informações que temos,

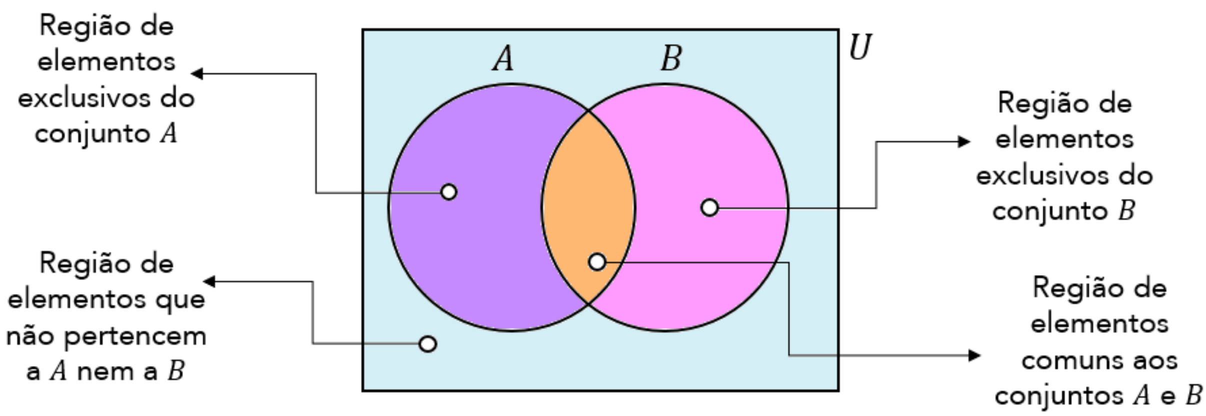
$$n(M \cup X) = 72 + 64 - 35 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{n(M \cup X) = 101}}$$

Note que a união desses dois conjuntos tem 101 pessoas. Por sua vez, o enunciado disse que **o número total de funcionários dessa empresa é 116.** Com isso, a quantidade de funcionários que não possuem ensino médio e não sabem usar o EXCEL é exatamente **a diferença entre o total de funcionário e $\boldsymbol{n(M \cup X)}$**. Assim,

$$116 - 101 = 15$$

Gabarito: LETRA C.

A verdade é que **não precisamos decorar fórmulas** para responder questões que envolva esse princípio. Utilizando **um pouco de lógica e diagramas de Venn**, podemos encontrar a quantidade de elemento de cada conjunto envolvido em um problema típico de Princípio da Inclusão-Exclusão. Antes disso, quero deixar claro para vocês **o significado de cada uma das regiões** no seguinte diagrama:



HORA DE PRATICAR!

(CLDF/2018) Em uma escola com 150 alunos, são oferecidos cursos de Inglês e Francês. Conforme um levantamento, 15 alunos desta escola não estão frequentando estes cursos e 90 frequentam o curso de Inglês. Se 72 alunos frequentam o curso de Francês, então o número de alunos que frequenta um e somente um dos cursos é igual a

A) 144.

B) 138.

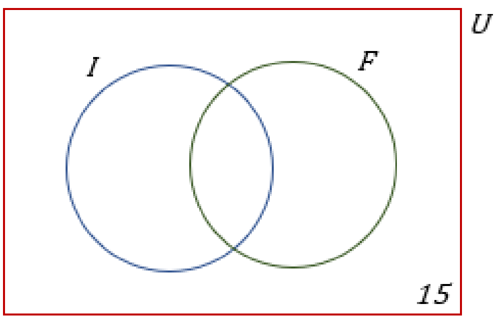
C) 132.

D) 108.

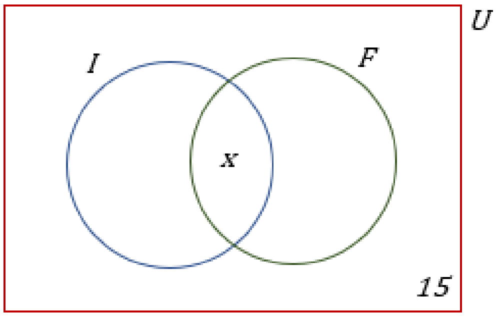
E) 126.

Comentários:

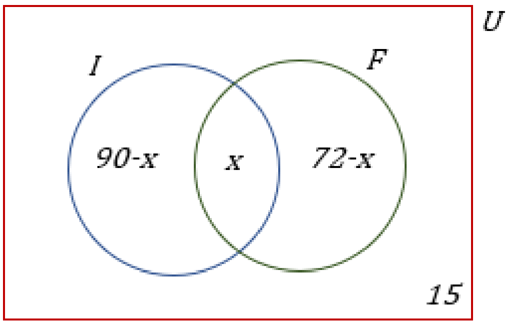
O **conjunto universo** da nossa questão é formado pelos **150 alunos da escola**. Esses 150 alunos **podem fazer 2 cursos ou não fazer nenhum**. A primeira informação que temos é que **15 alunos não frequentam nenhum dos cursos**. Em diagramas, podemos representar essa informação da seguinte maneira:



Observe que a **questão não informou** **a quantidade de alunos que fazem os dois cursos simultaneamente**. Portanto, vamos chamá-la de x e colocá-la no diagrama.



Se 90 frequentam o curso de inglês, então $90 - x$ frequentam **APENAS o curso de inglês**. Se 72 alunos frequentam o curso de Francês, então $72 - x$ frequentam **APENAS o curso de Francês**.



Nosso diagrama **está completamente preenchido**. Você concorda que **ao somar individualmente as quantidades acima**, deveremos obter o total de alunos dessa escola, isto é, 150?

$$(90 - x) + (72 - x) + x + 15 = 150 \quad \rightarrow \quad 177 - x = 150 \quad \rightarrow \quad x = 27$$

A questão não quer saber quantos alunos fazem os dois cursos simultaneamente**. Ela pede a quantidade de alunos que fazem APENAS um único curso**. Logo,

$$(90 - x) + (72 - x) = 63 + 45 = 108$$

Gabarito: Letra D.

E usando a fórmula? Como ficaria? **Seja I o conjunto daqueles que fazem o curso de inglês e F o conjunto formado por aqueles que fazem o curso de francês**. Se a escola tem 150 alunos e foi dito que **15 alunos não fazem nenhum dos cursos**, então:

$$n(I \cup F) = 150 - 15 = 135$$

São 135 alunos que fazem **pelo menos um dos cursos**. A questão diz ainda que: $\boldsymbol{n(I) = 90}$ **e** $\boldsymbol{n(F) = 72}$.

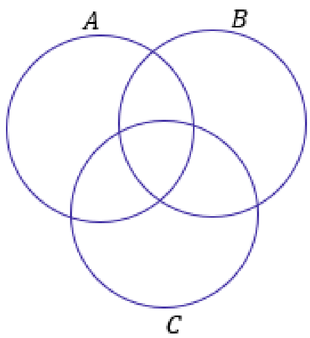
$$n(I \cup F) = n(I) + n(F) - n(I \cap F) \quad \rightarrow \quad 135 = 90 + 72 - n(I \cap F) \quad \rightarrow \quad n(I \cap F) = 27$$

Com isso, descobrimos que **27 pessoas fazem simultaneamente o curso de inglês e de francês**. A questão pede a quantidade de alunos que fazem **apenas um dos cursos**. Se 27 dos que fazem inglês também fazem francês, então $\boldsymbol{90 - 27 = 63}$ **fazem apenas inglês**. Analogamente, $\boldsymbol{72 - 27 = 45}$ **fazem apenas francês**.

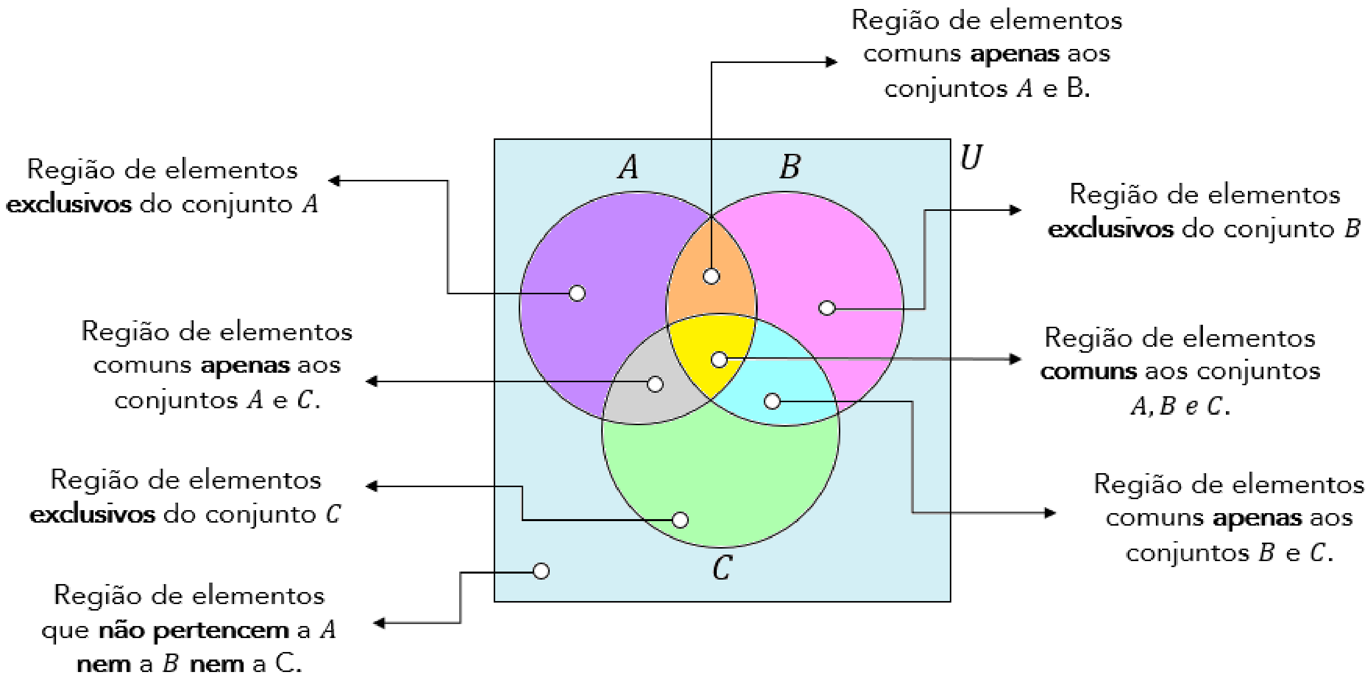
$$63 + 45 = 108\ alunos$$

➢ 3 Conjuntos

Imagine que você tem 3 conjuntos, **cada conjunto possui elementos em comum com os outros dois**. A situação **mais completa** que podemos imaginar está representada pelo diagrama abaixo.



Vamos fazer **uma leitura** de cada uma das regiões da figura acima?



Observe que **o número de regiões com três conjuntos aumenta bastante** em relação à análise anteriormente feita com dois. Agora, considere que **você conhece a quantidade** de elementos de cada um dos conjuntos cima, isto é, $\boldsymbol{n(A)}$**,** $\boldsymbol{n(B)}$ **e** $\boldsymbol{n(C)}$**.**

Como você faria para encontrar $\boldsymbol{n(A \cup B \cup C)}$ *? Será que é só somar as três quantidades?* **A resposta para essa pergunta é não!** Precisamos ter atenção aos **elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**.

Segundo o Princípio da Inclusão- Exclusão, a fórmula geral que permite calcular a quantidade de elementos de um **conjunto formado pela união de outros três** é dada por:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Vamos tentar entender com ela surge? Note que para achar a quantidade de elementos do conjunto união, primeiro **somamos individualmente as quantidades de cada um dos conjuntos**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C)}$$

No entanto, nós vimos que, ao fazer isso, **não estamos considerando os elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**. Essa soma dará, certamente, uma quantidade de elementos maior do que a quantidade real. *Mas, então, o que fazer?* **É preciso subtrair as quantidades dos elementos que estão nas intersecções, evitando assim a dupla contagem**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)}$$

Perceba que a fórmula ainda não está completa. Imagine um elemento que é **comum a todos os 3 conjuntos**, isto é, pertence a $A \cap B \cap C$. Esse elemento pertence tanto a A, quanto a B e a C. Quando fizemos a soma $n(A) + n(B) + n(C)$, **contamos ele três vezes**!

