

POLINÔMIOS

* DEFINIÇÃO *

É UMA FUNÇÃO $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ DA FORMA:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$\rightarrow x \in \mathbb{C} \rightarrow$ VARIÁVEL INDEPENDENTE

$\rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C} \rightarrow$ COEFICIENTES

$\rightarrow n \in \mathbb{N} \rightarrow$ GRAU DO POLINÔMIO

a_0 : TERMO INDEPENDENTE



$$f(x) = 3x^2 + 5x + 4 \quad \checkmark$$

$$g(x) = 9x^{10} + 5x^7 + 2x \quad \checkmark$$

$$h(x) = x^{20} \quad \checkmark$$

$$j(x) = 4 \quad \checkmark$$

$$K(x) = \sqrt{2} x^3 + 3x \quad \checkmark$$

$$m(x) = 2\sqrt{x} + 1 \quad \rightarrow x^{1/2} \notin \mathbb{N}$$

$$n(x) = \frac{1}{x} + 4x \quad \rightarrow 1 \cdot x^{-1} \notin \mathbb{N}$$



* VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO *

É O VALOR QUE O POLINÔMIO ASSUME
AO APLICAR UM VALOR DE x .

$$p(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

$$p(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$p(1) = 6$$

$$p(2) = 2(2)^2 + 3(2) + 1$$

$$p(2) = 15$$

$$p(-2) = 2(-2)^2 + 3(-2) + 1$$

$$p(-2) = 3$$



EXEMPLO

DADO O POLINÔMIO $p(x) = x^3 - 5x + 2$,

Calcule:

$$p(-1) ; p(2) ; p(-3)$$

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 - 5(-1) + 2 \\ &= -1 + 5 + 2 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(2) &= (2)^3 - 5(2) + 2 \\ &= 8 - 10 + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(-3) &= (-3)^3 - 5(-3) + 2 \\ &= -27 + 15 + 2 = -10 \end{aligned}$$



EXEMPLO

Se $p(x) = ax^2 + bx + 1$ TAL QUE

$$p(1) = 6 \quad \text{e} \quad p(-1) = 2$$

CALCULE a e b

$$p(1) = 6$$

$$a(1)^2 + b(1) + 1 = 6 \rightarrow \underline{a + b = 5}$$

$$p(-1) = 2$$

$$a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 2 \rightarrow \underline{a - b = 1}$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

$$2a = 6$$

$$\boxed{a = 3}$$

$$3 + b = 5$$

$$\boxed{b = 2}$$

$$p(x) = 3x^2 + 2x + 1$$



VALORES NUMÉRICOS IMPORTANTES

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

- SOMA DOS COEFICIENTES -

$$p(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 + \dots$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$



SOMA DOS COEFICIENTES DO POLINÔMIO:

$$p(x) = (x + 1)^5$$

$$p(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

$$\text{Soma} = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

SOMA DOS COEFICIENTES:

