Aula 17

BNB - Raciocínio Lógico e Quantitativo - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

30 de Junho de 2023

Índice

1) Noções Elementares 3
2) Circunferência 16
3) Triângulos 29
4) Quadriláteros 67
5) Polígonos 76
6) Inscrição e Circunscrição 81
7) Geometria de Posição 92
8) Questões Comentadas - Noções Elementares - Cebraspe 103
9) Questões Comentadas - Circunferência - Cebraspe 106
10) Questões Comentadas - Triângulos - Cebraspe 110
11) Questões Comentadas - Quadriláteros - Cebraspe 125
12) Questões Comentadas - Polígonos - Cebraspe 137
13) Lista de Questões - Noções Elementares - Cebraspe 141
14) Lista de Questões - Circunferência - Cebraspe 143
15) Lista de Questões - Triângulos - Cebraspe 146
16) Lista de Questões - Quadriláteros - Cebraspe 150
17) Lista de Questões - Polígonos - Cebraspe 155

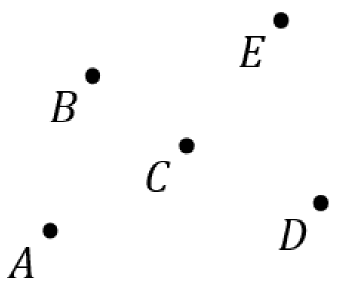
GEOMETRIA PLANA

Introdução

Ponto e Reta

Ponto

O ponto, a reta e o plano são noções bem **primitivas** de geometria. Tente definir um ponto. Você vai perceber que existe uma certa dificuldade nisso (rsrs). Apesar de não ter uma definição "pra valer", sabemos algumas de suas propriedades, de forma que conseguimos identificá-lo e caracterizá-lo.

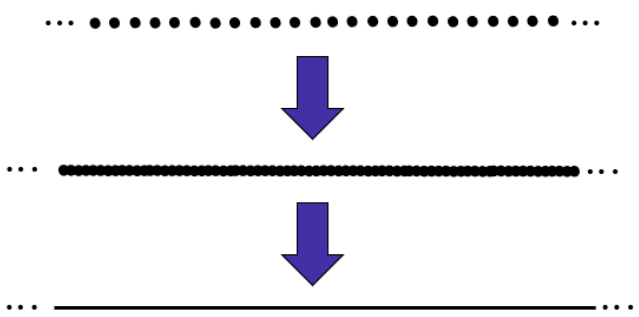


A figura acima mostra vários exemplos de pontos. Você pode notar que chamamos cada um deles de uma **letra maiúscula**. É a notação mais comum. Uma outra característica do ponto é que ele **não possui dimensão**. Dizemos que é um elemento adimensional.

Esse fato permite usarmos o ponto para identificar uma localização com bastante acuracidade. Por fim, vale a pena você anotar aí que não podemos dividir um ponto. Isso mesmo, você não pode "quebrar" um ponto em dois pontos.

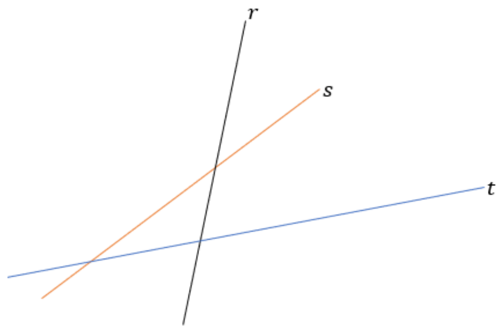
Reta

Por sua vez, **a reta vai ser formada pela união de infinitos pontos**.



Na imagem acima, tentei representar vários pontos se aglomerando até formarem uma reta (rsrs). Vamos lá! *Quais são as características de uma reta?* Primeiro: **ela é unidimensional**. Enquanto um ponto não possui dimensão (é adimensional), a reta agora é unidimensional.

Segundo: **ela é infinita para ambos os lados**! Ou seja, ela segue indefinidamente para qualquer um dos lados (apesar de não ser obrigatório, usamos reticências nas "extremidades" da reta para expressar esse fato).



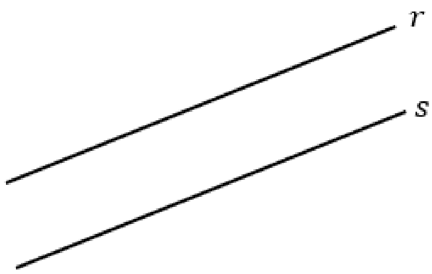
A imagem acima mostra a notação que usamos para as retas: **letras minúsculas**. Enquanto nos pontos usamos letras maiúsculas, nas retas são letras minúsculas! Vale ressaltar que o alfabeto que estamos utilizando de referência aqui é o latino (Aa, Bb, Cc, ..., Zz).

Agora, vou contar para vocês uma novidade. Em algumas situações, a reta terá extremidade(s). Logo, ela não se prolongará até ao infinito nos dois lados. Quando ela tiver **uma extremidade**, a chamaremos de **semirreta**. Por sua vez, quando ela tiver as **duas extremidades**, será apenas um **segmento de reta**.

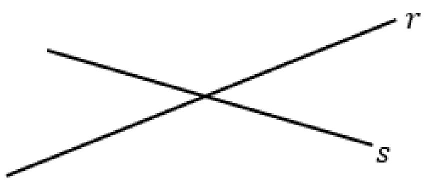
SEMIRRETA

SEGMENTO DE RETA

Normalmente, representamos o segmento de reta com extremidades A e B por $\overline{AB}$. Além desse detalhe, existe mais uma classificação que leva em conta se duas ou mais retas estão se encontrando. *Como assim?!*



RETAS PARALELAS



RETAS CONCORRENTES

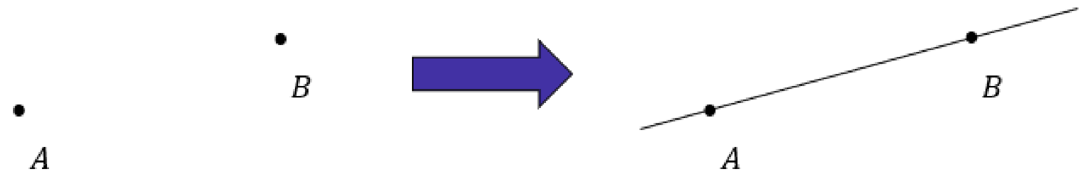
As **retas paralelas não se encontram**, enquanto as **retas concorrentes sim**. Essas últimas possuem **um único ponto em comum**. Duas retas que se encontram em mais de um ponto necessariamente vão se encontrar em todos os demais e serão chamadas retas coincidentes!

RETAS COINCIDENTES

É como se uma reta estivesse em cima da outra!!

Para finalizar essa parte introdutória de retas, anote aí a seguinte propriedade:

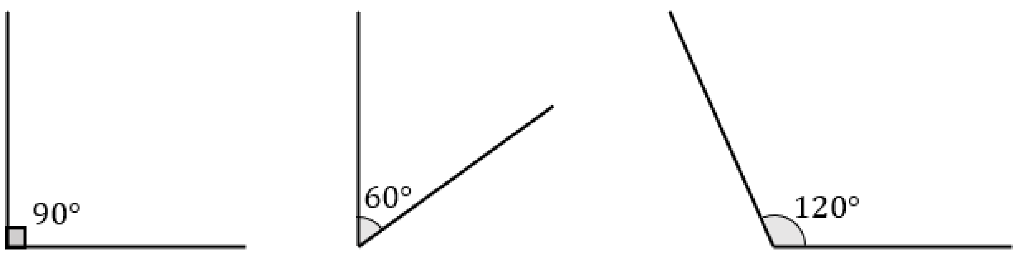
- Sempre conseguiremos traçar uma reta por quaisquer dois pontos. Essa reta será única.



Ângulos

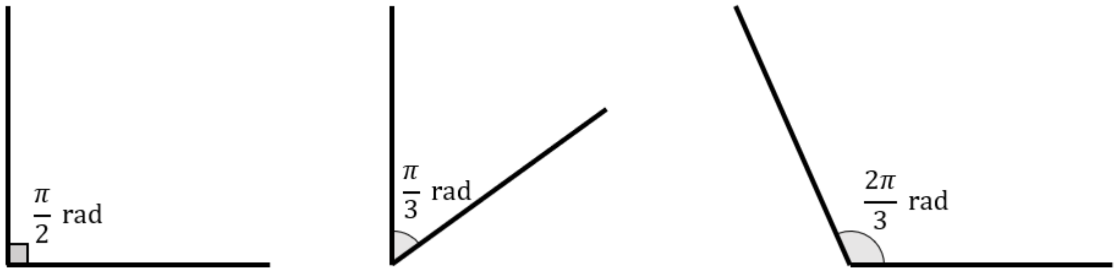
Um ângulo é formado pelo **encontro de duas semirretas**. Esse encontro pode se dar de várias formas. Veja.

Perceba que dependendo de como arranjamos as semirretas, vamos ter aberturas diferentes. Nós podemos **quantificar essa abertura e expressar o resultado em graus (°) ou radianos (rad)**.



ÂNGULOS REPRESENTADOS EM GRAUS (°)

Agora olhe os mesmos ângulos, mas expressados em radianos.



ÂNGULOS REPRESENTADOS EM RADIANOS (rad)

São duas maneiras bem diferentes de expressarmos os ângulos, concorda? Muitos alunos possuem facilidade quando estão trabalhando com graus (°), mas quando aparece um ângulo em radianos (rad), já ficam assustados. Moçada, apenas uma regra de três simples separa um ângulo em radiano de um ângulo em grau (ou vice-versa). Para isso, lembre-se sempre do seguinte:

$\mathbf{180°}$ equivalem a $\boldsymbol{\pi}$ rad.

Sabendo disso, é só usar uma regra de três para converter um em outro. Vamos fazer alguns exemplos.

1) Converter 60° em radianos.

Você pensa assim: se 180° equivalem a π rad, então 60° equivalem a x. Com isso, podemos esquematizar:

$$\begin{array}{ccc} 180° & \longleftrightarrow & \pi \text{ rad} \\ 60° & \longleftrightarrow & x \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

$$180x = 60\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{60\pi}{180} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}\ \mathbf{rad}}}$$

Logo, podemos dizer que 60° equivalem a $\pi/3$ rad.

2) Converter $\frac{5\pi}{6}$ rad em graus.

Pensamento muito semelhante, moçada! Se 180° equivalem a π rad, então x equivalem a $\frac{5\pi}{6}$ rad.

$$180° \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$

$$x \longleftrightarrow \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

Multiplicando cruzado.

$$x \cdot \pi = 180 \cdot \frac{5\pi}{6} \quad \rightarrow \quad x = 30 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 150°}$$

Logo, $\frac{5\pi}{6}$ rad equivalem a 150°.

A tabela abaixo mostra os ângulos (em graus) mais frequentes em provas, bem como seu valor em radianos.

ESQUEMATIZANDO

Principais Ângulos	
Em Graus	Em Radianos
$0°$	0 rad
$30°$	$\frac{\pi}{6}$ rad
$45°$	$\frac{\pi}{4}$ rad
$60°$	$\frac{\pi}{3}$ rad
$90°$	$\frac{\pi}{2}$ rad
$180°$	π rad
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$ rad
$360°$	2π rad

HORA DE PRATICAR!

(EEAR/2019) Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual:

A) 48°

B) 54°

C) 66°

D) 72°

Comentários:

Para treinar, moçada! Ora, se 180° equivalem a π rad, então x graus equivalem a $\frac{3\pi}{10}$ rad. Vamos esquematizar.

$$180° \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$

$$x \longleftrightarrow \frac{3\pi}{10} \text{ rad}$$

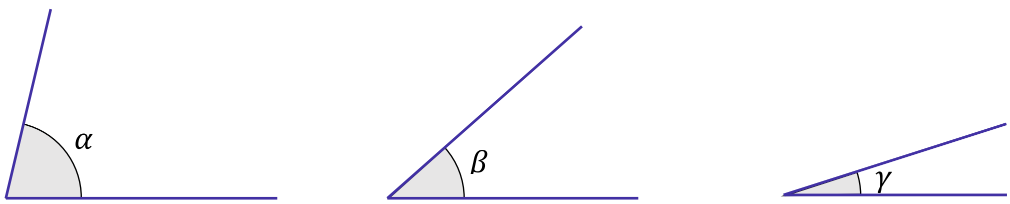
Multiplicando cruzado.

$$x \cdot \pi = 180 \cdot \frac{3\pi}{10} \quad \rightarrow \quad x = 18 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad x = 54°$$

Gabarito: LETRA B.

Agora que sabemos o que é um ângulo e suas unidades, vamos entrar nas nomenclaturas e classificações.

- **Ângulo Raso:** É o ângulo de 180° (π rad).
- **Ângulo Reto:** É o ângulo de 90° ($\pi/2$ rad)
- **Ângulo Agudo:** Todo ângulo maior que 0° e menor que 90°.

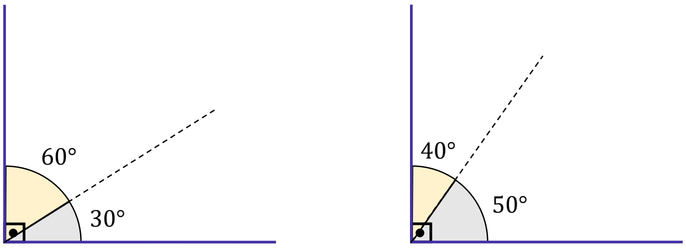


α, β e γ são ângulos agudos.

- **Ângulo Obtuso:** Todo ângulo maior que 90° e menor que 180°.

δ e θ são ângulos obtusos.

- **Ângulos Complementares**: Dois ângulos são chamados de complementares quando sua soma é igual a 90°.

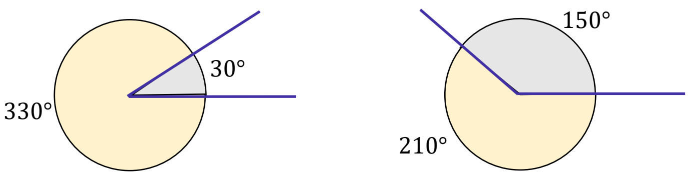


Por exemplo, 60° e 30° são ângulos complementares, já que $30° + 60° = 90°$. Da mesma forma, 40° e 50° também são. Beleza?!!

- **Ângulos Suplementares**: Dois ângulos são chamados de complementares quando sua soma é igual a 180°.

Observe que 150° e 30° são ângulos suplementares, uma vez que sua soma é igual a 180°. Da mesma forma, 75° e 105° também são.

- Ângulos Replementares: Dois ângulos são chamados de replementares quando sua soma é 360°.



- 330° e 30° são ângulos replementares pois $330° + 30° = 360°$.
- 210° e 150° também são ângulos replementares, já que $210° + 150° = 360°$.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. ÁGUIA BRANCA/2018) O replemento do ângulo de 275° é:

A) 85°.

B) 95°.

C) 35°.

D) 25°.

E) 185°.

Comentários:

O replemento do ângulo de 275° é o ângulo que quando eu somar com 275 vai resultar em 360°. Assim,

$$275° + x = 360° \quad \rightarrow \quad x = 360° - 275° \quad \rightarrow \quad x = 85°$$

Gabarito: LETRA A.

(PREF. SM CAMPOS/2017) Dadas as afirmativas a respeito de ângulos,

I. Um ângulo de 80° é um ângulo reto.

II. Um ângulo de 105° é um ângulo obtuso.

III. Um ângulo de 5° é um ângulo agudo.

verifica-se que está(ão) correta(s)

A) I, apenas.

B) II, apenas.

C) I e III, apenas.

D) II e III, apenas.

E) I, II e III.

Comentários:

Vamos avaliar cada uma das afirmativas.

I. Um ângulo de 80° é um ângulo reto.

ERRADO. O ângulo reto é o ângulo de 90°.

II. Um ângulo de 105° é um ângulo obtuso.

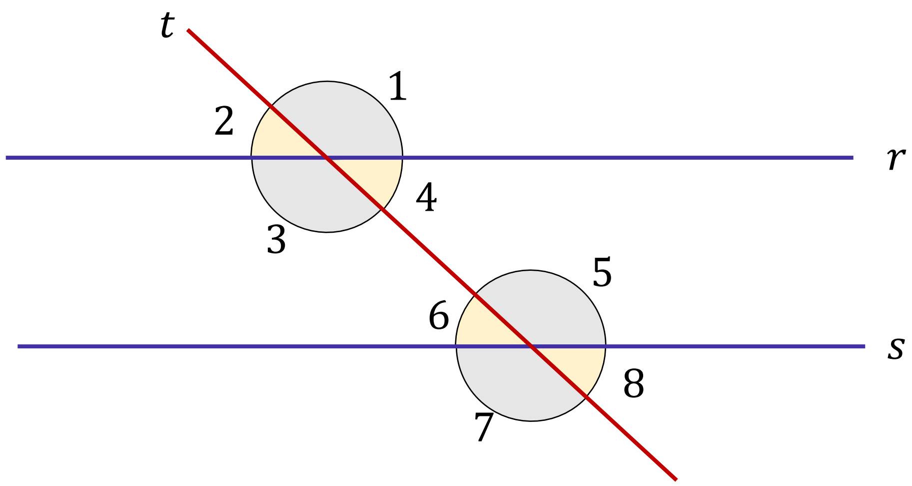
CERTO. Qualquer ângulo maior que 90° e menor que 180° é um ângulo obtuso.

III. Um ângulo de 5° é um ângulo agudo.

CERTO. Qualquer ângulo maior que 0° e menor que 90° é um ângulo agudo.

Gabarito: LETRA D.

Para finalizar essa parte de ângulos, vamos conhecer mais alguns nomes que podem aparecer na sua prova. Considere a seguinte situação:

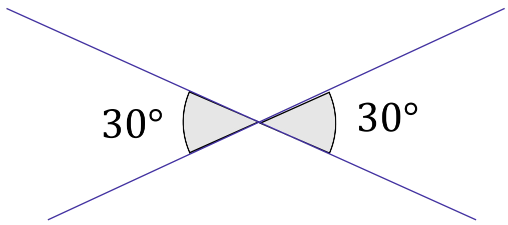


r e s são retas paralelas, enquanto t é uma transversal. Observe que quando a transversal corta as duas retas paralelas, vários ângulos são formados. Esses 8 novos ângulos ganham nomes. Vamos lá!

- Ângulos **opostos pelo vértice**: $(1{,}3), (2{,}4), (5{,}7)\ e\ (6{,}8)$;
- Ângulos **alternos internos**: $(4{,}6)$ e $(3{,}5)$;
- Ângulos **alternos externos**: $(2{,}8)$ e $(1{,}7)$;
- Ângulos **colaterais internos**: $(3{,}6)$ e $(4{,}5)$;
- Ângulos **colaterais externos**: $(1{,}8)$ e $(2{,}7)$.

Professor, é muito nome! É muita coisa! Vou endoidar!

Calma, aluno! Se eu tivesse que escolher o mais importante para te falar, escolheria o oposto pelo vértice. Saiba que se dois ângulos são opostos pelo vértice. A consequência de dois ângulos serem opostos pelo vértice é que eles possuirão a mesma medida!



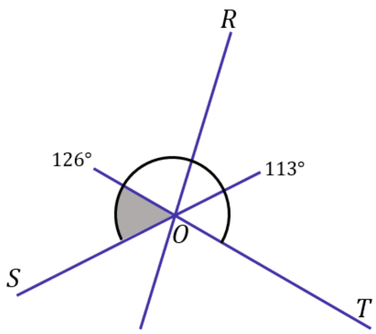
Vale a pena ter em mente que ângulos alternos internos/externos são congruentes (iguais). Por exemplo, voltando para a figura da página anterior,

- Como 4 e 6 são ângulos alternos internos, então eles possuem a mesma medida (são congruentes).
- Como 1 e 7 são ângulos alternos externos, então eles também possuem a mesma medida (são congruentes).

Dito tudo isso, agora vamos exercitar um pouco!

HORA DE PRATICAR!

(PREF. SUZANO/2019) Três retas interceptam-se em um ponto O, formando a figura a seguir.



Considerando que RÔS mede 126° e RÔT mede 113°, a medida do ângulo destacado em cinza é:

A) 36°

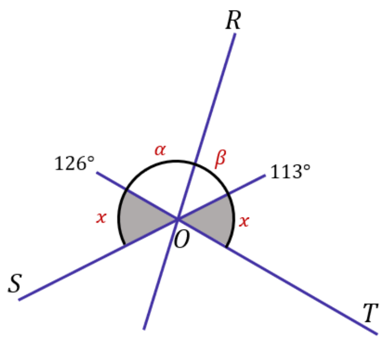
B) 59°

C) 67°

D) 121°

Comentários:

A primeira coisa que deveríamos perceber é que **o ângulo destacado em cinza é igual ao que está atrás dele**. Veja que são ângulos opostos pelo vértice.



Observe que aproveitamos para dar "nome aos bois". **Chamamos cada ângulo de uma letra**. Do enunciado, sabemos que **RÔS mede 126°**. Assim,

$$x + \alpha = 126° \qquad (1)$$

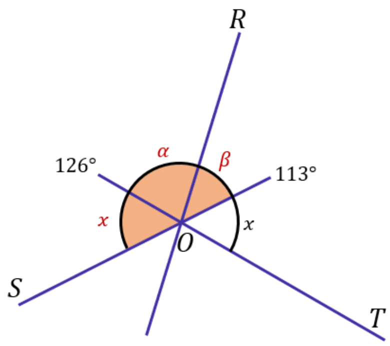
Temos também a informação que **RÔT mede 113°.** Assim,

$$x + \beta = 113° \qquad (2)$$

Vamos somar a equação (1) com a equação (2), membro a membro.

$$(x + \alpha) + (x + \beta) = 126° + 113° \qquad \rightarrow \qquad x + \boldsymbol{(x + \alpha + \beta)} = 239°$$

Pessoal, vocês estão vendo que eu destaquei uma parte da soma na nossa equação. Quero que você volte para nossa figura acima e veja que **a soma destacada é exatamente um ângulo raso, isto é, 180°**.



Portanto,

$$x + 180° = 239° \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{x = 59°}$$

Gabarito: LETRA B.

Graus, minutos e segundos

Para finalizar esse tópico inicial, vamos apresentar a relação entre grau, minutos e segundos.

Professor, o que tempo tem a ver com ângulos?

Galera, é importante não misturarmos as coisas. Muito cuidado para não confundir esse ponto da matéria! Aqui, "minutos" e "segundos" são unidades de medida angular (assim como o grau)! Não tem nada a ver com tempo. Dizemos que 1 grau tem 60 minutos e que 1 minuto tem 60 segundos.

$$1° = 60'$$

$$1' = 60''$$

Guarde bem isso pois é fundamental na hora das conversões!

Note que representamos o minuto com a plica simples (') e o segundo como a plica dupla (''). Na hora da questão, atente-se a esses símbolos para não confundir minuto com segundo (ou vice-versa). Agora, para entender melhor como esse conhecimento pode ser cobrado em prova, vamos fazer uma questão!

EXEMPLIFICANDO

(CM BAURU/2022) Dois ângulos são chamados de complementares quando, juntos, resultam em 90°. Sabendo que A e B são ângulos complementares e A = 72°34’27”, qual é a medida do ângulo B?

A) 17°26’33”

B) 18°26’33”

C) 17°25’33”

D) 18°25’33”

E) 27°25’33”

Comentários:

Observe que o ângulo A está expresso **em graus, minutos e segundos**. É possível encontrarmos B trabalhando com todas essas unidades ao mesmo tempo. Observe!

Como A e B são ângulos complementares, podemos escrever:

$$A + B = 90°$$

Usando A = 72°34’27”:

$$72°34'27'' + \mathrm{B} = 90°$$

Note que 90° está expresso apenas em graus, enquanto A está expresso também em minutos e segundos. Sendo assim, **devemos expressar 90° em todas essas unidades também**. Observe as diferentes formas:

$$90° = 89°60' = 89°59'60''$$

Para entender essas equivalências é superimportante você lembrar que:

$$1° = 60' \quad \text{e} \quad 1' = 60''$$

Quando escrevemos 89°60', queremos dizer:

$$89° + 60'$$

Ora, 60' é igual a 1°.

$$90° = 89°60' = 89° + 60' = 89° + 1° = 90°$$

Percebeu a volta que demos? Tudo isso para mostrar que temos formas alternativas de representar um mesmo ângulo. Como estamos interessados também nos segundos, usaremos:

$$90° = 89°59'60''$$

Ora, observe o motivo:

$$90° = 89°59'60'' = 89° + 59' + \underbrace{60''}_{1'} = 89° + 59' + 1' = 89° + \underbrace{60'}_{1°} = 89° + 1° = 90°$$

Dito isso, vamos reescrever nossa equação.

$$72°34'27'' + \mathrm{B} = 89°59'60''$$

$$B = 89°59'60'' - 72°34'27''$$

Para fazer essa subtração, vamos organizá-la naquela forma tradicional:

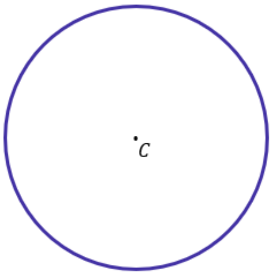
$$\begin{array}{rr} & \mathbf{89}°59'60'' \\ - & \mathbf{72}°34'27'' \\ \hline & \mathbf{17}°25'33'' \end{array}$$

Pessoal, o segredo aqui é não misturar. Faça a subtração em cada um dos grupos: segundos, depois os minutos e, por fim, os graus.

Gabarito: LETRA C.

Circunferência

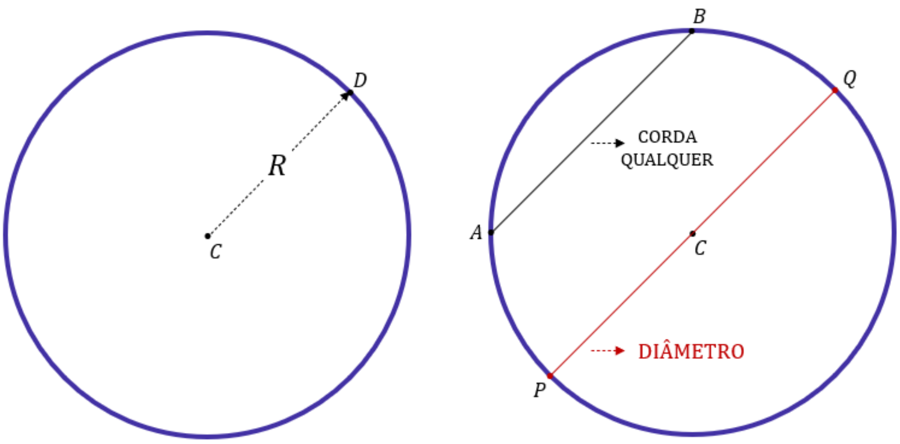
A primeira figura geométrica que estudaremos na aula de hoje será a circunferência. Particularmente, acho ela bem interessante, já que é uma **forma bem corriqueira**. Lembre-se de uma pizza, de um pneu, de uma moeda... todos eles possuem um formato circular (circunferencial). Com um pouco mais de rigor, nós definimos uma circunferência como sendo **o conjunto dos pontos equidistantes de um centro (C)**.



Raio, Diâmetro e Cordas

Quando estamos falando do raio (R) de uma circunferência, estamos falando da **distância entre seus pontos e o centro**. Por sua vez, corda é o segmento de reta que une dois pontos quaisquer de uma circunferência.

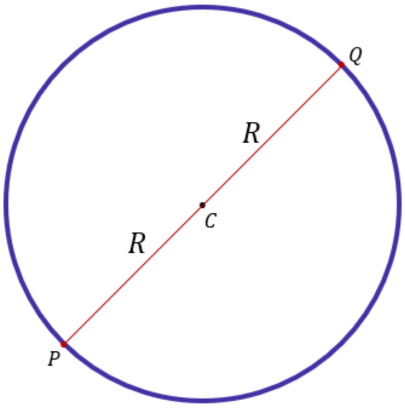
Acontece que **quando essa corda passa pelo centro da circunferência**, **nós a chamamos de diâmetro**. Para um melhor entendimento, vamos dar uma olhada nas figuras abaixo!



A figura de esquerda ilustra **o raio**. É exatamente a distância entre o centro e um ponto da circunferência. Na situação retratada, chamamos esse ponto de D. Já na circunferência da direita, quero mostrar pra você a diferença entre o diâmetro e uma corda qualquer.

Pessoal, para ser diâmetro, **o segmento de reta precisa passar pelo centro da circunferência**. Caso não passe (como o segmento AB), teremos uma corda. É verdade que o diâmetro não deixa de ser uma corda, mas é uma "corda especial", pois ela **é a corda de maior comprimento**!

Se olharmos com atenção para a figura, vemos que o comprimento do diâmetro (ou simplesmente diâmetro a partir de agora) vale exatamente **duas vezes o raio**. Por esse motivo, escrevemos que:



$$\boxed{D = 2R}$$

RESUMINDO

Raio: distância do centro até um ponto da circunferência. **Corda:** segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência. **Diâmetro:** corda que passa pelo centro da circunferência. Mede o dobro do raio (2R).

(PREF. CHÃ PRETA/2015) O segmento de reta que une dois pontos de uma circunferência é chamado
A) arco.
B) raio.
C) setor.
D) corda.
E) diâmetro.

Comentários:
Questão rápida para testarmos o que acabamos de ver. Na teoria, dissemos que:

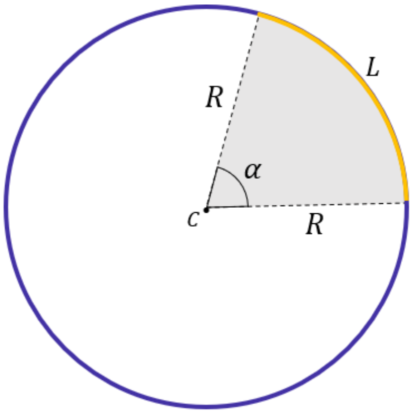
Corda: segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência.

Alguém poderia ter dúvidas sobre a possibilidade desse segmento ser um diâmetro. Note que **o enunciado não fala se o segmento passa pelo centro**. Dessa forma, não podemos garantir que ele seja o diâmetro.

Gabarito: LETRA D

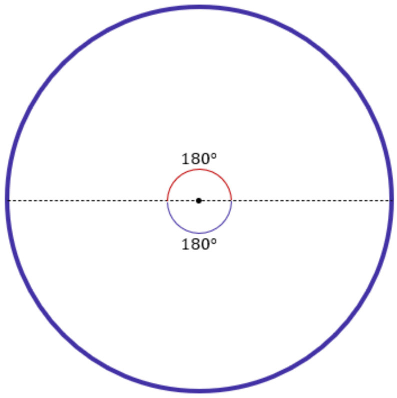
Setores

Um setor de circunferência corresponde à famosa **fatia de pizza**! Observe a figura abaixo.



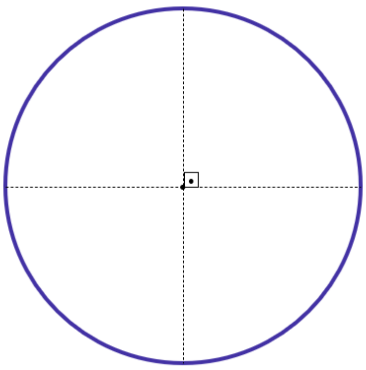
Todo setor possui um ângulo central (α). Além disso, a borda da pizza (destacada de amarelo) possui um comprimento L. É o que chamamos de comprimento do arco. **Esse comprimento L depende tanto do ângulo central (α) como do raio (R)**.

Aprenderemos a calculá-lo em breve. Antes disso, vamos aprender a calcular α. Para isso, imagine que você recebeu uma pizza enorme e vai dividi-la com um colega. Você corta ao meio:



Veja que cada setor ficou com um ângulo central de 180°.

Situação análoga ocorreria se dividíssemos a pizza em 4 fatias idênticas.



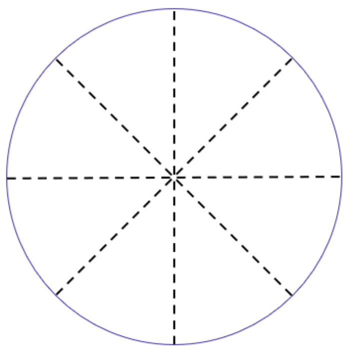
Quando temos quatro setores idênticos, o ângulo central de cada um deles é igual a **um quarto do ângulo total da circunferência**, isto é,

$$\alpha = \frac{360°}{4} \quad \rightarrow \quad \alpha = 90°$$

HORA DE
PRATICAR!

(CM VINHEDO/2020) Uma pizza de 8 pedaços faz cada fatia ter 45° de ângulo. Se quiser dividir em 9 pedaços, qual deve ser o ângulo da fatia?
A) 40°
B) 42°
C) 50°
D) 60°
E) 45°

Comentários:
Pessoal, **a pizza tem o formato de uma circunferência (normalmente, rsrs)**. Quando dividimos ela em 8 pedaços, ficamos com uma situação parecida com a mostrada a seguir:



Cada fatia corresponde a um setor de circunferência cujo ângulo é a oitava parte de 360°. Afinal, aprendemos que **uma circunferência tem 360°** (ou 2π rad).

$$\alpha = \frac{360°}{8} = 45°$$

Se dividirmos a pizza em 9 pedaços, podemos encontrar o ângulo central de cada setor dividindo **360° por 9**.

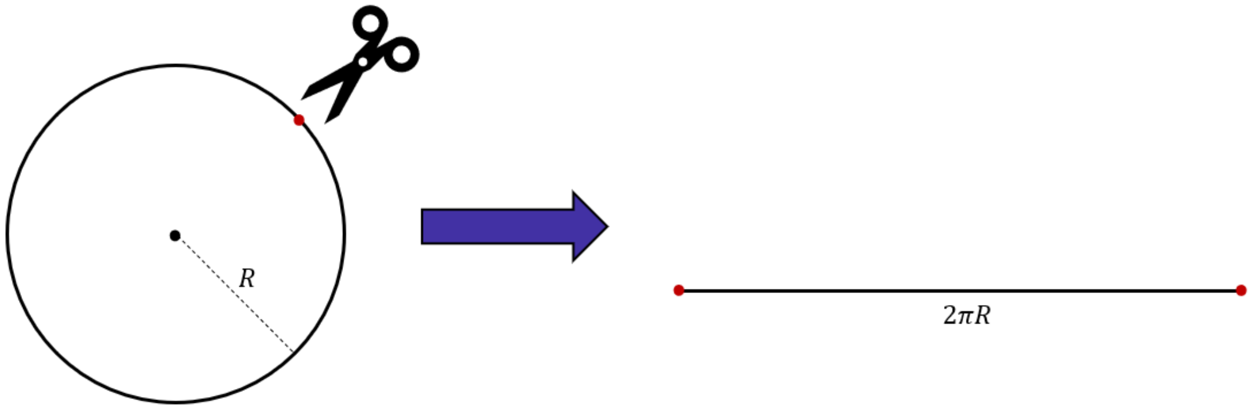
$$\alpha = \frac{360°}{9} = 40°$$

Gabarito: LETRA A.

Beleza, tudo bem até aqui né, pessoal? Vimos um pouco da definição de circunferência, de raio, de corda, de diâmetro e de setores. Espero que tudo esteja fazendo sentido, sempre voltaremos a falar deles! A medida que formos introduzindo novos conceitos, vamos ganhando mais maturidade e voltaremos a comentar aspectos adicionais desses elementos! Agora, continuando!

Comprimento de uma Circunferência

Lembra que no tópico passado eu falei sobre comprimento do arco? Que era tipo a medida da borda da fatia da pizza. Aqui, no comprimento da circunferência, estamos nos referindo **a medida da borda de toda a pizza** e não apenas da fatia! *Eita, tanta pizza que já tá dando fome! (rsrs).* Existe uma figura que eu gosto bastante para explicar o comprimento da circunferência, veja:

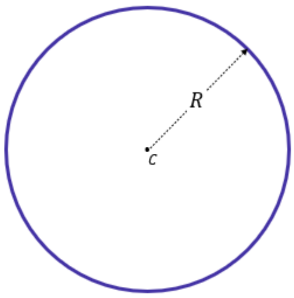


Ficou um pouco melhor de visualizar? Para tentar explicar de uma outra forma, imagine uma formiga no ponto vermelho, onde a tesoura vai cortar! **A distância que ela andaria para completar a volta** (andando apenas sobre a linha preta) é exatamente igual ao comprimento da circunferência (C). Esse valor é dado por uma fórmula bem conhecida que já adiantei um pouco na imagem acima, anota aí!

$$C = 2\pi R$$

HORA DE PRATICAR!

(CM Orizânia/2020) A figura a seguir ilustra a arena de um campeonato de artes marciais, que possui o formato circular e diâmetro de 8 m.



A medida "R" é denominada "raio" e tem sua medida equivalente à metade do diâmetro. Para calcular o comprimento "C" da circunferência, utiliza-se a fórmula: $C = 2\pi R$, em que πvale, aproximadamente, 3,14. O valor aproximado do comprimento da arena citada acima é de:

A) 12,56 m.
B) 25,12 m.
C) 50,24 m.
D) 100,48 m.
E) 200,96 m.

Comentários:

Questão para aplicarmos a fórmula que acabamos de ver! Devemos ter o cuidado de perceber que o enunciado deu o valor do diâmetro (D) e não do raio (R). Lembre-se:

$$D = 2R \quad \rightarrow \quad R = \frac{D}{2} \quad \rightarrow \quad R = \frac{8}{2} \quad \rightarrow \quad R = 4\,m$$

Se a arena tem diâmetro de 8 metros, então seu raio será metade disso, isto é, 4 metros. Com o raio, já conseguimos calcular o comprimento da circunferência.