Quando fizemos a subtração $-n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$ estamos **tirando ele três vezes**! **Resultado: não estamos contando os elementos de** $\boldsymbol{A \cap B \cap C}$. Por esse motivo, **adicionamos** $\boldsymbol{n(A \cap B \cap C)}$**.** Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Eu sei que a fórmula **pode parecer um pouco complicada**, mas garanto que com **um pouco de paciência e resolução de exercícios**, ela se tornará **mais amigável e bastante intuitiva**! Além disso, também ensinarei um jeito que vocês poderão utilizar **caso não lembrem da fórmula**. Algumas vezes, no entanto, **a questão pode exigir a aplicação direta dela**. Confira o exercício abaixo.

HORA DE PRATICAR!

(IFF/2018) Para um conjunto qualquer X, $n(X)$ representa a quantidade de elementos de X. Nesse sentido, considere que os conjuntos A, B e C tenham as seguintes propriedades:

$$n(A) = n(B) = n(C) = 50;$$
$$n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = 10;$$
$$n(A \cap B \cap C) = 0.$$

Nessa situação, $n(A \cup B \cup C)$ é igual a
A) 100.
B) 110.
C) 120.
D) 130.
E) 140.

Comentários:
Percebam que essa questão exige apenas **a aplicação direta da fórmula** que acabamos de ver.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C) = 50 + 50 + 50 - 10 - 10 - 10 + 0$$

$$n(A \cup B \cup C) = 120$$

Gabarito: Letra C.

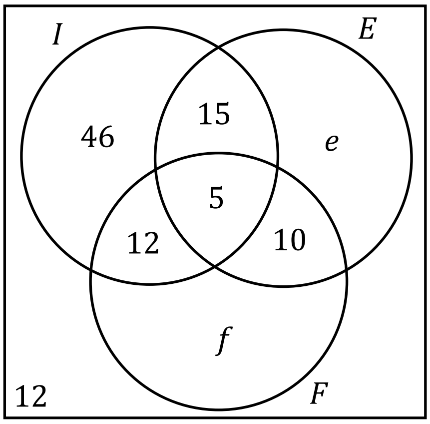
(ISS-BH/2022) Uma empresa do ramo de turismo abriu processo para a seleção de agentes de viagens. Dos 180 candidatos inscritos, 12 foram eliminados logo no início do processo por não falarem um segundo idioma, o que era pré-requisito na seleção. Dos que ficaram, sabe-se que 78 falam inglês, 20 falam inglês e espanhol, 17 falam inglês e francês, 15 falam francês e espanhol e 5 falam os três idiomas. Sendo assim, assinale a alternativa correta.
A) A quantidade de candidatos que falam espanhol é igual a quantidade de candidatos que falam francês.
B) 50 candidatos falam somente inglês.

C) 46 candidatos falam pelo menos dois idiomas.
D) 49 candidatos falam francês.
E) 126 candidatos falam somente um dos idiomas.

Comentários:
Primeiramente, vamos convencionar algumas coisas. Chamemos de "I" o conjunto formado por aqueles que falam inglês, de "F" o conjunto formado por aqueles que falam francês e de "E" o conjunto formado por aqueles que falam espanhol. Dito isso, vamos extrair algumas informações do enunciado.

- **78 falam inglês:** $n(I) = 78$
- **20 falam inglês e espanhol:** $n(I \cap E) = 20$
- **17 falam inglês e francês:** $n(I \cap F) = 17$
- **15 falam francês e espanhol**: $n(F \cap E) = 15$
- **5 falam os três idiomas**: $n(F \cap E \cap I) = 5$
- **12 não falam um segundo idioma.**

Agora, vamos passar essas informações para um diagrama.



Observe que existem **algumas quantidades que não conseguimos determinar** pois o enunciado não nos forneceu essas informações de forma direta. "e" representa quantas pessoas falam **apenas espanhol** (como segundo idioma) e "f", quantas falam **apenas francês** (como segundo idioma). Ademais, sabemos que quando somamos todas essas regiões, devemos ter o total de candidatos (180).

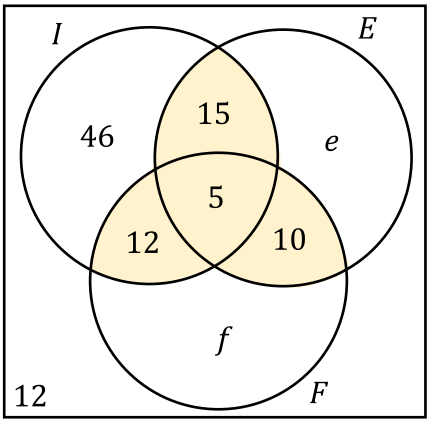
$$46 + 5 + 15 + 12 + 10 + e + f + 12 = 180 \quad \rightarrow \quad e + f = 80$$

Com essas informações, vamos analisar as alternativas.
A) A quantidade de candidatos que falam espanhol é igual a quantidade de candidatos que falam francês.
Errado. Não temos informações suficientes que nos permitam concluir isso.

B) 50 candidatos falam somente inglês.

Errado. Pelo diagrama que desenhamos, vemos que 46 candidatos falam apenas inglês.

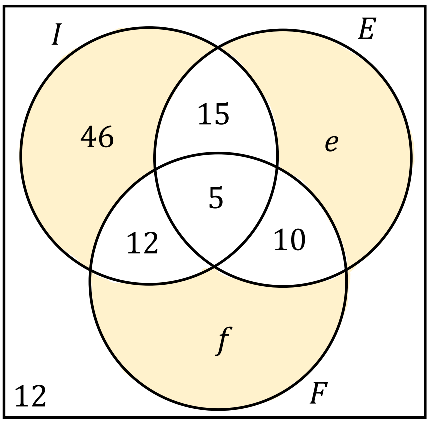
C) 46 candidatos falam pelo menos dois idiomas.
Errado. Vamos destacar no diagrama as regiões de interesse.



Assim, a quantidade de candidatos que falam pelo menos dois idiomas é: 5+15+12+10=42.

D) 49 candidatos falam francês.
Errado. Pessoal, não temos informações suficientes para "cravar" quantos candidatos falam francês.

E) 126 candidatos falam somente um dos idiomas.
Certo. Essa aqui é nossa resposta, pessoal. Vamos destacar no diagrama as regiões que retratam a quantidade de candidatos que falam apenas um idioma.



Ora, sendo assim, a quantidade de candidatos que falam apenas um idioma é dada pela soma: $46 + e + f$.

Note que, apesar de não termos os valores de "e" e "f" individualmente, sabemos o valor da soma "$e + f$", pois já a calculamos anteriormente. Assim, $46 + 80 = 126$. Logo, são **126 candidatos que falam apenas 1 idioma**.

Gabarito: LETRA E.

Em algumas questões **não precisaremos aplicar diretamente a fórmula acima**. Será necessário um trabalho mais braçal da nossa parte, para chegar à resposta. Muitas vezes a questão pede valores específicos que vão surgir de uma maneira mais fácil **se a gente for completando o diagrama de Venn** com as quantidades.

Por favor, **dê mais olhada naquele "mapa" que mostrei logo no início desse tópico**, destacando as regiões e o seu significado.

Para contar elementos em um diagrama de Venn, o primeiro passo é sempre inserir a quantidade de elementos que possui a intersecção dos três conjuntos! Depois, partimos para as intersecções duplas e, por fim, analisamos a quantidade de elementos exclusivos de cada conjunto. Vamos ver na prática como fazemos isso?

(TRF-3/2019) O número de matriculados nas disciplinas de Cálculo, Estatística e Microeconomia é 150. Sabe-se que 12 deles cursam simultaneamente Microeconomia e Estatística, e que 80 deles cursam somente Cálculo. Os alunos matriculados em Microeconomia não cursam Cálculo. Se a turma de Cálculo tem 96 alunos e a de Estatística, 35, o número de alunos na turma de Microeconomia é

A) 12.

B) 47.

C) 7.

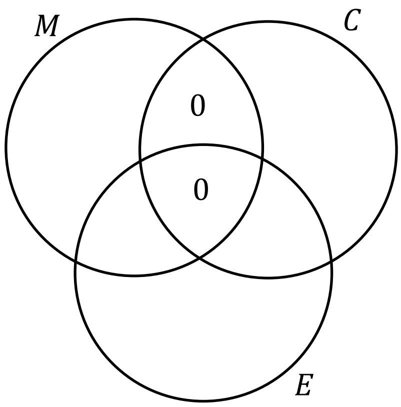
D) 28.

E) 23.

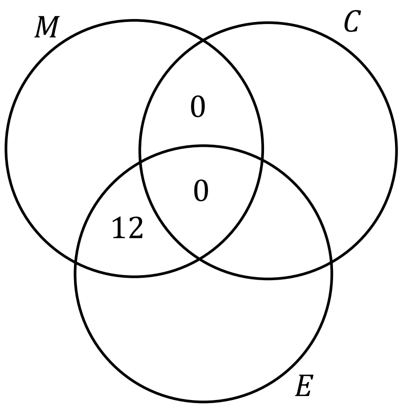
Comentários:

Nosso **conjunto universo é formado por 150 alunos** que estão matriculados em três disciplinas: Cálculo (C), Estatística (E) e Microeconomia (M). Lembre-se de que nesse tipo de questão, nossa abordagem sempre **é começar pela intersecção dos três conjuntos**, depois, partimos para **as intersecções dois a dois** e por fim, para as regiões isoladas. Comece se perguntando: *qual a quantidade de alunos que cursam as 3 disciplinas?*

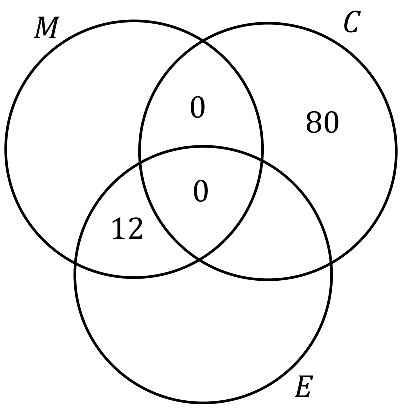
A resposta será zero! Veja que, de acordo com o enunciado, **não existem alunos que são matriculados em Microeconomia e Cálculo ao mesmo tempo**. Sendo assim, se não existe aluno matriculado nas duas, **não pode ter aluno matriculado nas 3**.



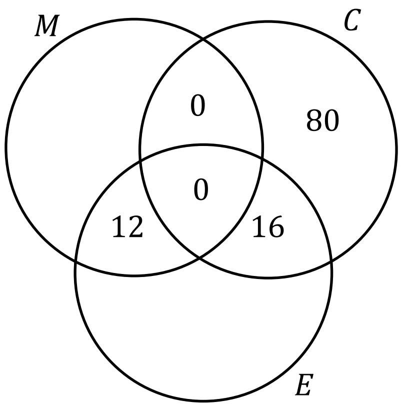
Sabemos ainda que **12 deles cursam simultaneamente Microeconomia e Estatística**.



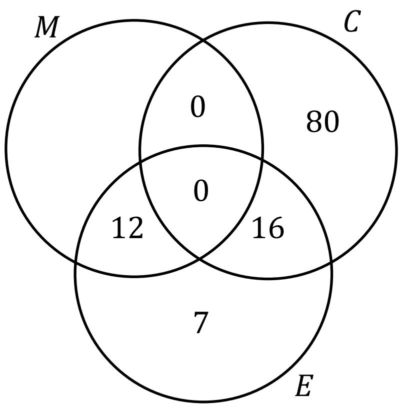
80 deles cursam SOMENTE cálculo.



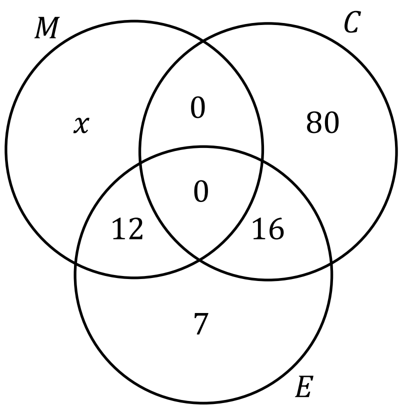
Como temos 80 alunos que fazem somente Cálculo, então **devemos ter 16 alunos que fazem Cálculo e Estatística para poder completar os 96 alunos da turma.**



São **35 alunos de Estatística** e no diagrama temos $12 + 16 = 28$. Logo, **7 alunos cursam somente Estatística**.