$$p(1) = (1 + 1)^5 = 2^5 = 32$$



- SOMA DOS COEFICIENTES DE ORDEM PAR -

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

⊕

$$p(1) + p(-1) = 2a_0 + 2a_2 + 2a_4 + \dots$$

$$p(1) + p(-1) = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots)$$

$$\frac{p(1) + p(-1)}{2} = a_0 + a_2 + a_4 + \dots$$



- SOMA DOS COEFICIENTES DE ORDEM ÍMPAR -

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

⊖

$$p(1) - p(-1) = 2a_1 + 2a_3 + 2a_5 + \dots$$

$$p(1) - p(-1) = 2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots)$$

$$\frac{p(1) - p(-1)}{2} = a_1 + a_3 + a_5$$



EXEMPLO

SEJA O POLINÔMIO : $p(x) = (x + 2)^5$

$$p(1) = (1 + 2)^5 = 3^5 = 273$$

$$p(-1) = (-1 + 2)^5 = 1^5 = 1$$

SOMA DOS COEFICIENTES DE ORDEM PAR

$$\frac{p(1) + p(-1)}{2} = \frac{273 + 1}{2} = \frac{274}{2} = 137$$

SOMA DOS COEFICIENTES DE ORDEM ÍMPAR

$$\frac{p(1) - p(-1)}{2} = \frac{273 - 1}{2} = \frac{272}{2} = 136$$



EXEMPLO

$$p(x) = (x^2 - 3x + 1)^2 (2x^2 + 1)^2$$

$$p(1) = (1 - 3 + 1)^2 (2 \cdot 1 + 1)^2 = (-1)^2 (3)^2 = 9$$

$$p(-1) = (1 + 3 + 1)^2 (2 + 1)^2 = 5^2 \cdot 3^2 = 225$$

SOMA DOS COEFICIENTES

$$p(1) = 9$$

SOMA DOS COEFICIENTES DE ORDEM PAR

$$\frac{p(1) + p(-1)}{2} = \frac{9 + 225}{2} = \frac{234}{2} = 117$$

SOMA DOS COEFICIENTES DE ORDEM ÍMPAR

$$\frac{p(1) - p(-1)}{2} = \frac{9 - 225}{2} = \frac{-216}{2} = -108$$



* RAÍZ DE UM POLINÔMIO *

Um número $\alpha \in \mathbb{C}$ é dito raiz ou zero do polinômio $p(x)$ se $p(\alpha) = 0$

$$p(\alpha) = 0$$

$\rightarrow$

α é raiz de $p(x)$



2 É RAIZ DE $p(x) = 5x - 10$

$$p(2) = 5 \cdot 2 - 10 = 10 - 10 = 0$$

-1 É RAIZ DE $q(x) = x^3 + 1$

$$q(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

1 E i SÃO RAÍZES DE

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

$$f(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$$

$$f(i) = i^3 - i^2 + i - 1 =$$

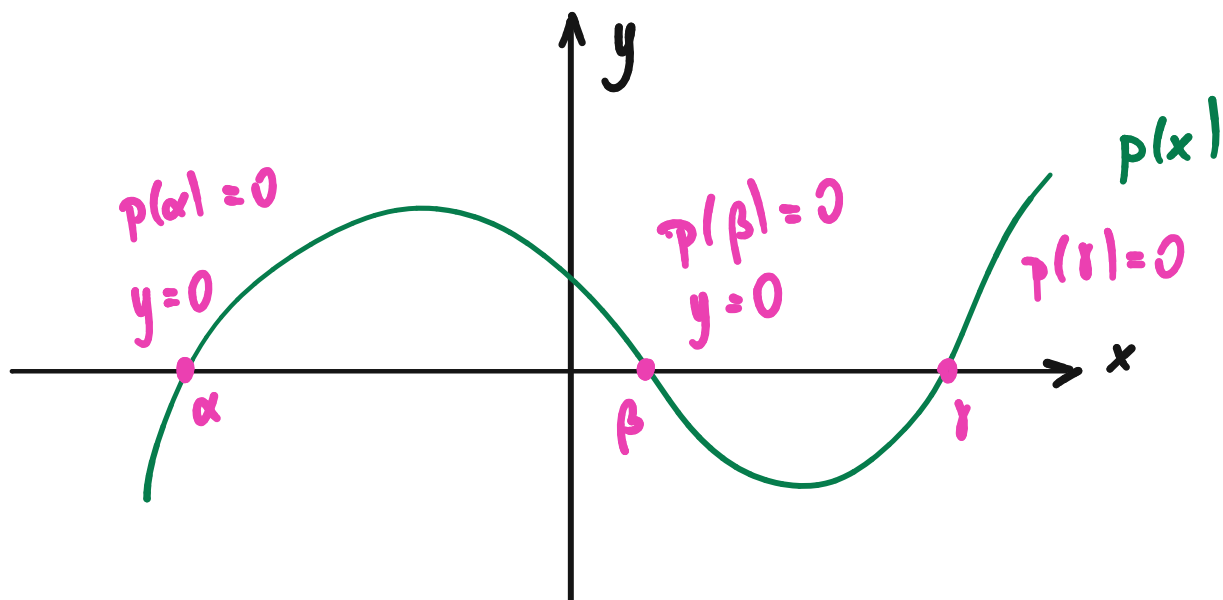
$$f(i) = (-1) + 1 - 1 = 0$$



RAÍZES NO GRÁFICO

GRÁFICAMENTE, AS RAÍZES SÃO VALORES DE x NOS QUAIS O GRÁFICO INTERSECTA O EIXO " x ".