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad C = 25{,}12\,m$$

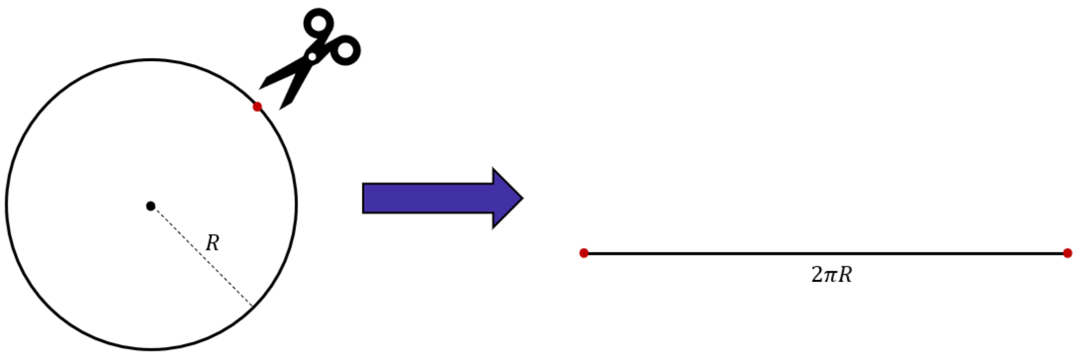
Gabarito: LETRA B.

(PREF. C DOS COQUEIROS/2019) O carro de seu Antônio tem uma roda com 80 centímetros de diâmetro. Em certa viagem, seu Antônio totalizou 7.300 voltas em cada roda. Quantos quilômetros foram percorridos nesta viagem?

A) 18,3 km
B) 36,7 km
C) 13,7 km
D) 18,8 km

Comentários:

Esse é um tipo de questão bem clássica sobre comprimento de circunferência.



Quando o pneu dá uma volta, ele anda exatamente u**ma distância equivalente ao comprimento da circunferência**, isto é, $2\pi R$. Se o pneu tem um diâmetro de 80 cm, então sabemos que o raio é 40 cm (**lembre-se que o raio é sempre metade do diâmetro**). A distância que o carro percorrerá quando o pneu der uma volta será dada por:

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 40 \quad \rightarrow \quad C = 251{,}2\ cm$$

Logo, já sabemos que **em uma volta o carro anda $251,2\ cm = 2,512\ metros$**. Para achar quanto o carro anda após 7.300 voltas, devemos fazer uma *regra de três simples*.

$$1\ volta \longleftrightarrow 2{,}512\ metros$$
$$7.300\ voltas \longleftrightarrow x\ metros$$

Podemos multiplicar cruzado.

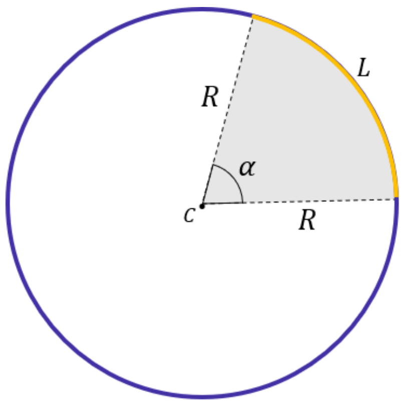
$$1 \cdot x = 7300 \cdot 2{,}512 \quad \rightarrow \quad x = 18.337{,}6\ metros$$

Lembre-se que **1 km é equivalente a 1.000 metros**, assim:

$$x = 18.337{,}6\ metros \cong 18{,}3\ km$$

Gabarito: LETRA A.

Agora que sabemos calcular o comprimento de uma circunferência, podemos fazer uma regra de três simples para achar o comprimento do arco. Voltemos para a figura do setor.



Ora, se quando temos uma circunferência inteira (que possui 360°), o comprimento dela é $2\pi R$, então um arco de ângulo central α tem comprimento L.

$$360° \longleftrightarrow 2\pi R$$
$$\alpha \longleftrightarrow L$$

Multiplicando cruzado.

$$L = 2\pi R \cdot \left(\frac{\alpha}{360°}\right)$$

Essa é a expressão para quando **estamos usando o ângulo central em graus**!! Caso você esteja usando α em radianos, devemos usar 2π na regra de três ao invés de 360°.

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \longleftrightarrow & 2\pi R \\ \alpha & \longleftrightarrow & L \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

$$L = \alpha \cdot \mathrm{R}$$

Na minha opinião, a fórmula desse jeito é bem mais interessante. Veja que o comprimento do arco L é o **produto do ângulo central (em radianos) pelo raio**. Quando o ângulo central é igual 2π, note que a expressão vira a fórmula do comprimento da circunferência. *Agora, vamos praticá-la?!*

HORA DE PRATICAR!

(PREF. BATAGUASU/2021) Se um arco de 120° de um dado círculo tem comprimento de 8π cm, o seu raio tem comprimento:

A) 2π

B) 12 cm

C) 2 cm

D) 32 cm

Comentários:

Pessoal, veja que ele deu o ângulo em graus (120°) e o comprimento do arco (8π). A pergunta que ele faz é: qual é o raio? Ora, se ele deu o ângulo em graus, podemos usar a fórmula:

$$L = 2\pi R \cdot \left(\frac{\alpha}{360°}\right)$$

Do enunciado: $\alpha = 120°$ e $L = 8\pi$ cm. Vamos encontrar R.

$$8\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi} R \cdot \left(\frac{120°}{360°}\right) \quad \rightarrow \quad 4 = R \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \quad \rightarrow \quad R = 12 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA B.

Área de uma Circunferência

Quando calculamos a área de uma figura plana, estamos tentando **quantificar o tamanho da região delimitada por ela**. Pode ser um conceito meio abstrato, mas sempre usamos no dia-a-dia. Se conhecemos o raio da circunferência, podemos calcular sua área.

$$A = \pi R^2$$

Sugiro muito que guardem essa fórmula no coração. Além disso, a dica suprema é: **faça muitos exercícios** que envolvam cálculos de áreas de circunferência. Dessa forma, tenho certeza que ela entrará na "massa do sangue".

(PREF. MOSTARDAS/2020) Quanto mede a circunferência em cm e a área em cm², nessa ordem, de um círculo cujo diâmetro é 10 cm? (utilize $\pi = 3{,}14$)
A) 62,40 e 314.
B) 31,40 e 78,5.
C) 15,70 e 34,25.
D) 7,85 e 17,12.

Comentários:
Note que ele deu o diâmetro da circunferência (10 cm). Lembre-se que **o raio é metade do diâmetro**. Logo,

$$R = 5 \text{ cm}$$

Primeiro vamos calcular o comprimento da circunferência e, depois, a área.

- Comprimento da Circunferência (C)

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad C = 31{,}4 \text{ cm}$$

- Área (A)

$$A = \pi R^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 5^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad A = 78{,}5 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA B.

(PM-SP/2018) Utilizando-se para π o valor aproximado de 3,14, o perímetro de uma região plana em forma de círculo é de aproximadamente 63 m. Dessa forma, das alternativas a seguir, a que apresenta o valor mais aproximado para a área dessa região, em metros quadrados, é
A) 305.
B) 315.

C) 325.
D) 335.
E) 345.

Comentários:
Pessoal, perímetro de um círculo é uma maneira diferente de falar comprimento de circunferência (rsrs). Logo, quando ele diz que o perímetro é de aproximadamente 63 metros, **ele está dando o comprimento da circunferência**. Tendo essa informação, podemos encontrar o raio.

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad R = \frac{C}{2\pi} \quad \rightarrow \quad R = \frac{63}{2 \cdot 3{,}14} \quad \rightarrow \quad R = \frac{63}{6{,}28} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R \cong 10\ metros}$$

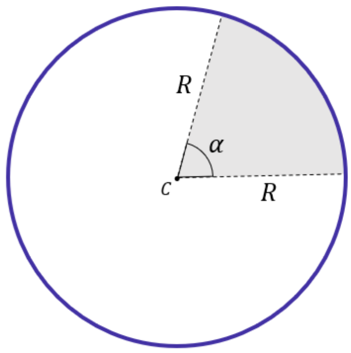
Com **o raio encontrado**, podemos usar a fórmula da área:

$$A = \pi R^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 10^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 100 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 314\ m^2}$$

Veja que a área que mais se aproxima do resultado é 315 m², na letra B.

Gabarito: LETRA B.

Agora que sabemos calcular a área de uma circunferência, podemos voltar e calcular a área de um setor (a famosa fatia da pizza)!



Imagine que queremos **calcular a área do setor** destacado acima. *Como faríamos?* Tem duas maneiras, galera. Ou decoramos a fórmula, ou usamos uma **regra de três simples** para deduzi-la. Para uma circunferência completa (que possui **360° ou 2π rad**), a área é πR^2. Assim,

$$2\pi \longleftrightarrow \pi R^2$$

$$\alpha \longleftrightarrow A_{setor}$$

Multiplicando cruzado, chegamos a:

$$A_{setor} = \frac{\alpha R^2}{2}$$

Uma observação muito importante: para usar a fórmula acima, α **deve estar em radianos**! Caso prefira, podemos fazer a regra de três utilizando 360°.

$$360° \longleftrightarrow \pi R^2$$

$$\alpha \longleftrightarrow A_{setor}$$

Assim,

$$A_{setor} = \left(\frac{\alpha}{360°}\right)\pi R^2$$

Já a fórmula acima é para quando α **estiver em graus**. Note que se você lembra da fórmula da área da circunferência, para obter a fórmula da área do setor, basta utilizarmos uma regra de três. Você não precisa "ocupar o HD" com mais uma coisa! Fique frio!

(PREF. JÁU/2019) Supondo-se que certa pizza no formato circular com perímetro de 94,2 cm foi cortada em três pedaços de mesmo tamanho cada. Sendo assim, assinalar a alternativa que apresenta a área de cada pedaço dessa pizza: (usar: $\pi = 3{,}14$)

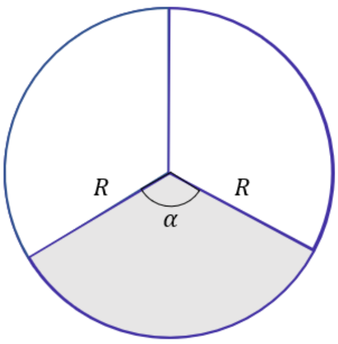
A) 31,4 cm²
B) 188,4 cm²
C) 235,5 cm²
D) 376,8 cm²

Comentários:

Sempre tenham em mente que perímetro da circunferência é o mesmo que o seu comprimento! Assim, se o enunciado falou o perímetro, podemos encontrar o raio dessa pizza!

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad R = \frac{C}{2\pi} \quad \rightarrow \quad R = \frac{94{,}2}{2 \cdot 3{,}14} \quad \rightarrow \quad R = \frac{94{,}2}{6{,}28} \quad \rightarrow \quad R = 15 \text{ cm}$$

Agora que temos o raio, observe que a pizza foi dividida em três pedaços iguais.



Para descobrir o ângulo central, devemos dividir 360° por 3.

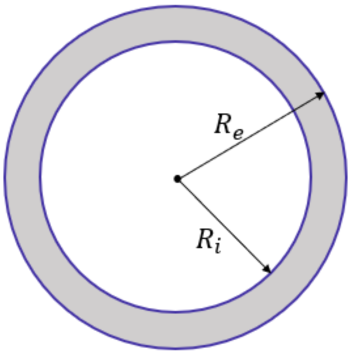
$$\alpha = \frac{360°}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = 120°$$

Com o ângulo central e o raio, podemos usar a fórmula que deduzimos para achar a área do setor.

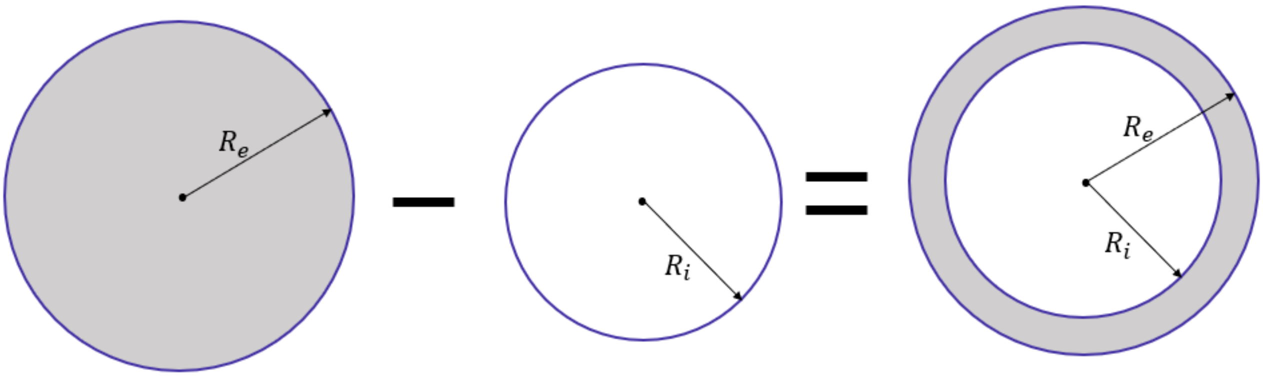
$$A_{setor} = \left(\frac{\alpha}{360°}\right)\pi R^2 \quad \rightarrow \quad A_{setor} = \left(\frac{120°}{360°}\right) \cdot 3{,}14 \cdot 15^2 \quad \rightarrow \quad A_{setor} = 235{,}5 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA C.

Para finalizar essa parte de circunferência, gostaria de comentar com vocês sobre **a área de uma coroa**! É um tipo de problema envolvendo áreas de circunferências bem comum! Por isso, é bom estarmos atentos. Imagine a seguinte situação:



A região destacada acima é o que chamamos de **coroa circular**. *Como fazemos para calcular sua área?* Note que temos uma **circunferência externa de raio R_e** e uma **circunferência interna de raio R_i**. Podemos esquematizar a situação da seguinte forma:

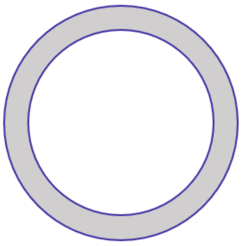


Assim, para calcular a área da coroa, devemos subtrair a área do círculo maior (externo) da área do círculo menor (interno), tudo bem?! Assim,

$$A_{coroa} = A_{externo} - A_{interno} \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \pi R_e^2 - \pi R_i^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{coroa} = \pi\left(R_e^2 - R_i^2\right)}$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. JUIZ DE FORA/2016) Na figura a seguir, temos dois círculos concêntricos, tais que seus raios medem 4 cm e 3 cm. Considerando $\pi = 3$ a área da região sombreada nessa figura é igual a



A) 48 cm²
B) 15 cm²
C) 27 cm²
D) 6 cm²
E) 21 cm²

Comentários:
Questão para calcular a área da coroa! Vamos lá! Primeiro, identificando as informações do enunciado:

$$\pi = 3 \qquad ; \qquad R_e = 4 \text{ cm} \qquad ; \qquad R_i = 3 \text{ cm}$$

Assim,

$$A_{coroa} = A_{externo} - A_{interno} \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \pi R_e^2 - \pi R_i^2 \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 3^2$$

$$A_{coroa} = 48 - 27 \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = 21 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA E.

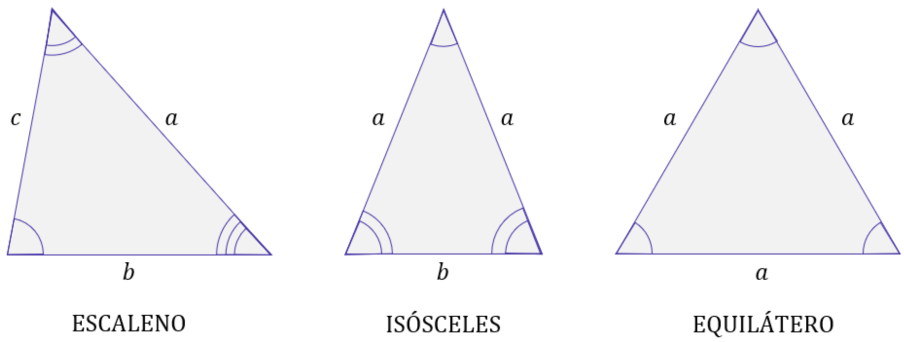
Triângulos

Agora falaremos um pouco sobre os triângulos. De modo simplificado, podemos definir um triângulo como uma **figura plana formada por três segmentos de reta**. Acontece que esses segmentos de reta não são dispostos de qualquer maneira. Eles devem formar três lados e três ângulos bem definidos, tudo bem?

Assim como na circunferência, nesse tópico falaremos sobre o perímetro e áreas, mas tudo no seu devido tempo! Primeiro, devemos aprender **quais os tipos de triângulo existem** e suas características. Vamos?!

Classificações

Quando estamos olhando apenas para o lado, podemos classificar os triângulos de três maneiras.

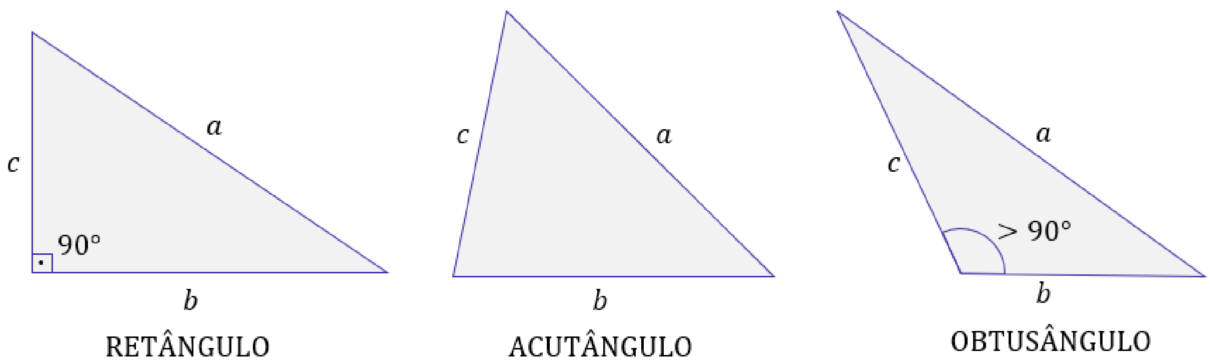


- **Escaleno:** todo triângulo que possui os **três lados distintos**! $a \neq b \neq c$. Como consequência, os ângulos opostos a cada um desses lados também serão diferentes.

- **Isósceles:** triângulo que possui **dois lados iguais**. Os ângulos opostos a esses lados também serão idênticos.

- **Equilátero:** triângulo com **todos os lados iguais**. Assim, todos os ângulos internos desse tipo de triângulo também são congruentes, medindo exatamente 60°.

Já quando estamos olhando para os ângulos internos, podemos classificar os triângulos da seguinte forma:



- **Retângulo: um dos ângulos do triângulo é um ângulo reto, isto é, de 90°**. Talvez, esse é o triângulo mais comum em provas. Afinal, é nele que utilizamos o famoso "Teorema de Pitágoras". Estudaremos esse triângulo com mais detalhes em breve.

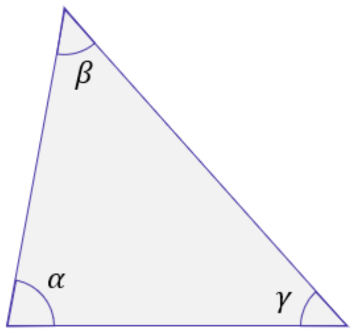
- **Acutângulo: todos os ângulos do triângulo são <u>agudos</u>**, isto é, maiores que 0° e menores que 90°.
- **Obtusângulo: um dos ângulos do triângulo é um <u>ângulo obtuso</u>**, isto é, maior que 90° e menor que 180°.

Ângulos Internos e Externos

Feito esse parêntese para o estudo dos triângulos retângulos, vamos voltar a analisar os triângulos em geral. Pessoal, guardem aí com vocês o seguinte: **a soma dos ângulos <u>internos</u> de um triângulo é sempre 180°.**

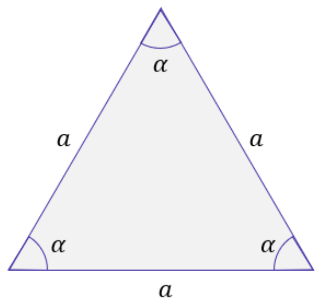
PRESTE MAIS ATENÇÃO!

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°!



$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

Lembre-se que no triângulo equilátero, todos os lados são iguais e que, com isso, temos que **todos os ângulos internos também são**! Em uma imagem, podemos representar assim:

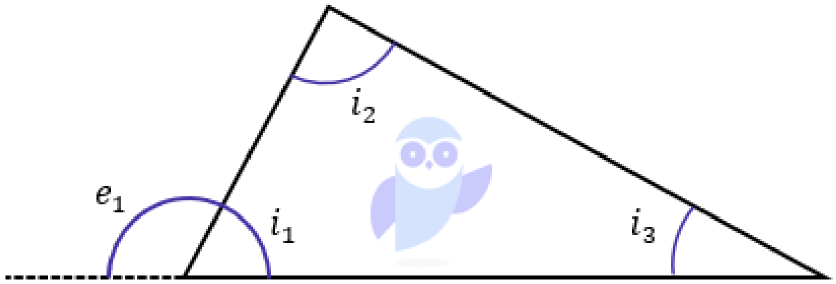


Como **a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°**, temos que:

$$\alpha + \alpha + \alpha = 180° \quad \rightarrow \quad 3\alpha = 180° \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{180°}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = 60°$$

É por esse motivo que, sempre que estamos trabalhando com triângulos equiláteros, qualquer um de seus **ângulos internos <u>valerá 60°</u>**. *Tudo certo até aqui?!*

Por vezes, também falamos de **ângulos externos**. Existe um resultado bastante interessante que podemos obter tendo em mente o que discutimos até aqui. Veja a figura abaixo.



i_1, i_2 e i_3 representam os três ângulos internos do triângulo e e_1 é um ângulo externo. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim,

$$i_1 + \boldsymbol{i_2} + \boldsymbol{i_3} = 180° \quad (1)$$

Além disso, se você olhar bem para o ângulo interno 1 (i_1) e para o ângulo externo 1 (e_1), é possível ver que eles formam um **ângulo raso**. Dessa forma,

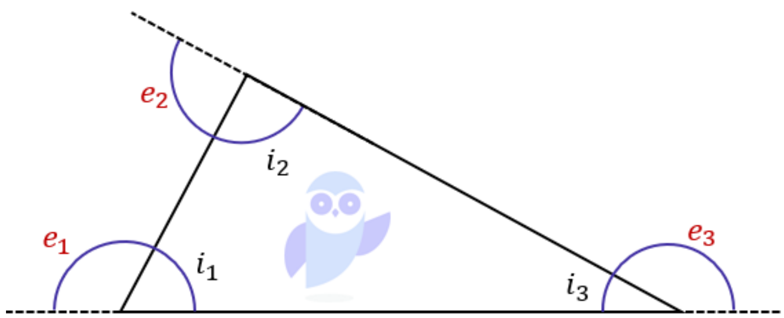
$$i_1 + \boldsymbol{e_1} = 180° \quad (2)$$

Quando comparamos as duas expressões, percebemos que a parte vermelha em (1) deve ser igual a parte vermelha em (2).

$$e_1 = i_2 + i_3$$

Conclusão: em todo triângulo, **a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele**.

Já que estamos falando de ângulos externos, qual seria a soma dos ângulos externos de um triângulo?



Lembre-se que um ângulo externo em um triângulo sempre será igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Assim, podemos escrever:

$$e_1 = i_2 + i_3$$

$$e_2 = i_1 + i_3$$

$$e_3 = i_1 + i_2$$

Somando as três equações acima membro a membro (e chamando essa soma de S_e), ficamos com:

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = (i_2 + i_3) + (i_1 + i_3) + (i_1 + i_2)$$

Reorganizando:

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = (i_1 + i_2 + i_3) + (i_1 + i_2 + i_3)$$

Pessoal, $i_1 + i_2 + i_3$ é a soma dos ângulos internos. Quanto vale essa soma?! Oras, vale 180°!!

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = 180° + 180°$$

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = 360°$$

Note, portanto, que **a soma dos ângulos externos de um triângulo vale 360°.** No final da nossa aula, veremos que podemos generalizar esse resultado para qualquer polígono convexo. No entanto, nesse momento, quero que você guarde apenas que:

A soma dos ângulos externos de um triângulo vale 360°.

HORA DE PRATICAR!

(EEAR/2020) Em relação aos triângulos, marque V para verdadeiro e F para falso. Em seguida, assinale a alternativa com a sequência correta.

( ) Triângulo acutângulo é todo triângulo que possui dois lados agudos.
( ) Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360°.
( ) Triângulo obtusângulo é todo triângulo que possui um dos ângulos internos obtuso.
( ) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

A) F - V - V - V
B) V - F - F - F
C) F - F - F - V
D) V - V - V - F

Comentários:

(**FALSO**) Triângulo acutângulo é todo triângulo que possui dois lados agudos.
Um triângulo acutângulo possui todos os seus três ângulos agudos. Caso apenas dois ângulos sejam agudos, não conseguimos garantir que é um triângulo acutângulo. Poderá ser um triângulo retângulo ou mesmo um obtusângulo.

(**VERDADEIRO**) Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360°.
Pessoal, essa afirmação está corretíssima. Quando formos estudar polígonos mais a fundo, veremos que a soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo será 360°.

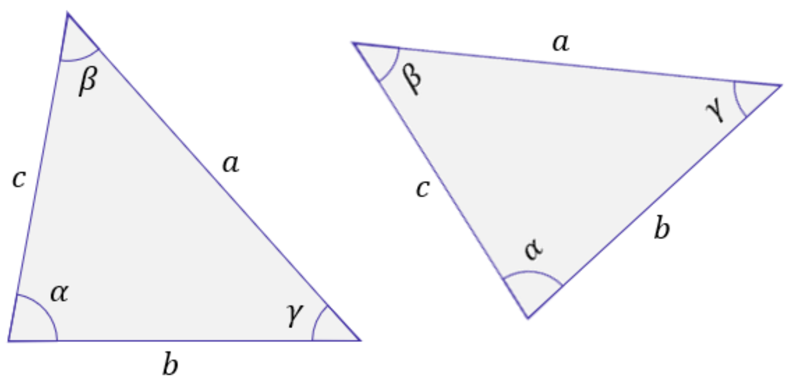
(**VERDADEIRO**) Triângulo obtusângulo é todo triângulo que possui um dos ângulos internos obtuso.
Também verdade, galera. É exatamente a definição de triângulo obtusângulo. Lembre-se sempre que um triângulo somente poderá ter um único ângulo obtusângulo. Esse fato ocorre de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser sempre 180°.

(**VERDADEIRO**) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.
Correto demais! Fizemos a demonstração na teoria!

Gabarito: LETRA A.

Congruência e Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são congruentes quando eles são iguais. Veja o par de triângulos abaixo.



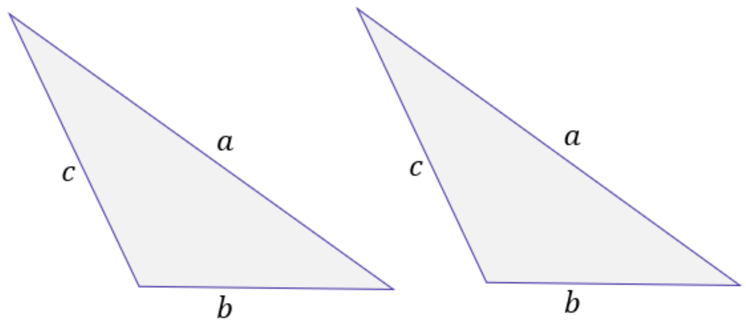
Note que **os dois triângulos são exatamente iguais**, um apenas está rotacionado com relação ao outro, podendo parecer que são diferentes. No entanto, se algum texto está falando de triângulos congruentes, ele está falando de triângulos idênticos! **Mesmo lados, mesmo ângulos! Não muda nadinha**!

A pergunta agora é: precisamos saber *todos os lados e todos os ângulos, dos dois triângulos, para determinar que são congruentes?!* A resposta é: não! Nós podemos concluir sobre a congruência de dois triângulos apenas com alguns valores de lados e/ou ângulos.

Critérios de Congruência

1. Lado-Lado-Lado (LLL)

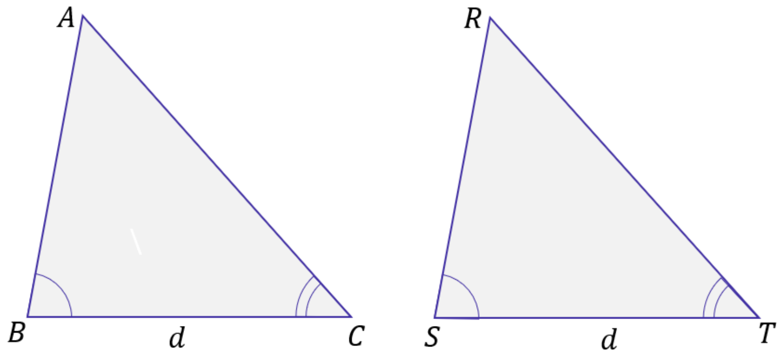
Se os dois triângulos possuírem os mesmos lados, então eles serão congruentes.



Esse critério nos diz que se os lados dos dois triângulos forem iguais, não precisamos nem olhar os ângulos. Só esse fato já nos garante que os dois são congruentes. Ok?!

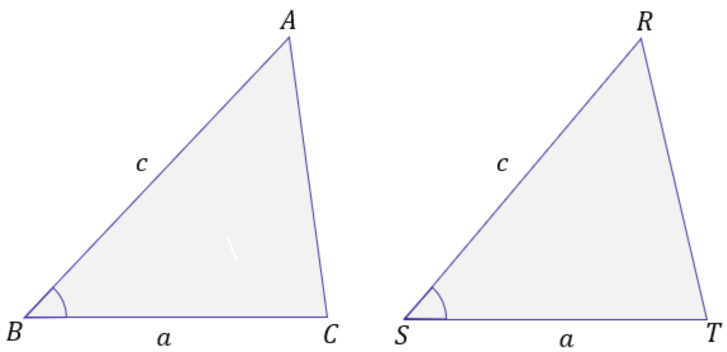
2. Ângulo-Lado-Ângulo (ALA)

Se dois triângulos possuem dois ângulos e o lado entre eles iguais, então os triângulos são congruentes.



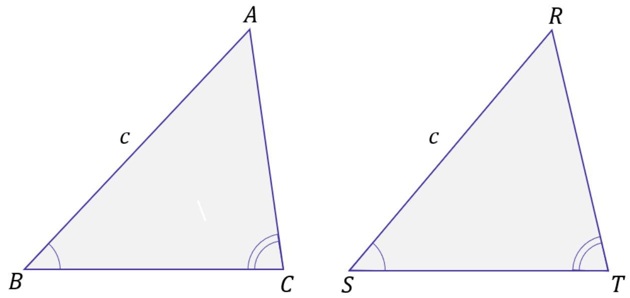
3. Lado-Ângulo-Lado (LAL)

Se dois triângulos possuem dois lados e o ângulo entre eles iguais, então os triângulos são congruentes.



4. Ângulo-Ângulo-Lado (AAL)

Se dois triângulos possuem dois ângulos e um lado oposto a um desses ângulos iguais, então os triângulos são congruentes.



Esses são os critérios mais importantes! Resumindo para vocês: **dois triângulos são congruentes quando eles são idênticos entre si (lados e ângulos iguais)**. Acontece que, não é preciso sabermos todos os lados nem todos os ângulos para concluir que dois triângulos são iguais.

Quando utilizamos os critérios acima, podemos concluir pela congruência dos triângulos sabendo apenas algumas poucas informações. Tudo bem?! Na prática, **esse não é um conteúdo muito explorado em prova**. Em contrapartida, o tema de semelhança de triângulos despenca!! Vamos entrar de vez nesse assunto!

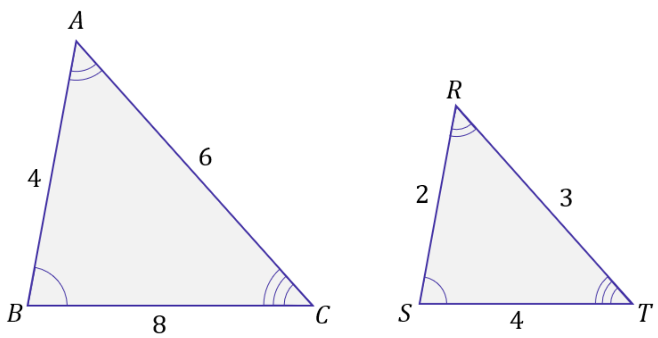
Semelhança de Triângulos

Pessoal, na semelhança de triângulos, vamos continuar com os três ângulos iguais. No entanto, os três lados devem ser proporcionais e não necessariamente iguais (como ocorre na congruência).

FIQUE ATENTO!

Triângulos Congruentes: ÂNGULOS E LADOS IGUAIS. **Triângulos Semelhantes:** ÂNGULOS IGUAIS E LADOS PROPORCIONAIS.

Veja um par de triângulos semelhantes.



Os triângulos acima são semelhantes. Eles possuem ângulos internos iguais e os lados são proporcionais. Note que o triângulo ABC possui lado sempre o dobro do lado correspondente no triângulo RST.

$$\frac{AB}{RS} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{BC}{ST} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{AC}{RT} = \frac{6}{3} = 2$$

Chamamos esse "2" de razão de semelhança. Ele reflete a proporcionalidade entre os lados.

(PREF. PERUÍBE/2019) A respeito de polígonos semelhantes, analise as sentenças a seguir.
I. Se dois triângulos são semelhantes, então eles são congruentes.
II. Se dois triângulos possuem as medidas dos ângulos, respectivamente, proporcionais, então eles são semelhantes.
III. Se dois triângulos possuem as medidas dos ângulos, respectivamente, congruentes, então eles são semelhantes.
IV. Se dois triângulos possuem os lados, respectivamente, proporcionais, então eles são semelhantes.

As duas únicas afirmações verdadeiras são
A) I e II.
B) I e III.
C) I e IV.
D) II e IV.
E) III e IV.

Comentários:
I. Se dois triângulos são semelhantes, então eles são congruentes.
FALSO. Pessoal, **semelhança não implica congruência**. Dizer que dois triângulos são congruentes, significa dizer que esses dois triângulos são iguais (lados e ângulos). Por sua vez, na semelhança de triângulo, **apenas os ângulos são necessariamente iguais para os dois**.

II. Se dois triângulos possuem as medidas dos ângulos, respectivamente, proporcionais, então eles são semelhantes.
FALSO. Para ser semelhante, os ângulos dos dois triângulos devem ser iguais, enquanto os lados é que são proporcionais.

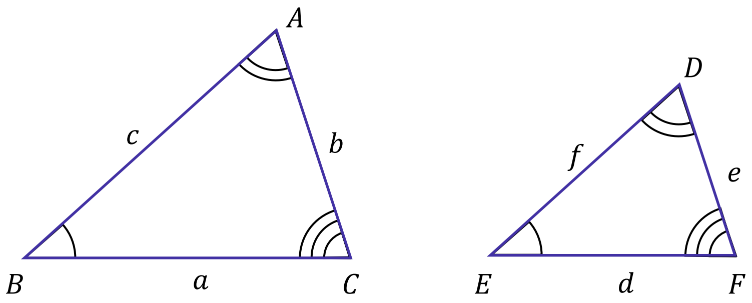
III. Se dois triângulos possuem as medidas dos ângulos, respectivamente, congruentes, então eles são semelhantes.
VERDADEIRO. Se as medidas dos ângulos são congruentes (iguais), então **os lados serão proporcionais e o triângulo será semelhante**.

IV. Se dois triângulos possuem os lados, respectivamente, proporcionais, então eles são semelhantes.
VERDADEIRO. Quando dois triângulos possuem os **três lados proporcionais**, eles são semelhantes. É o caso LLL que estudamos na teoria!

Gabarito: LETRA E.

Professor, estou entendendo que quando temos triângulos com ângulos iguais e lados proporcionais, eles serão semelhantes. Mas, para que serve isso?

Se você identificar que dois triângulos são semelhantes, então poderá estabelecer **uma relação entre os lados desse triângulo**. Observe a figura abaixo.

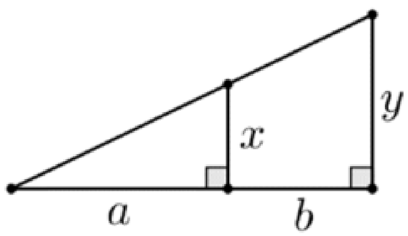


Galera, **ABC e DEF são triângulos semelhantes**. Com isso, sabemos que seus lados proporcionais. Por sabemos esse fato, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}=k$$

Observe que sempre fazemos **a razão entre dois lados <u>correspondentes</u>**. Cuidado para não misturar tudo! Note que **"a" e "d" são opostos ao <u>mesmo ângulo</u>**, por isso, fazemos a razão a/d. Sugiro adotar essa forma de escrever as razões, para evitar confusão. Vamos ver na prática para entendermos melhor.

(IMBEL/2021) Considere a figura:



Sabe-se que a razão a/b é igual a 3⁄2. A razão x/y é igual a

A) 3/2
B) 2/3
C) 2/5
D) 3/5
E) 5/3

Comentários:
Questão que envolve semelhança de triângulos e um pouco de algebrismo!

O enunciado nos deu a razão a/b. Vamos escrever **"a" em função de "b"**:

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad a=\frac{3b}{2} \qquad (1)$$

Iremos usar esse resultado daqui a pouco! Agora, vamos fazer **a semelhança** propriamente dita.

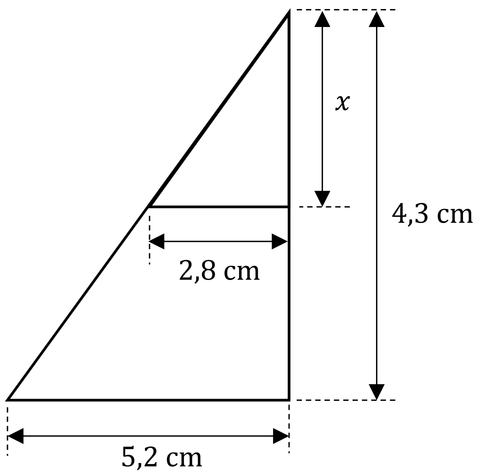
$$\frac{x}{y}=\frac{a}{a+b}$$

Vamos usar (1) na equação acima.