Seja x a quantidade de alunos que fazem **apenas Microeconomia**.



A quantidade de alunos elencadas nos diagramas acima deve **totalizar os 150 alunos dos 3 cursos**.

$$x + 12 + 0 + 0 + 7 + 16 + 80 = 150$$
$$x + 115 = 150$$
$$x = 35$$

Cuidado aqui! **35 é a quantidade de alunos que fazem APENAS Microeconomia**. Para descobrir o total de alunos de Microeconomia devemos somar com aqueles que também fazem Estatística (12). Logo,

$$\boldsymbol{n(M) = 35 + 12 \quad \rightarrow \quad n(M) = 47}$$

Gabarito: Letra B**.**

QUESTÕES COMENTADAS - CESGRANRIO

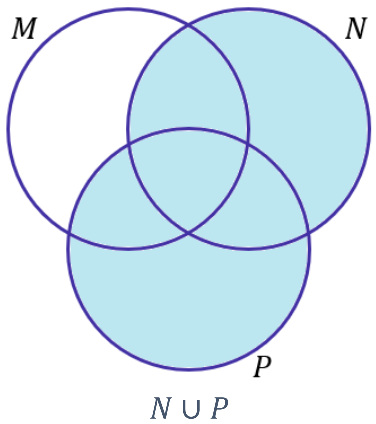
União, Intersecção, Complementar e Diferença

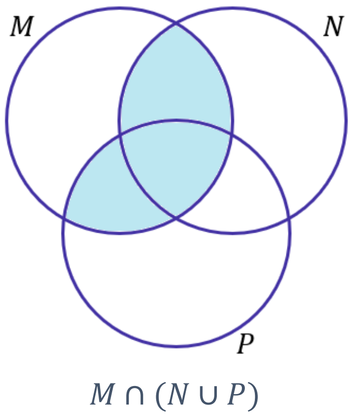
1. (CESGRANRIO/BR/2015) Dados três conjuntos M, N e P, tem-se que o conjunto $M \cap (N \cup P)$ é igual ao conjunto

a) $M \cap (N \cap P)$
b) $M \cap (N \cup P)$
c) $M \cup (N \cap P)$
d) $(M \cap N) \cup (M \cap P)$
e) $(M \cup N) \cap (M \cup P)$

Comentários:

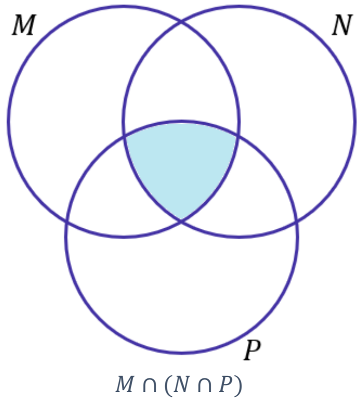
Vamos resolver o problema desenhando diagramas. Para começar, desenhe a região que o conjunto do enunciado representa. Depois, compare ela com cada um dos conjuntos do enunciado.





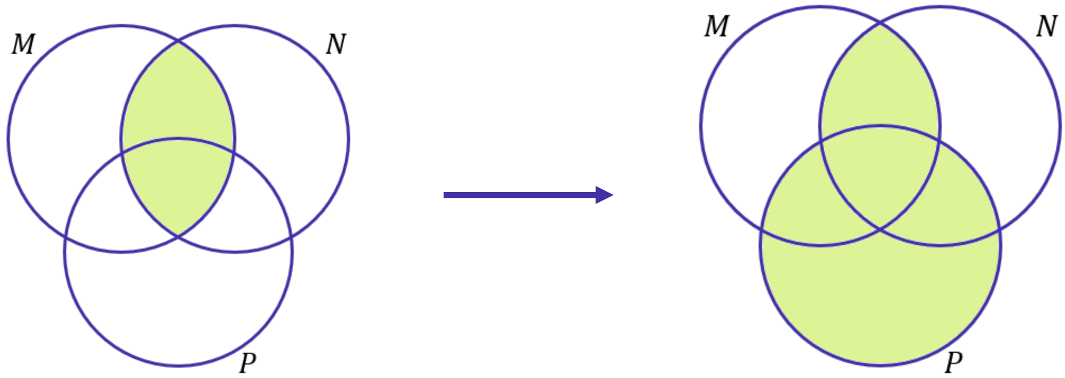
A região da direita é a que vamos buscar nas alternativas. Observe que primeiro desenhamos N∪P, para depois desenhar M∩(N∪P). Fomos por partes, e, sempre que possível, procederemos assim.

a) $M \cap N \cap P$
Alternativa incorreta. Note que $M \cap N \cap P$ é exatamente a intersecção dos três conjuntos.



b) $(M \cap N) \cup P$

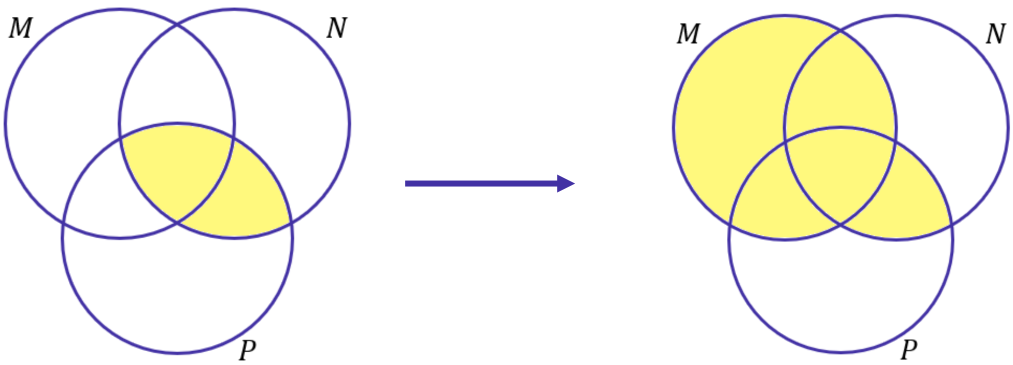
Alternativa incorreta.



$M \cap N$ $\quad$ $(M \cap N) \cup P$

c) $M \cup (N \cap P)$

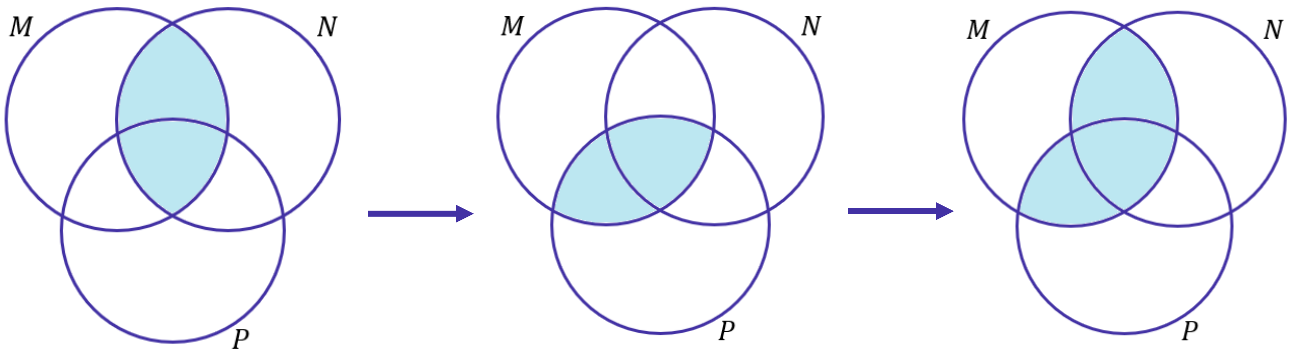
Alternativa incorreta.



$N \cap P$ $\quad$ $M \cup (N \cap P)$

d) $(M \cap N) \cup (M \cap P)$

Alternativa correta.

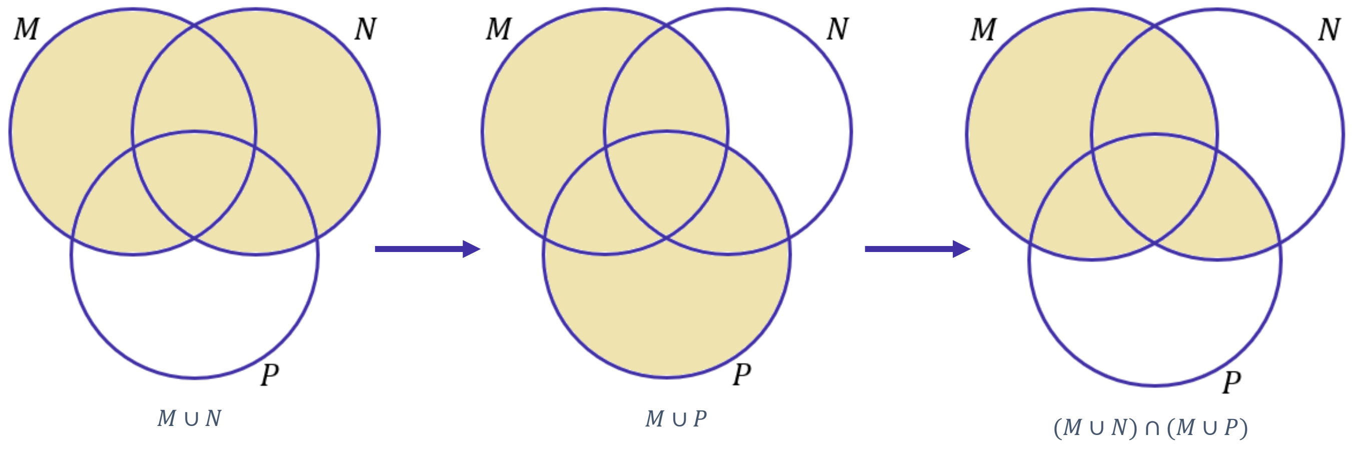


$M \cap N$ $\quad$ $M \cap P$ $\quad$ $(M \cap N) \cup (M \cap P)$

Veja que após os desenhos, a região obtida é igual ao conjunto proposto do enunciado. Desse modo, podemos escrever sem receio que:

$$M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$$

e) $(M \cup N) \cap (M \cup P)$
Alternativa incorreta.



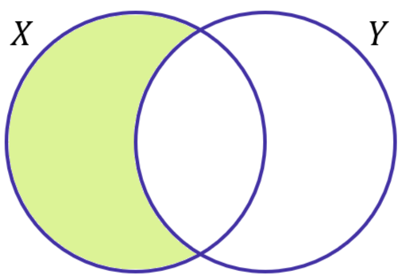
Gabarito: LETRA D.

2. (CESGRANRIO/BASA/2014) O conjunto diferença X - Y, entre dois subconjuntos X e Y de um mesmo conjunto universo U, é definido por:

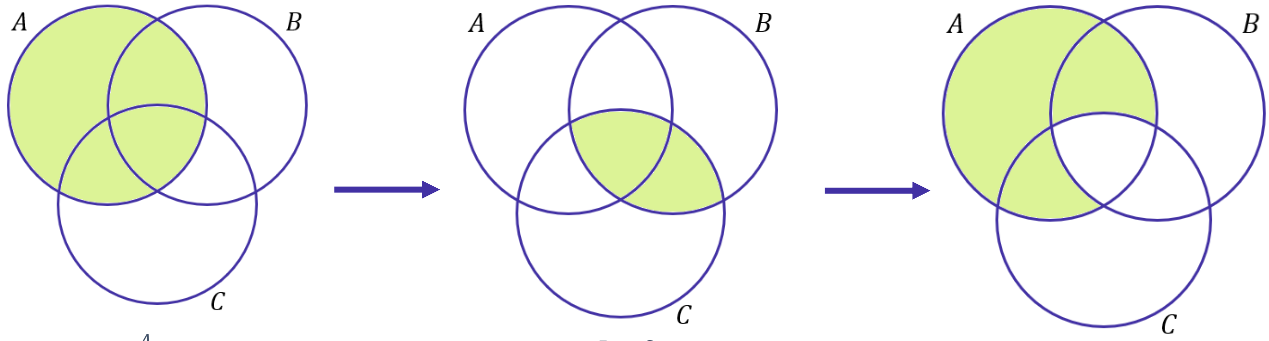
$$\boldsymbol{X - Y = \{u \in U / u \in X \text{ e } u \notin Y\}}$$

Considere três subconjuntos, A, B e C, do mesmo conjunto Universo U. O conjunto $A - (B \cap C)$ é igual ao conjunto
a) $(A - B) \cap (A - C)$.
b) $(A - B) \cup (A - C)$.
c) $(A - B) \cap C$.
d) $(A - B) \cup C$.
e) $(A - B) - C$.