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{3b}{2}}{\frac{3b}{2}+b} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y}=\frac{\frac{3\cancel{b}}{\cancel{2}}}{\frac{5\cancel{b}}{\cancel{2}}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{y}=\frac{3}{5}}$$

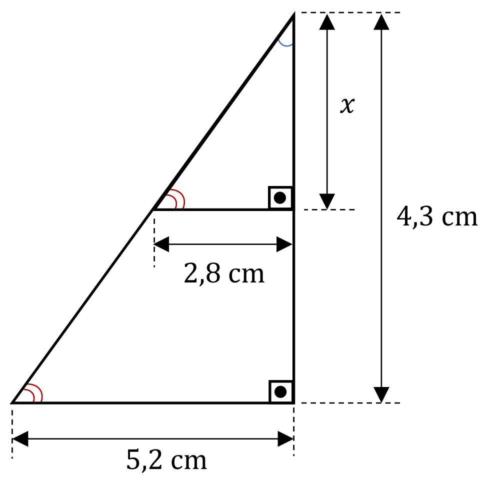
Gabarito: LETRA D.

(SAAE São Carlos/2019) Considere a figura a seguir.



O valor de x é, aproximadamente:
A) 0,8 cm
B) 1,5 cm.
C) 2,3 cm.
D) 2,9 cm.
E) 3,8 cm.

Comentários:
Pessoal, observe que **temos um triângulo retângulo menor e outro maior**. Eles são semelhantes. Como sabemos disso?! **Todos seus ângulos internos são ordenadamente iguais**! Confira na imagem a seguir:



Professor, então sempre que isso acontecer os triângulos serão semelhantes? Sim! A grande maioria das questões envolvem algum tipo de semelhança com triângulos retângulos. Então já fica esperto se cair algo parecido na sua prova! *Beleza! Entendi que são semelhantes, mas, e agora?!*

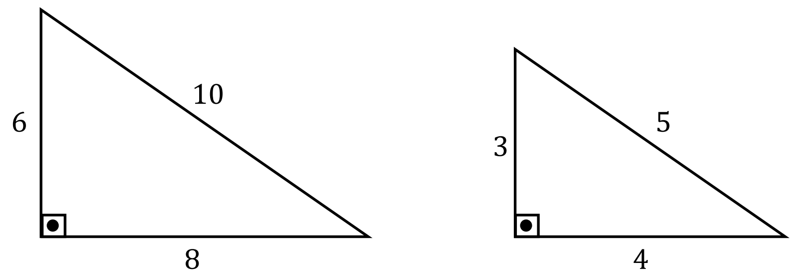
Ora, se são semelhantes, **seus lados são proporcionais** de forma que podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{x}{4,3} = \frac{2,8}{5,2} \quad \rightarrow \quad x \cong 2,31 \text{ cm}$$

Pessoal, uma vez que você conseguisse identificar a semelhança entre os triângulos retângulos, a parte mais chata da questão vira fazer a "continha" acima. Ressalto a importância de não misturar os lados. Sempre faça a razão entre dois lados correspondentes, isto é, **dois lados que estão opostos ao mesmo ângulo**.

Gabarito: LETRA C.

Galera, os lados são proporcionais. Mas, e as áreas dos triângulos, também serão?! A resposta é sim. No entanto, **as áreas serão proporcionais ao quadrado da razão de semelhança**. Explico melhor.



Como identificar que esses triângulos são semelhantes? Percebendo que os lados são proporcionais.

$$\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = 2$$

Portanto, os triângulos são semelhantes e **a razão de semelhança é 2**.

Agora, sei que não estudamos como calcular a área de triângulo, portanto, não vou focar nesse cálculo, mas apenas no resultado. O triângulo retângulo maior tem área 24 e o menor, 6. Note que:

$$\frac{A_M}{A_m}=\frac{24}{6} \quad \rightarrow \quad \frac{A_M}{A_m}=4 \quad \rightarrow \quad \frac{A_M}{A_m}=2^2$$

A razão entre as duas áreas será igual a razão de semelhança que encontramos acima, **só que ao quadrado**. Esse resultado pode ser bastante útil, confira a questão abaixo.

(PREF. SJC/2019) Um professor afirmou aos seus alunos que dois triângulo eram semelhantes, e propôs a eles que determinassem a razão de semelhança do maior para o menor triângulo, sabendo que a área do menor triângulo era de 13,5 unidades de área e a área do maior era de 121,5 unidades de área. A resposta correta esperada por esse professor era:

A) $\sqrt{3}$
B) 3
C) $3\sqrt{3}$
D) 9
E) $6\sqrt{3}$

Comentários:

Quando dois triângulos são semelhantes, **a razão de suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança**. Conforme vimos na teoria:

$$\frac{A_M}{A_m}=k^2$$

O enunciado nos informou que $\boldsymbol{A_M=121,5\ \mathrm{u.a.}}$ e $\boldsymbol{A_m=13,5\ \mathrm{u.a.}}$. Vamos substituir na expressão para determinar o k.

$$\frac{121{,}5}{13{,}5}=k^2 \quad \rightarrow \quad k^2=9 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k=3}$$

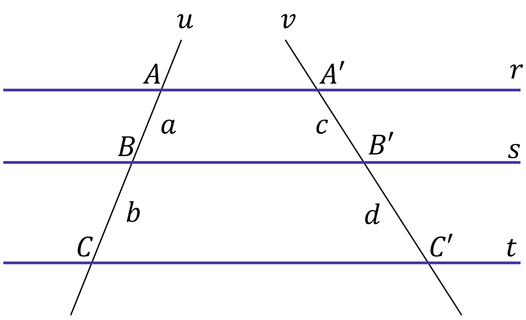
Gabarito: LETRA B.

Teorema de Tales

Vou tentar ser bem objetivo nesse ponto da matéria. O enunciado clássico do Teorema é o seguinte:

"Um feixe de retas paralelas determina, em duas retas transversais quaisquer, segmentos proporcionais."

Professor, é o quê? Vamos ver uma imagem!



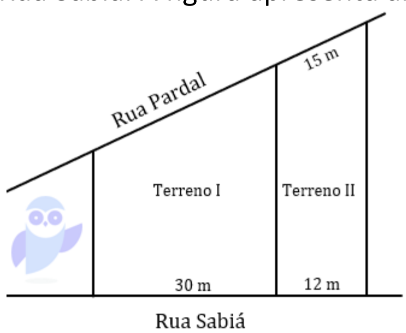
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$: são as retas **transversais** (que é toda reta que intercepta um feixe de retas paralelas);
$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$: são as retas **paralelas**.

Sempre que conseguir identificar uma situação como acima, você poderá escrever que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

A demonstração desse fato **não tem um custo-benefício razoável**, portanto, nos limitaremos a aplicar o resultado comentado anteriormente, tudo bem? Para ilustrar, vamos ver uma questão.

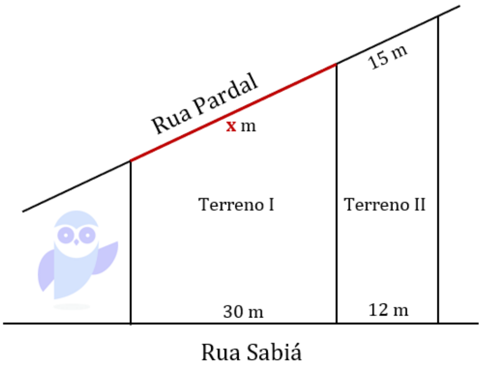
(PREF. OLÍMPIA/2019) Dois terrenos têm frente para a Rua Sabiá e para a Rua Pardal, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à Rua Sabiá. A figura apresenta algumas medidas desses dois terrenos.



A medida de frente do terreno 1, à Rua Pardal, é
A) 32,5 m.
B) 33,0 m.
C) 37,5 m.
D) 40,0 m.
E) 42,0 m.

Comentários:

Essa é uma questão bem clássica de Teorema de Tales. Observe que temos um feixe de retas paralelas intersectando duas retas transversais (que representam as ruas). Assim, considerando que o enunciado pede a medida de frente do terreno 1, à Rua Pardal, então:



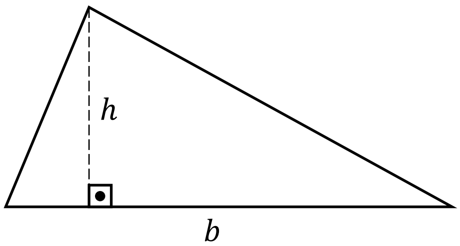
$$\frac{x}{15} = \frac{30}{12} \quad \rightarrow \quad x = \frac{450}{12} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 37{,}5\ m}$$

Gabarito: LETRA C.

Área de um Triângulo

Pessoal, esse é **um dos tópicos mais importantes dessa aula**. Há diversas maneiras de calcularmos a área de um triângulo. De acordo com as informações que tivermos, usaremos uma fórmula ou outra.

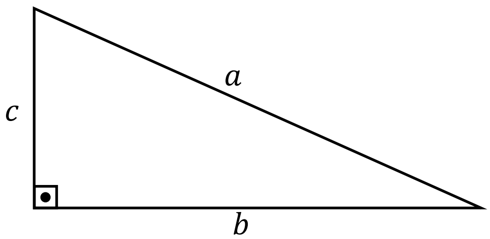
- Quando temos a base e a altura do triângulo.



"h" representa a medida da altura, enquanto **"b" representa a medida da base**. Quando tivermos essas informações, podemos calcular a área de um triângulo por meio da seguinte fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

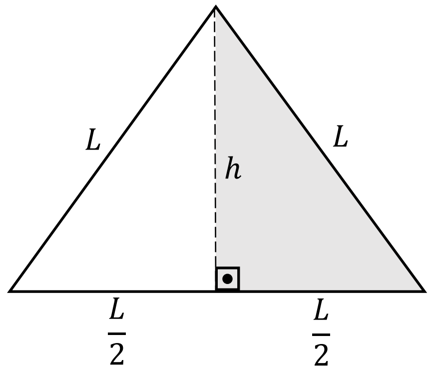
- **Quando o triângulo é retângulo**



Galera, perceba que quando o triângulo é retângulo, a altura relativa à base "b" é o próprio cateto "c". Assim,

$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

- Quando o triângulo é equilátero



Quando o triângulo é equilátero, **a altura relativa a qualquer um dos lados, vai sempre dividir esse lado <u>ao meio</u>**. Agora, observe o triângulo retângulo em destaque. Com o teorema de Pitágoras, podemos determinar a altura "h" em função do lado "L".

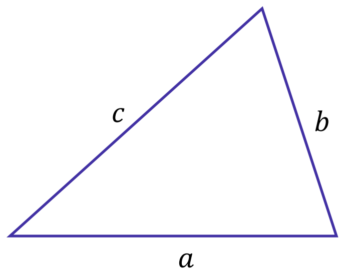
$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} \quad \rightarrow \quad h^2 = \frac{3L^2}{4} \quad \rightarrow \quad h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Com isso, podemos usar a fórmula que vimos anteriormente, substituindo o valor da altura "h" por esse que acabamos de encontrar.

$$A = \frac{bh}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{L \cdot \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, observe que existe uma fórmula "pronta" para calcularmos a área de um triângulo equilátero. **Se você sabe apenas o lado, já pode calcular a área**. No entanto, na prática, você não precisa memorizá-la. Se conhece a fórmula $A = bh/2$ e o Teorema de Pitágoras, **poderá deduzi-la a qualquer tempo**.

- Quanto temos apenas os lados do triângulo.



Nessas situações, usaremos a famosa **<u>fórmula de Heron</u>**. Não é tão comum à sua cobrança em provas, mas é bom estarmos espertos. Quando você tiver todos os lados mas não sabe os ângulos nem as alturas, a fórmula abaixo resolve sua vida:

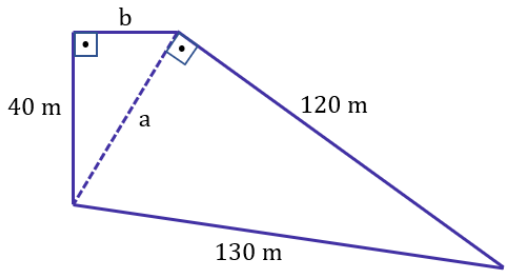
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Não é uma fórmula muito amigável, eu sei. Sorte nossa que **ela cai muito pouco**. Aqui, o **"p" representa o semiperímetro**, que pode ser determinado por meio da fórmula abaixo!

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

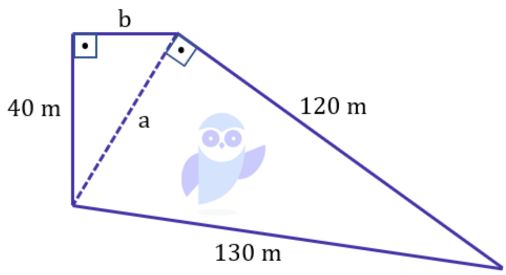
Peço que não se preocupe com a demonstração, pois **o custo benefício de fazê-la aqui é quase nulo**. Nessas horas, vamos tentar ser o mais prático e objetivo possível.

(PREF. CAMPINAS/2019) A praça de uma cidade foi construída a partir de dois terrenos, cada um deles com a forma de um triângulo retângulo, conforme a figura a seguir, com as respectivas medidas.



A área total dessa praça é igual a
A) 3800 m²
B) 4100 m²
C) 3950 m²
D) 4200 m²
E) 3600 m²

Comentários:
Sempre que observamos triângulos retângulos, uma coisa tem que vir a nossa mente: teorema de Pitágoras. Principalmente quando houver lados desse triângulo que não estão determinados.

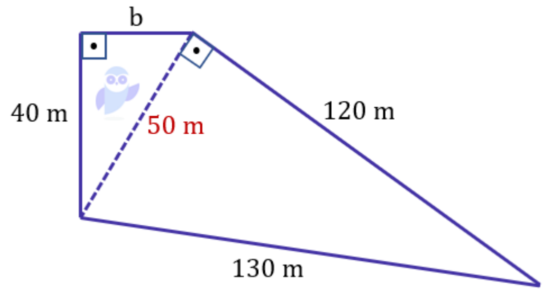


Concentre-se no triângulo que está envolvendo a coruja. Desconhecemos o cateto "a". Para determiná-lo, vamos usar o teorema de Pitágoras. Acompanhe.

$$a^2 + 120^2 = 130^2$$

$$a^2 + 14400 = 16900 \quad \rightarrow \quad a^2 = 16900 - 14400 \quad \rightarrow \quad a^2 = 2500 \quad \rightarrow \quad a = 50\ m$$

Com todos os lados determinados, vamos olhar para o outro triângulo.



No triângulo menor, também falta determinar um dos catetos. Aplicaremos mais uma vez o teorema de Pitágoras.

$$b^2 + 40^2 = 50^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 2500 - 1600 \quad \rightarrow \quad b^2 = 900 \quad \rightarrow \quad b = 30\ m$$

Pronto! Sabemos todos os lados de todos os triângulos! Agora, podemos calcular a área de cada um deles. Na teoria, aprendemos que a área de um triângulo retângulo é dada pelo produto dos catetos dividido por dois. Assim, para o triângulo maior, teremos:

$$A_M = \frac{120 \cdot 50}{2} \quad \rightarrow \quad A_M = 3.000\ m^2$$

Devemos fazer o mesmo cálculo para o triângulo menor,

$$A_m = \frac{30 \cdot 40}{2} \quad \rightarrow \quad A_m = 600\ m^2$$

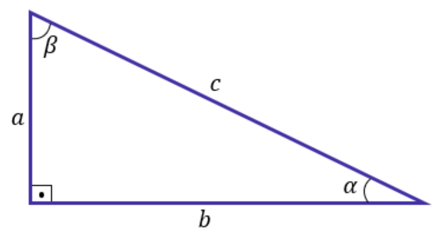
A área total da praça é exatamente a soma das áreas dos dois triângulos.

$$A = A_m + A_M \quad \rightarrow \quad A = 3.000 + 600 \quad \rightarrow \quad A = 3.600\ m^2$$

Gabarito: LETRA E.

Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo é tão importante que estudaremos ele em separado! Lembrem-se que chamamos de triângulo retângulo qualquer triângulo que possua **um de seus ângulos igual a 90 graus** ou $\frac{\pi}{2}$ radianos.



- O lado c é chamado de **hipotenusa**. **Ele é o maior dos lados** e está oposto ao ângulo de 90°.
- Os lados **a e b são os catetos**.
    - Com relação ao ângulo α, a é o cateto oposto e b é o cateto adjacente.
    - Com relação ao ângulo β, b é o cateto oposto e a é o cateto adjacente.

Relações Trigonométricas - Seno, Cosseno e Tangente

Moçada, eu sei que essa é uma parte da trigonometria e por isso não vou me aprofundar muito, mas vale a pena você saber as seguintes relações trigonométricas para a sua prova de geometria plana!

- **Seno**

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

- **Cosseno**

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

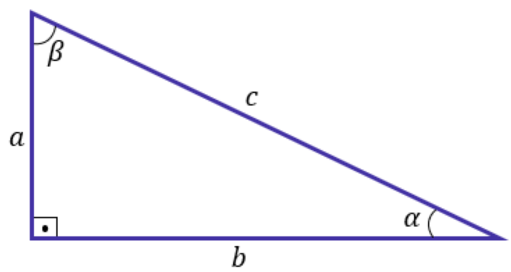
- **Tangente**

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

- **Relação Fundamental**

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Teorema de Pitágoras



O Teorema de Pitágoras é um grande clássico dos nossos estudos, não é verdade? Desde muito cedo, quando crianças, escutamos falar desse teorema. Vamos rever o que ele diz!

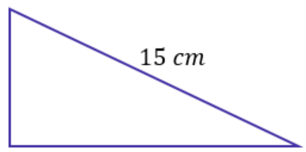
A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Matematicamente, podemos escrever:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. SANTIAGO DO SUL/2020) A figura abaixo demonstra um triângulo retângulo cujo seno vale 0,6. Determine, em metros, a medida do perímetro.



a) 36.
b) 3,6.
c) 0,36.
d) 0,036.
e) 0,0036.

Comentários:

O **perímetro é a soma de todos os lados**. A imagem do enunciado diz que a hipotenusa vale 15 cm e fornece o valor de um seno. Sabemos que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$0{,}6 = \frac{\text{cateto oposto}}{15}$$

$$\text{cateto oposto} = 9\ cm$$

Sei que você deve estar curioso para saber qual dos ângulos do triângulo é o α. Para nosso exercício, isso não importará, pois **queremos saber apenas as medidas dos lados**. Ok! **Temos um cateto e uma hipotenusa**. Falta encontrar mais um cateto. Podemos usar a Teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$15^2 = 9^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad 225 = 81 + b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 144 \quad \rightarrow \quad b = 12\ cm$$

Temos todos os lados, o perímetro é dado pela soma deles.

$$Perímetro = a + b + c$$

$$Perímetro = 9 + 12 + 15$$

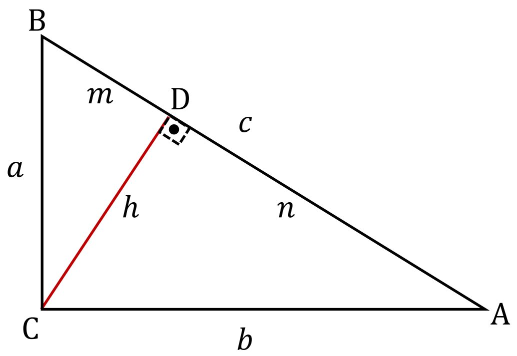
$$Perímetro = 36\ cm$$

Como queremos o resultado em metros, devemos dividir o resultado por 100. $\mathbf{Perímetro\ =\ 0,36\ m}$.

Gabarito: LETRA C.

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

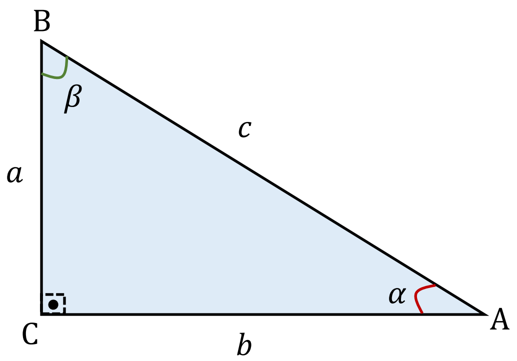
Saber as fórmulas que veremos agora pode poupar preciosos minutos na hora da sua prova. No entanto, caso não as lembre, saiba que sempre poderá deduzi-las (conforme faremos a seguir), pois são apenas consequências da **semelhança de triângulos**! Inicialmente, observe o desenho:

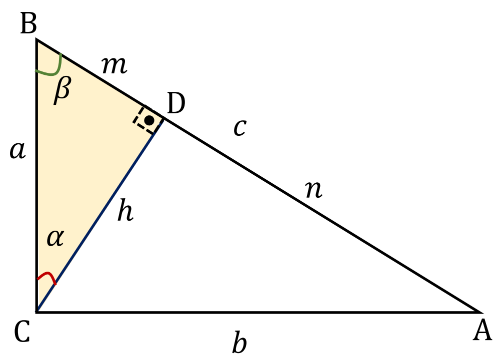


Na figura acima, temos: os catetos (a e b), a hipotenusa (c), a altura relativa à hipotenusa (h) e as partes da hipotenusa (m e n). *Caso você queira encontrar a altura relativa à hipotenusa, como procederia?* Observe que **os triângulos ABC e BCD são semelhantes**. Sendo assim, podemos escrever:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{h} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{h = \frac{ab}{c}}$$

Se você não enxergou essa semelhança, vem comigo aqui!





Observe que separei os dois triângulos semelhantes em questão: o azul (ABC) e o amarelo (BCD). Eles são semelhantes pois, apesar de terem lados diferentes, **seus ângulos internos são todos iguais**!

Beleza, professor. Mas, sabendo disso, como faço a semelhança?

Vamos lá! Qual lado está em frente ao **ângulo reto** no triângulo ABC?

É o lado "c".

Qual lado está em frente ao **ângulo reto** no triângulo BCD?

É o lado "a".

Com isso, já temos o lado esquerdo da nossa semelhança:

$$\frac{c}{a} =$$

Agora, vamos olhar outro ângulo.

Qual lado está em frente ao **ângulo β** no triângulo ABC?

É o lado "b'.

Qual lado está em frente ao **ângulo β** no triângulo BCD?

É a altura "h".

Com isso, nossa semelhança fica:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{h}$$

Isolando o "h":

$$\boxed{h = \frac{ab}{c}}$$

Pronto! Esse é o passo a passo para chegarmos na nossa primeira relação métrica! **Esse será o procedimento que usaremos para encontrar todas as outras**. Obviamente, usando outras semelhanças e lados/segmentos.

Na prática, a expressão que acabamos de encontrar nos diz que a altura relativa à hipotenusa é igual ao produto dos catetos dividido pela hipotenusa.

Professor, temos uma outra forma de encontrar essa altura? Temos sim! Observe.

Da semelhança entre os triângulos **BCD e CDA**:

$$\frac{h}{m}=\frac{n}{h} \qquad \rightarrow \qquad h^2=mn \qquad \rightarrow \qquad \boxed{h=\sqrt{mn}}$$

Ah, entendi! Mas como fazemos para determinar o "m" e o "n"?

Para você entender melhor, perceba que quando descemos a altura relativa à hipotenusa, **essa altura toca a hipotenusa no <u>ponto D</u>**. Chamamos esse ponto de D de "pé da altura". Ele divide a hipotenusa em duas partes, **uma de comprimento "m" e outra de comprimento "n"** tal que $m+n=c$. Para encontrar a medida desses segmentos, usamos mais semelhanças.

Da semelhança entre os triângulos **ABC e BCD**, podemos tirar o seguinte:

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{m} \qquad \rightarrow \qquad a^2=cm \qquad \rightarrow \qquad \boxed{m=\frac{a^2}{c}}$$

Analogamente, da semelhança entre os triângulos **ABC e ACD**, temos:

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{n} \qquad \rightarrow \qquad b^2=cn \qquad \rightarrow \qquad \boxed{n=\frac{b^2}{c}}$$

Vamos ver como isso tudo já caiu em prova?

HORA DE PRATICAR!

(CRECI 11/2022) Os catetos de um triângulo retângulo medem 32 cm e 60 cm. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

A altura relativa à hipotenusa desse triângulo mede 28 cm.

Comentários:
Queremos verificar se a altura relativa à hipotenusa é essa mesmo que o item forneceu. Para isso, note que o enunciado forneceu os catetos. No entanto, **precisamos também do valor da hipotenusa**. Para encontrá-la, vamos usar o teorema de Pitágoras:

$$c^2=a^2+b^2 \qquad \rightarrow \qquad c^2=32^2+60^2 \qquad \rightarrow \qquad a^2=4624 \qquad \rightarrow \qquad a=68$$

Pronto! Com o valor da hipotenusa, podemos usar a relação métrica que acabamos de ver.

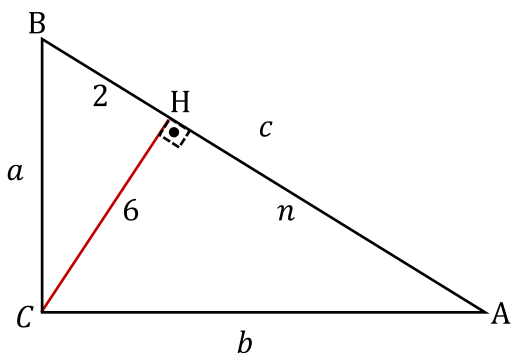
$$h=\frac{ab}{c} \qquad \rightarrow \qquad h=\frac{32\cdot 60}{68} \qquad \rightarrow \qquad h=\frac{1920}{68} \qquad \rightarrow \qquad h=28{,}23 \text{ cm}$$

Note que a altura é **um pouquinho maior que 28**, contrariando o afirmado no item.

Gabarito: ERRADO.

(ESA/2021) Considere um triângulo retângulo ABC, retângulo em C. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa e sabendo que CH = 6 cm e BH = 2 cm, o produto dos comprimentos dos catetos é igual a:
A) 150 cm²
B) 144 cm²
C) 120 cm²
D) 180 cm²
E) 108 cm²

Comentários:
Inicialmente, vamos desenhar o triângulo proposto.



Observe que a altura relativa (h) foi dada e **vale 6**.

Por sua vez, o segmento BH também foi informado e **vale 2**.

Agora, *vocês lembram qual a relação métrica que apareceu o produto dos catetos?* Foi a primeira!

$$h = \frac{ab}{c}$$

ou seja:

$$ab = hc \qquad (1)$$

Para encontrarmos o produto dos catetos, é suficiente multiplicarmos a altura (h) pela hipotenusa (c). A altura (h) nós já temos, ela é justamente o segmento CH que vale 6. Nesse momento, **precisamos determinar apenas o valor da hipotenusa "c"**. Para isso, podemos lembrar da relação métrica que relaciona o "m" com o "h":

$$h^2 = mn \qquad (2)$$

Substituindo $h = 6$ e $m = 2$ em (2):

$$n = \frac{36}{2} \quad \rightarrow \quad n = 18$$

Com o valor de "m" e "n", conseguimos encontrar "c":

$$c = m + n \quad \rightarrow \quad c = 2 + 18 \quad \rightarrow \quad c = 20$$

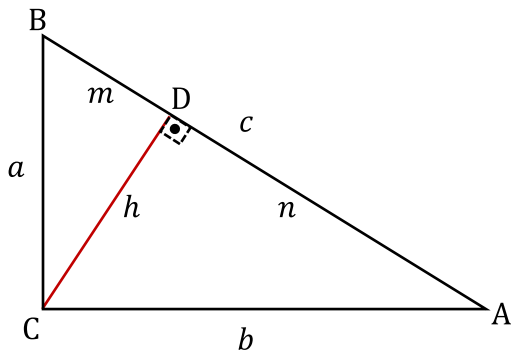
Agora, é só usarmos (1):

$$ab = 6 \cdot 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{ab = 120}$$

Gabarito: LETRA C.

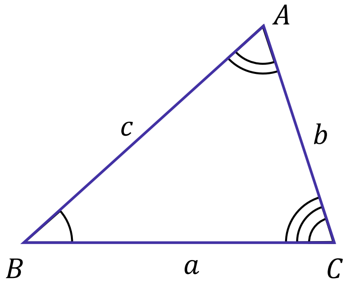
Galera, eu sei que essa parte pode pegar um pouco no pé! São expressões que podem ser chatinhas, mas lembre-se sempre que você poderá deduzi-las usando **semelhança de triângulos**. Gaste a maior parte de sua energia não tentando decorá-las, mas sim aprendendo a como chegar nelas. De qualquer forma, vou resumir tudo que vimos em uma tabela, para facilitar sua revisão!

RESUMINDO

Relações Métricas no Triângulo Retângulo	
	$ab = hc$
	$h^2 = mn$
	$a^2 = mc$
	$b^2 = nc$
	$c = m + n$

Lei do Senos e a Lei dos Cossenos

Para aproveitar que falamos um pouco de seno e cosseno nessa aula, quero conversar com vocês sobre duas leis que relacionam as medidas dos lados de um triângulo com os senos e cossenos dos ângulos internos. Considere o triângulo genérico abaixo.



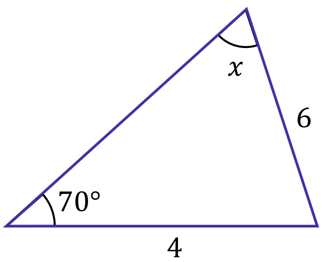
De acordo com a lei dos senos, a razão entre o lado e o seno do ângulo oposto é uma constante no triângulo. Dessa forma, podemos escrever que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

Para entender melhor como pode ser a cobrança desse tema, vamos fazer uma questão.

HORA DE PRATICAR!

(EEAR/2013) Considere as medidas indicadas na figura e que $\operatorname{sen}(70°) = 0{,}9$. Pela "Lei dos Senos", obtém-se que sen x é igual a



A) 0,4
B) 0,5
C) 0,6
D) 0,7

Comentários:
Pessoal, é super importante perceber que a razão é entre a medida do lado e o seno do seu **ângulo <u>oposto</u>**! Assim, para a questão em tela, temos que:

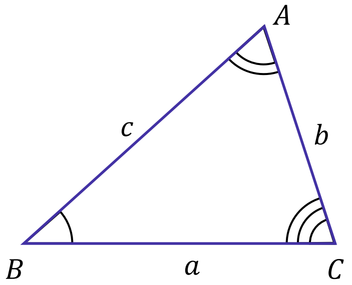
$$\frac{6}{\operatorname{sen} 70°} = \frac{4}{\operatorname{sen} x}$$

Usando a informação do enunciado que $\mathbf{sen(70°) = 0,9}$ e isolando $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{4 \cdot 0{,}9}{6} \quad \rightarrow \quad \mathbf{sen}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0,6}$$

Gabarito: LETRA C.

Por sua vez, **a lei dos cossenos** vai relacionar os lados de um triângulo qualquer com o cosseno de um dos ângulos. Guarde com você o seguinte:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Observe o esquema abaixo para entender melhor as expressões.

"a" é o lado oposto ao ângulo Â

$$a^2 = \underbrace{b^2 + c^2 - 2bc}_{\text{b e c são os demais lados}} \cdot \cos \hat{A}$$

Eu sei que pode estar pairando a dúvida sobre de onde vem essa expressão. A demonstração tanto da lei dos senos quanto da dos cossenos tem custo benefício mínimo. Para sua prova de concurso, precisará apenas aplicá-la. Por esse motivo, vamos ver uma questão para sentir na prática como funciona essa tal de lei dos cossenos.

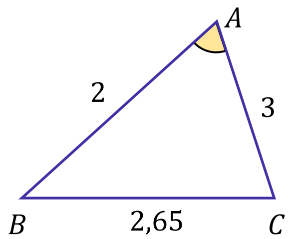
HORA DE PRATICAR!

(PC-DF/2012) Investigações de um crime com arma de fogo indicam que um atirador atingiu diretamente dois pontos, B e C, a partir de um único ponto A. São conhecidas as distâncias: AC = 3 m, AB = 2 m e BC = 2,65 m. A medida do ângulo formado pelas duas direções nas quais o atirador disparou os tiros é mais próxima de

A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 75°
E) 90°

Comentários:

Vamos esquematizar a situação proposta no enunciado.



O enunciado pede o ângulo entre as direções nas quais o atirador disparou. Destaquei esse ângulo de amarelo na nossa imagem acima. Uma boa maneira de determinarmos esse ângulo, é encontrando o seu cosseno. Para isso, vamos utilizar a lei dos cossenos.

$$2{,}65^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \hat{A}$$

$$7{,}0225 = 4 + 9 - 12 \cdot \cos \hat{A}$$

$$7{,}0225 - 13 = -12 \cdot \cos \hat{A}$$

$$-6{,}0225 = -12 \cdot \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{6{,}0225}{12} \cong -\frac{6}{12}$$

$$\cos \hat{A} \cong \frac{1}{2}$$

Você lembra qual ângulo menor que 180° possui cosseno igual a 1/2? Como **trata-se do cosseno de um ângulo notável**, temos meio que a "obrigação" de lembrá-lo.

O ângulo menor que 180° que tem cosseno igual a 1/2 é 60°.

$$\hat{A} \cong 60°$$

Gabarito: LETRA A.

ATENÇÃO
DECORE!

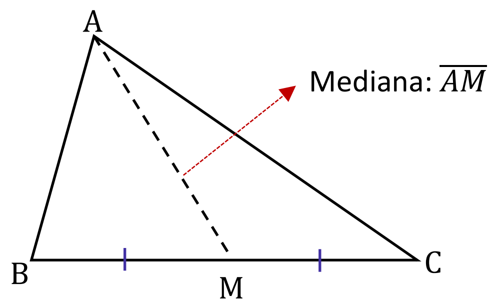
Ângulo Notável	Seno	Cosseno
0°, 360°	0	1
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
90°	1	0
180°	0	-1
270°	-1	0

Pontos notáveis no triângulo

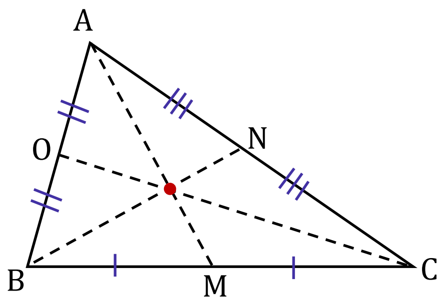
No estudo do triângulo, existem quatro pontos que precisam ser estudados com atenção: o baricentro, o incentro, o ortocentro e o circuncentro. Veremos todos eles com detalhes a seguir!

Baricentro

Galera, para entender o baricentro, precisamos primeiro entender o que é uma mediana. A mediana nada mais é do que um **segmento de reta que vai ligar um vértice ao ponto médio do lado oposto a esse vértice**. Vamos visualizar essa situação para entender melhor!



Beleza! Agora note que um triângulo não possui apenas uma mediana! Podemos traçar uma mediana para cada vértice. Observe!



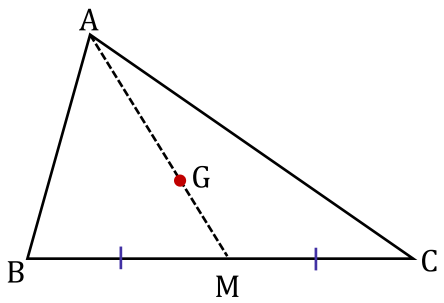
Observe que essas medianas se encontram em um ponto (que destaquei em vermelho). Esse é o nosso baricentro! Anote aí, então!

TOME NOTA!

Baricentro é o ponto de encontro das três **medianas** de um triângulo.

Professor, e esse baricentro tem alguma propriedade especial?

Tem sim! Ele divide a mediana em duas partes de tal forma que uma mede o dobro da outra! Vou explicar melhor no desenho! Vem cá!



Para a imagem não ficar muito poluída, desenhei apenas uma mediana e coloquei o baricentro (G). Observe que o ponto G divide a mediana em dois segmentos: **o AG e o GM**. A propriedade que devemos guardar é:

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$$

Guarde sempre que o segmento que contém o vértice (AG) **mede o dobro** do segmento que contém o ponto médio (GM).

Professor, isso cai em prova?!

Vamos conferir!

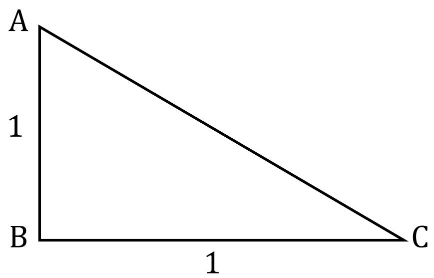
HORA DE PRATICAR!

(CBM-AL/2021) Acerca de triângulos, julgue o próximo item.

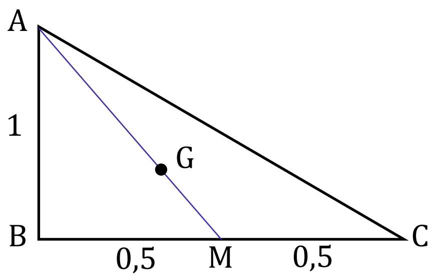
Considere o triângulo retângulo e isósceles ABC, com lados AB = BC = 1. Nesse caso, sendo G o baricentro desse triângulo, é correto afirmar que o segmento AG é igual a $\sqrt{\frac{2}{6}}$.

Comentários:

O primeiro passo é desenhar esse triângulo retângulo e isósceles de lado **igual a 1**.



Como a questão falou em baricentro, é importante desenhar a mediana também. Note que ele fala de segmento AG, logo vamos traçar a **mediana relativa ao vértice A**.



Lembre-se que a mediana toca no **ponto médio do lado oposto**. Por esse motivo, ficou "0,5" de um lado e "0,5" do outro.

Agora, note que estamos procurando a medida do segmento AG. Para isso, primeiramente devemos encontrar a medida do segmento AM. Esse segmento é a **hipotenusa do triângulo retângulo ABM**. Logo, vamos usar o Teorema de Pitágoras para encontrá-lo.

$$AM^2 = AB^2 + BM^2$$

$$AM^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad AM^2 = 1 + \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad AM^2 = \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad AM = \sqrt{\frac{5}{4}} \qquad (1)$$

Nesse momento, devemos observar que:

$$AM = AG + GM \qquad (2)$$

Como G é o baricentro, podemos usar a propriedade que vimos na teoria:

$$\boldsymbol{AG = 2GM} \quad \rightarrow \quad GM = \frac{AG}{2} \qquad (3)$$

Usando esse (3) em (2):

$$AM = AG + \frac{AG}{2} \quad \rightarrow \quad AM = \frac{3AG}{2}$$

Vamos **isolar AG** pois é quem estamos procurando:

$$AG = \frac{2AM}{3} \qquad (4)$$

Pronto! Agora vamos usar o resultado (1) em (4).

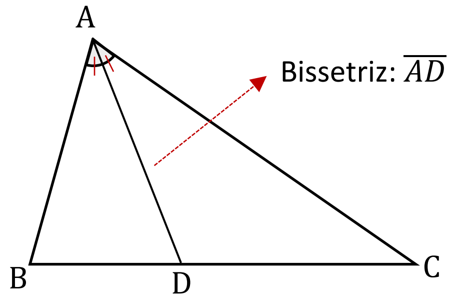
$$AG = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{4}} \quad \rightarrow \quad \boxed{AG = \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

Gabarito: ERRADO.

Para encerrarmos essa parte de **baricentro**, saiba também que ele é **o centro de gravidade do triângulo**. Por esse motivo, costumamos representá-lo pela letra "G".

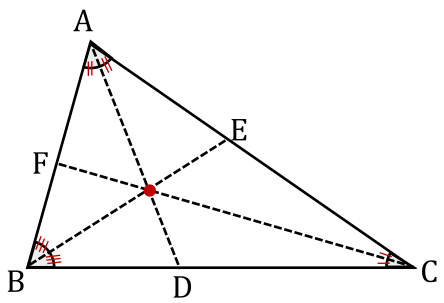
Incentro

Para entender o que é o incentro, é necessário entender o que é a **bissetriz interna de um triângulo**. A bissetriz interna nada mais é do que um segmento de reta que divide um ângulo interno em dois ângulos iguais. Vamos visualizá-la no desenho para melhor compreensão.



Moçada, não confunda! Enquanto a mediana está preocupada em dividir o lado oposto em dois segmentos iguais, **a bissetriz interna se preocupa em dividir o ângulo interno em dois iguais**. Ela pode tocar em qualquer ponto do lado oposto.

Mais um vez, perceba que o triângulo não possui apenas uma bissetriz interna, mas três!



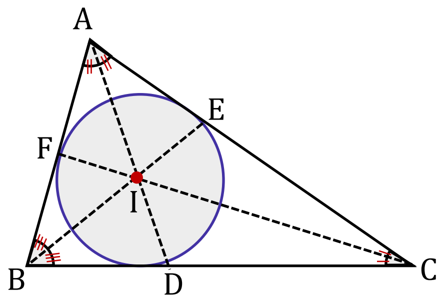
Logo, quando desenhamos as três bissetrizes de um triângulo, notamos que elas se encontram em um ponto. É exatamente esse ponto que chamamos de incentro.

TOME NOTA!

Incentro é o ponto de encontro das três **bissetrizes internas** de um triângulo.

Professor, esse ponto tem alguma propriedade especial?

Tem sim! Ele é o centro da circunferência inscrita nesse triângulo!



HORA DE PRATICAR!

(PREF. PAÇO DO LIMIAR/2019) O centro de uma circunferência inscrita em um triângulo é facilmente obtido quando se determina o:

A) Autocentro.

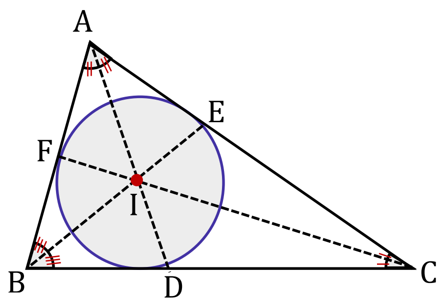
B) Baricentro.

C) Circuncentro.

D) Incentro.

Comentários:

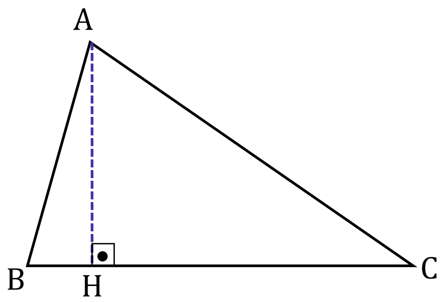
Conforme vimos, é o **incentro (I)** que coincide com o centro da circunferência **inscrita** no triângulo.



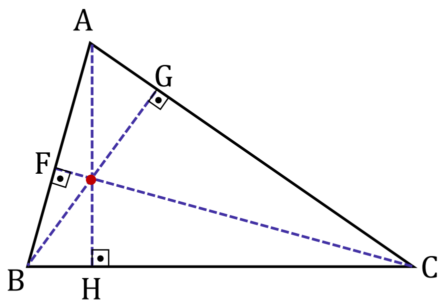
Gabarito: LETRA D.

Ortocentro

Para entender o ortocentro, precisamos entender o que é a altura. A altura de um triângulo nada mais é do que o segmento de reta que parte de um dos vértices e toca no lado oposto fazendo um ângulo de 90°. Vamos desenhar.



Sendo assim, como temos três vértices e três lados, podemos concluir que teremos **três alturas**. Vamos desenhar todas elas.



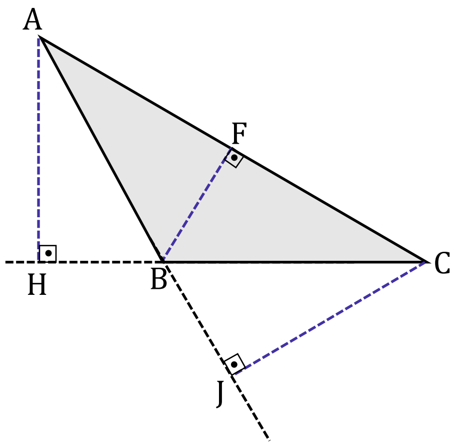
Perceba, portanto, que as alturas de um triângulo também se encontram em um ponto. É esse ponto que nós chamamos de **ortocentro**.

TOME NOTA!

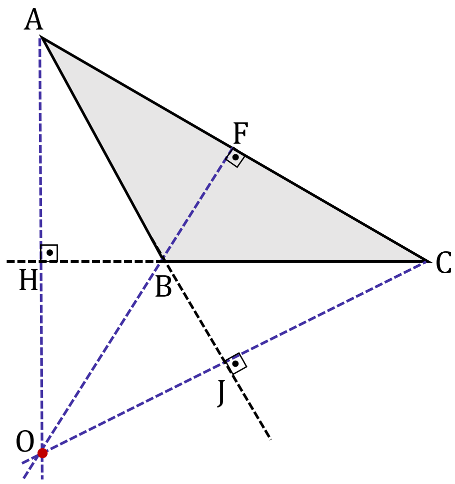
Ortocentro é o ponto de encontro das **três retas suportes da altura** de um triângulo.

Opa!! Professor, o senhor vinha falando de altura, mas na definição falou de reta suporte da altura. O que aconteceu?

Galera, acontece que nem sempre a altura será interna ao triângulo. Algumas vezes ela será externa e precisaremos traçar uma reta suporte para encontrar o ortocentro. Vamos desenhar essa situação.



Perceba que o triângulo ABC possui alturas que são externas ao triângulo (CJ e AH). Se desenharmos dessa forma, não conseguiremos encontrar o incentro, pois **as alturas não estão se encontram**. Isso significa que o ortocentro não existe? Não!! Pois o ortocentro é o **ponto de encontro das retas suportes da altura**. Na prática, nós vamos simplesmente prolongar as alturas até elas se encontrarem!



Note que, **nessas situações**, o ortocentro é externo ao triângulo. Não há problema algum.

(PREF. HORIZONTINA/2021) Marcar C para as afirmativas Certas, E para as Erradas e, após, assinalar a alternativa que apresenta a sequência CORRETA:

( ) O ortocentro de um triângulo qualquer é sempre interno ao triângulo.
( ) O incentro de um triângulo qualquer é o ponto de interseção das medianas desse triângulo.
( ) Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.
( ) O ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo qualquer equivale ao centro de um círculo inscrito nesse triângulo.

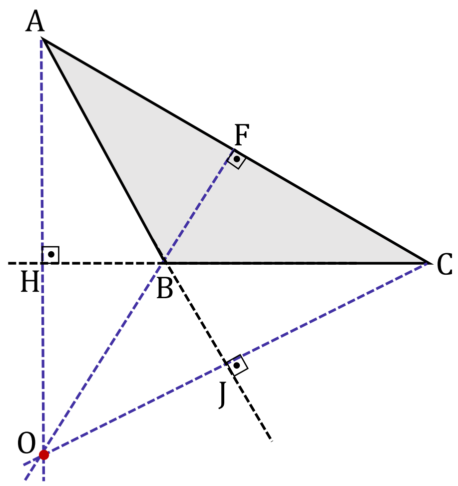
A) E - E - E - C.
B) E - E - C - C.
C) C - E - E - C.
D) C - C - C - E.
E) C - C - E - C.

Comentários:

Vamos analisar cada uma das afirmativas.

(E) O ortocentro de um triângulo qualquer é sempre interno ao triângulo.

Errado! Acabamos de ver uma situação em que o ortocentro estava **externo** ao triângulo.

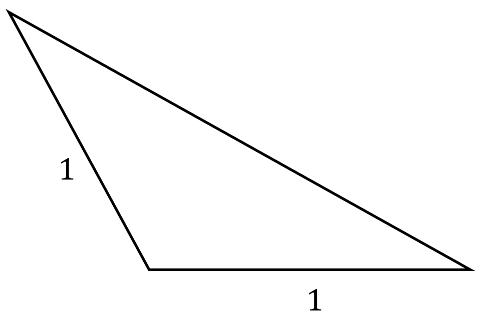


( ) O incentro de um triângulo qualquer é o ponto de interseção das medianas desse triângulo.

Errado! O incentro é o ponto de intersecção das **bissetrizes internas** de um triângulo. Lembre-se que o encontro das medianas é o baricentro.

( ) Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.

Errado! Podemos ter um triângulo isósceles que é um **triângulo obtusângulo**. Podemos desenhar como exemplo um triângulo da forma:



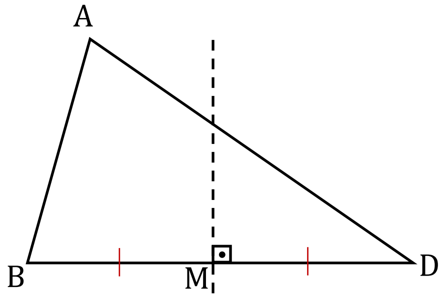
( ) O ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo qualquer equivale ao centro de um círculo inscrito nesse triângulo.

Correto! Lembre-se que o ponto de intersecção das bissetrizes internas de um triângulo é o **incentro**. Vimos que o incentro coincide com o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Gabarito: LETRA A.

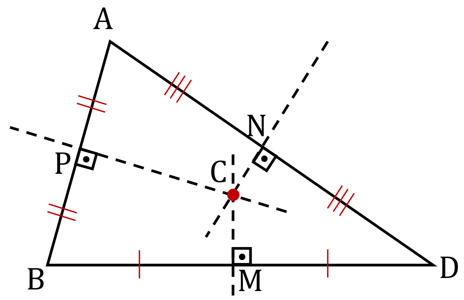
Circuncentro

Esse é o nosso último ponto notável. Para entendê-lo, é preciso conhecer a mediatriz. No contexto do estudo de triângulos, a mediatriz é um segmento de reta que passa perpendicularmente pelo ponto médio do lado. *Como assim, professor?!* Vamos para o desenho!



Galera, o importante de perceber aqui é o seguinte: a mediatriz não precisa partir do vértice! Ela pode vir de qualquer lugar. **Nossa preocupação aqui é dividir o lado no meio e perpendicularmente!!** Para satisfazer essas duas condições, ela não precisa partir do vértice, ok?!

Mais uma vez, você deve ter percebido que teremos três mediatrizes em um triângulo. Vamos desenhá-la.



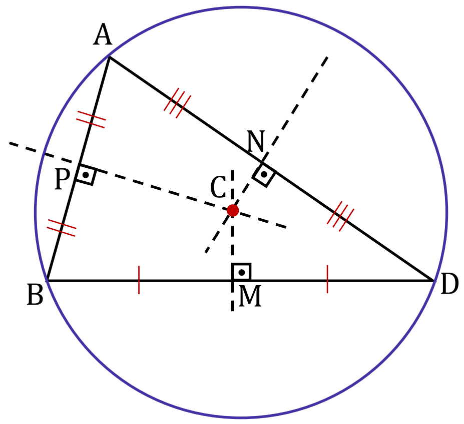
Observe que as mediatrizes se encontram em um ponto! Chamamos esse ponto de circuncentro.

TOME NOTA!

Circuncentro é o ponto de encontro das **três mediatrizes** dos lados do triângulo.

Professor, percebi que todo ponto notável que vimos até agora tem uma propriedade especial. O circuncentro também possui uma?

Sim! Saiba que **o circuncentro coincide com o centro da circunferência circunscrita ao triângulo**!



Bem legal, né?!

(PREF. ALTA FLORESTA/2019) Em um triangulo qualquer ABC, encontramos circuncentro quando:

A) Traçamos o triângulo dentro de uma circunferência.

B) Traçamos as três medianas deste triângulo.

C) Traçamos as três bissetrizes deste triângulo.

D) Traçamos as três alturas deste triângulo.

E) Traçamos as três mediatrizes deste triângulo.

Comentários:

Questão bem direta, mas vamos analisar todas as alternativas!

A) Traçamos o triângulo dentro de uma circunferência.

Errado, pessoal! Por mais que o circuncentro coincida com o centro da circunferência circunscrita, apenas desenhar o triângulo dentro da circunferência **não é suficiente** para encontrarmos esse ponto notável.

B) Traçamos as três medianas deste triângulo.

Errado! Quando traçamos as três medianas obtemos **o baricentro**.

C) Traçamos as três bissetrizes deste triângulo.

Errado! Quando traçamos as três bissetrizes internas do triângulo obtemos **o incentro**.

D) Traçamos as três alturas deste triângulo.

Errado! Quando traçamos as três alturas de um triângulo obtemos **o ortocentro**.

E) Traçamos as três mediatrizes deste triângulo.

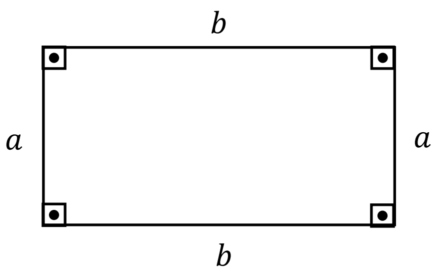
Correto! É isso mesmo! Quando traçamos **as três mediatrizes** do triângulo conseguimos encontrar o seu circuncentro!

Gabarito: LETRA E.

Quadriláteros

Nessa seção, mostrarei para vocês os quadriláteros mais conhecidos. Serei bem objetivo e quero que vocês deem especial atenção para as fórmulas de área. Combinado?!

Retângulo



$$\boxed{ÁREA = a \cdot b}$$

Características Principais:

- Comprimento: "b"; Largura: "a";
- Ângulos internos são iguais a 90°;
- Lados opostos são iguais

(CM SERTÃOZINHO/2019) O quadro de avisos de uma firma tem a forma de um retângulo com 80 cm de altura e 1,2 m² de área. A medida do comprimento desse quadro é

A) 1,2 m

B) 1,3 m

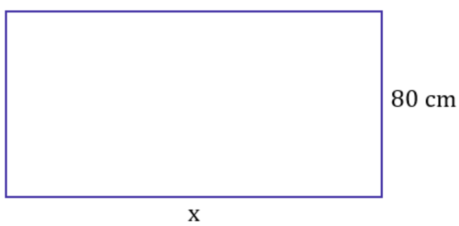
C) 1,4 m

D) 1,5 m

E) 1,6 m

Comentários:

Temos uma largura e a área. Sabendo disso, podemos determinar o comprimento. Primeiro, veja o retângulo.



Uma coisa importante que devemos perceber é que a área dada está em metros quadrados e a medida da largura está em centímetros. Cuidado para não misturar! Precisamos escrever 80 centímetros em metros.

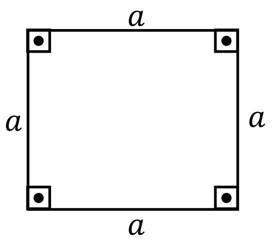
$$80\ centímetros = 0{,}8\ metros \qquad \text{(dividimos por 100)}$$

Em um retângulo, a área é dada pelo produto do comprimento pela largura. Assim,

$$x \cdot 0{,}8 = 1{,}2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1{,}2}{0{,}8} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 1,5\ m}$$

Gabarito: LETRA D.

Quadrado



$$\boxed{ÁREA = a^2}$$

Características Principais:

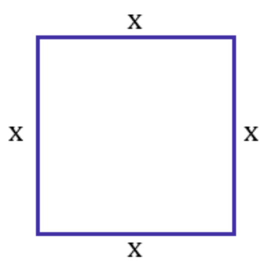
- Todos os lados são iguais;
- Todos os ângulos internos são iguais a 90°;
- É um polígono regular.

(FITO/2020) Um galpão tem a superfície em formato quadrado com perímetro igual a 96 m. Esse galpão será divido em três salas de modo que suas áreas sejam diretamente proporcionais aos números: 2, 4 e 9. A diferença entre as áreas das duas maiores salas será igual a

A) 32,0 m².
B) 68,4 m².
C) 153,6 m².
D) 180,8 m².
E) 192,0 m².

Comentários:

Beleza! Lembre-se que o perímetro é a soma dos lados. Em um quadrado, todos os lados são iguais. Assim,



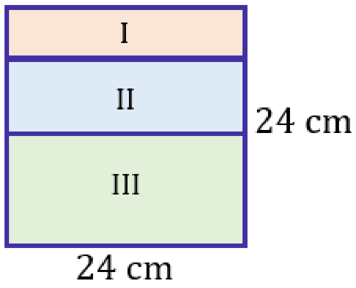
O enunciado disse que o perímetro desse quadrado é 96 cm.

$$x + x + x + x = 96 \quad \rightarrow \quad 4x = 96 \quad \rightarrow \quad x = 24\ cm$$

Logo, o lado do quadrado é 24 cm. A área de um quadrado é igual ao lado ao quadrado.

$$A = 24^2 \quad \rightarrow \quad A = 576\ cm^2$$

Esse quadrado é dividido em três salas com áreas proporcionais a 2, 4 e 9. Imagine algo do tipo (não sabemos as formas da sala, quero apenas ilustrar uma possibilidade para melhor entendimento).



Podemos escrever as seguintes proporcionalidades:

$$A_I = 2k$$
$$A_{II} = 4k$$
$$A_{III} = 9k$$

Ora, a soma das áreas de todas as salas deve ser igual a área do quadrado. Assim,

$$2k + 4k + 9k = 576 \quad \rightarrow \quad 15k = 576 \quad \rightarrow \quad k = \frac{576}{15} \quad \rightarrow \quad k = 38{,}4$$

A diferença das áreas das duas maiores sala é:

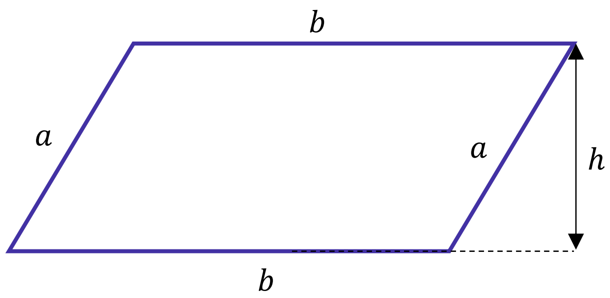
$$Diferença = A_{III} - A_{II} \quad \rightarrow \quad Dif = 9k - 4k \quad \rightarrow \quad Dif = 5k$$

Basta substituirmos o valor de "k".

$$Dif = 5 \cdot 38{,}4 \quad \rightarrow \quad Dif = 192\ m^2$$

Gabarito: LETRA E.

Paralelogramo

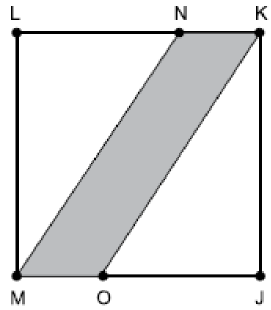


$$\boxed{ÁREA = b \cdot h}$$

Características Principais:
- Lados opostos são iguais (congruentes) e paralelos;
- Ângulos opostos são iguais (congruentes)

- A área é dada em função da altura "h" e esse "h" nem sempre vai estar disponível para nós. Na maioria das vezes, teremos que usar um pouco dos conhecimentos sobre triângulos retângulos, tudo bem?

(UNICAMP/2019) Os pontos N e O pertencem aos lados de um quadrado JKLM, determinando o paralelogramo KNMO cuja área é igual a 1/3 da área do quadrado, conforme a figura.



Se a medida do lado do quadrado é 6 cm, o perímetro do paralelogramo, em cm, é igual a

A) $2 + 2\sqrt{13}$
B) $2 + 4\sqrt{13}$
C) $4 + \sqrt{13}$
D) $4 + 4\sqrt{13}$

Comentários:

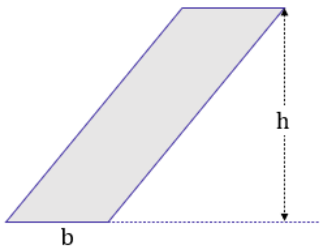
Queremos saber o perímetro do paralelogramo. O enunciado apenas disse que a área do paralelogramo é igual a um terço da área do quadrado. Como a medida do lado do quadrado vale 6 cm, então podemos calcular a sua área.

$$A_{quadrado} = L^2 \quad \rightarrow \quad A_{quadrado} = 6^2 \quad \rightarrow \quad A_{quadrado} = 36 \text{ cm}^2$$

Se a área do paralelogramo é um terço da do quadrado, fazemos:

$$A_{paralelogramo} = \frac{1}{3} \cdot A_{quadrado} \quad \rightarrow \quad A_{paralelogramo} = \frac{1}{3} \cdot 36 \quad \rightarrow \quad A_{paralelogramo} = 12 \text{ cm}^2$$

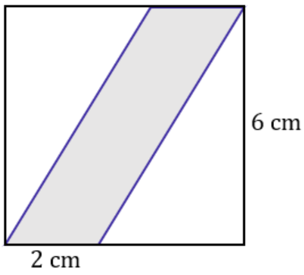
Ok! Temos a área, mas o enunciado pede o perímetro (que é a soma de todos os lados). Agora, veja o seguinte paralelogramo:



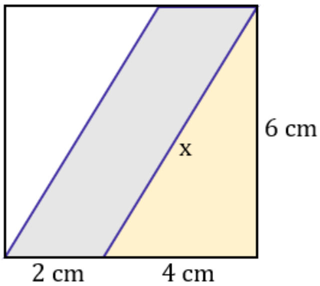
Na situação representada na figura, sabemos que a área dele é dada por $A = bh$. Compare o paralelogramo acima com o da questão. Percebeu que a altura do paralelogramo da questão é igual ao lado do quadrado? Ou seja, $h = 6\ cm$! Podemos, portanto descobrir a base.

$$A_{paralelogramo} = bh \quad \rightarrow \quad 12 = b \cdot 6 \quad \rightarrow \quad b = \frac{12}{6} \quad \rightarrow \quad b = 2 \text{ cm}$$

Ficamos com a seguinte situação:



No entanto, falta ainda descobrir o lado "diagonal". Para isso, veja o triângulo retângulo.



Ora, "x" é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 4 cm e 6 cm. Vamos usar o Teorema de Pitágoras!

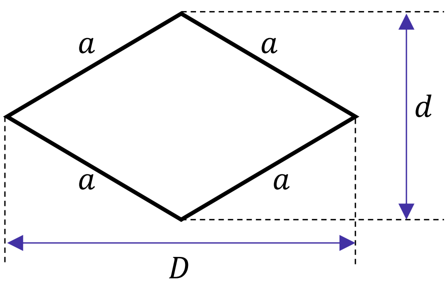
$$x^2 = 4^2 + 6^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 16 + 36 \quad \rightarrow \quad x^2 = 52 \quad \rightarrow \quad x = 2\sqrt{13}\text{ cm}$$

Pronto! Temos todos os lados do paralelogramo, basta somá-los para obter o perímetro!

$$Perímetro = 2 + 2 + 2\sqrt{13} + 2\sqrt{13} \quad \rightarrow \quad Perímetro = 4 + 4\sqrt{13}\text{ cm}$$

Gabarito: LETRA D.

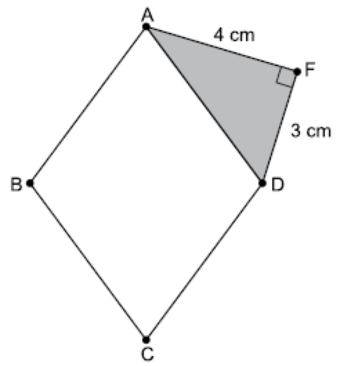
Losango



$$\boxed{ÁREA = \frac{D \cdot d}{2}}$$

Características Principais:
- O losango é um paralelogramo com todos os lados iguais;
- É também chamado de paralelogramo equilátero;
- Ângulos opostos iguais;
- "D" é a medida da diagonal maior, enquanto "d" é a medida da diagonal menor.

(PREF. ITAPEVI/2019) Um losango ABCD e um triângulo retângulo AFD têm o lado AD em comum conforme a figura.

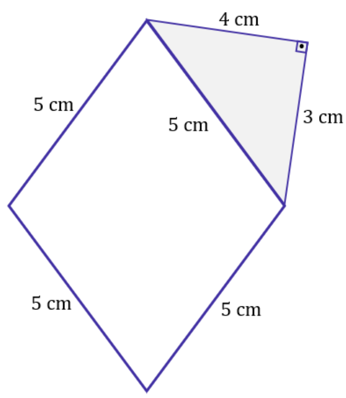


O perímetro do losango, em cm, é igual a
A) 16
B) 18
C) 20
D) 22

Comentários:
Notem que o triângulo retângulo destacado é o aquele pitagórico! Logo, se os catetos são 3 e 4, a hipotenusa só pode ser 5 cm! Tudo bem? Caso não lembrasse disso, você poderia usar o Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 4^2 + 3^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 16 + 9 \quad \rightarrow \quad x^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x = 5 \text{ cm}$$

O motivo de encontrar a hipotenusa do triângulo retângulo é que ela coincide com o lado do losango. Como no losango todos os lados são iguais, já podemos determinar o perímetro.

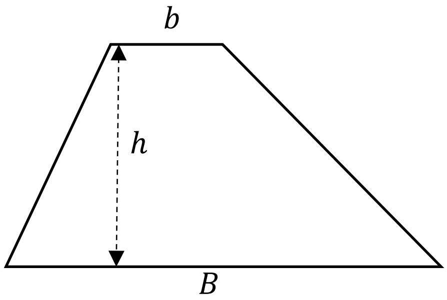


Assim, lembrando que o perímetro é a soma dos lados:

$$Perímetro = 5 + 5 + 5 + 5 \quad \rightarrow \quad Perímetro = 20 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA C.

Trapézio

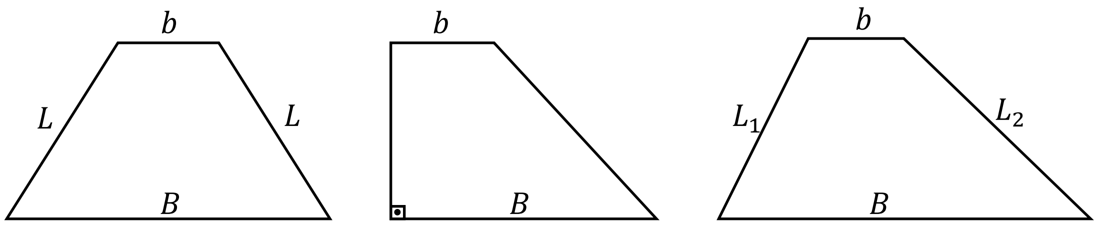


$$ÁREA = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Características Principais:

- "B" representa a medida da base maior, "b" é a medida da base menor;
- As bases são paralelas;
- "h" é a altura do trapézio.

Tipos de Trapézios:

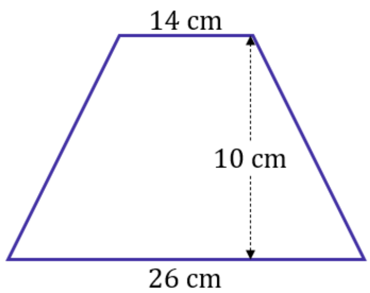


Trapézio Isósceles   Trapézio Retângulo   Trapézio Escaleno

- **Trapézio Isósceles:** Os lados não paralelos possuem a mesma medida. Além disso, são simétricos.
- **Trapézio Retângulo:** Um dos lados não paralelos faz um ângulo de 90° com as bases.
- **Trapézio Escaleno:** É o trapézio que apresenta todos os seus lados distintos.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. ITANHAÉM/2020) Assinale a alternativa que apresenta a área do trapézio abaixo.



A) 260 cm^2
B) 200 cm^2
C) 1.820 cm^2

D) 3.640 cm^2
E) 400 cm^2

Comentários:
Galera, questãozinha apenas para treinarmos a fórmula da área do trapézio. O enunciado deu de cara todas as informações que precisamos.

- $Base\ Maior\ (B) = 26\ cm;$
- $Base\ Menor\ (b) = 14\ cm;$
- $Altura\ (h) = 10\ cm$

Lembre-se da fórmula:

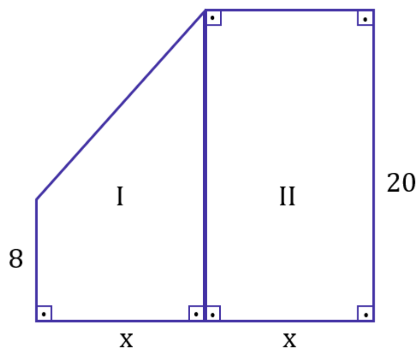
$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Agora, substituindo as informações:

$$A = \frac{(26+14)\cdot 10}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{40\cdot 10}{2} \quad \rightarrow \quad A = 40\cdot 5 \quad \rightarrow \quad A = 200\ \ cm^2$$

Gabarito: LETRA B.

(PREF. CERQUILHO/2019) Na figura, com medidas em metros, estão representados dois terrenos adquiridos por Xavier, sendo que o terreno I tem a forma de um trapézio, e o terreno II tem formato retangular.

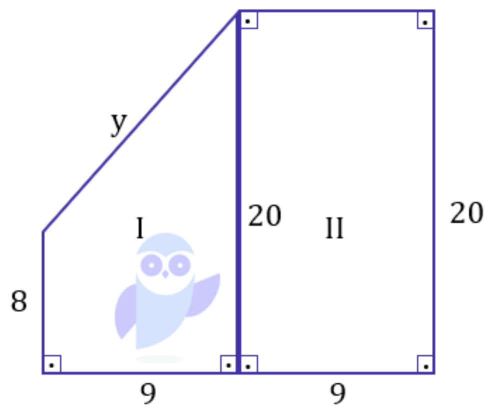


Se a área do terreno II é 180 m², então, o perímetro do terreno I é igual a
A) 52 m.
B) 50 m.
C) 49 m.
D) 46 m.
E) 42 m.

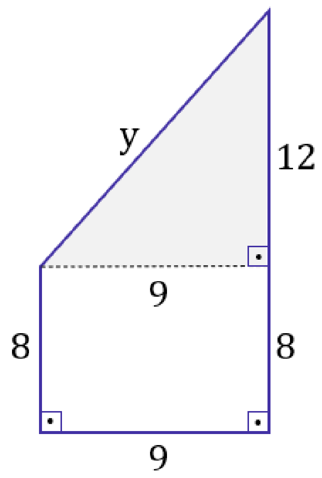
Comentários:
Pessoal, o enunciado deu a área do terreno retangular e sabemos uma de suas dimensões. Logo, podemos determinar x.

$$20\cdot x = 180 \quad \rightarrow \quad x = \frac{180}{20} \quad \rightarrow \quad x = 9 \text{ metros}$$

Dessa forma, ficamos com quase todas as dimensões do terreno I determinadas.



Veja que temos quase todas as dimensões do trapézio determinadas. Precisamos ainda descobrir "y". Para isso, precisaremos olhar o trapézio com mais cuidado.



O lado "y" do trapézio é justamente a hipotenusa do triângulo retângulo destacado. O lado maior foi dividido em duas partes, uma de 8 e outra de 12, que é exatamente um dos catetos. Podemos usar o Teorema de Pitágoras.

$$y^2 = 9^2 + 12^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = 81 + 144 \quad \rightarrow \quad y^2 = 225 \quad \rightarrow \quad y = 15\ m$$

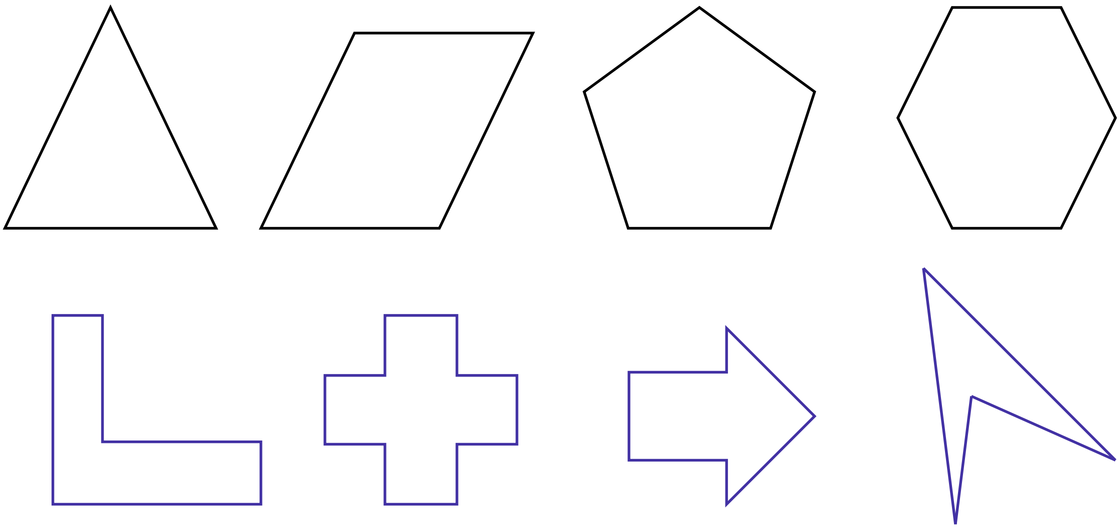
Pronto! Todos os lados do trapézio do terreno I estão determinados. Para encontrar o perímetro, basta somarmos tudo.

$$Perímetro = 8 + 9 + 20 + 15 \quad \rightarrow \quad Perímetro = 52\ m$$

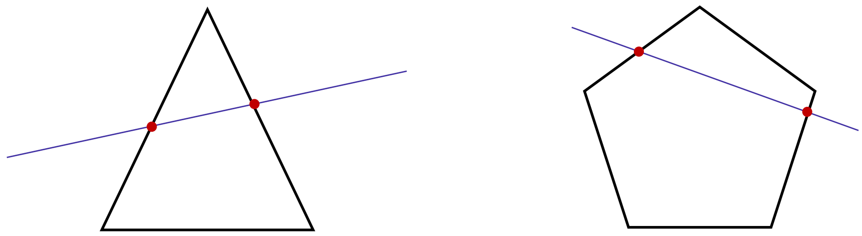
Gabarito: LETRA A.

Polígonos

Os triângulos e os quadriláteros que vimos nessa aula são polígonos. Simplificadamente, podemos chamar de polígono, **a figura geométrica plana e fechada formada pela união de segmentos de reta**. Confira abaixo.

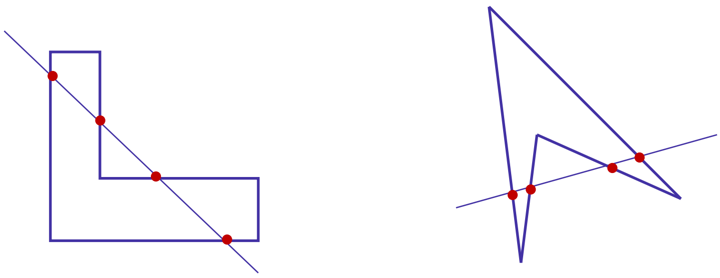


Na primeira linha da imagem acima estão **alguns polígonos que chamamos de convexos**. Eles vão ser chamados assim quando uma qualquer reta **cortar o polígono em apenas <u>dois pontos</u>**.



Polígonos Convexos

Observe que qualquer reta que usamos para cortar o polígono, vai tocá-lo em apenas dois pontos! Essa é a característica que vai definir os polígonos convexos! Observe agora os não convexos:



Polígonos Não Convexos

Por sua vez, **nos polígonos não convexos, existem retas que vão cortá-los em <u>mais de dois pontos</u>**. Veja que eles podem assumir as mais diferentes formas, sendo bem imprevisíveis e dificilmente estarão na sua prova. Quando caem, 99% das vezes é apenas para fazermos a identificação em convexo ou não.

Por fim, quero trazer para vocês um resultado que vimos para triângulos e quadriláteros mas que na verdade **serve para qualquer polígono**.

A soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo será sempre 360°.