Comentários:
Essa é uma questão parecida com a anterior, mas que envolve o conjunto diferença. O conjunto $X - Y$ vai trazer todos aqueles elementos que são de X mas não são de Y. Em diagramas, ele é representado por:



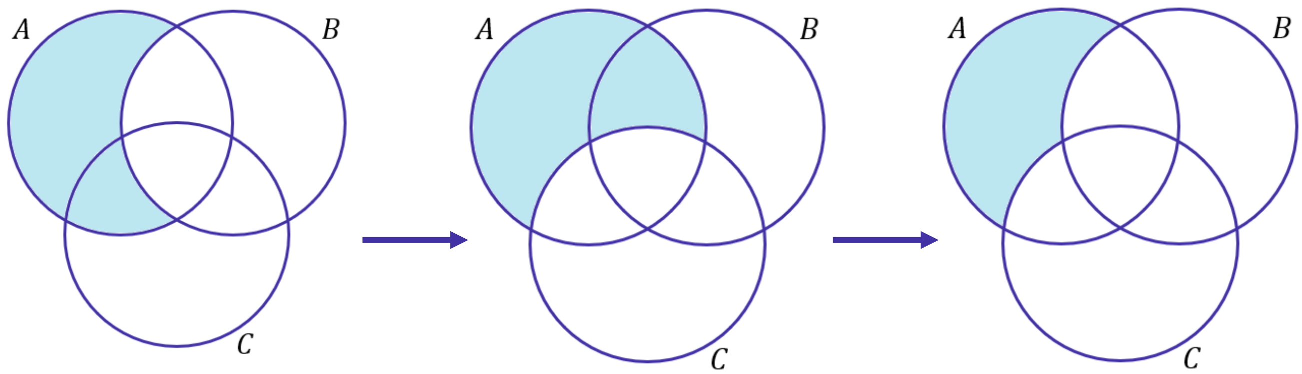
Vamos proceder de forma muito semelhante à questão anterior. Primeiro, identificando a região representativa do conjunto do enunciado, depois vamos analisar as alternativas em busca de uma igual. O enunciado trouxe o conjunto $\boldsymbol{A - (B \cap C)}$.



A — $B \cap C$ — $\boldsymbol{A - (B \cap C)}$

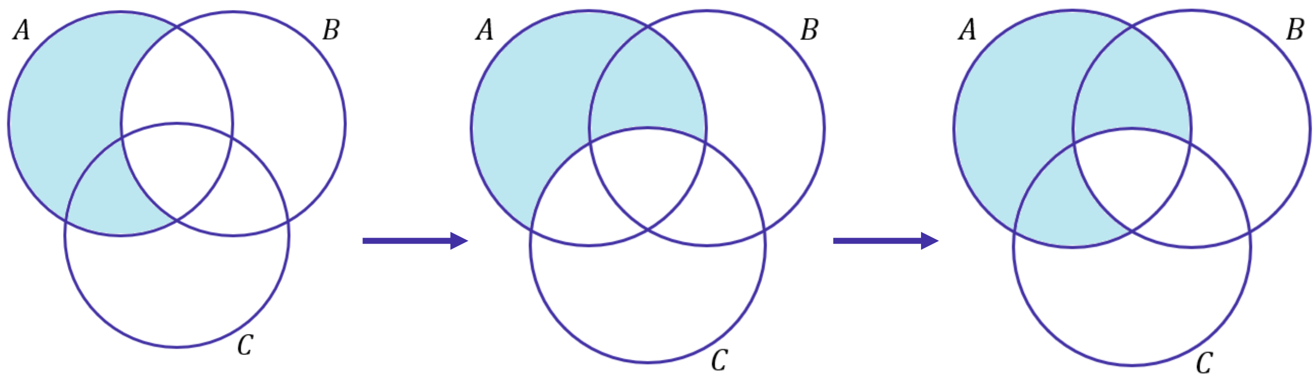
Agora vamos analisar as alternativas.

a) $(A - B) \cap (A - C)$.
Alternativa incorreta.



$A - B$ — $A - C$ — $(A - B) \cap (A - C)$

b) $(A - B) \cup (A - C)$.
Alternativa correta.

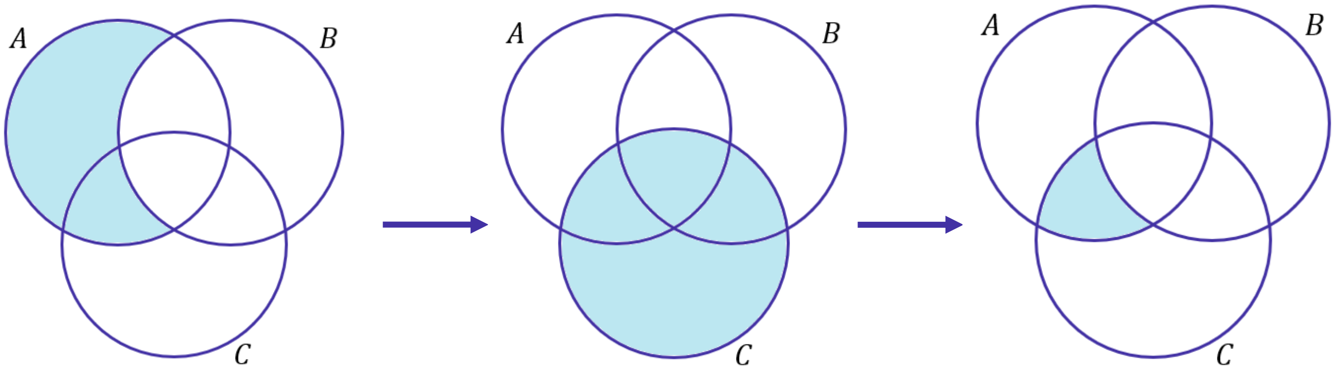


$A - B$ — $A - C$ — $(A - B) \cup (A - C)$

Veja que é exatamente a mesma região do enunciado e, por esse motivo, podemos escrever que:

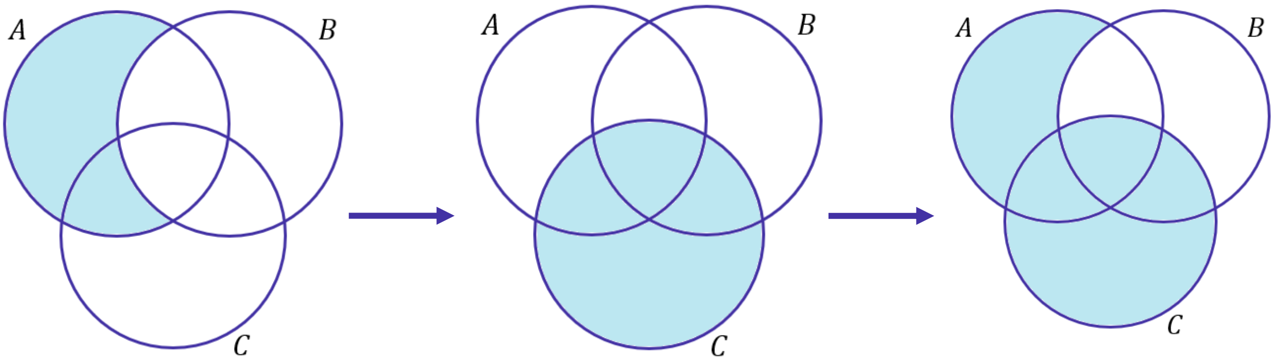
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

c) $(A - B) \cap C$.
Alternativa incorreta.



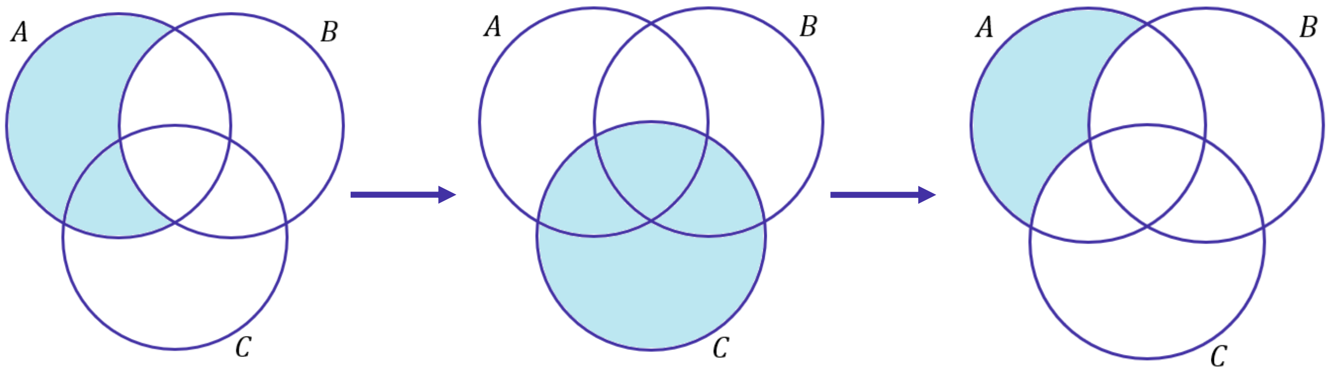
$A - B$ $\quad$ C $\quad$ $(A - B) \cap C$

d) $(A - B) \cup C$.
Alternativa incorreta.



$A - B$ $\quad$ C $\quad$ $(A - B) \cup C$

e) $(A - B) - C$.
Alternativa incorreta.



$A - B$ $\quad$ C $\quad$ $(A - B) - C$

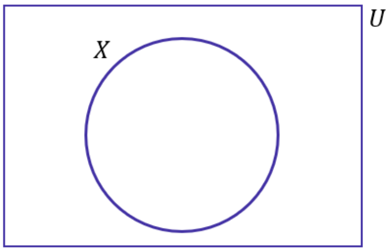
Gabarito: LETRA B.

3. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Considere um conjunto U, do qual X é um subconjunto não vazio e próprio. Seja Y o complemento do complemento de X (os complementos sendo considerados em relação a U). Então, a

a) união de X e Y é igual a U.
b) diferença de X e Y é igual a U.
c) intercessão de X e Y é vazia.
d) intercessão de X e Y é igual a U.
e) intercessão de X e Y é igual a X.

Comentários:

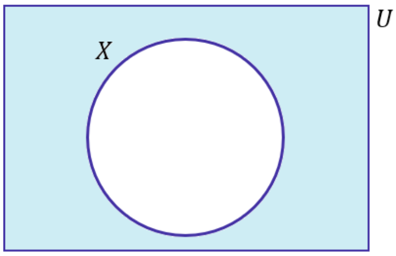
Essa é uma questão bem estilo pegadinha. O aluno com certeza ficaria com uma pulga atrás da orelha (rsrs). Nós **temos o conjunto universo U e um subconjunto X**. Em diagramas, seria algo como a situação a seguir:



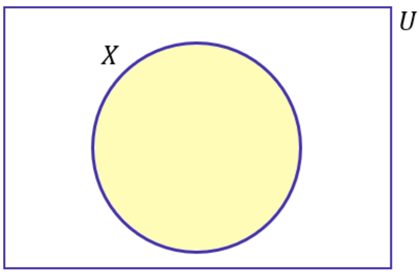
Quem é o complemento de X? Ora, **o complemento de X é o conjunto formado por todos aqueles elementos que pertencem ao conjunto U, mas não pertencem a X**. Em termos matemáticos,

$$X^C = U - X$$

No diagrama, seria a região representada abaixo:



Agora, quem seria o complemento do complemento de X? Ora, seria o conjunto formado por todos aqueles elementos que pertencem ao conjunto U mas não pertencem ao complemento de X. Em diagramas,



Veja que é o próprio conjunto X! A conclusão que chegamos é que o complementar do complementar de um conjunto é o próprio conjunto! Matematicamente,

$$(X^C)^C = X$$

Portanto, **se Y é o complementar do complementar de X, então Y é o próprio X**. Tudo bem, pessoal?! Vamos analisar as alternativas.

a) união de X e Y é igual a U.
Alternativa incorreta. A união de X e Y é o próprio X, afinal X=Y.

b) diferença de X e Y é igual a U.
Alternativa incorreta. Se X=Y, então a diferença de X e Y não pode ser igual a U. Na verdade, é o conjunto ∅.

c) intercessão de X e Y é vazia.
Alternativa incorreta. Se X=Y, então a intercessão de X e Y é o próprio X.

d) intercessão de X e Y é igual a U.
Alternativa incorreta. Se X=Y, então a intercessão de X e Y é o próprio X.

e) intercessão de X e Y é igual a X.
Alternativa correta. É exatamente isso moçada, afinal, X=Y. Assim, a intercessão de X com ele mesmo fornece o próprio conjunto X.