Ademais, **a soma dos ângulos internos de um polígono de "n" lados** é dada por:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Por exemplo, no triângulo temos três lados e, portanto, $n = 3$. Usando isso na fórmula acima,

$$S_i = (3 - 2) \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_i = 180°$$

Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, conforme vimos.

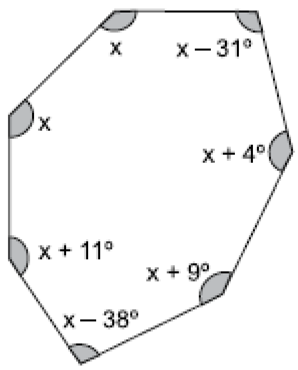
Analogamente, para os quadriláteros convexos, temos $n = 4$.

$$S = (4 - 2) \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_i = 2 \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_i = 360°$$

Assim, a soma dos ângulos internos nos quadriláteros convexos é 360°.

Viu só, moçada? Caso queira saber a soma dos ângulos internos em um hexágono, por exemplo, basta substituirmos $n = 6$. **Às vezes, as bancas gostam de cobrar essa fórmula.**

(PREF. ARAÇATUBA/2019) Em um polígono convexo, a soma dos ângulos internos, em graus, é dada pela fórmula $S = 180(n - 2)$, sendo n o número de lados do polígono. No polígono da figura, a incógnita x representa um valor em graus



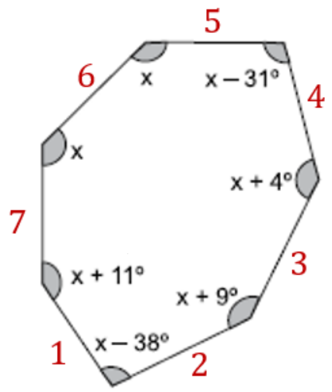
O menor ângulo interno desse polígono mede:

A) 99°

B) 97°

C) 95°
D) 93°
E) 91°

Comentários:
O primeiro passo do exercício é contarmos os lados do polígono. Isso mesmo, vamos lá!



O polígono tem 7 lados! Podemos achar quanto vale a soma dos ângulos internos! Caso não lembrasse da fórmula, a questão foi boazinha e trouxe! Vamos aplicá-la.

$$S = (n-2)\cdot 180° \quad \rightarrow \quad S = (7-2)\cdot 180° \quad \rightarrow \quad S = 5\cdot 180° \quad \rightarrow \quad S = 900°$$

Beleza! Quando somarmos todos esses ângulos destacados na imagem, devemos obter 900°.

$$(x+11°)+(x-38°)+(x+9°)+(x+4°)+(x-31°)+x+x = 900°$$

$$7x - 45 = 900$$

$$7x = 945$$

$$x = \frac{945}{7}$$

$$x = 135°$$

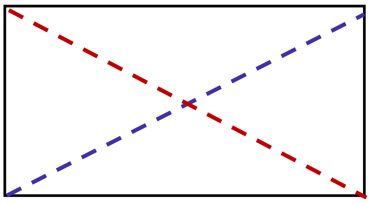
O menor ângulo desse polígono será dado por "$x - 38°$", pois é o que estamos tirando mais de x.

$$Menor\ Ângulo = x - 38° = 135° - 38° = 97°$$

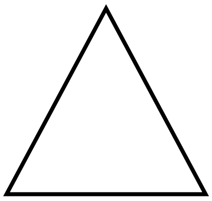
Gabarito: LETRA B.

Diagonais de um Polígono Convexo

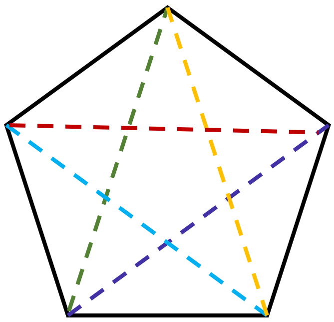
As diagonais de um polígono são segmentos de retas que **unem vértices não adjacentes**. Calma, vou mostrar melhor o que isso significa!



Observe o retângulo acima! Ele tem **duas diagonais**. Uma está marcada de roxo e outra de vermelho. Agora, veja o triângulo:



Por sua vez, o triângulo, apesar de ser um polígono convexo, **não possui diagonais**. O motivo disso é **que todos os seus vértices são adjacentes um do outro**. Dessa forma, não conseguimos traçar nenhuma diagonal. Agora, vamos ver o pentágono!



O pentágono já possui 5 diagonais! A pergunta que vem agora é: *Existe uma maneira de calcularmos a quantidade de diagonais sabendo o número de lados do polígono convexo?* A resposta é sim! Existe uma fórmula que nos fornece essa quantidade e as bancas estão começando a cobrá-la.

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

"d" representa a quantidade de diagonais e "n" é o número de lados do polígono.

ESTA CAI NA PROVA!

(ISS-BH/2022) A partir do conceito: “Dado um polígono convexo qualquer, diagonal é o segmento que une dois vértices não consecutivos”. Assim, um triângulo não possui diagonais, pois, como só possui três vértices, não é possível unir dois vértices não consecutivos, o quadrado possui duas diagonais e partir de um dos vértices, encontramos, apenas um outro vértice não consecutivo, enquanto, que no pentágono convexo temos 5 diagonais, e nesse polígono encontramos a partir de um vértice, dois outros vértices não consecutivos. A partir dessas informações, monta-se a tabela a seguir.

Nome do Polígono	Número de lados	Número de diagonais	A partir de um dos vértices, o número de vértices não consecutivos
Triângulo	3	0	0
Quadrado	4	2	1
Pentágono	5	5	2
Hexágono	6	9	3
Heptágono	7	14	4

Verifica-se que existe uma certa regularidade entre o número de lados, número de diagonais e o número de vértices não consecutivos contados a partir de um dos vértices. Então, o número de diagonais de um polígono convexo que possui 102 lados é igual a
A) 4.852.
B) 4.947.
C) 4.998.
D) 5.049.
E) 5.100.

Comentários:
Pessoal, **o número de diagonais** de um polígono convexo de "n" lados é dado pela seguinte relação:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

O enunciado quer o número de diagonais de um polígono com **102 lados**. Assim,

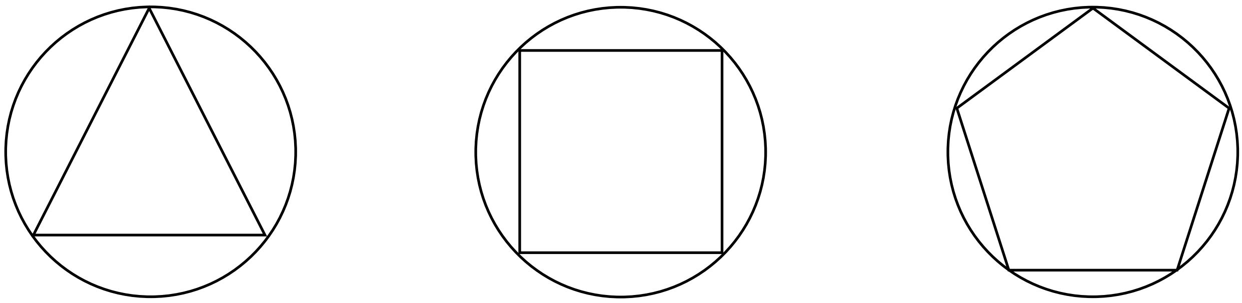
$$d = \frac{102 \cdot (102-3)}{2} \quad \rightarrow \quad d = \frac{102 \cdot 99}{2} \quad \rightarrow \quad d = 51 \cdot 99 \quad \rightarrow \quad \boxed{d = 5.049}$$

Gabarito: LETRA D.

Inscrição e Circunscrição de Polígonos

Pessoal, esse tópico não é muito comum em cursos regulares. O motivo disso é que ele não traz uma teoria nova, mas sim uma aplicação específica de tudo que vimos. Como é um tipo de problema bastante comum nas provas, eu resolvi destacá-lo em um tópico a parte para que possamos trabalhá-lo com a devida atenção.

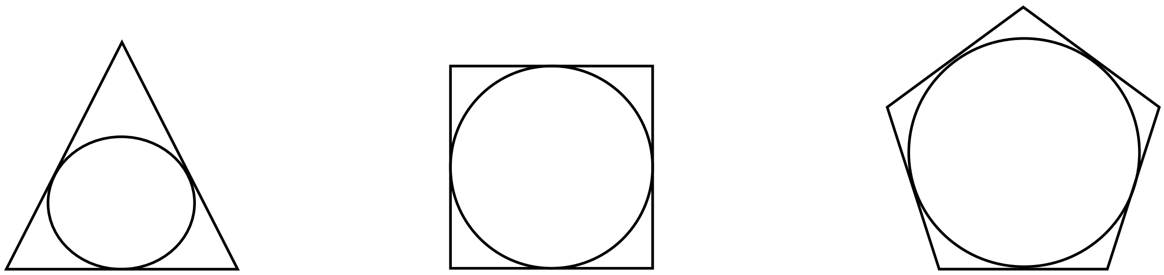
Indo direto ao ponto, nós falamos que um polígono está inscrito numa circunferência quando seus vértices são pontos que estão na circunferência. Nessa situação, teremos **o polígono dentro do círculo**. Observe.



(a) Triângulo **inscrito** na circunferência — (b) Quadrado **inscrito** na circunferência — (c) Pentágono **inscrito** na circunferência

Na situação representada acima, também podemos dizer que **o círculo está circunscrito** aos polígonos.

Por sua vez, um polígono é circunscrito, quando o círculo em seu interior tangencia todos os seus lados. Dessa forma, o polígono é externo ao círculo. Vamos visualizar.



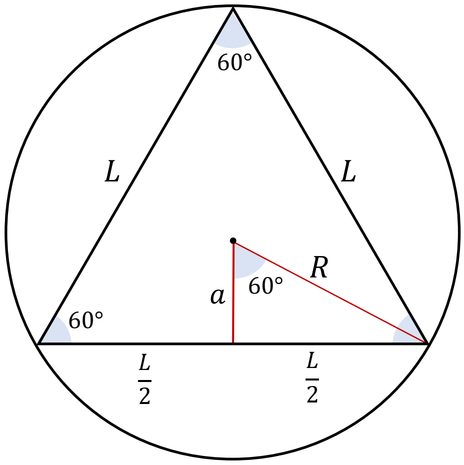
(d) Triângulo **circunscrito** à circunferência — (e) Quadrado **circunscrito** à circunferência — (f) Pentágono **circunscrito** à circunferência

Na situação apresentada acima, também podemos dizer que **a circunferência está inscrita** em cada um dos polígonos. Por isso, muita atenção na forma que o enunciado da questão expõe o problema!

Exposta essa parte introdutória, agora vamos estudar com detalhes cada uma dessas situações considerando o triângulo, o quadrado e o hexágono. Para efeitos do nosso estudo, consideraremos apenas **polígonos regulares**, que são as situações preponderantes em prova. Vamos nessa?!

Triângulos

A primeira situação que estudaremos será o triângulo equilátero inscrito na circunferência. Vamos desenhá-la com todos os detalhes pertinentes.



Observe que destacamos alguns parâmetros importantes. "R" é o raio do círculo, "a" é o apótema e "L" é o lado do triângulo. O apótema nada mais é do que um **segmento de reta que liga o centro geométrico do polígono a um dos seus lados**, de forma **perpendicular**.

Você pode estar se perguntando onde queremos chegar com tudo isso. Nossa missão aqui será escrever "L" e "a" em função do raio da circunferência "R'. Para isso, observe o triângulo retângulo destacado. Podemos usar o seno e cosseno de 60° para escrever as relações procuradas.

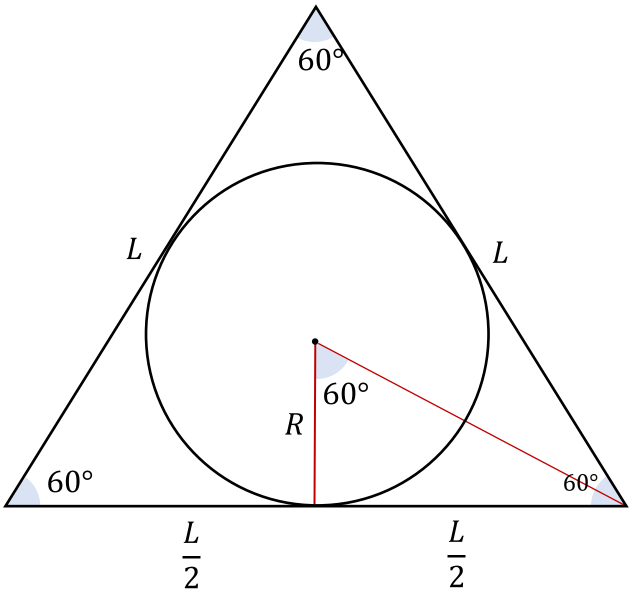
$$\operatorname{sen} 60° = \frac{L/2}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{L}{2R} \quad \rightarrow \quad \boxed{L = R\sqrt{3}}$$

$$\cos 60° = \frac{a}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{a}{R} \quad \rightarrow \quad \boxed{a = \frac{R}{2}}$$

Professor, eu vou precisar decorar esses resultados para a minha prova?

Pessoal, não precisa! A ideia aqui é que vocês **entendam e visualizem como chegar nesses resultados**. Dessa forma, caso caia alguma questão do gênero em seu concurso, você a resolverá muito mais rapidamente.

Por fim, também temos a situação em que **o triângulo está circunscrito à circunferência**. Também vamos desenhá-la com os detalhes pertinentes!



Como já falei, nosso objetivo em todas essas análises é escrever o lado e o apótema do polígono em função do raio da circunferência. Nessa situação específica, a primeira coisa que conseguimos observar é que **o apótema do triângulo é exatamente igual ao raio**!

$$\boxed{a = R}$$

Por sua vez, conseguimos usar a tangente de 60° para relacionar "R" e "L".

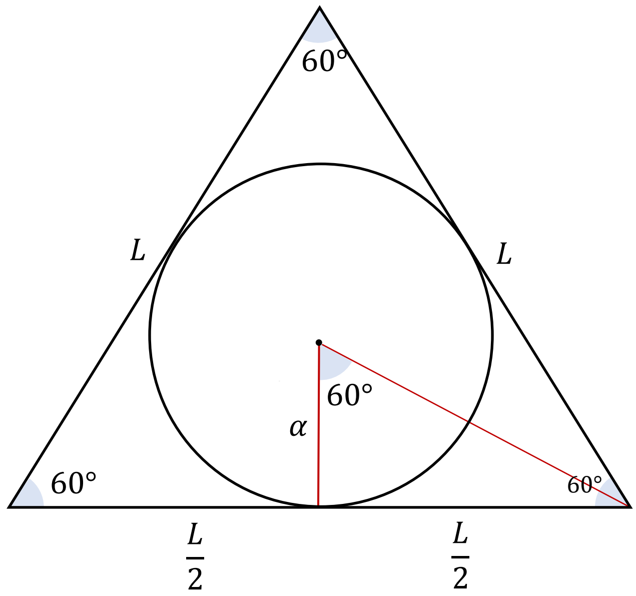
$$\tan 60° = \frac{L/2}{R} \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{3} = \frac{L}{2R} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{L = 2\sqrt{3}R}$$

Feito tudo isso, vamos dar uma olhada em como isso pode cair na prova.

(PREF. B. DO RIBEIRO/2021) Um círculo inscrito em um triângulo equilátero tem raio α. Podemos afirmar que a área desse triângulo, função de α, é dada por:
A) α^2
B) $3\sqrt{3}\alpha^2$
C) $\sqrt{3}\alpha$
D) $\sqrt{3}\alpha^2$
E) α

Comentários:

Opa! Temos um círculo inscrito em um triângulo equilátero. De uma outra forma, o enunciado poderia ter dito que **o triângulo está circunscrito ao círculo**. É a situação estudada anteriormente.



A única coisa que mudou é que a questão chama o raio da circunferência de α. Vimos podemos relacionar o lado do triângulo (L) com o raio (α) por meio da seguinte expressão:

$$L = 2\sqrt{3}\alpha$$

A questão pede a área do triângulo.

Você deve se lembrar que no tópico de Triângulos, aprendemos que **a área de um triângulo equilátero** pode ser calculada por meio da seguinte fórmula (muito importante):

$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

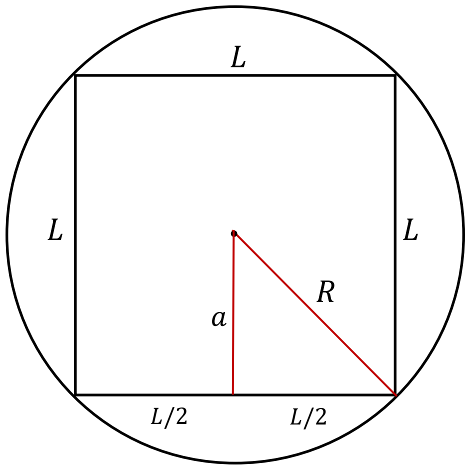
Pronto! Vamos substituir L e escrever essa expressão em função de α.

$$A = \frac{(2\sqrt{3}\alpha)^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A = \frac{4\cdot 3\alpha^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{A = 3\sqrt{3}\alpha^2}$$

Gabarito: LETRA B.

Quadrados

Agora, vamos fazer a mesma coisa para os quadrados! Inicialmente, considere o quadrado inscrito na circunferência conforme abaixo:



Para cumprir nosso objetivo, visualize que o diâmetro do círculo é igual à diagonal do quadrado! Dessa forma, podemos escrever que:

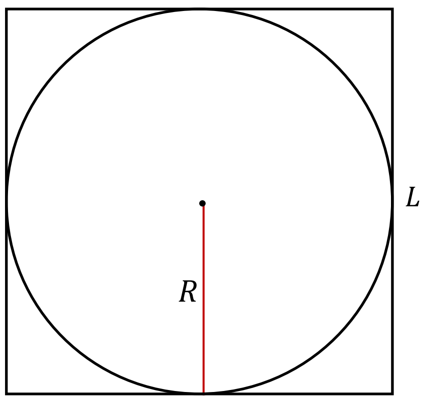
$$L\sqrt{2} = 2R \qquad \rightarrow \qquad \boxed{L = \sqrt{2}R}$$

Com essa informação, vamos usar o Teorema de Pitágoras para determinar "a" em função de "R".

$$R^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + a^2 \quad \rightarrow \quad R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)^2 + a^2 \quad \rightarrow \quad R^2 = \frac{R^2}{2} + a^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{R^2}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{a = \frac{\sqrt{2}R}{2}}$$

É verdade que poderíamos obter esses resultados de diferentes formas! Lembro também que todo esse nosso trabalho visa prepará-lo para uma cobrança de alto nível. A missão é que você se sinta confiante em resolver esse tipo de problema caso eles apareçam em sua prova.

Agora, vamos estudar a situação em que o quadrado está circunscrito à circunferência! Na minha opinião, é o caso mais simples de todos!



Inicialmente, visualize que o raio coincide com o apótema!

$$\boxed{a = R}$$

Por fim, visualize que o diâmetro do círculo é exatamente igual ao lado do quadrado!

$$\boxed{L = 2R}$$

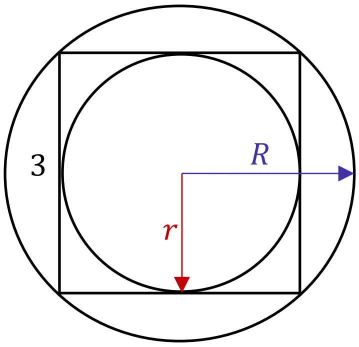
Observe que se desenharmos a figura corretamente, conseguimos retirar todas as relações apenas por meio da visualização. Não precisamos usar senos, cossenos, teorema de Pitágoras etc.

(UECE/2020) Um quadrado cuja medida do lado é 3 cm está inscrito em uma circunferência cuja medida do raio é R cm e circunscrito a uma circunferência cuja medida do raio é r cm. Nestas condições, a relação r/R é igual a:

A) $\sqrt{2}/2$
B) $\sqrt{3}/2$
C) $\sqrt{2}/3$
D) $\sqrt{3}/3$

Comentários:

Essa questão mistura as duas situações! Temos um mesmo quadrado inscrito e circunscrito.



Na situação em que **o quadrado está inscrito**, vimos que:

$$L = \sqrt{2}R \quad \rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{2}L}{2}$$

Por sua vez, na situação em que **o quadrado está circunscrito**, temos:

$$L = 2r \quad \rightarrow \quad r = \frac{L}{2}$$

A questão pede o valor da razão r/R:

$$\frac{r}{R}=\frac{\frac{L}{2}}{\frac{\sqrt{2}L}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

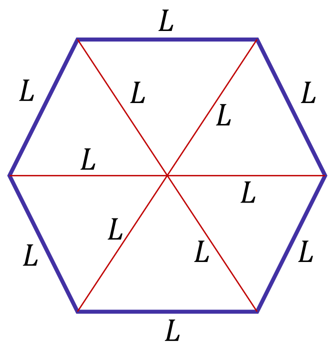
Observe que **em nenhum momento usamos o valor do lado do quadrado**. Afinal, quando fazemos a razão entre os dois raios, acabamos "cortando" o L.

Gabarito: LETRA A.

Hexágono

O último caso que veremos é o do hexágono. Cai bastante em prova, moçada! Muita atenção aqui.

Antes de começar a analisar os desenhos, quero revisar algumas coisas. A primeira delas é que um hexágono regular pode ser visto como a "**junção"** de 6 triângulos equiláteros.



Dessa forma, podemos dizer que a área de um hexágono regular é **6 vezes a área de um triângulo equilátero**.

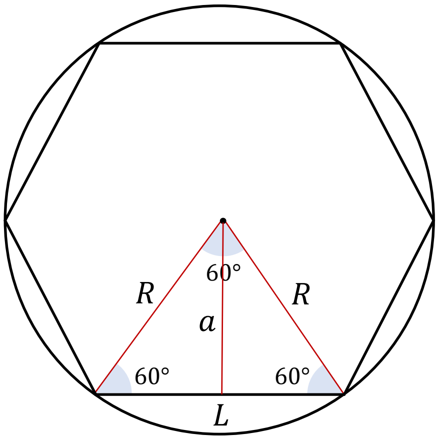
$$A=6\cdot\frac{L^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A=\frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$$

Área do Hexágono Regular

$$\boxed{A=\frac{3L^2\sqrt{3}}{2}}$$

Ademais, é importante lembrar que todos os ângulos internos de um triângulo equilátero são de 60°.

Dito tudo isso, vamos analisar a situação em que o hexágono está inscrito em uma circunferência.



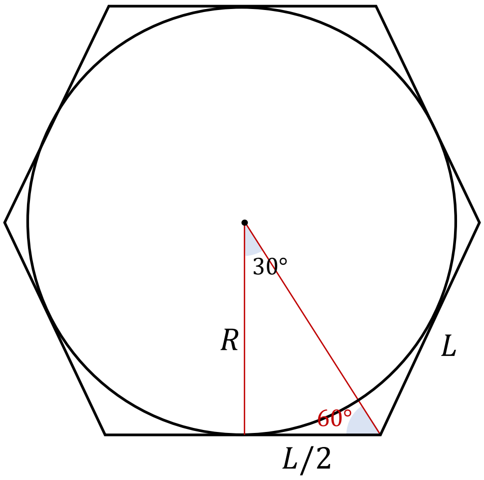
Observe que como o triângulo é equilátero, o raio só pode ser igual ao lado do hexágono. Assim:

$$\boxed{L = R}$$

Por sua vez, o apótema é igual a altura desse triângulo. Podemos encontrá-lo por meio do seno de 60°.

$$\text{sen}\, 60° = \frac{a}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{R} \quad \rightarrow \quad \boxed{a = \frac{\sqrt{3}R}{2}}$$

Por fim, quando o hexágono está circunscrito à circunferência, temos a seguinte situação:

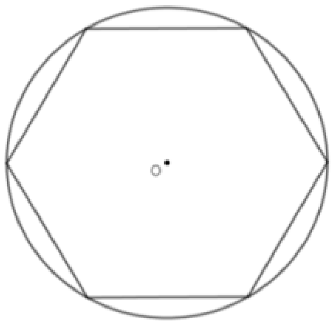


Para relacionarmos o lado "L" com o raio da circunferência "R", podemos usar a tangente de 60°.

$$\tan 60° = \frac{R}{L/2} \quad \rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{2R}{L} \quad \rightarrow \quad \boxed{L = \frac{2\sqrt{3}R}{3}}$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. MARIANA/2022) Na figura a seguir, o hexágono regular está inscrito na circunferência de centro O.



A área do hexágono tem medida igual a $6\sqrt{3}$ cm². Logo, a medida do raio da circunferência inscrita nesse hexágono, e de centro também O, é igual a

A) 2 cm.
B) 4 cm.
C) $\sqrt{3}$ cm.
D) $2\sqrt{3}$ cm.

Comentários:
Inicialmente, vamos usar a área do hexágono para encontrar o lado "L".

$$A = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad L^2 = 4 \quad \rightarrow \quad L = 2$$

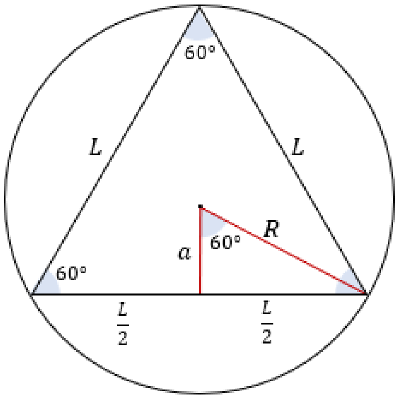
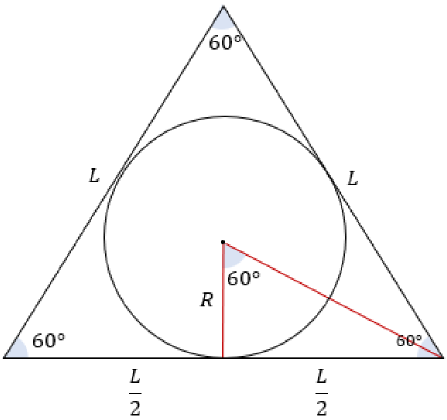
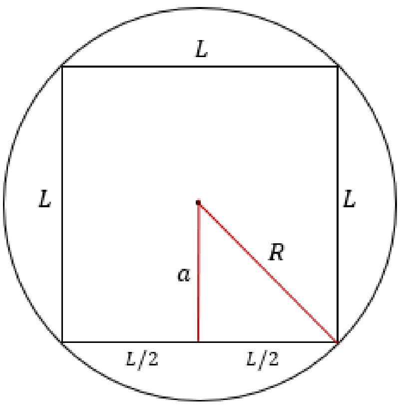
Com o lado do hexágono, podemos encontrar o raio do círculo inscrito por meio de:

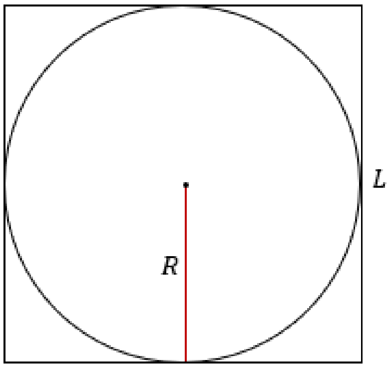
$$L = \frac{2\sqrt{3}R}{3} \quad \rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{3}L}{2} \quad \rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{R = \sqrt{3}}$$

Gabarito: LETRA C.

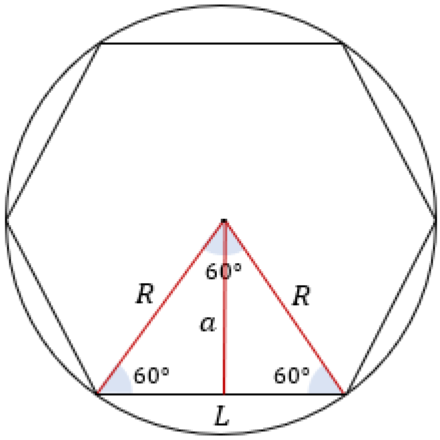
Pessoal, é verdade que podemos ter várias outras situações de polígonos inscritos ou circunscritos. No entanto, as mais frequentes com certeza foram trabalhadas aqui e você está preparado para enfrentá-las. Minha sugestão final para problemas assim é que você desenhe sempre e estabeleça as relações pertinentes por meio do uso da trigonometria! Para melhorar, vamos resumir todas as informações vistas nesse tópico.

RESUMINDO

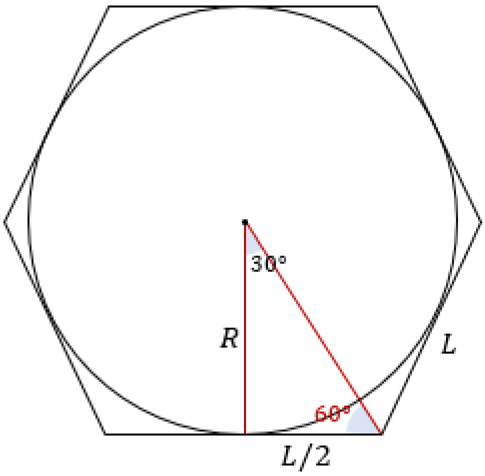
<table>
<tr><th colspan="2">Inscrição e Circunscrição de Polígonos Regulares</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Triângulo equilátero inscrito na circunferência
$\boxed{L = R\sqrt{3}}$
$\boxed{a = \frac{R}{2}}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Triângulo equilátero circunscrito à circunferência
$\boxed{L = 2\sqrt{3}R}$
$\boxed{a = R}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Quadrado inscrito na circunferência
$\boxed{L = \sqrt{2}R}$
$\boxed{a = \frac{\sqrt{2}R}{2}}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Quadrado circunscrito à circunferência

$$\boxed{L = 2R}$$

$$\boxed{a = R}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Hexágono regular inscrito na circunferência

$$\boxed{L = R}$$

$$\boxed{a = \frac{\sqrt{3}R}{2}}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Hexágono regular circunscrito à circunferência

$$\boxed{L = \frac{2\sqrt{3}R}{3}}$$

$$\boxed{a = R}$$</td>
</tr>
</table>

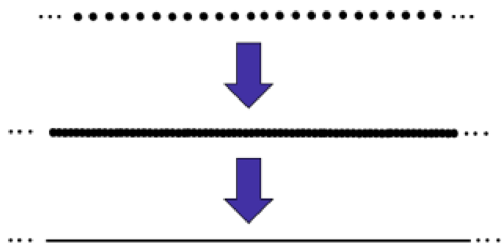
GEOMETRIA DE POSIÇÃO

Fala, pessoal! Hoje estudaremos a Geometria de Posição. Adianto para vocês que não é um tema tão cobrado (por enquanto), mas que pode fazer total diferença na sua prova. De modo geral, é um assunto que possui uma linguagem bem própria e que pode causar um pouco de "estranheza" no aluno.

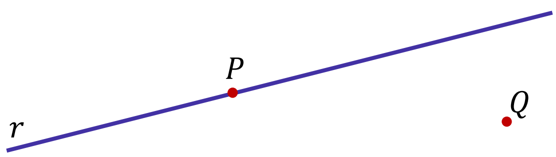
Dito isso, para contornar essas dificuldades, não entraremos no mérito das demonstrações, pois essas requerem um elevado nível de abstração e simbologia que vão além do que precisamos para fazer uma boa prova. Ademais, para que o estudo fique mais didático, sempre optaremos por desenhar as situações de modo que sua visualização nos ajude a guardá-las.

Introdução

Primordialmente, é interessante saber que a Geometria de Posição estuda as posições relativas entre pontos, retas e planos no espaço. Dessa forma, precisamos retomar alguns conceitos que vimos na aula de Geometria Plana. Para começar, lembre-se que uma reta é formada pela união de infinitos pontos.



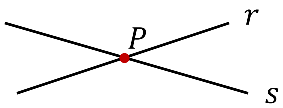
Nós representamos os pontos por letras maiúsculas e as retas por letras minúsculas. Para representar que um ponto está (ou não) sobre uma reta, vamos usar o símbolo de "pertence" (ou de não pertence): $\in$ (ou $\notin$).



Da imagem acima, podemos escrever que: $P \in r$ e $Q \notin r$. Agora, vamos nos atentar a algumas definições!

Retas Concorrentes

Duas retas são **concorrentes** quando elas possuem um único ponto comum.



Retas concorrentes

Matematicamente, podemos escrever que $r \cap s = \{P\}$. Você deve ter observado que a Geometria de Posição utiliza bastante aquela notação que desenvolvemos lá no estudo dos conjuntos! E é isso mesmo! Vamos continuar com as definições.

Retas Paralelas

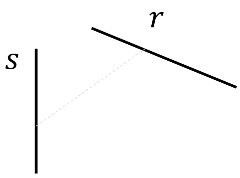
Duas retas são **paralelas** quando são coincidentes ou são coplanares e não tem ponto em comum.

Retas paralelas

Matematicamente, podemos dizer que quando as retas são distintas e paralelas, temos que $r \cap s = \emptyset$. Ademais, as retas paralelas ganham uma notação especial: r // s. Significa que r é paralela a s. Guarde!

Retas Reversas

Duas retas são **reversas** quando não existe plano que as contenha.



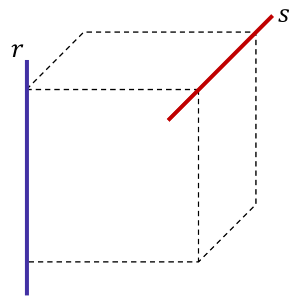
Esse é um tipo de reta que gosta de cair em prova! A principal confusão que o examinador tenta fazer é entre retas paralelas e retas reversas. Pessoal, são duas coisas distintas. Enquanto duas retas paralelas distintas são coplanares, as retas reversas não são!

Isso significa que não conseguimos traçar um plano que contenha essas duas retas. Ademais, é importante ficar claro que não há intersecção entre duas retas reversas, ou seja, elas também não se tocam! $r \cap s = \emptyset$.

Retas Ortogonais

Duas retas são **ortogonais** quando são reversas e formam ângulo reto.

Um jeito legal de entender as retas ortogonais é por meio das arestas de um cubo!

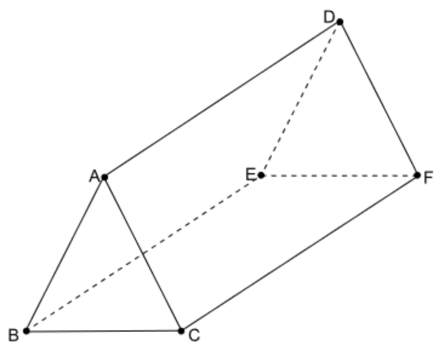


Por exemplo, observe as retas r e s acima. Elas formam um ângulo de 90° entre si, por mais que não se toquem. Note também que elas são retas reversas pois não há plano que passe por elas. Essas são as duas características de retas ortogonais.

Professor, qual a diferença entre as retas ortogonais e as retas perpendiculares?

A principal diferença é que as retas ortogonais não estão em um mesmo plano enquanto as retas perpendiculares estão! Sendo assim, as retas perpendiculares são concorrentes, enquanto as ortogonais são reversas.

(Pref. Sertãozinho/2018) Considere a seguinte representação de um prisma reto:



As retas que contêm os pares de segmentos de extremidades AD e CF, AC e BE, e AF e BD são, respectivamente:

A) reversas, reversas e reversas.
B) reversas, concorrentes e reversas.
C) paralelas, reversas e reversas.
D) paralelas, concorrentes e reversas.
E) paralelas, reversas e concorrentes.

Comentários:

Vamos lá!

Observe que **as retas que contêm AD e CF são paralelas.** Chegamos nessa conclusão porque elas obedecem a dois critérios: não se interceptam e são coplanares (pertencem ao plano da face ABCF). Por sua vez, **as retas que contêm AC e BE são reversas** já que essas retas: i) não se interceptam e ii) não são coplanares. Por fim, **as retas que contêm AF e BD (diagonais das faces ACDF e BEAD) são reversas também!** Note que elas nunca se tocam e não existe um plano que as contenha.

Gabarito: C.

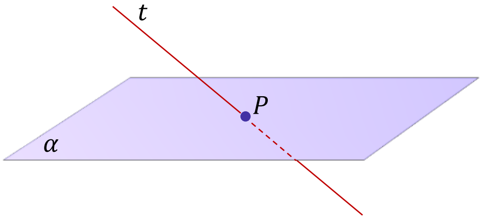
Planos

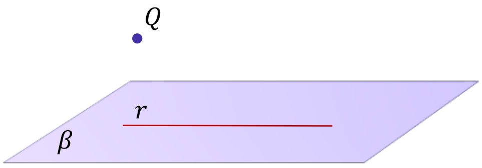
Agora que falamos um pouco sobre as retas, vamos falar um pouco sobre os planos. Para começar, saiba que há quatro formas possíveis de se determinar um plano. Isso é com certeza uma das coisas mais exploradas em prova, portanto, tome note!

Um plano pode ser determinado por:

- três pontos não colineares;
- uma reta e um ponto fora dela;
- duas retas concorrentes;
- duas retas paralelas e distintas.

Normalmente, representamos um plano por uma letra grega e usamos aquela mesma notação dos conjuntos para falar quando uma reta está contida (ou não contida) nele. Vamos explorar isso um pouco.



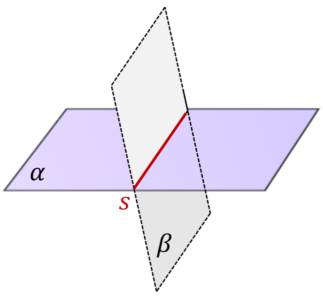


Observe que a reta t intersecta o plano α em P. Sendo assim, podemos escrever que $\alpha \cap t = \{P\}$. Além disso, a reta t não está contida em α, o que nos permite escrever que $t \not\subset \alpha$. Por sua vez, temos que a reta r está contida no plano β, enquanto o ponto Q não pertence a β. Com isso, escrevemos que $r \subset \beta$ e $Q \notin \beta$.