Gabarito: LETRA E.

QUESTÕES COMENTADAS - CESGRANRIO

Princípio da Inclusão-Exclusão

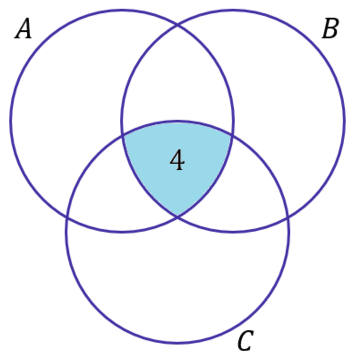
1. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Um grupo de fornecedores foi dividido em três conjuntos, de acordo com o atendimento a três critérios de qualidade, denominados critérios A, B e C. Após uma análise, observou-se que apenas quatro empresas atendem aos três critérios; seis empresas atendem aos critérios B e C; dez empresas atendem ao critério C, mas não atendem ao A; doze empresas atendem ao critério B, mas não atendem ao A, e vinte e três empresas atendem a, pelo menos, um dos critérios A ou B. Considerando-se que nesse grupo de fornecedores não existe empresa que não atenda a, pelo menos, um dos três critérios, o número total de empresas desse grupo, isto é, $n(AUBUC)$, é igual a

a) 21
b) 25
c) 27
d) 29
e) 31

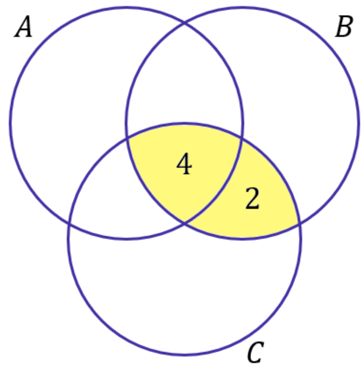
Comentários:

Galera, um jeito legal de resolver esse exercício é **por meio dos diagramas** que vimos ao longo da aula. Pegamos cada uma das informações passadas no enunciado e tentamos encaixá-las no desenho. Veja.

- **quatro empresas** atendem aos três critérios.

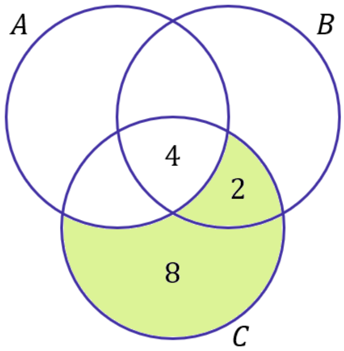


- **seis empresas** atendem aos critérios B e C.



Devemos perceber que a informação não nos diz que as empresas atendem APENAS aos critérios B e C. Dessa forma, **uma empresa que atende aos três critérios está inserida nessa conta**. Por isso, para completar os seis, adicionamos apenas mais duas empresas na região de intersecção dos dois critérios.

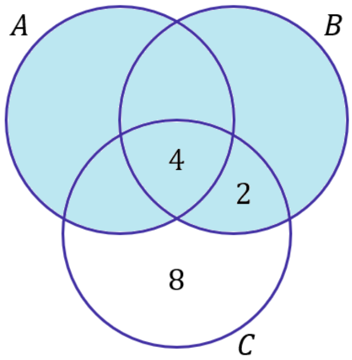
- dez empresas atendem ao critério C, mas não atendem a A.



A região verde representa as empresas que atendem ao critério C, mas não atendem ao A. Nessa parte do diagrama, **já tínhamos contabilizado duas empresas** no item anterior. Portanto, faltou apenas oito empresas que contabilizamos na região das empresas que atendem apenas ao critério C.

- vinte e três empresas atendem a, **pelo menos**, um dos critérios A ou B.

Essa informação é, talvez, a mais importante. Na prática, o enunciado está nos dizendo que toda a região marcada abaixo contabiliza **23 pessoas**:



Como sabemos que todas as empresas **cumprem ao menos um dos critérios**, então o total de empresas é a soma dessas 23 com as 8 que ficaram de fora (aquelas empresas que **apenas** atenderam ao critério C).

$$n(A \cup B \cup C) = 23 + 8 \quad \rightarrow \quad n(A \cup B \cup C) = 31$$

Gabarito: LETRA E.

2. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) Os conjuntos P e Q têm p e q elementos, respectivamente, com $p + q = 13$. Sabendo-se que a razão entre o número de subconjuntos de P e o número de subconjuntos de Q é 32, quanto vale o produto pq?

a) 16
b) 32
c) 36
d) 42
e) 46

Comentários:
Na teoria, vimos que o número de subconjuntos depende da quantidade de elementos do conjunto principal. Por exemplo, **se um conjunto tem 3 elementos, então ele terá $2^3 = 8$ subconjuntos**. Lembre-se da fórmula:

$$nS_A = 2^{n(A)}$$

$\boldsymbol{nS_A}$ **representa o número de subconjuntos de A** e $\boldsymbol{n(A)}$ **é o número de elementos de A**. Como o conjunto P tem p elementos e o conjunto Q tem q, podemos escrever:

$$nS_P = 2^{n(P)} \quad \rightarrow \quad nS_P = 2^p$$

$$nS_Q = 2^{n(Q)} \quad \rightarrow \quad nS_Q = 2^q$$

O enunciado diz que a razão entre o número de subconjuntos de P e o número de subconjuntos de Q é 32. Assim,

$$\frac{nS_P}{nS_Q} = \frac{2^p}{2^q} = 32 \quad \rightarrow \quad 2^{p-q} = 32 \quad \rightarrow \quad 2^{p-q} = 2^5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p - q = 5}$$

Veja que o enunciado também informou que $\boldsymbol{p + q = 13}$. Temos duas equações e duas incógnitas. Podemos montar um sistema de equações.

$$\begin{cases} p + q = 13 & (1) \\ p - q = 5 & (2) \end{cases}$$

Podemos **isolar "p"** na equação (2):

$$p = q + 5$$

Agora, devemos substituir p na equação (1).

$$(q + 5) + q = 13 \quad \rightarrow \quad 2q + 5 = 13 \quad \rightarrow \quad 2q = 8 \quad \rightarrow \quad q = 4$$

Encontramos o valor de q. Agora, podemos substituir em $p = q + 5$.

$$p = 4 + 5 \quad \rightarrow \quad p = 9$$

Com os valores de p e q determinados, podemos encontrar o produto.

$$pq = 4 \cdot 9 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{pq = 36}$$

Gabarito: LETRA C.

3. (CESGRANRIO/IBGE/2014) Em uma central de telemarketing com 42 funcionários, todos são atenciosos ou pacientes. Sabe-se que apenas 10% dos funcionários atenciosos são pacientes e que apenas 20% dos funcionários pacientes são atenciosos. Quantos funcionários são atenciosos e pacientes?

a) 1
b) 3
c) 9
d) 12
e) 27

Comentários:

Seja A um conjunto que formado pelos funcionários que são atenciosos. Seja P um conjunto formado pelos funcionários que são pacientes. De acordo com o enunciado, **42 funcionários são atenciosos ou pacientes**. Na prática, ele está nos informando que $n(A \cup P) = 42$. Antes de prosseguir, observe que a questão pede quantos funcionários são atenciosos e pacientes, $n(A \cap P)$. Beleza?! Vamos lá!

O enunciado afirma que **10% dos funcionários atenciosos são pacientes**. Em outras palavras:

$$n(A \cap P) = 10\% \cdot n(A) = 0{,}1 \cdot n(A) \qquad (1)$$

Por fim, ele também afirma que **20% dos funcionários pacientes são atenciosos**.

$$n(A \cap P) = 20\% \cdot n(P) = 0{,}2 \cdot n(P) \qquad (2)$$

Lembre-se do **Princípio da Inclusão-Exclusão**:

$$n(A \cup P) = n(A) + n(P) - n(A \cap P) \qquad (3)$$

Vamos escrever tanto $n(A)$ como $n(P)$ em função de $n(A \cap P)$. Da equação (1):

$$n(A \cap P) = 0{,}1 \cdot n(A) \quad \rightarrow \quad n(A) = \frac{n(A \cap P)}{0{,}1} \quad \rightarrow \quad n(A) = 10 \cdot n(A \cap P)$$

Da equação (2):

$$n(A \cap P) = 0{,}2 \cdot n(B) \quad \rightarrow \quad n(B) = \frac{n(A \cap P)}{0{,}2} \quad \rightarrow \quad n(B) = 5 \cdot n(A \cap P)$$

Substituindo esses resultados na equação (3) e usando que $\boldsymbol{n(A \cup P) = 42}$.:

$$42 = 10 \cdot n(A \cap P) + 5 \cdot n(A \cap P) - n(A \cap P)$$

$$42 = 14 \cdot n(A \cap P)$$

$$n(A \cap P) = \frac{42}{14} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n(A \cap P) = 3}$$

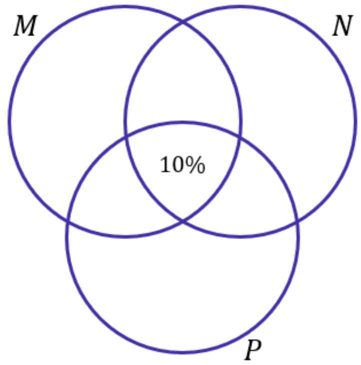
Gabarito: LETRA B.

4. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Numa certa comunidade, 35% de seus habitantes são leitores do jornal M; 40% são leitores do jornal N; 30% são leitores do jornal P; 25% leem os jornais M e N; 15% leem os jornais M e P; 20% leem os jornais N e P; e 10% leem os três jornais. Se o contingente de habitantes dessa comunidade que não leem nenhum dos três jornais está entre 270 e 360, então o contingente de leitores exclusivos do jornal M se situa entre

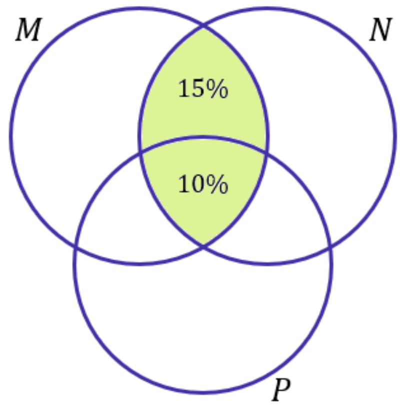
a) 30 e 50
b) 20 e 40
c) 30 e 40
d) 200 e 300
e) 210 e 280

Comentários:

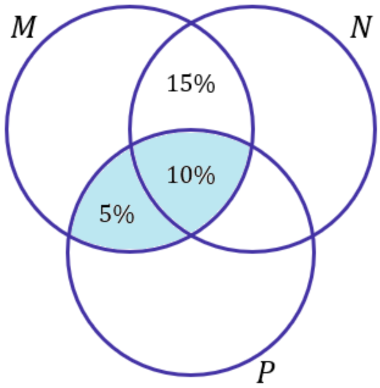
Pessoal, essa é uma questão que devemos usar os diagramas de Venn. Como estudamos, devemos sempre **tentar começar pela intersecção dos três conjuntos**. Nesse caso, a informação que diz que 10% leem os três jornais é o nosso ponto de partida.



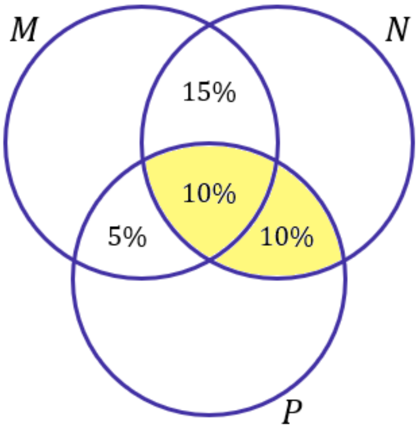
Agora, vamos analisar tudo que tem a ver com dois conjuntos. Por exemplo, a informação que diz que 25% leem os jornais M e N. Note que **já contabilizamos 10% desses 25%**, de modo que precisamos apenas colocar mais 15% na região de intersecção entre M e N.