Tudo bem até aqui, pessoal? A intenção é inserir a notação aos poucos para que, gradativamente, a gente se acostume com ela. Eventualmente, você poderá se deparar com essas notações em questão de prova e quero que esteja familiarizado!

Planos Secantes

Dois planos distintos são chamados de planos **secantes (ou concorrentes)** quando esses planos se interceptam.



Observe que, enquanto a intersecção de duas retas concorrentes é um ponto, a intersecção de dois planos secantes é uma reta. No nosso caso, é a reta s destacada de vermelho, $\alpha \cap \beta = s$. Por fim, guarde o seguinte:

TOME NOTA!

Teorema dos Três Planos Secantes

Se três planos distintos são secantes dois a dois, segundo três retas, ou essas retas passam por um mesmo ponto ou são paralelas duas a duas.

HORA DE PRATICAR!

(Marinha/2014) Assinale a opção que apresenta os elementos geométricos que definem um plano.
A) Duas retas reversas, duas retas concorrentes e duas retas paralelas.
B) Duas retas reversas, duas retas concorrentes e dois pontos.
C) Duas retas reversas, dois pontos e uma reta com um ponto exterior a ela.
D) Duas retas concorrentes, duas retas paralelas e uma reta com um ponto exterior a ela.
E) Duas retas paralelas, dois pontos e uma reta com um ponto exterior a ela.

Comentários:
A) ~~Duas retas reversas~~, duas retas concorrentes e duas retas paralelas.
Errado! Retas reversas não definem um plano! Vimos que duas retas são reversas quando acontece exatamente o contrário! Ou seja, nenhum plano passa por duas retas que são reversas.

B) ~~Duas retas reversas~~, duas retas concorrentes e ~~dois pontos.~~
Errado! É o mesmo motivo que vimos na alternativa anterior.

C) ~~Duas retas reversas~~, dois pontos e uma reta com um ponto exterior a ela.
Errado! Observe que várias alternativas incorreram no mesmo erro. Se o aluno soubesse o que são retas reversas, já mataria três alternativas de uma vez.

D) Duas retas concorrentes, duas retas paralelas e uma reta com um ponto exterior a ela.
Correto, é o nosso gabarito. Vamos relembrar as quatro formas que temos para determinar um plano:

- Por três pontos não colineares;
- **Por uma reta e um ponto exterior a ela**;
- **Por duas retas concorrentes;**
- **Por duas retas paralelas e distintas.**

Observe, no entanto, que a alternativa foi um pouco imprecisa, pois trouxe apenas "retas paralelas". Era preciso deixar claro que essas paralelas são distintas, afinal, podemos ter duas retas paralelas e coincidentes. Nessa última situação, certamente não definirão um plano. De qualquer modo, essa alternativa era a melhor.

E) Duas retas paralelas, ~~dois pontos~~ e uma reta com um ponto exterior a ela.
Errado! Precisamos de três pontos não colineares para definir um plano.

Gabarito: E.

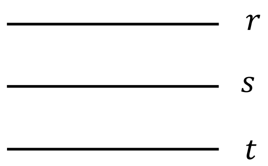
Paralelismo

Já introduzimos o assunto e vimos muitas definições! Agora, vamos aprofundar um pouco mais no tema "Paralelismo". Mais uma vez, ressalto que não faremos demonstrações aqui, pois fogem muito do escopo de um curso para concurso público. Visualizem e guardem as informações que serão passadas aqui, pois elas cairão de modo literal ou muito próximo do que será visto. Beleza?! Vamos nessa!

Paralelismo entre Retas

Transitividade

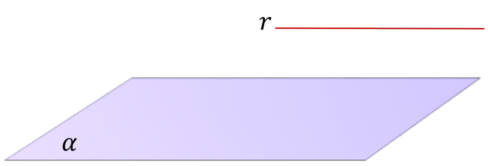
Se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si.



$$\boxed{r\ //\ t, s\ //\ t \quad \Rightarrow \quad r\ //\ s}$$

Paralelismo entre Retas e Planos

Dizemos que uma reta é paralela a um plano quando não há intersecção entre eles. Dito de outro modo, a reta não corta o plano, $r \cap \alpha = \emptyset$.



Em alguns momentos, a condição para o paralelismo entre a reta e o plano pode aparecer na forma do seguinte teorema:

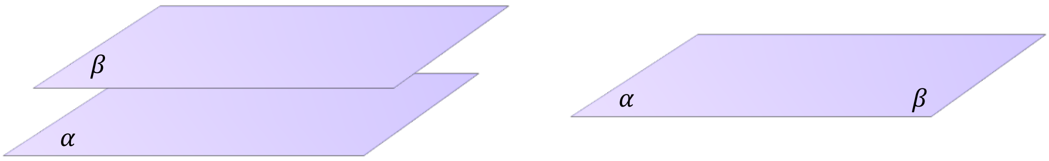
Teorema da Existência de Retas e Planos Paralelos

Para que uma reta não contida num plano seja paralela a esse plano, é necessário e suficiente que ela seja paralela a uma reta contida nesse plano.

Paralelismo entre Planos

Para que dois planos sejam paralelos, eles não podem ter ponto em comum ou ser iguais. Matematicamente:

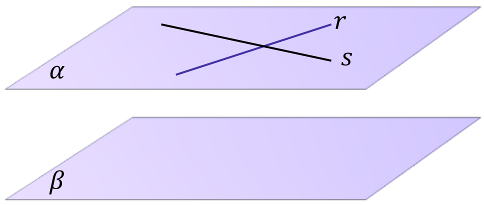
$$\alpha \mathbin{//} b \iff (\alpha \cap \beta = \emptyset \text{ ou } \alpha = \beta)$$



$\alpha \cap \beta = \emptyset$ $\qquad\qquad$ $\alpha = \beta$

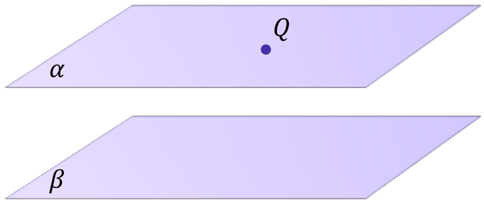
Teorema da Existência de Planos Paralelos

Para que dois planos distintos sejam paralelos, é necessário e suficiente que um deles contenha duas retas concorrentes e paralelas ao outro.



Teorema da Unicidade

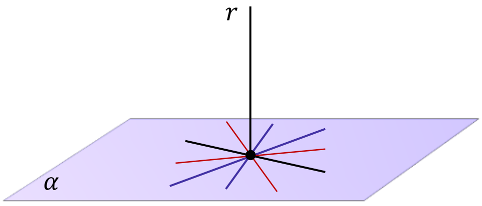
Por um ponto exterior a um plano, passa um único plano paralelo ao plano dado.

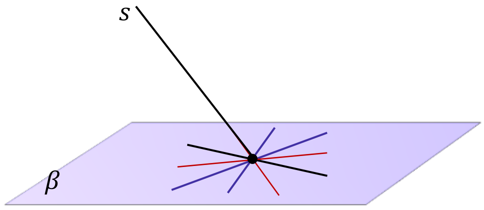


Perpendicularidade

Perpendicularidade entre Reta e Plano

Uma reta é perpendicular a um plano quando eles têm um ponto em comum e a reta é perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto em comum. Por sua vez, quando a reta e o plano são concorrentes, mas não perpendiculares, dizemos que são oblíquos.

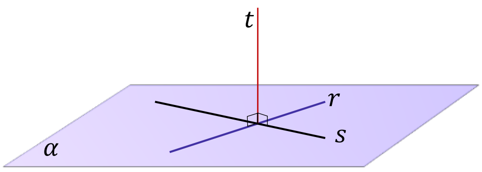




Como consequência dessa definição, podemos listar alguns teoremas:

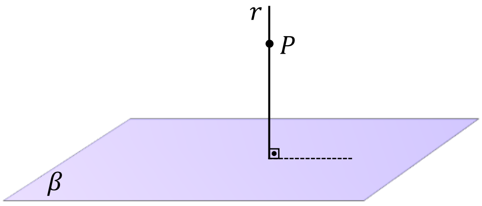
Teorema Fundamental

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.



Teorema da Existência e da Unicidade

Por um ponto P, existe uma única reta perpendicular a um determinado plano.



(SED-MS/2022) Sobre Geometria Espacial: de posição e métrica, assinale a alternativa correta.

A) Quatro pontos não coplanares determinam exatamente 3 planos.

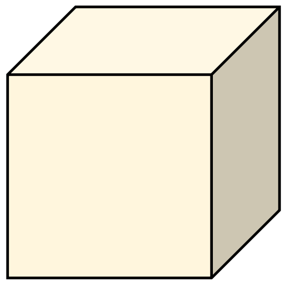
B) Dois planos perpendiculares a um terceiro plano são paralelos entre si.
C) Se r é uma reta secante a um plano α e P é um ponto exterior a α, então é sempre possível traçar uma reta que passa por P, encontra r e é paralela a α.
D) Duas retas perpendiculares a uma terceira reta são paralelas.
E) Se dois planos são paralelos a uma reta, então eles são paralelos entre si.

Comentários:
Vamos comentar cada uma das alternativas.

A) Quatro pontos não coplanares determinam exatamente 3 planos.
Errado, sabemos que três pontos não colineares determinam 1 ponto. Sendo assim, se queremos saber quantos planos 4 pontos determinam, devemos calcular a combinação de quatro de três em três.

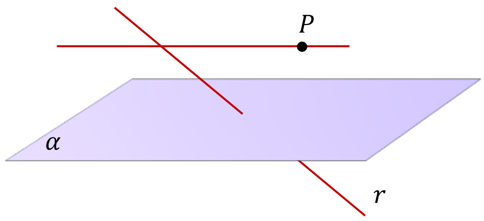
$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

B) Dois planos perpendiculares a um terceiro plano são paralelos entre si.
Errado, esses três planos podem ser perpendiculares entre si. Para visualizar essa situação, observe o cubo:



Observe que as três faces destacadas são perpendiculares entre si. Não há a obrigatoriedade de um terceiro plano ser paralelo.

C) Se r é uma reta secante a um plano α e P é um ponto exterior a α, então é sempre possível traçar uma reta que passa por P, encontra r e é paralela a α.
Correto! Vamos desenhar a situação para verificarmos que é possível.

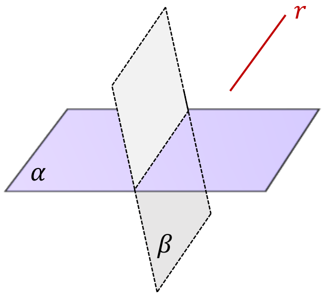


D) Duas retas perpendiculares a uma terceira reta são paralelas.

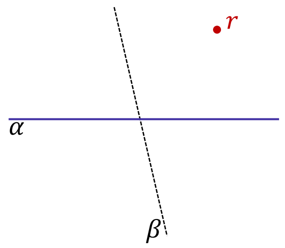
Errado! Elas podem ser reversas!

E) Se dois planos são paralelos a uma reta, então eles são paralelos entre si.

Errado! Eles podem ser secantes! Observe a situação proposta abaixo. É um contraexemplo.



Situação vista de cima



Situação vista de frente

Gabarito: C.

QUESTÕES COMENTADAS - CEBRASPE

Noções Elementares

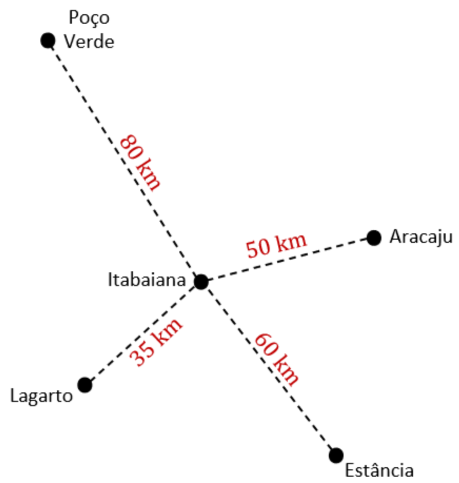
1. (CESPE/PREF. BARRA DOS COQUEIROS/2020) A seguinte tabela apresenta a distância aproximada, em linha reta, entre a cidade de Itabaiana e quatro outras cidades de Sergipe.

	Lagarto	Aracaju	Estância	Poço Verde
Itabaiana	35 km	50 km	60 km	80 km

Com base nessas informações, é correto afirmar que um círculo com área de 3.200 km² centrado em Itabaiana

A) não inclui nenhuma das outras quatro cidades listadas.
B) inclui, além de Itabaiana, apenas a cidade de Lagarto.
C) inclui, além de Itabaiana, apenas as cidades de Lagarto e Aracaju.
D) inclui, além de Itabaiana, apenas as cidades de Lagarto, Aracaju e Estância.
E) inclui todas as cidades listadas.

Comentários:
Vamos primeiro esquematizar a situação do enunciado.

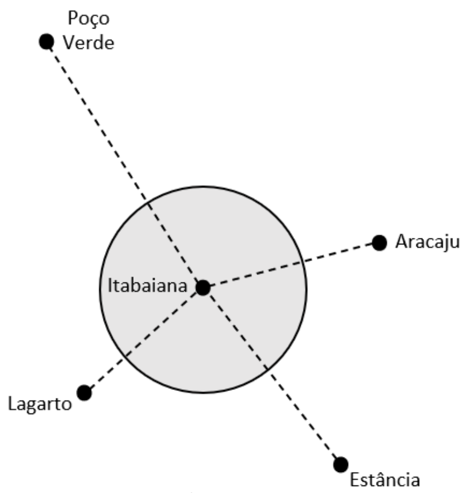


Pessoal, esse é **apenas um esquema destacando as distâncias** das cidades à Itabaiana. Não foi levado em consideração as direções reais (norte, sul, leste, oeste), pois são desnecessárias para a solução do problema. O enunciado quer um **círculo de área 3200 km² e centro em Itabaiana**. Qual raio teria esse círculo?

$$A = \pi R^2$$

Considerando $\boldsymbol{A = 3200\ km^2}$ e $\boldsymbol{\pi = 3,14}$. Ficamos com:

$$3{,}14 \cdot R^2 = 3200 \quad \rightarrow \quad R^2 = 1019{,}10 \quad \rightarrow \quad R = 31{,}92\ km$$



Note que o raio do círculo é inferior a menor distância entre cidades (31,92 km < 35 km distância até Lagarto). Sendo assim, **tal círculo não inclui nenhuma das cidades listadas**.

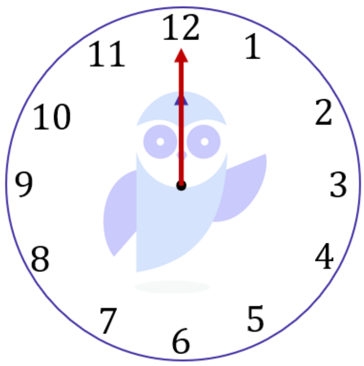
Gabarito: LETRA A.

2. (CESPE/SEFAZ-RS/2019) O relógio analógico de Audir danificou-se exatamente à zero hora (meia-noite) de certo dia, e o ponteiro dos minutos passou a girar no sentido anti-horário, mas com a mesma velocidade que tinha antes do defeito. O ponteiro das horas permaneceu funcionando normalmente, girando no sentido horário. Considerando as informações do texto, assinale a opção que apresenta a relação entre os arcos x e y percorridos, respectivamente, pelos ponteiros dos minutos e das horas do relógio de Audir entre duas sobreposições consecutivas.

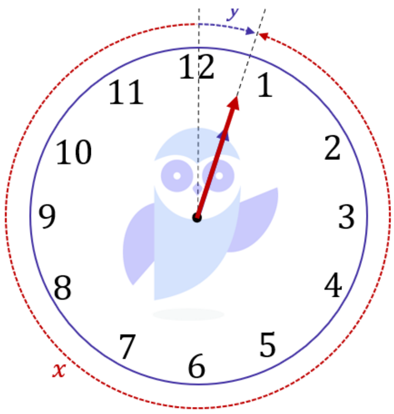
A) x - y = 90°
B) x - y = 180°
C) x + y = 180°
D) x + y = 360°
E) x = y

Comentários:

Quando deu meia-noite e o relógio começou a apresentar problemas, tínhamos a seguinte configuração.



A partir daí, **o ponteiro dos minutos (vermelho)** começa a andar pra trás (sentido anti-horário) e **o ponteiro das horas (roxo)** segue sua vida normalmente. Veja que os ponteiros irão se sobrepor **antes mesmo de completar a primeira hora**, pois, ao voltar para o "12" (e assim completar os 60 minutos), o ponteiro vermelho vai ter que passar pelo ponteiro das horas. Observe:



Os arcos formados pelos dois ponteiros fecham um círculo. Logo, **a soma dos dois deve ser igual a 360 graus**.

$$x + y = 360°$$

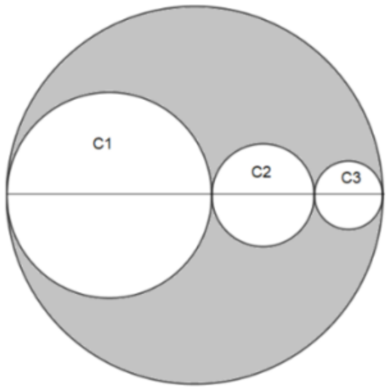
Gabarito: LETRA D.

QUESTÕES COMENTADAS - CEBRASPE

Circunferências

1. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Julgue o item subsequente, relativos a geometria.

Considere que, na figura a seguir, os raios dos círculos internos C1, C2 e C3 sejam, respectivamente, iguais a r, $r/2$ e $r/3$, em que r é um número real positivo. Nesse caso, a área da parte em cinza é igual a $2\pi r^2$.



Comentários:
O primeiro passo é perceber que o diâmetro do círculo maior **é a soma do diâmetro de todos os círculos** menores (C1, C2 e C3). Com isso,

$$D = 2r + r + \frac{2r}{3} \quad \rightarrow \quad D = \frac{11r}{3}$$

Com o valor do diâmetro, podemos encontrar **o raio**.

$$R = \frac{D}{2} \quad \rightarrow \quad R = \frac{11r}{6}$$

E agora, com o valor do raio, podemos encontrar **a área do círculo maior (exterior).**

$$A = \pi \cdot \left(\frac{11r}{6}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A = \frac{121\pi r^2}{36}$$

Essa é a área do círculo "grandão". Agora, para determinar a área da parte em cinza, precisamos **"tirar" as áreas dos círculos C1, C2 e C3** dessa área do círculo maior. Sendo assim,

- Área do Círculo C1:

$$A_1 = \pi R_1^2 \quad \rightarrow \quad A_1 = \pi r^2$$

- Área do Círculo C2:

$$A_2 = \pi R_2^2 \quad \rightarrow \quad A_2 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{\pi r^2}{4}$$

- Área do Círculo C3:

$$A_3 = \pi R_3^2 \quad \rightarrow \quad A_3 = \pi \left(\frac{r}{3}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A_3 = \frac{\pi r^2}{9}$$

Agora, podemos encontrar a área da parte cinza:

$$A_{cinza} = A - A_1 - A_2 - A_3$$

$$A_{cinza} = \frac{121\pi r^2}{36} - \pi r^2 - \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{9} \quad \rightarrow \quad A_{cinza} = \frac{85\pi r^2}{36} - \frac{13\pi r^2}{36} \quad \rightarrow \quad A_{cinza} = \frac{72\pi r^2}{36}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_{cinza} = 2\pi r^2}}$$

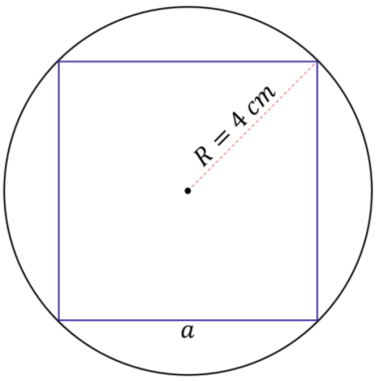
Gabarito: CERTO.

2. (CESPE/IFF/2018) Um quadrado tem todos os seus vértices sobre uma circunferência de 4 cm de raio. Nesse caso, a área desse quadrado é igual a

A) 4 cm²
B) 8 cm²
C) 16 cm²
D) 32 cm²
E) 64 cm²

Comentários:

Temos um quadrado que está dentro de uma circunferência. Essa circunferência raio igual a 4 cm. Queremos determinar a área do quadrado. Lembre-se que a área de um quadrado nada mais é do que **comprimento do lado elevado ao quadrado**. Tudo bem? Acompanhe como fica a esquematização do problema:



Note que **o raio da circunferência é igual a metade da diagonal do quadrado (d)**. Lembre-se:

$$d = a\sqrt{2}$$

Em outras palavras, temos que **a diagonal do quadrado coincide com diâmetro da circunferência**. Portanto, podemos determinar quanto vale "a".

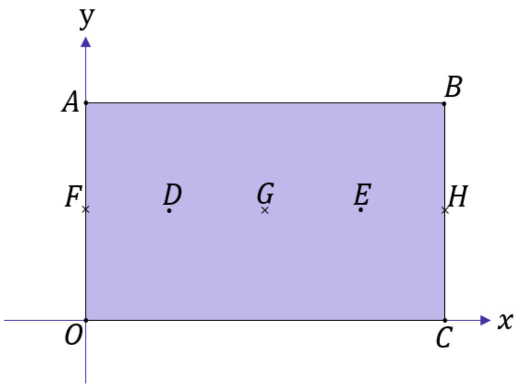
$$8 = a\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{8}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = 4\sqrt{2}\ cm}$$

Com o lado encontrado, podemos calcular a sua área.

$$A_Q = a^2 \quad \rightarrow \quad A_Q = \left(4\sqrt{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A_Q = 16 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_Q = 32\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA D.

3. (CESPE/SEDUC-AL/2017) A figura seguinte mostra, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, em que a unidade de medida é o metro, uma região retangular OABC. O lado OA mede 600 m e o lado OC mede 800 m.

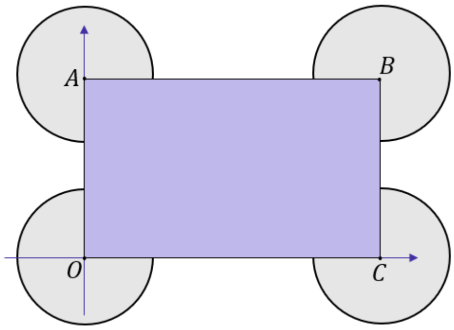


A figura mostra também os pontos F = ponto médio de OA, H = ponto médio de CB, G = centro do retângulo OABC, D = ponto médio de FG, e E = ponto médio de GH. Nos pontos O, A, B, C, D e E foram instalados pontos de acesso à Internet — wi-fi. Nessa configuração, o usuário consegue se conectar à Internet desde que o seu smartphone esteja a 200 m ou menos de qualquer desses pontos de acesso. Com base nessas informações e na figura apresentada, julgue o próximo item.

Na parte externa ao retângulo OABC, o acesso à Internet a partir dos referidos pontos de acesso se restringe a uma região em que a área é inferior a 384.000 m².

Comentários:

Galera, os pontos de acesso **localizados nos vértices** do retângulo são os que possibilitarão wi-fi na região externa. Note que esses pontos de acessos alcançam uma região de **200 metros ao redor**, formando uma espécie de "área circular". Observe o esquema abaixo.



Observe que cada ponto alcança uma área externa equivalente a **3/4 de uma circunferência** de raio igual a 200 metros. Sabendo que **a área de uma circunferência é πR^2**, então a área externa fica:

$$A_{externa} = \frac{3}{4} \cdot \pi R^2$$

Vamos considerar $\boldsymbol{\pi = 3,14}$.

$$A_{externa} = \frac{3}{4} \cdot (3{,}14) \cdot 200^2 \quad \rightarrow \quad A_{externa} = \frac{3}{4} \cdot 125600 \quad \rightarrow \quad A_{externa} = 94200\ m^2$$

Como devemos **considerar os <u>4 pontos</u>**, então basta multiplicar esse resultado por 4 para obter a área total.

$$A_{externa\ total} = 4 \cdot 94200 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{externa\ total} = 376.800\ m^2}$$

Note que a área é realmente **<u>inferior</u> a 382.000 m²**. Logo, item correto.

Gabarito: CERTO.

Questões Comentadas - Cebraspe

Triângulos

1. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Considere que um triângulo ABC tenha lados com as seguintes medidas: 3 cm, 5 cm e 7 cm. Se o triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC e tem perímetro 25 cm, então o menor lado do triângulo DEF é 5 cm.

Comentários:
Temos todos os lados do triângulo ABC, conseguimos calcular o perímetro (2p).

$$2p_{ABC} = 3 + 5 + 7 \qquad \rightarrow \qquad 2p_{ABC} = 15 \text{ cm}$$

Como também temos **o perímetro do triângulo DEF**, podemos calcular **a razão de semelhança (k)**.

$$k = \frac{2p_{ABC}}{2p_{DEF}} \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{15}{25} \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{3}{5} \qquad \rightarrow \qquad k = 0{,}6$$

Agora, com a razão de semelhança, conseguimos calcular **o <u>menor</u> lado do triângulo DEF** $(\boldsymbol{l_{DEF}})$. Para isso, devemos utilizar também **o <u>menor</u> lado do triângulo ABC** $(\boldsymbol{l_{ABC}})$, ou seja, 3 cm.

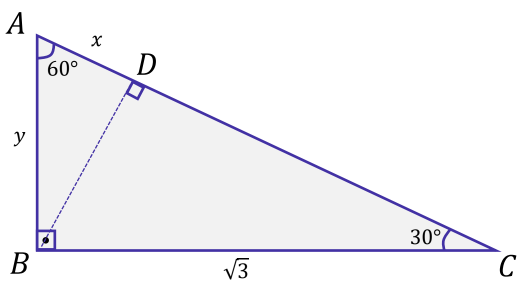
$$k = \frac{l_{ABC}}{l_{DEF}} \qquad \rightarrow \qquad l_{DEF} = \frac{l_{ABC}}{k} \qquad \rightarrow \qquad l_{DEF} = \frac{3}{0{,}6} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{l_{DEF} = 5 \text{ cm}}}$$

Gabarito: CERTO.

2. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Seja ABC um triângulo com $A\hat{B}C = 90°$ e $A\hat{C}B = 30°$. Se $\overline{BC} = \sqrt{3}$ cm e se a altura com relação ao vértice B encontra o segmento $\overline{AC}$ no ponto D, então o comprimento do segmento $\overline{AD}$ é 1 cm.

Comentários:
Vamos esquematizar o triângulo ABC com as informações do item!



Queremos determinar "x"! Para isso, precisaremos primeiro encontrar "y".

$$\tan 30° = \frac{y}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{3}\tan 30°$$

A tangente de 30° é uma daquelas que **você precisa <u>decorar</u>**! Trata-se de um ângulo notável! Vamos revisitar aquela tabela!

	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Com isso,

$$y = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \mathrm{y} = 1 \text{ cm}$$

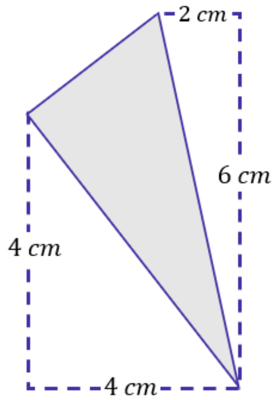
Agora, com o valor de "y", podemos encontrar "x", observando **o triângulo ADB**.

$$\cos 60° = \frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad x = y\cdot\cos 60° \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{2}\ \text{cm}}$$

Note que **"x" é igual a 0,5 cm**. O item afirma que é igual a 1 cm. Logo, está **errado**.

Gabarito: ERRADO.

3. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) O triângulo ABC mostrado a seguir está inscrito no retângulo incompleto, de lados pontilhados. As medidas dos lados do retângulo podem ser observadas na figura seguinte.

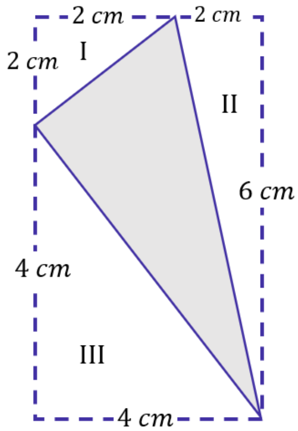


O valor da área do triangulo ABC apresentado anteriormente é igual a

A) 6 cm²
B) 7 cm²
C) 8 cm²
D) 12 cm²
E) 16 cm²

Comentários:

Vamos desenhar o retângulo **completo.**



Note que temos três regiões que são triângulos retângulos. Se pegarmos **a área do retângulo e subtrair a área dessas regiões, vamos obter a área cinza**. Assim,

- Área do Retângulo: **produto dos lados**.

$$A_R = 4 \cdot 6 \quad \rightarrow \quad A_R = 24\ cm^2$$

- Área do Triângulo Retângulo: **produto dos catetos dividido por 2**.

$$A_I = \frac{2 \cdot 2}{2} \quad \rightarrow \quad A_I = 2\ cm^2$$

$$A_{II} = \frac{2 \cdot 6}{2} \quad \rightarrow \quad A_{II} = 6\ cm^2$$

$$A_{III} = \frac{4 \cdot 4}{2} \quad \rightarrow \quad A_{III} = 8\ cm^2$$

Com cada uma das áreas das regiões, podemos determinar **a área do triângulo cinza**.

$$A_{cinza} = A_R - A_I - A_{II} - A_{III}$$

$$A_{cinza} = 24 - 2 - 6 - 8$$

$$\boldsymbol{A_{cinza} = 8\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA C.

4. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 13 centímetros e um dos catetos mede 5 centímetros. Nesse triângulo, considere o retângulo inscrito, em que o comprimento do lado maior é igual ao dobro do comprimento do lado menor, e um dos lados maiores está sobre o cateto maior do triângulo. Com base nessas informações, é correto afirmar que a área desse retângulo é igual a

A) $\frac{11.250}{529}\ cm^2$

B) $\frac{3.600}{289}\ cm^2$

C) $\frac{3.600}{49}\ cm^2$

D) $\frac{1800}{121} cm^2$

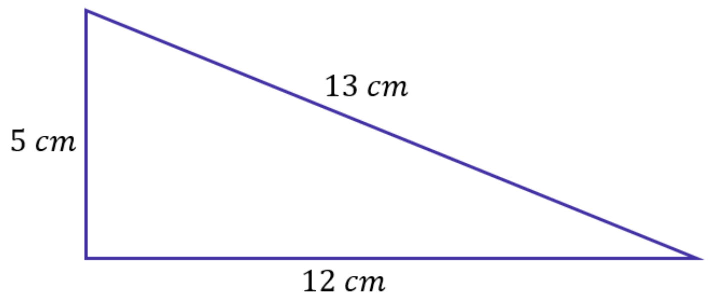
E) $1.800\ cm^2$

Comentários:

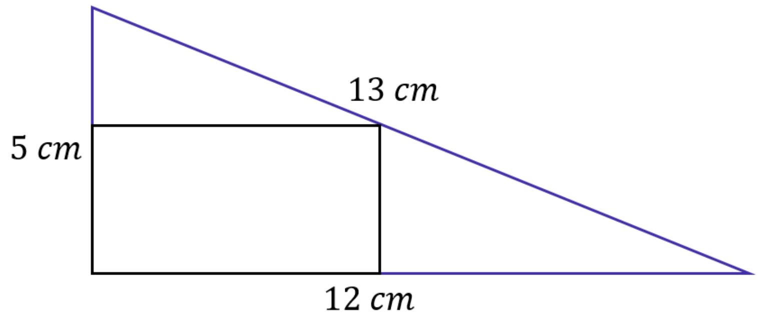
Observe que o enunciado falou em triângulo retângulo. Além disso, ele deu o valor da hipotenusa e um dos catetos. Nessa situação, **podemos encontrar o valor do outro cateto aplicando o teorema de Pitágoras**.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad 13^2 = 5^5 + c^2 \quad \rightarrow \quad 169 = 25 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 144 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{c = 12}$$

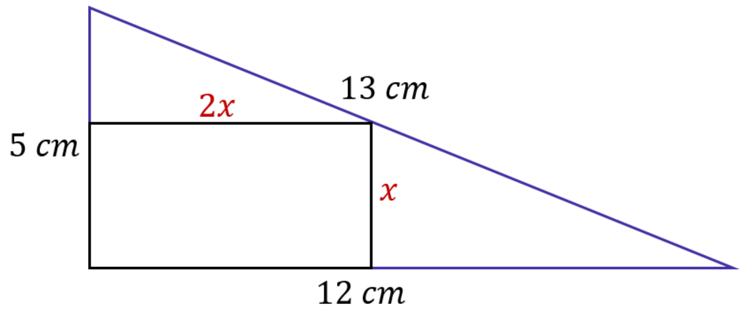
Pronto, agora temos os dois catetos e a hipotenusa. Podemos desenhar o triângulo retângulo.



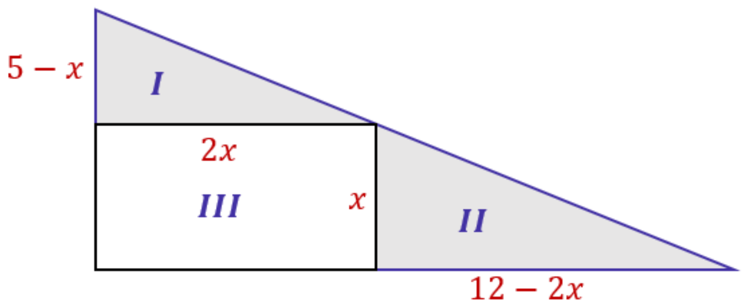
Depois, o enunciado fala em um **retângulo <u>inscrito</u>**. Lembre-se que quando temos alguma figura "inscrita" em outra, significa que **ela está dentro** dessa outra. Além disso, o maior lado desse retângulo está sobre o maior lado do triângulo. Essa informação é super importante para conseguirmos desenhar a figura.



O comprimento do lado maior do retângulo **é igual ao dobro** do lado menor. Assim,



Queremos determinar a área do retângulo, isto é, **o produto dos seus lados**. Para isso, note o seguinte:



Veja que quando somamos as áreas das regiões I, II e III, **vamos obter a área total do triângulo maior**.

- Área do triângulo retângulo maior:

$$A_T = \frac{12 \cdot 5}{2} \quad \rightarrow \quad A_T = 30\ cm^2$$

- Área do triângulo retângulo I:

$$A_I = \frac{(5 - x) \cdot (2x)}{2} \quad \rightarrow \quad A_I = x \cdot (5 - x)$$

- Área do triângulo retângulo II:

$$A_{II} = \frac{(12 - 2x) \cdot x}{2} \quad \rightarrow \quad A_{II} = x \cdot (6 - x)$$

- Área do retângulo III:

$$A_{III} = 2x \cdot x \quad \rightarrow \quad A_{III} = 2x^2$$

Assim, sabendo que $\boldsymbol{A_T = A_I + A_{II} + A_{III}}$, podemos escrever que:

$$x \cdot (5 - x) + x \cdot (6 - x) + 2x^2 = 30$$

$$5x - x^2 + 6x - x^2 + 2x^2 = 30$$

$$11x = 30$$

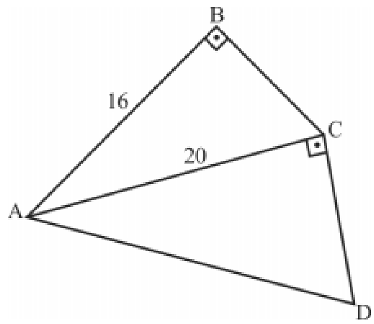
$$x = \frac{30}{11}\ cm$$

Assim, com **o valor de x descoberto**, podemos achar a área do retângulo.

$$A_{III} = 2x^2 \quad \rightarrow \quad A_{III} = 2 \cdot \left(\frac{30}{11}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{III} = \frac{1800}{121}\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA D.

5. (CESPE/IFF/2018)

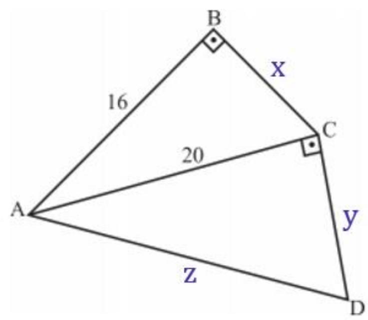


No polígono ABCD da figura precedente, os triângulos ABC e ACD são semelhantes e retângulos — nos vértices B e C, respectivamente. Além disso, AB = 16 cm, AC = 20 cm e CD é o lado menor do triângulo ACD. Nessa situação, AD mede

A) 24 cm.
B) 25 cm.
C) 28 cm.
D) 32 cm.
E) 36 cm.

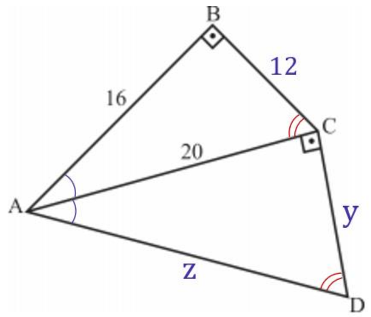
Comentários:

Primeiro, observe o esquema.



Temos três medidas que desconhecemos. Sabemos que o **triângulo ABC é retângulo**. Por esse motivo, podemos utilizar o teorema de Pitágoras e determinar o lado $BC = x$.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \rightarrow \quad 20^2 = 16^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 400 - 256 \quad \rightarrow \quad x^2 = 144 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 12}$$

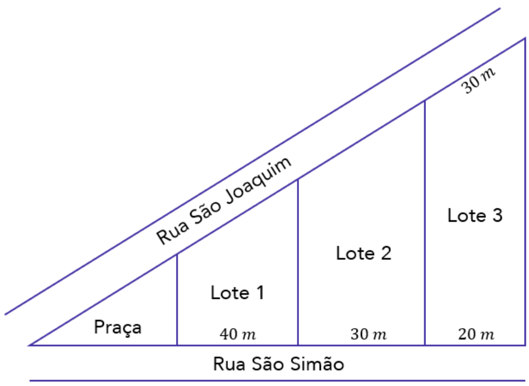


Veja que o triângulo ABC está determinado e que **ABC e ACD são semelhantes**. Assim, podemos usar semelhança de triângulo para encontrar o lado $AD = z$.

$$\frac{20}{z} = \frac{16}{20} \quad \rightarrow \quad z = \frac{400}{16} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{z = 25\ cm}$$

Com a semelhança, conseguimos determinar z imediatamente. Observe que descobrir o valor de x é fundamental para **sabermos um pouco mais sobre os ângulos internos** e, desse modo, conseguir realizar a semelhança.

Gabarito: LETRA B.

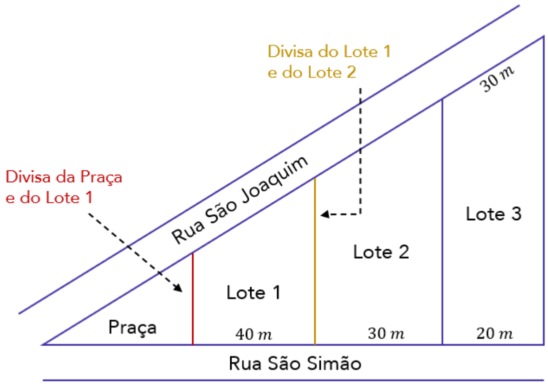


(CBM-DF/2016) A figura acima ilustra parte da planta de um bairro, entre as ruas São Joaquim e São Simão. As divisas dos lotes são segmentos de retas paralelas e perpendiculares à reta que determina a rua São Simão. São destacados os lotes 1, 2, 3 e uma praça, bem como os comprimentos, em metros, das frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua São Simão e o comprimento, em metros, da frente do lote 3 para a rua São Joaquim. A respeito desses lotes, julgue os itens a seguir.

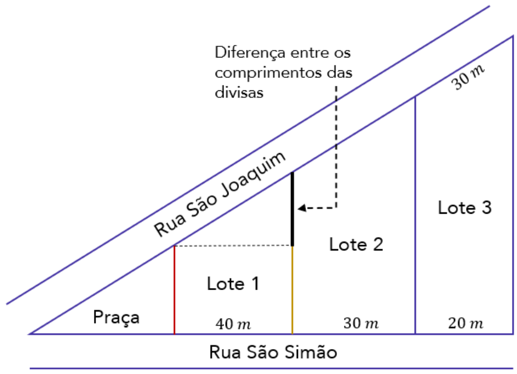
6. (CESPE/CBM-DF/2016) A diferença entre o comprimento da divisa dos lotes 1 e 2 e o comprimento da divisa da praça e do lote 1 é superior a 45 metros.

Comentários:

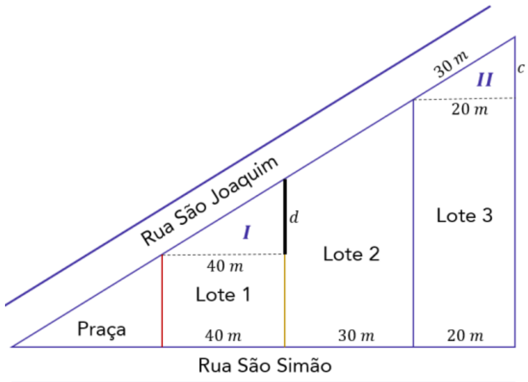
Vamos primeiro identificar no desenho que divisas são essas que o item está falando.



Beleza! Agora, veja que a diferença entre os comprimentos é exatamente a região destacada abaixo.



Pronto, sabemos exatamente o que estamos atrás. Observe que **temos vários triângulos retângulos** na figura e, portanto, podemos tentar usar da semelhança. Um ponto bom que devemos notar é aquele "30 m" isolado lá no **canto superior direito**. Ele certamente está lá por um motivo. Acompanhe mais um esquema.



Os triângulos I e II são semelhantes e, portanto, podemos estabelecer a seguinte relação de semelhança:

$$\frac{d}{40} = \frac{c}{20} \quad \rightarrow \quad d = 2c$$

Note que **a diferença entre as divisas é o dobro do comprimento c**. Podemos determinar c usando o teorema de Pitágoras.

$$30^2 = 20^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad 900 = 400 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 500 \quad \rightarrow \quad c = 10\sqrt{5}$$

Assim, a diferença entre as divisas é:

$$d = 2 \cdot 10\sqrt{5} \quad \rightarrow \quad d = 20\sqrt{5}\ m$$

A dificuldade nesse ponto é saber quanto vale $\sqrt{5}$. Afinal, precisamos de "d" com uma certa precisão, de modo a conseguir julgar se o valor é maior ou menor que 45 metros. Minha sugestão é: pergunte-se qual o número devo multiplicar 20 para dar 45. Ora, basta dividirmos 45 por 20 e **vamos obter 2,25**. Assim,

$$20 \cdot 2{,}25 = 45$$

A próxima pergunta é: **$\sqrt{5}$ é maior ou menor do que 2,25?** Se for menor, então d será menor do que 45. Se for maior, então d é maior do que 45. Tudo bem até aqui?! Para saber isso, basta fazermos $2{,}25^2$.

$$2{,}25^2 = 2{,}25 \times 2{,}25 = 5{,}0625$$

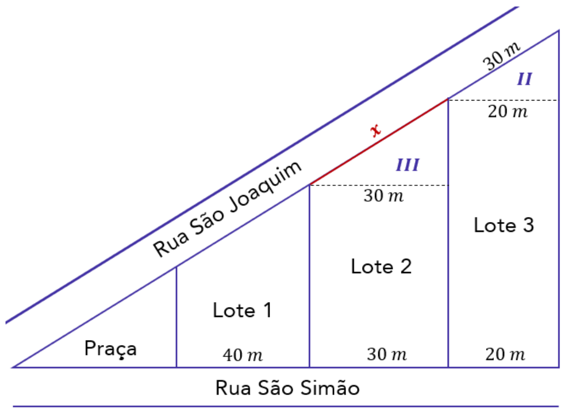
Veja que **o quadrado de 2,25 ultrapassa 5**. Logo, podemos dizer que $\sqrt{5} < 2{,}25$. Sendo assim,

$$\boldsymbol{d < 45\ m}$$

Gabarito: ERRADO.

7. (CESPE/CBM-DF/2016) A frente do lote 2 para a rua São Joaquim mede 45 metros.

Comentários:
Temos que encontrar mais uma semelhança de triângulos.



Os triângulos **II e III são semelhantes** e, portanto, podemos escrever a seguinte relação de semelhança:

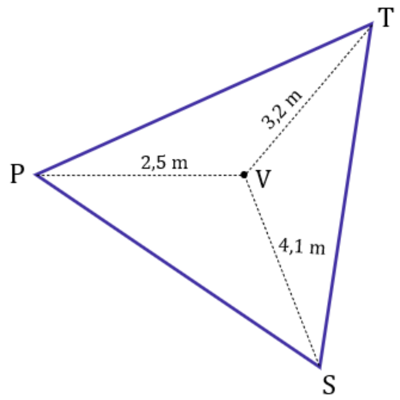
$$\frac{x}{30} = \frac{30}{20} \quad \rightarrow \quad x = \frac{900}{20} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 45\ m}$$

Gabarito: CERTO.

8. (CESPE/SEGP-AL/2013) Ao descrever a cena de um crime, um agente mencionou que o corpo foi localizado em um terreno plano e que o ponto do terreno correspondente à posição da cabeça da vítima estava a 2,5 m de um poste de iluminação, a 3,2 m de uma placa de trânsito e a 4,1 m de um semáforo vertical, no interior da região triangular determinada pelo poste, pela placa de trânsito e pelo semáforo. Com base nessa situação, julgue o item seguinte.

A distância entre o poste de iluminação e a placa de trânsito é superior a 6 m.

Comentários:
Considere que o poste de iluminação esteja representado pela letra P, a placa de trânsito por T, o semáforo por S e a vítima por V. Um desenho que **representa adequadamente** a situação descrita no enunciado é o seguinte:



Da desigualdade triangular, sabemos que **o lado de um triângulo deve ser sempre menor do que a soma dos outros dois**. Preste atenção no **triângulo PVT**. Queremos saber informações do lado PT. Como temos os dois outros lados do triângulo, podemos escrever que:

$$PT < 2{,}5 + 3{,}2 \qquad \rightarrow \qquad PT < 5{,}7\ m$$

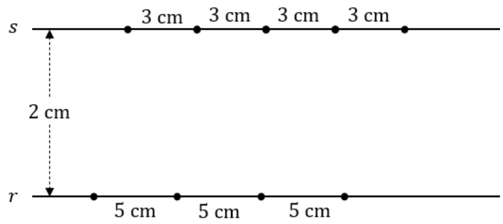
Note que **a distância entre os dois é inferior a 5,7 metros**. Como o enunciado afirma que é superior a 6 m, o item encontra-se errado.

Gabarito: ERRADO.

Texto para as próximas questões
(EBC/2011) Considere que as retas r e s sejam paralelas e que a distância entre elas é de 2 cm; que, na reta r, sejam marcados 4 pontos, de forma que a distância de qualquer um deles ao mais próximo seja de 5 cm; que, na reta s, sejam marcados 5 pontos, de forma que a distância de qualquer um deles ao mais próximo seja de 3 cm. Com base nessas informações e considerando, ainda, as áreas dos triângulos de vértices nos pontos marcados nas retas r e s, é correto afirmar que

9. (CESPE/EBC/2011) A maior área é igual a 15 cm².

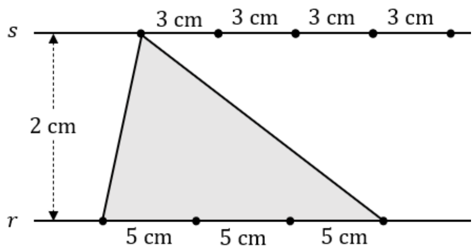
Comentários:
O desenho que representa a situação do enunciado é o seguinte:



Queremos desenhar um triângulo **com a maior área possível**. Lembre-se da fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Ora, para o triângulo possuir a maior área, **ele deve ter a maior base e a maior altura possível**. Concorda?! A altura do triângulo será dada pela distância entre as retas. Essa distância é fixa e vale 2 cm. Logo, **com relação à altura, não temos muito o que fazer**. Devemos **tentar maximizar a base**. Note que a base é máxima quando pegamos **os pontos mais externos na reta r**.



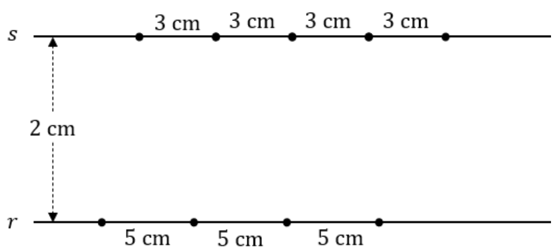
Em qualquer um dos pontos da reta s que colocássemos o vértice do triângulo, a área seria a mesma. Isso, pois, **a altura é fixa** e **a base continuaria a mesma** (15 cm). Assim, a área máxima é:

$$A_{máx} = \frac{15 \cdot 2}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{máx} = 15\ cm^2}$$

Gabarito: CERTO.

10. (CESPE/EBC/2011) A menor área é igual a 5 cm².

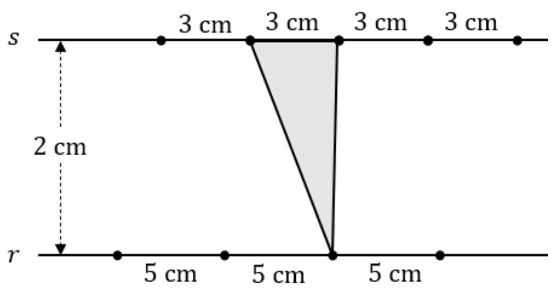
Comentários:
O desenho que representa a situação do enunciado é o seguinte:



Queremos desenhar um triângulo **com a menor área possível**. Lembre-se da fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Ora, para o triângulo possuir a menor área, **ele deve ter a menor base e a menor altura possível**. Concorda?! A altura do triângulo será dada pela distância entre as retas. Essa distância é fixa e vale 2 cm. Logo, **com relação à altura, não temos muito o que fazer**. Devemos **tentar minimizar a base**. Essa base vai ser mínima quando pegarmos dois pontos consecutivos na reta s. Observe:



Em qualquer um dos pontos da reta r que colocássemos o vértice do triângulo, a área seria a mesma. Isso, pois, **a altura é fixa** e **a base continuaria a mesma** (3 cm). Assim, a área mínima é:

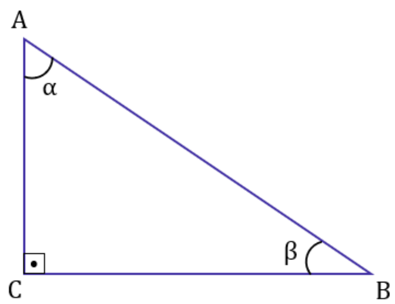
$$A_{mín} = \frac{3 \cdot 2}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{mín} = 3\ cm^2}$$

Gabarito: ERRADO.

Texto para as próximas questões
(PC-ES/2010) A soma de dois ângulos internos de um triângulo retângulo é igual a 120°. Sabendo que o lado menor desse triângulo mede 1 cm, julgue os itens seguintes.

11. (CESPE/PC-ES/2010) A soma de dois ângulos internos desse triângulo é igual a 135°.

Comentários:
Temos um triângulo retângulo. Veja a figura abaixo.



Lembre-se que no triângulo retângulo **há sempre um ângulo reto (90°)**. Além disso, a soma dos ângulos internos de um triângulos é 180°. Assim,

$$90° + \alpha + \beta = 180° \quad \rightarrow \quad \alpha + \beta = 90°$$

Observe que **a soma dos ângulos internos que <u>não são retos</u> é sempre 90°**. A questão deu que a soma de dois ângulos internos era 120°. Com isso, um deles deve ser necessariamente o de 90°! Assim,

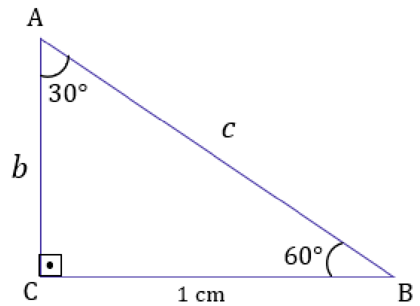
$$\alpha + 90° = 120 \quad \rightarrow \quad \alpha = 30°$$

Se um dos ângulos é 30°, o outro deve ser igual a 60°, pois, lembre-se $\alpha + \beta = 90°$. Portanto, os ângulos internos desse triângulo devem ser 30°, 60° e 90°. Note que **nenhuma soma de dois deles pode dar 135°**

Gabarito: ERRADO.

12. (CESPE/PC-ES/2010) O perímetro desse triângulo é inferior a 5 cm.

Comentários:
No item anterior, nós descobrimos os ângulos internos do triângulo e ficamos com o seguinte:



Note que colocamos "1 cm" do lado oposto ao ângulo de 30°. Como o enunciado afirma que é **o <u>menor lado</u>**, certamente ele **estará oposto ao <u>menor ângulo</u>**.

Para encontrar o valor da hipotenusa "c", podemos usar um pouco de **trigonometria**.

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{c} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{c} \quad \rightarrow \quad c = 2\ cm$$

Por fim, podemos usar **o teorema de Pitágoras** para determinar b.

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \rightarrow \quad 1^2 + b^2 = 2^2 \quad b = \sqrt{3}\ cm$$

Pronto, determinamos **todos os lados do triângulo** e podemos calcular o seu perímetro.

$$Perímetro = a + b + c \quad \rightarrow \quad Perímetro = 1 + \sqrt{3} + 2 \quad \rightarrow \quad Perímetro = 3 + \sqrt{3}$$

A dúvida aqui poderia ser quanto ao valor de $\sqrt{3}$. Recomendo fortemente você decorar, **ela é uma das poucos raízes que julgo pertinente saber**.

$$\sqrt{3} \cong 1{,}73$$

Assim,

$$Perímetro \cong 3 + 1{,}73 \quad \rightarrow \quad Perímetro \cong 4{,}73\ cm$$

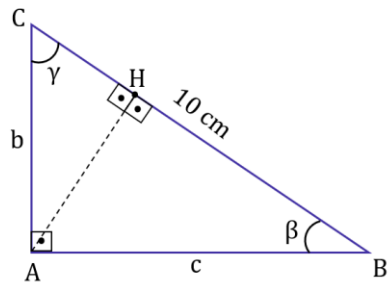
Como o perímetro realmente é inferior a 5 cm, o item está correto.

Gabarito: CERTO.

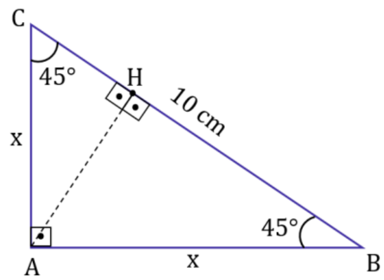
13. (CESPE/PM-ES/2010) Considerando que o triângulo ABC seja retângulo no vértice A, que a hipotenusa desse triângulo meça 10 cm e que AH seja a altura desse triângulo relativa ao vértice A, julgue o item que se segue.

Se esse triângulo for isósceles, então a altura AH medirá 5 cm.

Comentários:
A questão descreve um triângulo com o seguinte aspecto:



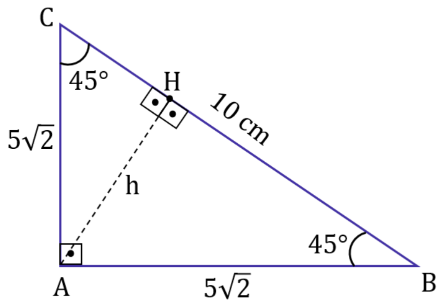
Note que ele é **retângulo em A**, tem altura AH e **hipotenusa CB igual a 10 cm**. O item levanta a hipótese desse triângulo ser isósceles. Lembre-se que **um triângulo isósceles possui dois lados iguais**. A consequência disso é que **os ângulos opostos a esses lados também serão iguais**. Assim, na hipótese do triângulo ser isósceles, vamos ter a seguinte configuração:



Sempre que um triângulo retângulo for isósceles, teremos **dois ângulos de 45°** e **um ângulo de 90°**. Tudo bem?! Isso vem do fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e de que 2 desses ângulos são iguais. Tente mostrar isso! Ademais, veja que **os catetos vão possuir a mesma medida "x"**. Podemos usar o teorema de Pitágoras.

$$x^2 + x^2 = 10^2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 = 100 \quad \rightarrow \quad x^2 = 50 \quad \rightarrow \quad x = 5\sqrt{2}\ cm$$

Feito isso, devemos usar **um pouco de trigonometria** para determinar a altura AH.



Considere o **triângulo retângulo AHB**.

$$\text{sen } 45° = \frac{h}{5\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{5\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{h = 5\ cm}$$

Gabarito: CERTO.

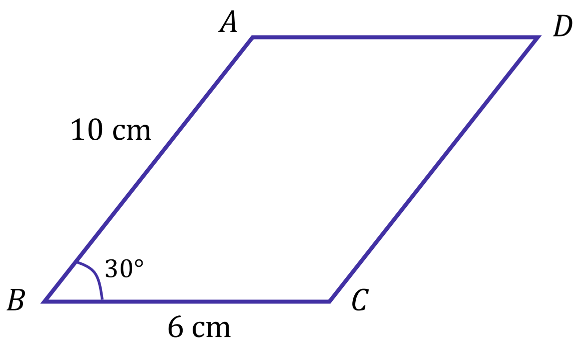
QUESTÕES COMENTADAS - CEBRASPE

Quadriláteros

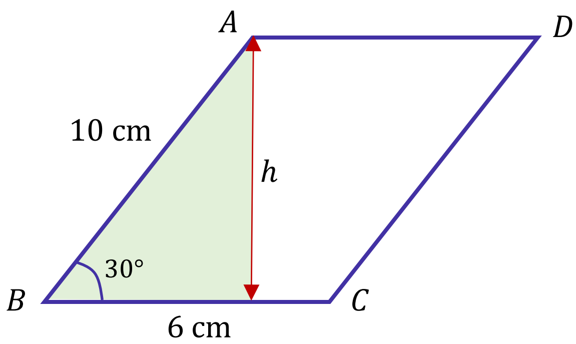
1. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Um paralelogramo $ABCD$ com $\overline{AB} = 10\ cm$, $\overline{BC} = 6\ cm$ e $A\hat{B}C = 30°$ tem área igual a 30 cm^2.

Comentários:
Vamos desenhar esse paralelogramo!



Para calcular **a área desse paralelogramo**, precisamos primeiramente encontrar sua altura.



Note que **"h" é o cateto oposto do ângulo de 30°**, enquanto **o lado AB é a hipotenusa** do triângulo destacado em verde. Sendo assim, podemos escrever:

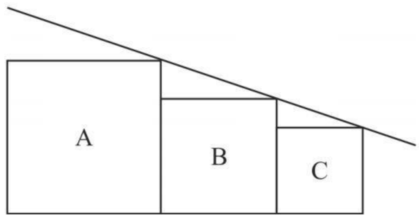
$$\text{sen } 30° = \frac{h}{10} \quad \rightarrow \quad h = 10 \cdot \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{h = 5\ cm}}$$

Com a altura, podemos encontrar a área **multiplicando a base BC por h.**

$$A = BC \cdot h \quad \rightarrow \quad A = 6 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{A = 30\ cm^2}}$$

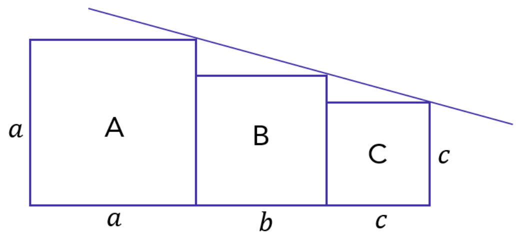
Gabarito: CERTO.

2. (CESPE/SEFAZ-RS/2019) Os quadrados A, B e C foram colocados lado a lado, de modo que uma reta contém os três vértices superiores, como mostra a figura a seguir



Se a área do quadrado A for 24 cm², e a área do quadrado C for 6 cm², então a área do quadrado B será igual a
A) 9 cm²
B) 10 cm²
C) 12 cm²
D) 15 cm²
E) 18 cm²

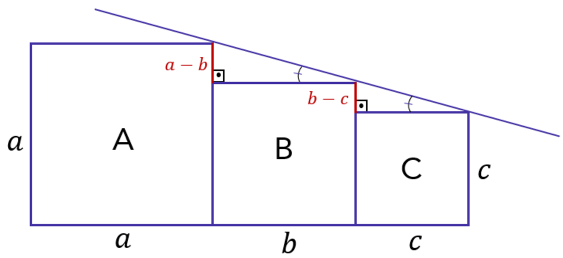
Comentários:
Vamos esquematizar, **destacando os lados** de cada quadrado.



Lembre-se que **os lados de um quadrado são todos iguais**. Portanto, os lados do quadrado A medem todos uma mesma quantidade "a". Analogamente, os lados de B medem um mesmo valor "b". O enunciado trouxe as áreas dos quadrados A e C. **Com essas áreas, conseguimos determinar o valor dos lados**.

$$A_A = a^2 \quad \rightarrow \quad 24 = a^2 \quad \rightarrow \quad a = 2\sqrt{6}\ cm$$
$$A_C = c^2 \quad \rightarrow \quad 6 = c^2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{6}\ cm$$

Agora que temos os lados dos quadrados A e C, você deve estar se perguntando como faremos para encontrar o lado de B. Para isso, **precisamos encontrar uma relação que envolva esses valores**. A reta desenhada sobre os quadrados não veio por acaso. Ela está aí para ajudá-lo a perceber que **os triângulos retângulos formados por ela são semelhantes**.



Agora, podemos **usar semelhança de triângulos** para encontrar uma relação entre os lados.

$$\frac{a-b}{b}=\frac{b-c}{c}$$

Fazendo **meio pelos extremos**, ficamos com:

$$b^2-bc=ac-bc \quad \rightarrow \quad b^2=ac \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_B=b^2=ac}$$

Pessoal, observe que encontramos direto **o valor da área de B**. Logo, para encontrarmos a resposta da questão, basta substituirmos os valores.

$$A_B=2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_B=12\ cm^2}$$

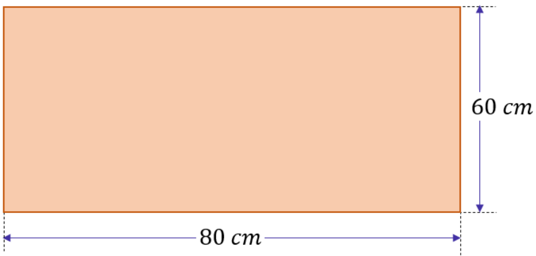
Gabarito: LETRA C.

3. (CESPE/TJ-PR/2019) O carpinteiro José cortou um retângulo de madeira medindo 80 cm de comprimento por 60 cm de largura. Ele precisa cortar outro retângulo, com a mesma área do primeiro, mas com comprimento um quarto maior que o daquele outro. Desse modo, em relação à largura do primeiro retângulo, a largura do segundo deverá

A) diminuir um terço.
B) diminuir um quinto.
C) aumentar três vezes.
D) aumentar um quinze avos.
E) aumentar trinta e seis quinze avos.

Comentários:

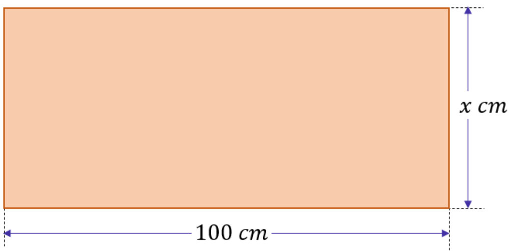
José cortou um retângulo de madeira medindo 80 cm x 60 cm. Assim, temos algo do tipo:



A área de um retângulo é o produto dos seus lados.

$$A=80\cdot 60 \quad \rightarrow \quad A=4800\ cm^2$$

Ele quer cortar outro retângulo com essa **mesma área** e **com comprimento um quarto maior que 80 cm**. Ora, **um quarto de 80 cm é 20 cm**. Assim, o comprimento do novo retângulo será $80+20=100\ cm$.



A questão nos pergunta **qual deve ser a largura do novo retângulo** para que a área continue a mesma. Para determinar isso, podemos usando novamente a fórmula da área.

$$4800 = 100 \cdot x \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 48\ cm}$$

Note, portanto, que a largura deve diminuir de 60 cm para 48 cm, para que a área continue igual. A diminuição foi de 12 unidades. Observe que **12 é exatamente um quinto de 60**. Assim, podemos marcar a letra B.

Gabarito: LETRA B.

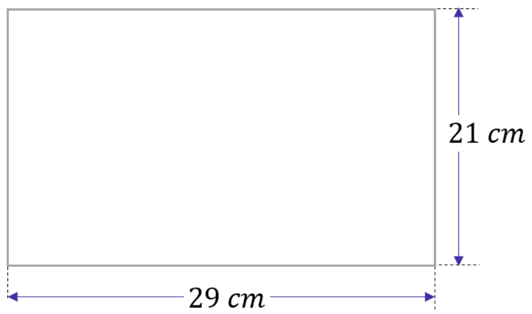
4. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item a seguir, relativo a sequências numéricas.

Situação hipotética: As margens de uma folha de papel retangular medem 21 cm × 29 cm. Cortando essa folha ao meio, pelo ponto médio da margem maior, obtêm-se duas folhas em que as margens medem 21 cm × 29/2 cm.

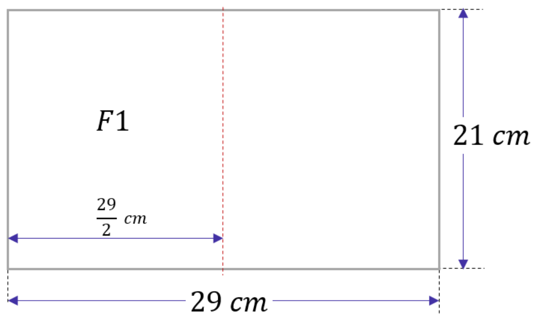
Desprezando uma delas, a outra é denominada folha F1. Cortando F1 ao meio, pelo ponto médio da margem maior, obtêm-se duas folhas em que as margens medem 21/2 cm x 29/2 cm. Desprezando uma delas, a outra é denominada folha F2. Esse processo de divisão pode ser continuado sucessivamente.

Assertiva: Nessa situação, a área da folha F6 será inferior a 9 cm².

Comentários:
Temos uma folha com o seguinte aspecto:



Vamos cortá-la ao meio, pelo **ponto médio da margem maior**.



Concorda que **F1 vai ter metade da área da folha inicial**? E quando partimos F1 no meio novamente, vamos ficar com **metade da metade**? E assim sucessivamente? Vamos calcular a área da folha inteira:

$$A = 21 \cdot 29 \quad \rightarrow \quad A = 609\ cm^2$$

A folha $F1$ terá área igual a metade da área da folha inteira.

$$A_{F1} = \frac{609}{2} \quad \rightarrow \quad A_{F1} = 304{,}5\ cm^2$$

Quando você partir na metade novamente, a área da folha $F2$ será a metade da área da folha $F1$.

$$A_{F2} = \frac{304{,}5}{2} \quad \rightarrow \quad A_{F2} = 152{,}25\ cm^2$$

Podemos fazer isso **até a folha F6**.

$$A_{F3} = \frac{152{,}25}{2} \quad \rightarrow \quad A_{F3} = 76{,}125\ cm^2$$

$$A_{F4} = \frac{76{,}125}{2} \quad \rightarrow \quad A_{F4} = 38{,}0625\ cm^2$$

$$A_{F5} = \frac{38{,}0625}{2} \quad \rightarrow \quad A_{F5} = 19{,}03125\ cm^2$$

$$A_{F6} = \frac{19{,}03125}{2} \quad \rightarrow \quad A_{F6} = 9{,}515625\ cm^2$$

Essa solução seria uma via mais **"força bruta".** Ir dividindo um por um até encontrar a área de F6. No entanto, você poderia perceber no começo que **dividir algo pela metade 6 vezes é o mesmo que dividir por $\mathbf{2^6 = 64}$**. Sendo assim, você obteria o mesmo resultado fazendo direto que:

$$A_{F6} = \frac{609}{2^6} \quad \rightarrow \quad A_{F6} = \frac{609}{64} \quad \rightarrow \quad A_{F6} = 9{,}515625\ cm^2$$

Ressalto também que **você não necessita dessa "precisão" toda**, uma vez **que a questão não pede o valor exato**, mas apenas quer saber se é inferior ou superior a um determinado número. Logo, **fazer as contas considerando apenas duas casas decimais já é suficiente (rsrs)**. *Firmeza?!* Note que a área é superior a 9 cm², tornando o item incorreto.

Gabarito: ERRADO.

5. (CESPE/CAGE-RS/2018) Em um bairro nobre de determinada cidade, uma imobiliária colocou à venda vários terrenos: independentemente do tamanho, o preço do metro quadrado é o mesmo para todos os terrenos à venda. Um terreno retangular de 600 m² de área custa R$ 3.240.000. Em outro terreno, também retangular, um dos lados é 25% maior que o lado equivalente do primeiro terreno; o outro lado é 20% menor que o lado equivalente do primeiro terreno. Nesse caso, o preço do segundo terreno é igual a
A) R$ 1.458.000.

B) R$ 3.240.000.
C) R$ 3.402.000.
D) R$ 3.078.000.
E) R$ 3.564.000.

Comentários:
Note que **os terrenos são retângulos** e, portanto, **a área é dada pelo produto dos lados**. Considere que o primeiro terreno tenha **lados $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$**. Assim, $a \cdot b = 600$.

O segundo terreno tem um dos lados medindo **25% a mais do que o lado equivalente no primeiro terreno**. Com isso, **esse lado valeria $\mathbf{1,25}\boldsymbol{a}$**. Concorda? Analogamente, se **o outro lado é 20% menor**, então ele vale 80% do lado equivalente no primeiro terreno. Assim, **o segundo lado valeria $\mathbf{0,80}\boldsymbol{b}$**. A área do terreno é:

$$A = (1{,}25a) \cdot (0{,}8b) \quad \rightarrow \quad A = ab \quad \rightarrow \quad A = 600$$

Veja que $\mathbf{1,25 \cdot 0,8 = 1}$. Sendo assim, **o segundo terreno tem a mesma área do primeiro** e, portanto, deve possuir a mesmo valor. Com isso, seu preço também é de R$ 3.240.000.

Gabarito: LETRA B.

6. (CESPE/IFF/2018) Os lados de um terreno quadrado medem 100 m. Houve erro na escrituração, e ele foi registrado como se o comprimento do lado medisse 10% a menos que a medida correta. Nessa situação, deixou-se de registrar uma área do terreno igual a
A) 20 m².
B) 100 m².
C) 1.000 m².
D) 1.900 m².
E) 2.000 m².

Comentários:
A área de um quadrado é **o comprimento do lado elevado ao quadrado**. Assim, em um terreno quadrado de lado 100 m, temos que sua área é:

$$A_T = a^2 \quad \rightarrow \quad A_T = 100^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_T = 10.000\ m^2}$$

Mas, na hora de escriturar, **o lado do terreno foi registrado por um valor errado**. Esse valor é 10% menor do que o real. Assim, **o lado considerado foi de apenas 90 m**. Tudo bem?! Se o lado registrado é 10% menor, então ele vale 90% do lado real. **90% de 100 é 90**. A área desse quadrado de lado igual a 90 metros é:

$$A_{ERRO} = 90^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{ERRO} = 8.100\ m^2}$$

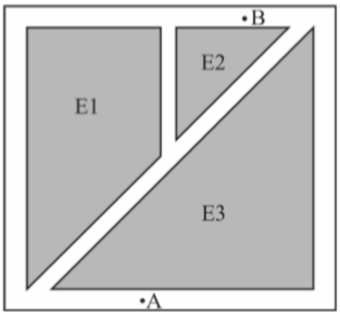
Se a área real é de 10.000 m² e foi registrado uma área de 8.100 m², então a diferença entre as áreas é de:

$$Diferença = 10.000 - 8.100 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Diferença = 1.900\ m^2}$$

Gabarito: LETRA D.

(PM-AL/2018) Texto para as próximas questões

A figura seguinte mostra a planta baixa de um condomínio. O terreno ocupado pelo condomínio é um quadrado de lados que mede 60 m. Nesse condomínio, as áreas indicadas por E1, E2 e E3 correspondem aos locais onde estão construídos os prédios residenciais, e as regiões em branco correspondem às vias de livre circulação para pedestres e veículos.



A partir da figura e das informações precedentes, julgue os itens a seguir, considerando que a área de E2 seja igual a 200 m².

7. (CESPE/PM-AL/2018) Se a área de E3 for igual à área da região ocupada pelas vias de livre circulação e se a área de E1 for igual a 900 m², então a área de E3 será igual a 1.250 m².

Comentários:

O terreno ocupado pelo condomínio **é um quadrado de lado 60 m**. Assim, a área total do terreno é:

$$A_T = 60^2 \quad \rightarrow \quad A_T = 3600\ m^2$$

Sabemos que a área **E2 mede 200 m²** e a área de **E1 é igual a 900 m²**. A pergunta que fazemos é: quanto de espaço sobrará para a construção de E3 e das vias? Devemos fazer a seguinte subtração:

$$A_{sobra} = A_T - A_{E1} - A_{E2} \quad \rightarrow \quad A_{sobra} = 3600 - 900 - 200 \quad \rightarrow \quad A_{sobra} = 2500\ m^2$$

Note que temos disponíveis **2.500 m² para a construção de E3 e das vias**. Como as duas devem ocupar igual área, então **a área de cada uma será metade desse valor**.

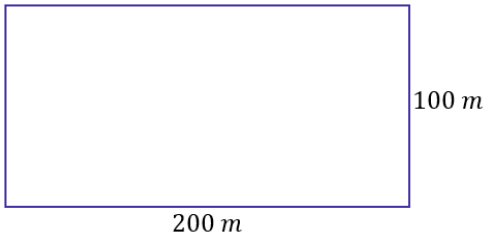
$$A_{E3} = A_{vias} = \frac{2500}{2} = 1.250\ m^2$$

Gabarito: CERTO.

8. (CESPE/SEDF/2017) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de juros, divisão proporcional e regra de três.

Um terreno retangular medindo 100 m × 200 m foi colocado à venda por R$ 250.000,00. O terreno poderá ser vendido inteiro ou em frações e, nesse caso, o preço do m² da fração de terreno é igual ao do m² do terreno inteiro. Nessa situação, se um indivíduo desejar comprar uma fração medindo 50 m × 100 m, ele pagará R$ 125.000,00 por essa fração de terreno.

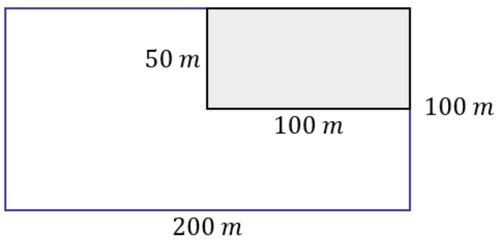
Comentários:
Pessoal, o terreno colocado à venda tem $200 \times 100 = \mathbf{20.000\ m^2}$ **de área**.



Ele foi colocado a venda **por R$ 250.000,00**. Logo, podemos calcular o preço do metro quadrado.

$$P_{m^2} = \frac{R\$\ 250.000,00}{20.000\ m^2} \quad \rightarrow \quad P_{m^2} = R\$\ 12,5\ por\ m^2$$

Uma pessoa quer comprar uma fração desse terreno, de tamanho **50 por 100 m**. Algo do tipo:



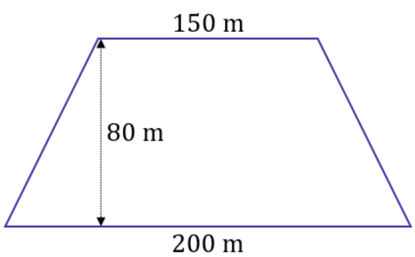
Portanto, a área da fração desejada pelo indivíduo é $50 \times 100 = 5.000\ m^2$. Como **o preço do metro quadrado da fração é igual ao do m² do terreno inteiro**, basta fazermos:

$$P_{fração} = A_{fração} \cdot P_{m^2} \quad \rightarrow \quad P_{fração} = 12,5 \cdot 5000 \quad \rightarrow \quad P_{fração} = R\$\ 62.500,00$$

Logo, **ele pagará R$ 62.500,00 e não R$ 125.000,00**.