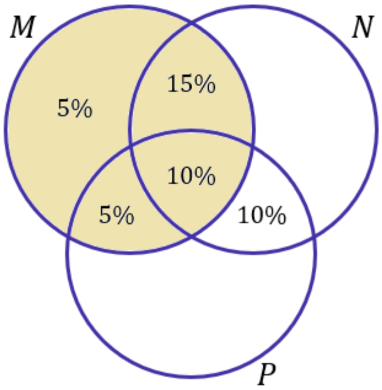
Note que a região destacada corresponde exatamente à intersecção entre M e N e a soma das porcentagens totaliza 25% que o enunciado nos passou ($10\% + 15\% = 25\%$). Vamos prosseguir! A próxima informação é: **15% leem os jornais M e P**. Mais uma vez, já contabilizamos 10% na intersecção tripla (veja a importância de colocar primeiro o valor dela, para impedir contar os valores duas vezes).



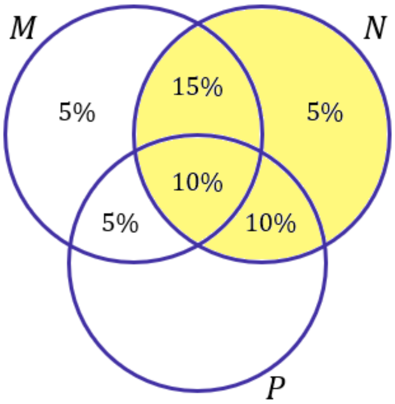
Mais uma vez fiz questão de destacar as duas regiões para que você perceba que a soma das porcentagens é exatamente o que o enunciado trouxe: 15% leem os jornais M e P. A próxima informação a ser considerada é: **20% leem os jornais N e P**. Ficamos então com:



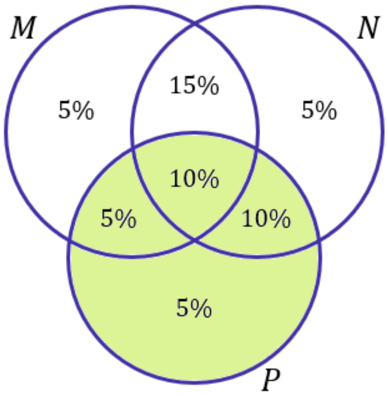
Beleza! Agora vamos avaliar cada conjunto individualmente. O enunciado trouxe que **35% do habitantes são leitores do jornal M**. Note que no diagrama de M temos $15\% + 10\% + 5\% = 30\%$ contabilizados. Para fechar os 35%, devemos apenas acrescentar mais 5% na "região disponível".



Some todos os valores da região M e confira que estará tudo coerente e totalizando os 35% dos habitantes. Vamos seguindo! **40% dos leitores são do jornal N**. Assim,



Por último, devemos levar em conta também que **30% são leitores do jornal P**.



Agora que todo o diagrama está preenchido, ao somar suas regiões, **vamos ter a porcentagem da população que lê pelo menos um dos jornais**, concorda? Assim,

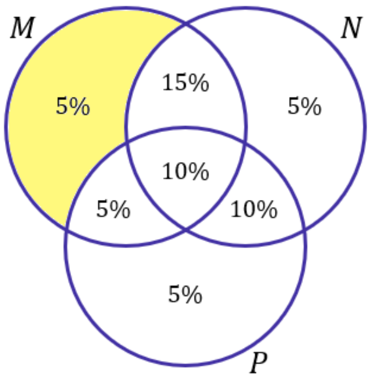
$$5\% + 15\% + 10\% + 5\% + 5\% + 10\% + 5\% = 55\%$$

Veja que **55% da cidade lê pelo menos um dos jornais**. Com isso, 45% (0,45) da população não lê nenhum dos três. Como ele diz a população que não lê nada está entre 270 e 360 habitantes. Podemos calcular o limite mínimo e máximo de habitantes dessa cidade.

$$0{,}45 \cdot p_{\min} = 270 \quad \rightarrow \quad p_{\min} = \frac{270}{0{,}45} \quad \rightarrow \quad p_{\min} = 600\ pessoas$$

$$0{,}45 \cdot p_{\max} = 360 \quad \rightarrow \quad p_{\max} = \frac{360}{0{,}45} \quad \rightarrow \quad p_{\max} = 800\ pessoas$$

Logo, **a população dessa cidade está entre 600 e 800 pessoas**. A questão pede a quantidade de habitantes que leem exclusivamente o jornal M.



Veja que 5% (0,05) dos habitantes leem exclusivamente o jornal M. Assim,

$$M_{\min} = 600 \cdot 0{,}05 \quad \rightarrow \quad M_{\min} = 30\ pessoas$$

$$M_{\max} = 800 \cdot 0{,}05 \quad \rightarrow \quad M_{\max} = 40\ pessoas$$

Portanto, **a quantidade de leitores exclusivos do jornal M está entre 30 e 40 pessoas**.

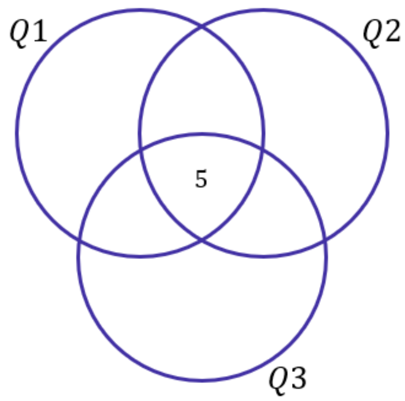
Gabarito: LETRA C.

5. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Cinquenta e dois estudantes foram submetidos a uma prova composta de três questões objetivas. Do total de estudantes, trinta e um acertaram a questão 2, dezessete acertaram as questões 1 e 3, seis acertaram apenas a questão 3 e cinco gabaritaram a prova. Sabendo-se que nenhum estudante obteve nota zero, quantos acertaram somente a questão 1?

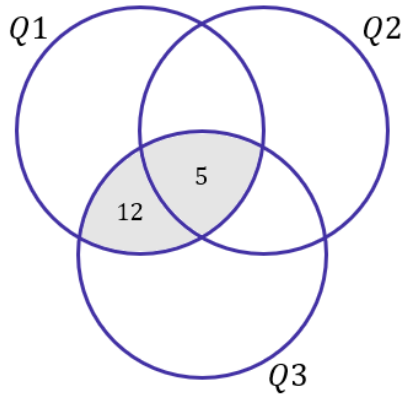
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

Comentários:

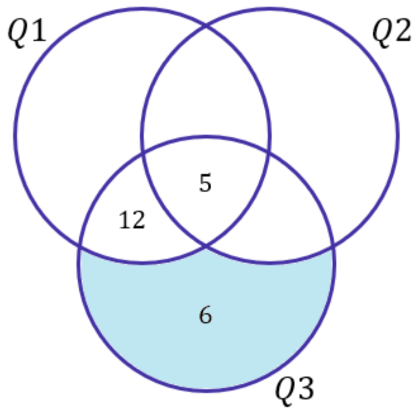
Beleza, moçada! Temos três conjuntos: Q1 formado por aqueles que acertaram a questão 1, Q2 formado por aqueles que acertaram a questão 2 e Q3 formado por aqueles que acertaram a questão 3. Como sempre, **devemos começar analisando a intersecção dos três**, ou seja, quantos gabaritaram a prova. De acordo com o enunciado, cinco acertaram as três questões. Assim,



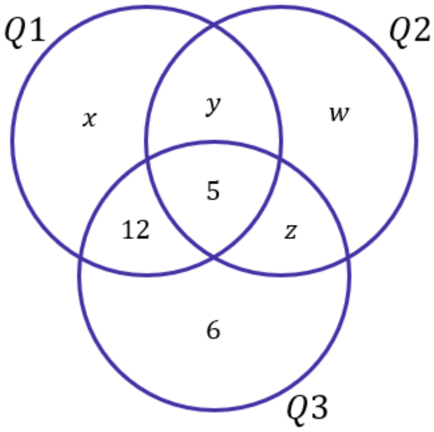
Vamos analisar quem acertou duas questões. Uma das informações do enunciado é que **dezessete acertaram as questões 1 e 3**. Como já contabilizamos 5 no diagrama, faltam apenas mais 12.



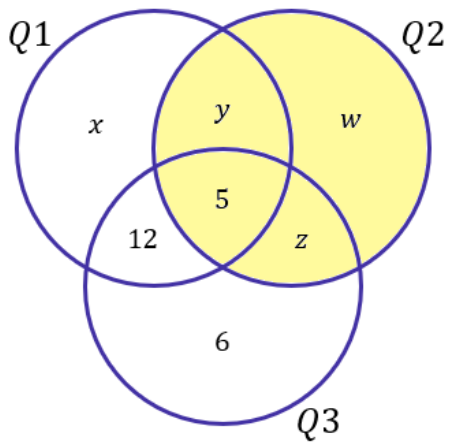
Quando somamos os valores na intersecção de Q1 e Q3, resulta exatamente nos 17 que acertaram as 2 questões. Continuando! A próxima informação que podemos utilizar é: **6 acertaram apenas a questão 3**.



Agora, vamos chamar os valores de cada uma das regiões de uma letra.



Agora que demos "nomes aos bois", vamos analisar a seguinte informação: trinta e um (31) acertaram a questão 2. No nosso diagrama, a região que representa aqueles que acertaram a questão 2 é:

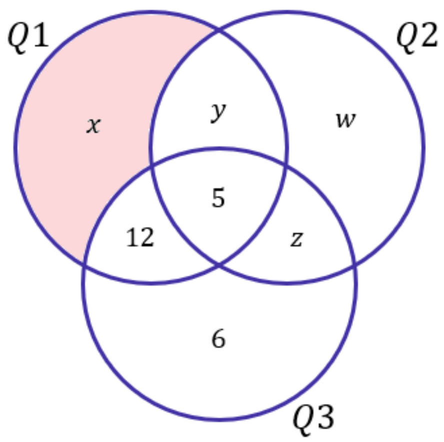


Assim,

$$y + w + z + 5 = 31 \quad \rightarrow \quad y + w + z = 26$$

A questão quer a quantidade de alunos que acertaram apenas a questão 1, ou seja, o valor de x.

▪



O número total de estudantes que fizeram a prova é 52. Como nenhum zerou, então **quando somamos os valores que estão nas regiões do diagrama, devemos obter exatamente o total de alunos**.

$$x + (y + w + z) + 12 + 5 + 6 = 52$$

$$x + 26 + 23 = 52$$

$$x + 49 = 52$$

$$x = 3$$

Gabarito: LETRA A.

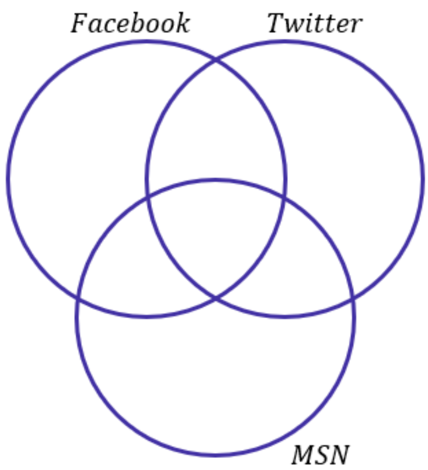
6. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2012 - Adaptada) Um grupo de 100 jovens forneceu informações sobre as três redes sociais mais utilizadas no País: Facebook, MSN e Twitter. Os resultados encontrados foram os seguintes:

- 20 não utilizam nenhuma rede social.

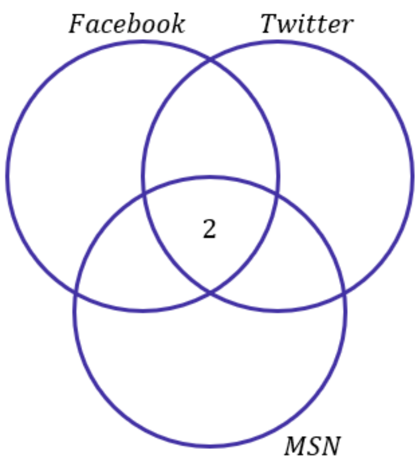
- 32 só utilizam o Facebook.
- 65 utilizam o Facebook.
- 20 só utilizam o Twitter.
- 2 utilizam o Facebook, o Twitter e o MSN.
- 51 utilizam apenas dois dos três meios de comunicação.

A quantidade de jovens que utilizam apenas o Twitter e o MSN é
a) 10
b) 20
c) 25
d) 30
e) 35

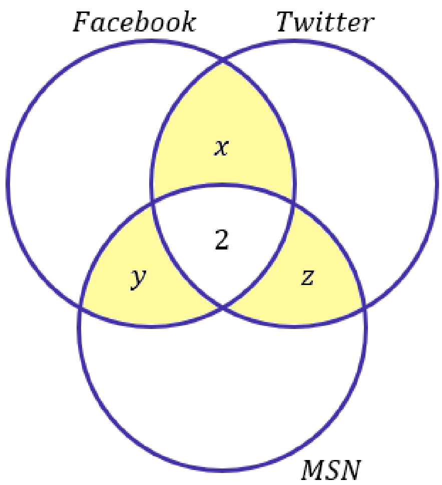
Comentários:
Mais uma vez, **vamos usar diagramas de Venn** para resolver essa questão de conjuntos. O enunciado foi muito bom pois separou as informações para nós de uma maneira que facilita a visualização.



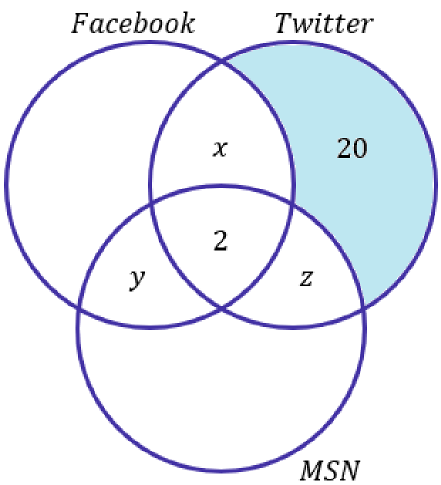
Vamos começar com a intersecção: **2 utilizam o Facebook, o Twitter e o MSN.**



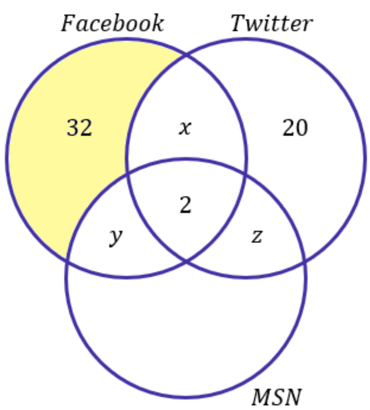
Ademais, o enunciado informou que: **51 utilizam apenas dois dos três meios de comunicação.**



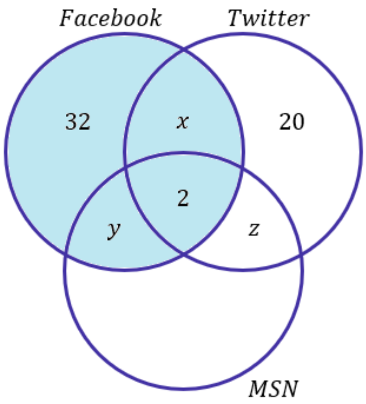
Ou seja, $x + y + z = 51$. Vamos manter assim por enquanto. A próxima informação que podemos utilizar é: 20 utilizam **apenas** o Twitter.



Prosseguindo: **32 só utilizam o Facebook.**



Vamos para a próxima informação: 65 utilizam Facebook.



Assim,

$$32 + x + y + 2 = 65 \quad \rightarrow \quad x + y = 31$$

Como descobrimos que $x + y = 31$, podemos usar o fato que $x + y + z = 51$ para determinar z.

$$x + y + z = 51 \quad \rightarrow \quad 31 = z + 51 \quad \rightarrow \quad z = 20$$

Portanto, **20 jovens utilizam apenas o Twitter e o MSN**.

Gabarito: LETRA B.

7. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2012) Sejam $\#(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X e A, B e C conjuntos tais que $\#(A \cup B) = 12$, $\#(B \cup C) = 22$, $\#(A \cup C) = 22$, $\#(A \cup B \cup C) = 24$ e $\#(A \cap B \cap C) = 5$. Conclui-se que $\#(A) + \#(B) + \#(C)$ é igual a

a) 31
b) 32
c) 34
d) 36
e) 37

Comentários:

Vocês podem ter achado estranho essa notação que usa o #(A). Ela é bem rara e, hoje em dia, utilizamos **n(A) para expressar o número de elementos de um conjunto A**. Vamos escrever esses valores utilizando nossa notação, sem prejuízo algum:

- $n(A \cup B) = 12$

- $n(B \cup C) = 22$

- $n(A \cup C) = 22$

- $n(A \cup B \cup C) = 24$

- $n(A \cap B \cap C) = 5$

- $n(A) + n(B) + n(C) = ???$

Vocês perceberam que está parecendo muito com os elementos do **Princípio da Inclusão e Exclusão**? Recorde a fórmula que vimos na teoria:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad (1)$$

Para usar essa fórmula, precisamos de $n(A \cap B), n(B \cap C)$ e $n(A \cap C)$. No entanto, o enunciado forneceu $n(A \cup B), n(A \cup B)$ e $n(A \cup B)$. O princípio da inclusão e exclusão permite relacionar as duas quantidades.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \rightarrow \quad n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 12$$

Analogamente para os demais conjuntos:

$$n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C) \quad \rightarrow \quad n(A \cap C) = n(A) + n(C) - 22$$

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) \quad \rightarrow \quad n(B \cap C) = n(B) + n(C) - 22$$

Dessa forma, podemos aplicar esses resultados na equação (1):

$$24 = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A) + n(B) - 12) - (n(A) + n(C) - 22) - (n(B) + n(C) - 22) + 5$$

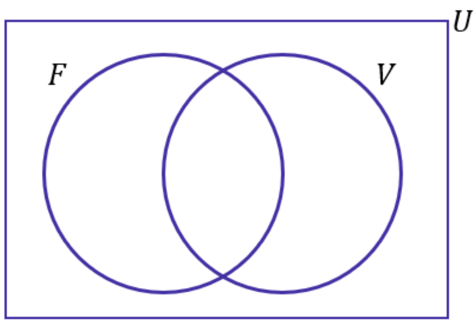
$$24 = \cancel{n(A)} + \cancel{n(B)} + \cancel{n(C)} - \cancel{n(A)} - \cancel{n(B)} + 12 - n(A) - \cancel{n(C)} + 22 - n(B) - n(C) + 22 + 5$$

$$24 = 61 - n(A) - n(B) - n(C) \quad \rightarrow \quad n(A) + n(B) + n(C) = 37$$

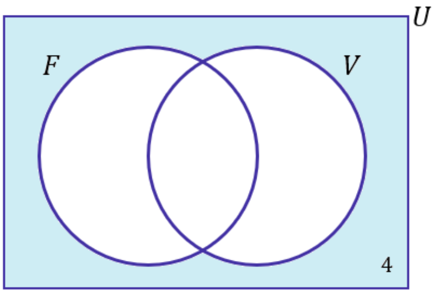
Gabarito: LETRA E.

8. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Conversando com os 45 alunos da primeira série de um colégio, o professor de educação física verificou que 36 alunos jogam futebol, e 14 jogam vôlei, sendo que 4 alunos não jogam nem futebol nem vôlei. O número de alunos que jogam tanto futebol quanto vôlei é
a) 5.
b) 7.
c) 9.
d) 11.
e) 13.

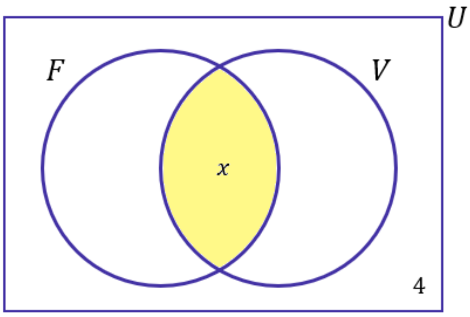
Comentários:
Questão que envolve dois conjuntos principais: um formado por aqueles que jogam futebol (F) e um outro formado por aqueles que jogam vôlei (V).



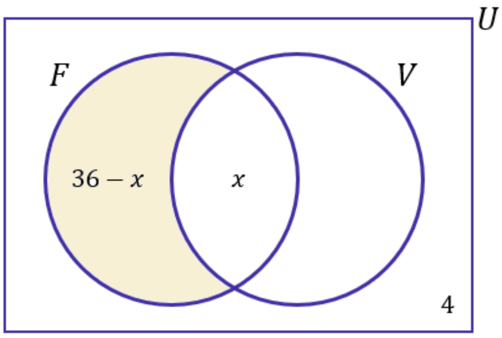
Note que delimitamos nosso conjunto universo, pois há **4 alunos que não jogam nem futebol, nem vôlei**.



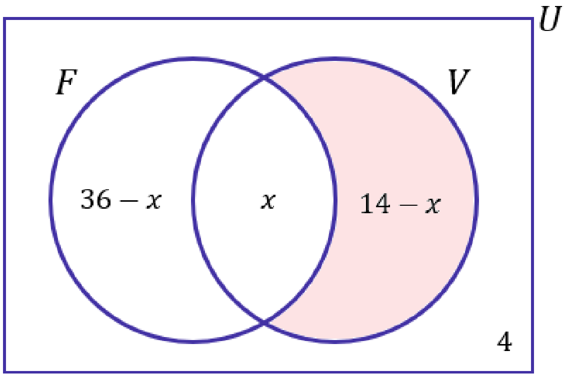
Queremos saber **quantas pessoas jogam futebol e vôlei**. É a nossa intersecção, vamos chamá-la de x.



Se 36 alunos jogam futebol, então $36 - x$ jogam **apenas** futebol.



Por fim, se 14 jogam vôlei, então $14 - x$ jogam **apenas** vôlei.



Quando somamos todas as regiões, devemos ter o total de alunos (no caso, são 45). Assim,

$$(36 - x) + x + (14 - x) + 4 = 45$$

$$54 - x = 45$$

$$x = 9$$

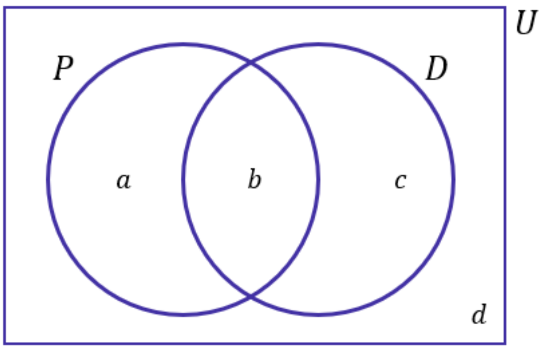
Gabarito: LETRA C.

9. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Em uma fábrica, 70% dos funcionários ou trabalham no setor de Produção ou trabalham no setor de Desenvolvimento, ou seja, nenhum deles trabalha nos dois setores. Um terço dos funcionários que trabalham no setor de Desenvolvimento também trabalha no setor de Produção, e 50% dos funcionários da fábrica não trabalham no setor de Produção. A porcentagem de funcionários da fábrica que trabalha tanto no setor de Desenvolvimento como no setor de Produção é

a) 5%
b) 10%
c) 20%
d) 25%
e) 30%

Comentários:

Galera, acredito que essa questão esteja em um nível bem acima da média. Exige bastante manipulação e possui sacadas bem peculiares. Para começar, **precisamos dar nomes aos bois**. Vamos colocar primeiro no diagrama poder explicar.



- P: conjunto dos funcionários que trabalham no setor de Produção;
- D: conjunto dos funcionários que trabalham no setor de Desenvolvimento;
- "a": é a quantidade de funcionários que trabalham **apenas** no setor de produção;
- "b": é a quantidade de funcionários que trabalham **nos dois setores**;
- "c": é a quantidade de funcionários que trabalham **apenas** no setor de Desenvolvimento;
- "d": é a quantidade de funcionários que **não trabalham em nenhum dos dois setores**.

Seja N o total de funcionários da empresa. Assim,

$$N = a + b + c + d \quad (1)$$

Vamos avaliar as informações que o enunciado passou.