Gabarito: ERRADO.

9. (CESPE/CPRM/2016)



A área do trapézio apresentado, em que a altura é igual a 80 m, a base maior mede 200 m e a base menor, 150 m, é igual a
A) 8.000 m²

B) 6.000 m²
C) 23.000 m²
D) 21.000 m²
E) 14.000 m²

Comentários:
Questão que exige a **aplicação direta da fórmula da área do trapézio**. Lembre-se da teoria que:

$$A_{trapézio} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

- B: representa o comprimento da **base maior**;
- b: representa o comprimento da **base menor**;
- h: representa a **altura do trapézio**.

O enunciado forneceu os seguintes valores:

- $B = 200\ m$;
- $b = 150\ m$;
- $h = 80\ m$.

Substituindo na expressão:

$$A_{trapézio} = \frac{(200+150)\cdot 80}{2} \quad \rightarrow \quad A_{trapézio} = \frac{28000}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{trapézio} = 14.000\ m^2}$$

Gabarito: LETRA E.

10. (CESPE/BACEN/2013) A numeração das notas de papel-moeda de determinado país é constituída por duas das 26 letras do alfabeto da língua portuguesa, com ou sem repetição, seguidas de um numeral com 9 algarismos arábicos, de 0 a 9, com ou sem repetição. Julgue o próximo item relativos a esse sistema de numeração.

Considere que, até o ano 2000, as notas de papel-moeda desse país fossem retangulares e medissem 14 cm × 6,5 cm e que, a partir de 2001, essas notas tivessem passado a medir 12,8 cm × 6,5 cm, mas tivessem mantido a forma retangular. Nesse caso, com o papel-moeda gasto para se fabricar 10 notas de acordo com as medidas adotadas antes de 2000 é possível fabricar 11 notas conforme as medidas determinadas após 2001.

Comentários:
O primeiro passo é **calcular as áreas de cada uma das notas**.

- Nota antiga (14 cm x 6,5 cm)

$$A_{antiga} = 14 \cdot 6{,}5 \quad \rightarrow \quad A_{antiga} = 91\ cm^2$$

- Nota nova (12,8 cm x 6,5 cm)

$$A_{nova} = 12{,}8 \cdot 6{,}5 \quad \rightarrow \quad A_{nova} = 83{,}2\ cm^2$$

Agora, vamos calcular quanto papel moeda é gasto **para fabricar 10 notas antigas e 11 notas novas**.

- 10 notas antigas possuem uma área de:

$$A_{10} = \mathbf{10} \cdot A_{antiga} \quad \rightarrow \quad A_{10} = 10 \cdot 91 \quad \rightarrow \quad A_{10} = 910\ cm^2$$

- 11 notas novas possuem uma área de:

$$A_{11} = \mathbf{11} \cdot A_{nova} \quad \rightarrow \quad A_{11} = 11 \cdot 83{,}2 \quad \rightarrow \quad A_{11} = 915{,}2\ cm^2$$

A área de papel necessária para produzir 11 notas novas **é maior** do que para produzir 10 notas antigas. Assim, o item erra quando afirma que com o papel gasto para produzir 10 notas antigas seria possível produzir 11 novas.

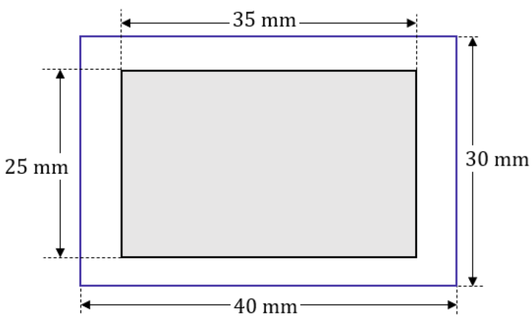
Gabarito: ERRADO.

11. (CESPE/CORREIOS/2011) Em 2008, nos 200 anos do Banco do Brasil, os Correios lançaram um selo comemorativo com uma tiragem de 1.020.000 unidades. No selo, cujo formato é de um retângulo medindo 40 mm × 30 mm, a estampa ocupa um retângulo que mede 35 mm × 25 mm. Dadas essas condições, é correto afirmar que a área do retângulo da estampa é

A) superior a 90% da área do retângulo do selo.
B) inferior a 75% da área do retângulo do selo.
C) superior a 75% e inferior a 80% da área do retângulo do selo.
D) superior a 80% e inferior a 85% da área do retângulo do selo.
E) superior a 85% e inferior a 90% da área do retângulo do selo.

Comentários:

Pessoal, o selo descrito no enunciado tem o seguinte aspecto:



Com outras palavras, a questão nos pergunta **quantos % a área destacada ocupa**. Vamos calcular cada uma das áreas individualmente.

- Área do retângulo do selo.

$$A_{selo} = 40 \cdot 30 \quad \rightarrow \quad A_{selo} = 1200\ mm^2$$

- Área do retângulo da estampa.

$$A_{estampa} = 35 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad A_{estampa} = 875\ mm^2$$

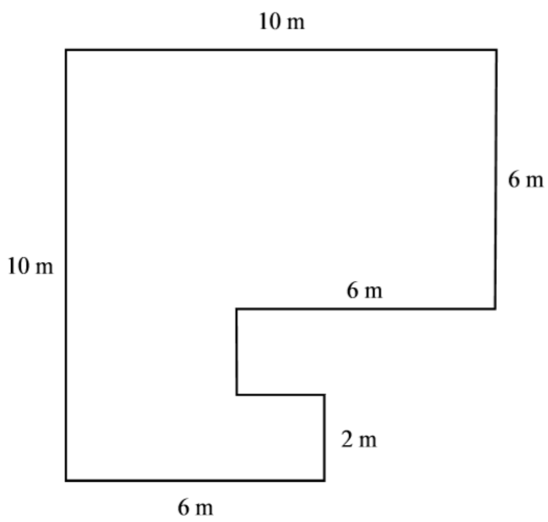
Agora, para encontrar quanto 875 mm² corresponde de 1200 mm², basta **dividir a primeira quantidade pela segunda** e, depois, multiplicar por 100 (para dar em porcentagem).

$$\%A = \frac{A_{estampa}}{A_{selo}} \cdot 100 \quad \rightarrow \quad \%A = \frac{875}{1200} \cdot 100 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\%A = 72,91\%}$$

Logo, a área é inferior a 75%, conforme afirma a alternativa B.

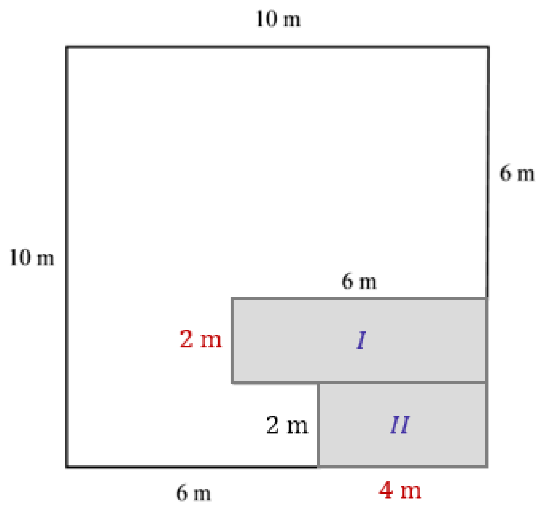
Gabarito: LETRA B**.**

12. (CESPE/CORREIOS/2011)



Sabendo-se que todos os ângulos dos vértices do terreno ilustrado na figura acima medem 90° e que o metro quadrado do terreno custa R$ 120,00, é correto afirmar que o preço desse terreno é
A) superior a R$ 9.900,00 e inferior a R$ 10.100,00.
B) superior a R$ 10.100,00.
C) inferior a R$ 9.500,00.
D) superior a R$ 9.500,00 e inferior a R$ 9.700,00.
E) superior a R$ 9.700,00 e inferior a R$ 9.900,00.

Comentários:
Pessoal, acompanhem o desenho abaixo:



Um jeito interessante de se calcular a área da região branca, é **pegar todo o quadrado e subtrair as áreas I e II destacadas**. Como o quadrado possui lados igual a 10 metros, sua área é:

$$A = a^2 \quad \rightarrow \quad A = 10^2 \quad \rightarrow \quad A = 100\ m^2$$

As medidas em vermelho foram deduzidas. Na vertical, veja que se um lado inteiro tem comprimento igual a 10 metros, e já marcarmos uma parte com 6 metros e outra com 2, **então só falta mais dois metros para completar os 10**. O mesmo raciocínio usamos para determinar aqueles "4 m" na base. Tudo bem?! Agora, vamos calcular as áreas dos retângulos I e II.

$$A_I = 6 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad A_I = 12\ m^2$$
$$A_{II} = 4 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad A_{II} = 8\ m^2$$

Pronto! Agora, basta subtrair essas áreas da área do quadrado e **obteremos a área da região branca**.

$$A_{branca} = A - A_I - A_{II} \quad \rightarrow \quad A_{branca} = 100 - 12 - 8 \quad \rightarrow \quad A_{branca} = 80\ m^2$$

Se **o preço do metro quadrado é R$ 120,00**, então o terreno custa:

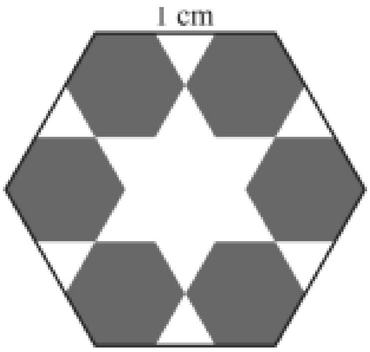
$$P_{terreno} = 120 \cdot 80 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_{terreno} = R\$\ 9.600,00}$$

Gabarito: LETRA D.

QUESTÕES COMENTADAS - CEBRASPE

Polígonos

1. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) A figura a seguir ilustra a primeira etapa de um processo recursivo que, a partir de um hexágono regular em que os lados medem 1 cm de comprimento, constroem-se 6 novos hexágonos regulares.



Nesse processo, os lados do hexágono externo são divididos em 3 partes iguais e, conforme mostra a figura, são construídos outros 6 hexágonos regulares; em cada um deles, o comprimento dos lados é igual a $\frac{1}{3}$. Na segunda etapa, dividem-se os lados desses 6 novos hexágonos em 3 partes iguais, e constroem-se, de maneira semelhante à primeira etapa, outros 36 hexágonos regulares. Esse processo pode seguir indefinidamente.

Nessa situação, sabendo-se que, se o comprimento dos lados de um hexágono regular for igual a L cm, a área desse hexágono será igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$ cm² é correto concluir que a soma das áreas dos hexágonos obtidos na 5.ª etapa do processo recursivo descrito é igual a

A) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \sqrt{3}$ cm²

B) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \sqrt{3}$ cm²

C) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \sqrt{3}$ cm²

D) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \sqrt{3}$ cm²

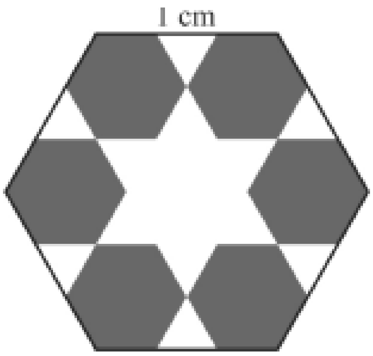
E) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \sqrt{3}$ cm²

Comentários:

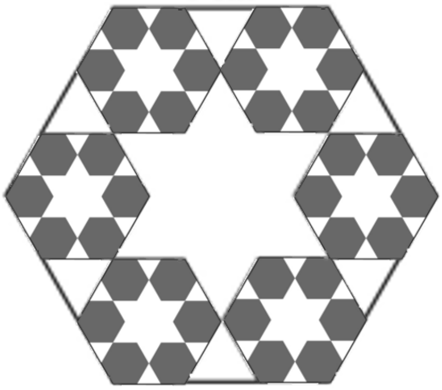
Vamos lá. É interessante perceber que começamos com **um hexágono de 1 cm de comprimento**. À medida que o processo segue, os novos hexágonos possuem lado 1/3 do hexágono de origem. Devemos descrever as etapas.

- **Etapa 0:** Tínhamos um grande hexágono de lado igual a 1 cm.

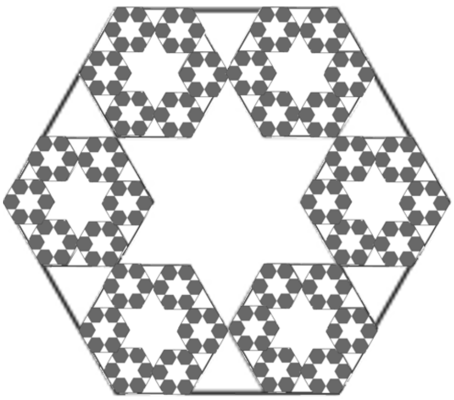
- **Etapa 1:** Dentro do hexágono, desenhamos **6 mini hexágonos**, cada um com lado igual a 1/3 cm.



- **Etapa 2:** Dentro de cada mini hexágono desenhado anteriormente, desenhamos hexágonos ainda menores. **Eles possuem lado igual a um terço do lado do "original"**, ou seja, 1/9 cm. Como tínhamos 6 hexágonos anteriormente e cada hexágono cabe mais 6 mini hexágonos, ficaremos então com 36 deles.



- **Etapa 3:** Repetimos o processo. Tínhamos 36 mini hexágonos, desenharemos mais 6 em cada um deles. Ficaremos então com $36 \cdot 6 = 216$. O lado deles será um terço do de origem, assim, $1/27$ cm.



- **Etapa 4:** Dentro de cada um dos 216 mini hexágonos, desenharemos mais 6. Ficaremos com $216 \cdot 6 = 1296$. O lado deles será $1/81$ cm.

- **Etapa 5:** Teremos $1296 \cdot 6 = 7776$ mini hexágonos. O lado será igual a um terço de 1/81, isto é, 1/243 cm.

O enunciado fala que **a área de um hexágono** é dada pela fórmula:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$$

Logo, sabendo que o mini hexágono que obtemos com a 5ª etapa tem lado $1/243 = 1/3^5$ cm, podemos encontrar sua área.

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3^5}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^9} \ \ cm^2$$

No entanto, **essa área é de apenas um único mini hexágono**. Na 5ª etapa, temos $7776 = 6^5$ deles. Assim,

$$A_T = 6^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^9} \quad \rightarrow \quad A_T = (2^5 \cdot 3^5) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^9} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_T = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \sqrt{3}\ cm^2}$$

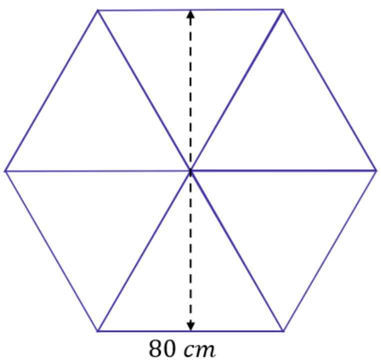
Gabarito: LETRA A.

2. (CESPE/FUB/2018) A figura a seguir mostra uma mesa em que o tampo é um hexágono regular cujo lado mede 80 cm.

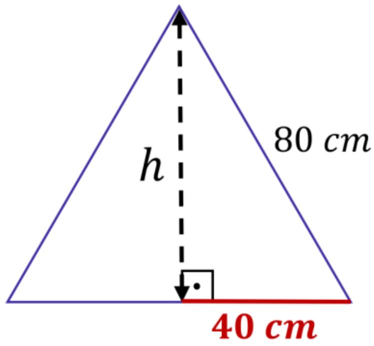
Julgue o item que se segue, a respeito da geometria do tampo dessa mesa.

A distância entre dois lados paralelos do tampo da mesa é superior a 1,3 m.

Comentários:
Em outras palavras, o item quer saber a distância representada pela linha pontilhada no desenho abaixo:



Lembre-se que **um hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros**. Assim, a distância entre dois lados paralelos é igual ao **dobro da altura de um desses triângulos**. Acompanhe o esquema.



Observe que podemos utilizar o **teorema de Pitágoras** para determinar a altura h.

$$80^2 = h^2 + 40^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = 6400 - 1600 \quad \rightarrow \quad h^2 = 4800 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{h = 40\sqrt{3}\ cm}$$

Descobrimos a altura do triângulo. No entanto, a distância entre os lados paralelos é duas vezes esse valor.

$$d = 2 \cdot h \quad \rightarrow \quad d = 2 \cdot 40\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad d = 80\sqrt{3}\ cm$$

Pessoal, uma das poucas raízes que **devemos lembrar o valor aproximado** é a $\sqrt{3}$. Guarde com você que:

$$\sqrt{3} \cong 1{,}73$$

Assim, quando usamos esse valor para calcular d, ficamos com:

$$d \cong 138{,}4\ \boldsymbol{cm} \quad \text{ou} \quad d \cong 1{,}384\ \boldsymbol{m}$$

Repare que o item afirma que **a distância é superior a 1,3 metros**. Logo, está correto.

Gabarito: CERTO.

Lista de Questões - Cebraspe

Noções Elementares

1. (CESPE/PREF. BARRA DOS COQUEIROS/2020) A seguinte tabela apresenta a distância aproximada, em linha reta, entre a cidade de Itabaiana e quatro outras cidades de Sergipe.

	Lagarto	Aracaju	Estância	Poço Verde
Itabaiana	35 km	50 km	60 km	80 km

Com base nessas informações, é correto afirmar que um círculo com área de 3.200 km² centrado em Itabaiana

A) não inclui nenhuma das outras quatro cidades listadas.
B) inclui, além de Itabaiana, apenas a cidade de Lagarto.
C) inclui, além de Itabaiana, apenas as cidades de Lagarto e Aracaju.
D) inclui, além de Itabaiana, apenas as cidades de Lagarto, Aracaju e Estância.
E) inclui todas as cidades listadas.

2. (CESPE/SEFAZ-RS/2019) O relógio analógico de Audir danificou-se exatamente à zero hora (meia-noite) de certo dia, e o ponteiro dos minutos passou a girar no sentido anti-horário, mas com a mesma velocidade que tinha antes do defeito. O ponteiro das horas permaneceu funcionando normalmente, girando no sentido horário. Considerando as informações do texto, assinale a opção que apresenta a relação entre os arcos x e y percorridos, respectivamente, pelos ponteiros dos minutos e das horas do relógio de Audir entre duas sobreposições consecutivas.

A) $x - y = 90°$
B) $x - y = 180°$
C) $x + y = 180°$
D) $x + y = 360°$
E) $x = y$

Gabarito

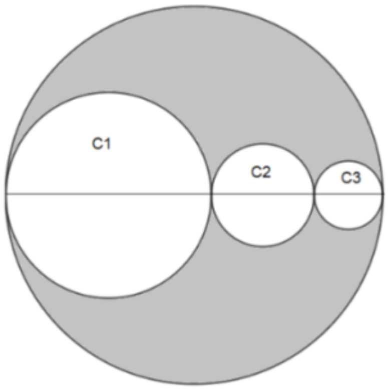
1. LETRA A
2. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Circunferências

1. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Julgue o item subsequente, relativos a geometria.

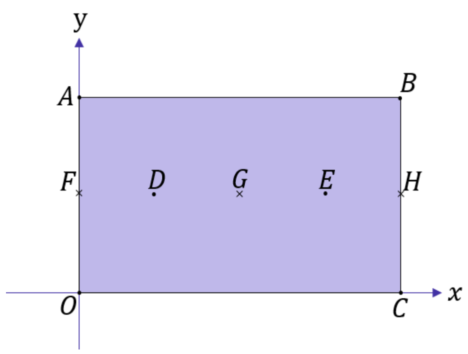
Considere que, na figura a seguir, os raios dos círculos internos C1, C2 e C3 sejam, respectivamente, iguais a r, $r/2$ e $r/3$, em que r é um número real positivo. Nesse caso, a área da parte em cinza é igual a $2\pi r^2$.



2. (CESPE/IFF/2018) Um quadrado tem todos os seus vértices sobre uma circunferência de 4 cm de raio. Nesse caso, a área desse quadrado é igual a

A) 4 cm²
B) 8 cm²
C) 16 cm²
D) 32 cm²
E) 64 cm²

3. (CESPE/SEDUC-AL/2017) A figura seguinte mostra, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, em que a unidade de medida é o metro, uma região retangular OABC. O lado OA mede 600 m e o lado OC mede 800 m.



A figura mostra também os pontos F = ponto médio de OA, H = ponto médio de CB, G = centro do retângulo OABC, D = ponto médio de FG, e E = ponto médio de GH. Nos pontos O, A, B, C, D e E foram instalados

pontos de acesso à Internet — wi-fi. Nessa configuração, o usuário consegue se conectar à Internet desde que o seu smartphone esteja a 200 m ou menos de qualquer desses pontos de acesso. Com base nessas informações e na figura apresentada, julgue o próximo item.

Na parte externa ao retângulo OABC, o acesso à Internet a partir dos referidos pontos de acesso se restringe a uma região em que a área é inferior a 384.000 m².

GABARITO

1. CERTO
2. LETRA D
3. CERTO

Lista de Questões - Cebraspe

Triângulos

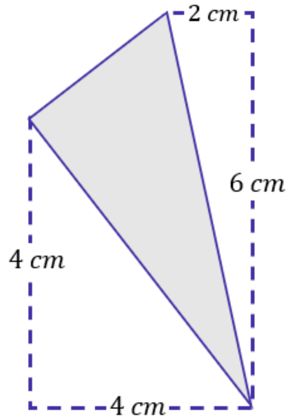
1. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Considere que um triângulo ABC tenha lados com as seguintes medidas: 3 cm, 5 cm e 7 cm. Se o triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC e tem perímetro 25 cm, então o menor lado do triângulo DEF é 5 cm.

2. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Seja ABC um triângulo com $A\hat{B}C = 90°$ e $A\hat{C}B = 30°$. Se $\overline{BC} = \sqrt{3}$ cm e se a altura com relação ao vértice B encontra o segmento $\overline{AC}$ no ponto D, então o comprimento do segmento $\overline{AD}$ é 1 cm.

3. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) O triângulo ABC mostrado a seguir está inscrito no retângulo incompleto, de lados pontilhados. As medidas dos lados do retângulo podem ser observadas na figura seguinte.



O valor da área do triangulo ABC apresentado anteriormente é igual a

A) 6 cm²
B) 7 cm²
C) 8 cm²
D) 12 cm²
E) 16 cm²

4. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 13 centímetros e um dos catetos mede 5 centímetros. Nesse triângulo, considere o retângulo inscrito, em que o comprimento do lado maior é igual ao dobro do comprimento do lado menor, e um dos lados maiores está sobre o cateto maior do triângulo. Com base nessas informações, é correto afirmar que a área desse retângulo é igual a

A) $\frac{11.250}{529}\ cm^2$

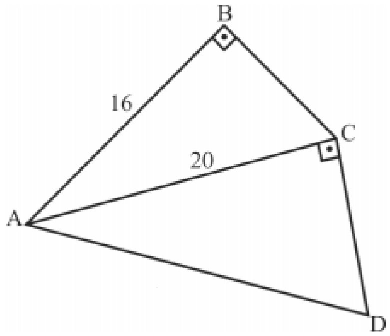
B) $\frac{3.600}{289}\ cm^2$

C) $\frac{3.600}{49}\ cm^2$

D) $\frac{1800}{121} cm^2$

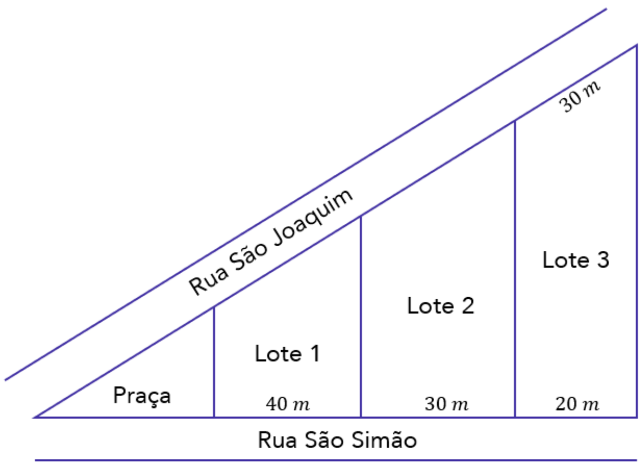
E) $1.800\ cm^2$

5. (CESPE/IFF/2018)



No polígono ABCD da figura precedente, os triângulos ABC e ACD são semelhantes e retângulos — nos vértices B e C, respectivamente. Além disso, AB = 16 cm, AC = 20 cm e CD é o lado menor do triângulo ACD. Nessa situação, AD mede

A) 24 cm.
B) 25 cm.
C) 28 cm.
D) 32 cm.
E) 36 cm.



(CBM-DF/2016) A figura acima ilustra parte da planta de um bairro, entre as ruas São Joaquim e São Simão. As divisas dos lotes são segmentos de retas paralelas e perpendiculares à reta que determina a rua São Simão. São destacados os lotes 1, 2, 3 e uma praça, bem como os comprimentos, em metros, das frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua São Simão e o comprimento, em metros, da frente do lote 3 para a rua São Joaquim. A respeito desses lotes, julgue os itens a seguir.

6. (CESPE/CBM-DF/2016) A diferença entre o comprimento da divisa dos lotes 1 e 2 e o comprimento da divisa da praça e do lote 1 é superior a 45 metros.

7. (CESPE/CBM-DF/2016) A frente do lote 2 para a rua São Joaquim mede 45 metros.

8. (CESPE/SEGP-AL/2013) Ao descrever a cena de um crime, um agente mencionou que o corpo foi localizado em um terreno plano e que o ponto do terreno correspondente à posição da cabeça da vítima estava a 2,5 m de um poste de iluminação, a 3,2 m de uma placa de trânsito e a 4,1 m de um semáforo vertical, no interior da região triangular determinada pelo poste, pela placa de trânsito e pelo semáforo. Com base nessa situação, julgue o item seguinte.

A distância entre o poste de iluminação e a placa de trânsito é superior a 6 m.

Texto para as próximas questões
(EBC/2011) Considere que as retas r e s sejam paralelas e que a distância entre elas é de 2 cm; que, na reta r, sejam marcados 4 pontos, de forma que a distância de qualquer um deles ao mais próximo seja de 5 cm; que, na reta s, sejam marcados 5 pontos, de forma que a distância de qualquer um deles ao mais próximo seja de 3 cm. Com base nessas informações e considerando, ainda, as áreas dos triângulos de vértices nos pontos marcados nas retas r e s, é correto afirmar que

9. (CESPE/EBC/2011) A maior área é igual a 15 cm².

10. (CESPE/EBC/2011) A menor área é igual a 5 cm².

Texto para as próximas questões
(PC-ES/2010) A soma de dois ângulos internos de um triângulo retângulo é igual a 120°. Sabendo que o lado menor desse triângulo mede 1 cm, julgue os itens seguintes.

11. (CESPE/PC-ES/2010) A soma de dois ângulos internos desse triângulo é igual a 135°.

12. (CESPE/PC-ES/2010) O perímetro desse triângulo é inferior a 5 cm.

13. (CESPE/PM-ES/2010) Considerando que o triângulo ABC seja retângulo no vértice A, que a hipotenusa desse triângulo meça 10 cm e que AH seja a altura desse triângulo relativa ao vértice A, julgue o item que se segue.

Se esse triângulo for isósceles, então a altura AH medirá 5 cm.

GABARITO

1. CERTO
2. ERRADO
3. LETRA C
4. LETRA D
5. LETRA B
6. ERRADO
7. CERTO
8. ERRADO
9. CERTO
10. ERRADO
11. ERRADO
12. CERTO
13. CERTO

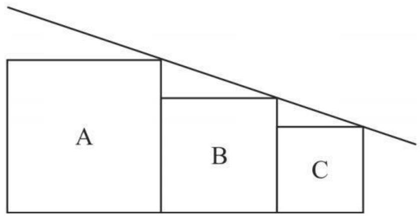
LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Quadriláteros

1. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Um paralelogramo $ABCD$ com $\overline{AB} = 10\ cm$, $\overline{BC} = 6\ cm$ e $A\hat{B}C = 30°$ tem área igual a 30 cm^2.

2. (CESPE/SEFAZ-RS/2019) Os quadrados A, B e C foram colocados lado a lado, de modo que uma reta contém os três vértices superiores, como mostra a figura a seguir



Se a área do quadrado A for 24 cm², e a área do quadrado C for 6 cm², então a área do quadrado B será igual a
A) 9 cm²
B) 10 cm²
C) 12 cm²
D) 15 cm²
E) 18 cm²

3. (CESPE/TJ-PR/2019) O carpinteiro José cortou um retângulo de madeira medindo 80 cm de comprimento por 60 cm de largura. Ele precisa cortar outro retângulo, com a mesma área do primeiro, mas com comprimento um quarto maior que o daquele outro. Desse modo, em relação à largura do primeiro retângulo, a largura do segundo deverá
A) diminuir um terço.
B) diminuir um quinto.
C) aumentar três vezes.
D) aumentar um quinze avos.
E) aumentar trinta e seis quinze avos.

4. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item a seguir, relativo a sequências numéricas.

Situação hipotética: As margens de uma folha de papel retangular medem 21 cm × 29 cm. Cortando essa folha ao meio, pelo ponto médio da margem maior, obtêm-se duas folhas em que as margens medem 21 cm × 29/2 cm. Desprezando uma delas, a outra é denominada folha F1. Cortando F1 ao meio, pelo ponto médio da margem maior, obtêm-se duas folhas em que as margens medem 21/2 cm x 29/2 cm. Desprezando uma delas, a outra é denominada folha F2. Esse processo de divisão pode ser continuado sucessivamente.

Assertiva: Nessa situação, a área da folha F6 será inferior a 9 cm².

5. (CESPE/CAGE-RS/2018) Em um bairro nobre de determinada cidade, uma imobiliária colocou à venda vários terrenos: independentemente do tamanho, o preço do metro quadrado é o mesmo para todos os terrenos à venda. Um terreno retangular de 600 m² de área custa R$ 3.240.000. Em outro terreno, também retangular, um dos lados é 25% maior que o lado equivalente do primeiro terreno; o outro lado é 20% menor que o lado equivalente do primeiro terreno. Nesse caso, o preço do segundo terreno é igual a

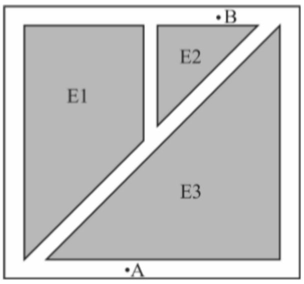
A) R$ 1.458.000.
B) R$ 3.240.000.
C) R$ 3.402.000.
D) R$ 3.078.000.
E) R$ 3.564.000.

6. (CESPE/IFF/2018) Os lados de um terreno quadrado medem 100 m. Houve erro na escrituração, e ele foi registrado como se o comprimento do lado medisse 10% a menos que a medida correta. Nessa situação, deixou-se de registrar uma área do terreno igual a

A) 20 m².
B) 100 m².
C) 1.000 m².
D) 1.900 m².
E) 2.000 m².

(PM-AL/2018) Texto para as próximas questões

A figura seguinte mostra a planta baixa de um condomínio. O terreno ocupado pelo condomínio é um quadrado de lados que mede 60 m. Nesse condomínio, as áreas indicadas por E1, E2 e E3 correspondem aos locais onde estão construídos os prédios residenciais, e as regiões em branco correspondem às vias de livre circulação para pedestres e veículos.



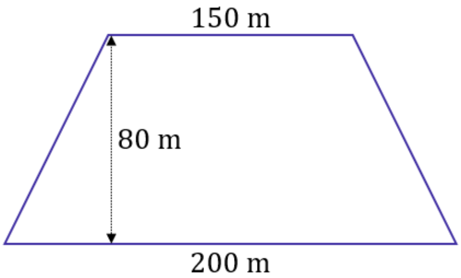
A partir da figura e das informações precedentes, julgue os itens a seguir, considerando que a área de E2 seja igual a 200 m².

7. (CESPE/PM-AL/2018) Se a área de E3 for igual à área da região ocupada pelas vias de livre circulação e se a área de E1 for igual a 900 m², então a área de E3 será igual a 1.250 m².

8. (CESPE/SEDF/2017) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de juros, divisão proporcional e regra de três.

Um terreno retangular medindo 100 m × 200 m foi colocado à venda por R$ 250.000,00. O terreno poderá ser vendido inteiro ou em frações e, nesse caso, o preço do m² da fração de terreno é igual ao do m² do terreno inteiro. Nessa situação, se um indivíduo desejar comprar uma fração medindo 50 m × 100 m, ele pagará R$ 125.000,00 por essa fração de terreno.

9. (CESPE/CPRM/2016)



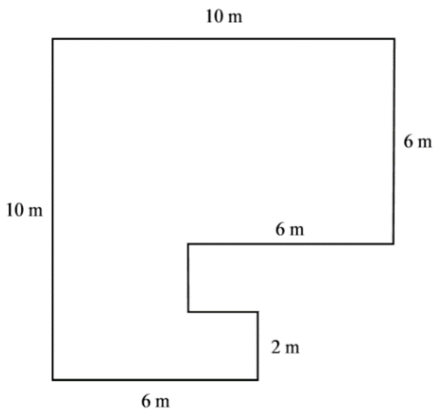
A área do trapézio apresentado, em que a altura é igual a 80 m, a base maior mede 200 m e a base menor, 150 m, é igual a
A) 8.000 m²
B) 6.000 m²
C) 23.000 m²
D) 21.000 m²
E) 14.000 m²

10. (CESPE/BACEN/2013) A numeração das notas de papel-moeda de determinado país é constituída por duas das 26 letras do alfabeto da língua portuguesa, com ou sem repetição, seguidas de um numeral com 9 algarismos arábicos, de 0 a 9, com ou sem repetição. Julgue o próximo item relativos a esse sistema de numeração.

Considere que, até o ano 2000, as notas de papel-moeda desse país fossem retangulares e medissem 14 cm × 6,5 cm e que, a partir de 2001, essas notas tivessem passado a medir 12,8 cm × 6,5 cm, mas tivessem mantido a forma retangular. Nesse caso, com o papel-moeda gasto para se fabricar 10 notas de acordo com as medidas adotadas antes de 2000 é possível fabricar 11 notas conforme as medidas determinadas após 2001.

11. (CESPE/CORREIOS/2011) Em 2008, nos 200 anos do Banco do Brasil, os Correios lançaram um selo comemorativo com uma tiragem de 1.020.000 unidades. No selo, cujo formato é de um retângulo medindo 40 mm × 30 mm, a estampa ocupa um retângulo que mede 35 mm × 25 mm. Dadas essas condições, é correto afirmar que a área do retângulo da estampa é
A) superior a 90% da área do retângulo do selo.
B) inferior a 75% da área do retângulo do selo.
C) superior a 75% e inferior a 80% da área do retângulo do selo.
D) superior a 80% e inferior a 85% da área do retângulo do selo.
E) superior a 85% e inferior a 90% da área do retângulo do selo.

12. (CESPE/CORREIOS/2011)



Sabendo-se que todos os ângulos dos vértices do terreno ilustrado na figura acima medem 90° e que o metro quadrado do terreno custa R$ 120,00, é correto afirmar que o preço desse terreno é

A) superior a R$ 9.900,00 e inferior a R$ 10.100,00.

B) superior a R$ 10.100,00.

C) inferior a R$ 9.500,00.

D) superior a R$ 9.500,00 e inferior a R$ 9.700,00.

E) superior a R$ 9.700,00 e inferior a R$ 9.900,00.

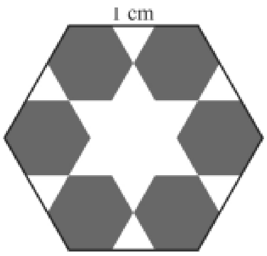
Gabarito

1. CERTO
2. LETRA C
3. LETRA B
4. ERRADO
5. LETRA B
6. LETRA D
7. CERTO
8. ERRADO
9. LETRA E
10. ERRADO
11. LETRA B
12. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Polígonos

1. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) A figura a seguir ilustra a primeira etapa de um processo recursivo que, a partir de um hexágono regular em que os lados medem 1 cm de comprimento, constroem-se 6 novos hexágonos regulares.



Nesse processo, os lados do hexágono externo são divididos em 3 partes iguais e, conforme mostra a figura, são construídos outros 6 hexágonos regulares; em cada um deles, o comprimento dos lados é igual a $\frac{1}{3}$. Na segunda etapa, dividem-se os lados desses 6 novos hexágonos em 3 partes iguais, e constroem-se, de maneira semelhante à primeira etapa, outros 36 hexágonos regulares. Esse processo pode seguir indefinidamente. Nessa situação, sabendo-se que, se o comprimento dos lados de um hexágono regular for igual a L cm, a área desse hexágono será igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$ cm² é correto concluir que a soma das áreas dos hexágonos obtidos na 5.ª etapa do processo recursivo descrito é igual a

A) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \sqrt{3}$ cm²

B) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \sqrt{3}$ cm²

C) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \sqrt{3}$ cm²

D) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \sqrt{3}$ cm²

E) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \sqrt{3}$ cm²

2. (CESPE/FUB/2018) A figura a seguir mostra uma mesa em que o tampo é um hexágono regular cujo lado mede 80 cm.

Julgue o item que se segue, a respeito da geometria do tampo dessa mesa.

A distância entre dois lados paralelos do tampo da mesa é superior a 1,3 m.

GABARITO

1. LETRA A
2. CERTO

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.