- 70% dos funcionários ou trabalham no setor de Produção ou trabalham no setor de Desenvolvimento, ou seja, nenhum deles trabalha nos dois setores.

$$\frac{a+c}{N} = 0{,}7 \quad \rightarrow \quad a + c = 0{,}7N \quad \rightarrow \quad a = 0{,}7N - c \quad (2)$$

- **50% dos funcionários da fábrica não trabalham no setor de Produção.**

$$\frac{c+d}{N} = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad c + d = 0{,}5N \quad \rightarrow \quad d = 0{,}5N - c \ \ (3)$$

- **Um terço dos funcionários que trabalham no setor de Desenvolvimento também trabalha no setor de Produção.**

$$b = \frac{1}{3}(b+c) \quad \rightarrow \quad \frac{2b}{3} = \frac{c}{3} \quad \rightarrow \quad b = \frac{c}{2} \quad (4)$$

A questão pede a **porcentagem de funcionários da fábrica que trabalha tanto no setor de Desenvolvimento como no setor de Produção, ou seja, o valor de b/N.** Para isso, vamos manipular as equações acima de forma a fazer aparecer essa fração. Convenientemente, nós organizamos as equações (2) e (3), isolando as incógnitas a e d em função de N e c. Vamos substituir (2), (3) e (4) em (1).

$$N = (0{,}7N - \cancel{c}) + \frac{c}{2} + \cancel{c} + (0{,}5N - c) \quad \rightarrow \quad N = 1{,}2N - \frac{c}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{c}{2} = 0{,}2N \quad \rightarrow \quad c = 0{,}4N$$

Substituindo o que encontramos em (4):

$$b = \frac{0{,}4N}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{b}{N} = 0{,}2 \ \ (20\%)$$

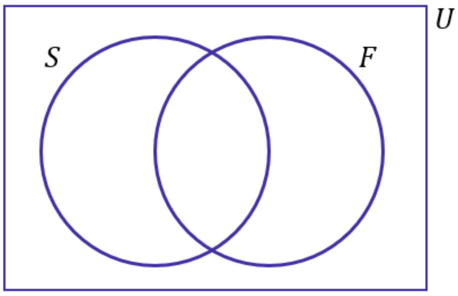
Gabarito: LETRA C.

10. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) Mil pessoas responderam a uma pesquisa sobre a frequência do uso de automóvel. Oitocentas e dez pessoas disseram utilizar automóvel em dias de semana, 880 afirmaram que utilizam automóvel nos finais de semana e 90 disseram que não utilizam automóveis. Do total de entrevistados, quantas pessoas afirmaram que utilizam automóvel durante a semana e, também, nos fins de semana?

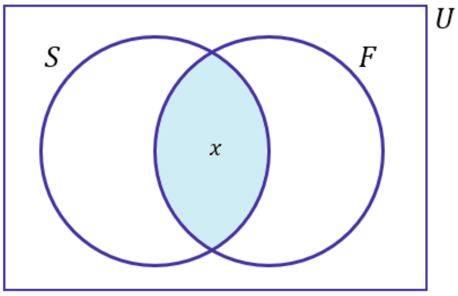
a) 580
b) 610
c) 690
d) 710
e) 780

Comentários:

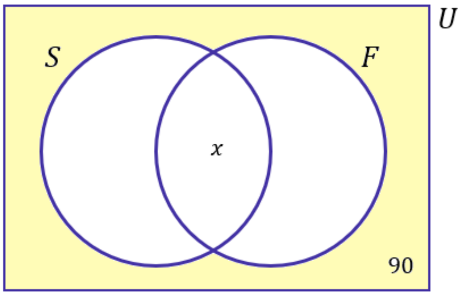
Essa questão envolve **dois conjuntos**: o primeiro formado pelas pessoas que utilizam o automóvel em dias de semana (S) e segundo, formado por aqueles que utilizam o automóvel nos finais de semana (F). Vamos esquematizar os diagramas.



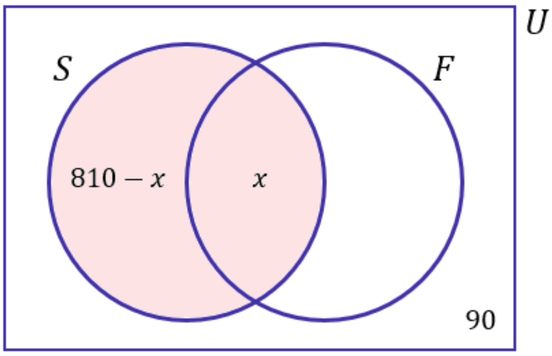
A questão pede justamente a quantidade de pessoas que utilizam o automóvel tanto nos dias de semana, quanto nos finais de semana. Na prática, **é exatamente a intersecção dos 2 conjuntos**. Vamos chamar de x.



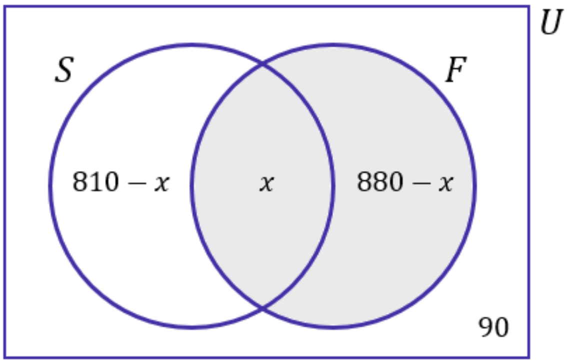
Agora, vamos analisar as informações do enunciado. A primeira informação que podemos aproveitar é que **90 pessoas não utilizam automóveis**.



- **Oitocentas e dez pessoas disseram utilizar automóvel em dias de semana.**



- **880 afirmaram que utilizam automóvel nos finais de semana.**



1000 responderam à pesquisa. Logo, quando somamos todas as regiões, devemos totalizar esse número.

$$(810 - x) + x + (880 - x) + 90 = 1000$$

$$1780 - x = 1000$$

$$x = 780$$

Gabarito: LETRA E.

LISTA DE QUESTÕES - CESGRANRIO

União, Intersecção, Complementar e Diferença

1. (CESGRANRIO/BR/2015) Dados três conjuntos M, N e P, tem-se que o conjunto $M \cap (N \cup P)$ é igual ao conjunto

a) $M \cap (N \cap P)$
b) $M \cap (N \cup P)$
c) $M \cup (N \cap P)$
d) $(M \cap N) \cup (M \cap P)$
e) $(M \cup N) \cap (M \cup P)$

2. (CESGRANRIO/BASA/2014) O conjunto diferença X - Y, entre dois subconjuntos X e Y de um mesmo conjunto universo U, é definido por:

$$X - Y = \{u \in U / u \in X \text{ e } u \notin Y\}$$

Considere três subconjuntos, A, B e C, do mesmo conjunto Universo U. O conjunto $A - (B \cap C)$ é igual ao conjunto

a) $(A - B) \cap (A - C)$.
b) $(A - B) \cup (A - C)$.
c) $(A - B) \cap C$.
d) $(A - B) \cup C$.
e) $(A - B) - C$.

3. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Considere um conjunto U, do qual X é um subconjunto não vazio e próprio. Seja Y o complemento do complemento de X (os complementos sendo considerados em relação a U). Então, a

a) união de X e Y é igual a U.
b) diferença de X e Y é igual a U.
c) intercessão de X e Y é vazia.
d) intercessão de X e Y é igual a U.
e) intercessão de X e Y é igual a X.

Gabarito

1. LETRA D.
2. LETRA B.
3. LETRA E.

LISTA DE QUESTÕES - CESGRANRIO

Princípio da Inclusão-Exclusão

1. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Um grupo de fornecedores foi dividido em três conjuntos, de acordo com o atendimento a três critérios de qualidade, denominados critérios A, B e C. Após uma análise, observou-se que apenas quatro empresas atendem aos três critérios; seis empresas atendem aos critérios B e C; dez empresas atendem ao critério C, mas não atendem ao A; doze empresas atendem ao critério B, mas não atendem ao A, e vinte e três empresas atendem a, pelo menos, um dos critérios A ou B. Considerando-se que nesse grupo de fornecedores não existe empresa que não atenda a, pelo menos, um dos três critérios, o número total de empresas desse grupo, isto é, $n(AUBUC)$, é igual a

a) 21
b) 25
c) 27
d) 29
e) 31

2. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) Os conjuntos P e Q têm p e q elementos, respectivamente, com $p + q = 13$. Sabendo-se que a razão entre o número de subconjuntos de P e o número de subconjuntos de Q é 32, quanto vale o produto pq?

a) 16
b) 32
c) 36
d) 42
e) 46

3. (CESGRANRIO/IBGE/2014) Em uma central de telemarketing com 42 funcionários, todos são atenciosos ou pacientes. Sabe-se que apenas 10% dos funcionários atenciosos são pacientes e que apenas 20% dos funcionários pacientes são atenciosos. Quantos funcionários são atenciosos e pacientes?

a) 1
b) 3
c) 9
d) 12
e) 27

4. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Numa certa comunidade, 35% de seus habitantes são leitores do jornal M; 40% são leitores do jornal N; 30% são leitores do jornal P; 25% leem os jornais M e N; 15% leem os jornais M e P; 20% leem os jornais N e P; e 10% leem os três jornais. Se o contingente de habitantes dessa comunidade que não leem nenhum dos três jornais está entre 270 e 360, então o contingente de leitores exclusivos do jornal M se situa entre

a) 30 e 50
b) 20 e 40
c) 30 e 40
d) 200 e 300

e) 210 e 280

5. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Cinquenta e dois estudantes foram submetidos a uma prova composta de três questões objetivas. Do total de estudantes, trinta e um acertaram a questão 2, dezessete acertaram as questões 1 e 3, seis acertaram apenas a questão 3 e cinco gabaritaram a prova. Sabendo-se que nenhum estudante obteve nota zero, quantos acertaram somente a questão 1?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

6. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2012 - Adaptada) Um grupo de 100 jovens forneceu informações sobre as três redes sociais mais utilizadas no País: Facebook, MSN e Twitter. Os resultados encontrados foram os seguintes:

- 20 não utilizam nenhuma rede social.
- 32 só utilizam o Facebook.
- 65 utilizam o Facebook.
- 20 só utilizam o Twitter.
- 2 utilizam o Facebook, o Twitter e o MSN.
- 51 utilizam apenas dois dos três meios de comunicação.

A quantidade de jovens que utilizam apenas o Twitter e o MSN é

a) 10
b) 20
c) 25
d) 30
e) 35

7. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2012) Sejam $\#(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X e A, B e C conjuntos tais que $\#(A \cup B) = 12$, $\#(B \cup C) = 22$, $\#(A \cup C) = 22$, $\#(A \cup B \cup C) = 24$ e $\#(A \cap B \cap C) = 5$. Conclui-se que $\#(A) + \#(B) + \#(C)$ é igual a

a) 31
b) 32
c) 34
d) 36
e) 37

8. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Conversando com os 45 alunos da primeira série de um colégio, o professor de educação física verificou que 36 alunos jogam futebol, e 14 jogam vôlei, sendo que 4 alunos não jogam nem futebol nem vôlei. O número de alunos que jogam tanto futebol quanto vôlei é

a) 5.
b) 7.
c) 9.
d) 11.

e) 13.

9. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Em uma fábrica, 70% dos funcionários ou trabalham no setor de Produção ou trabalham no setor de Desenvolvimento, ou seja, nenhum deles trabalha nos dois setores. Um terço dos funcionários que trabalham no setor de Desenvolvimento também trabalha no setor de Produção, e 50% dos funcionários da fábrica não trabalham no setor de Produção. A porcentagem de funcionários da fábrica que trabalha tanto no setor de Desenvolvimento como no setor de Produção é

a) 5%
b) 10%
c) 20%
d) 25%
e) 30%

10. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) Mil pessoas responderam a uma pesquisa sobre a frequência do uso de automóvel. Oitocentas e dez pessoas disseram utilizar automóvel em dias de semana, 880 afirmaram que utilizam automóvel nos finais de semana e 90 disseram que não utilizam automóveis. Do total de entrevistados, quantas pessoas afirmaram que utilizam automóvel durante a semana e, também, nos fins de semana?

a) 580
b) 610
c) 690
d) 710
e) 780

Gabarito

1. LETRA E
2. LETRA C
3. LETRA B
4. LETRA C
5. LETRA A
6. LETRA B
7. LETRA E
8. LETRA C
9. LETRA C
10. LETRA E

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:

PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.