$$\text{RAIZ } \alpha \Rightarrow p(\alpha) = 0 \leftrightarrow y = 0$$



OBS: APENAS RAÍZES REAIS PODEM SER VISTAS NOS GRÁFICOS.



EXEMPLO

DETERMINE OS VALORES DE POLINÔMIOS ABAIXO.

PARA QUE $1, 3$ E -1 SEJAM
RAÍZES DE $a(x) = x^7 + 3x^5 \rightarrow \partial(a(x)) = 7$
 $p(x) = x^4 + ax + b$

$$b(x) = 1 + 7x^5 - 3x^2 \rightarrow \partial(b(x)) = 5$$

$$1^4 + a(1) + b = 0 \rightarrow a + b = -1$$

$$c(x) = x^8 + 5x^2 \rightarrow \partial(c(x)) = 8$$

$$p(-1) = 0$$

$$(-1)^4 + a(-1) + b = 0 \rightarrow \underline{-a + b = -1}$$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ -a + b = -1 \end{cases}$$

(+)

$$2b = -2$$

$$\boxed{b = -1}$$

$$a + (-1) = -1$$

$$\boxed{a = 0}$$

$$\underline{p(x) = x^4 - 1}$$



EXEMPLO

SEJA $p(x) = (ax^2 - 2bx + c + 1)^5$

SE A SOMA DOS COEFICIENTES DE $p(x)$

É IGUAL A 32 E 0 E -1 SÃO

RAÍZES DE $p(x)$. CALCULE a , b E c .



RESOLUÇÃO

$$p(x) = (ax^2 - 2bx + \overset{-1}{c} + 1)^5$$

$$p(0) = 0 \rightarrow (c+1)^5 = 0 \rightarrow c+1 = 0 \rightarrow \boxed{c = -1}$$

$$p(-1) = 0 \rightarrow (a - 2b(-1))^5 = 0 \rightarrow \underline{a + 2b = 0}$$

$$p(1) = 32 \rightarrow (a - 2b)^5 = 32 \rightarrow \underline{a - 2b = 2}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ a - 2b = 2 \end{cases}$$

⊕

$$2a = 2$$

$$\boxed{a = 1}$$

$$1 + 2b = 0$$

$$2b = -1$$

$$\boxed{b = -\frac{1}{2}}$$



* POLINÔMIO NULO *

É UM POLINÔMIO TAL QUE

$$p(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

NOTAÇÃO :

$$p(x) \equiv 0$$

CONDIÇÃO { TODOS OS COEFICIENTES
SÃO NULOS }

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0$$



$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$$



$$p(x) = ax^3 + (b+1)x^2 + c - 4 \equiv 0$$

$$a = 0$$

$$b + 1 = 0 \rightarrow b = -1$$

$$c - 4 = 0 \rightarrow c = 4$$



EXEMPLO

DETERMINE OS VALORES DE a , b E c DE MODO QUE $p(x)$ SEJA IDENTICAMENTE NULO.

$$p(x) = (a-1)x^2 + bx + 2c-4$$

$$a-1=0 \rightarrow a=1$$

$$b=0$$

$$2c-4=0 \rightarrow 2c=4 \rightarrow c=2$$



* POLINÔMIOS IDÊNTICOS *

$p(x)$ e $q(x)$ SÃO IDÊNTICOS

$$p(x) = q(x) \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

$$p(x) \equiv q(x)$$

TODOS OS RESPECTIVOS COEFICIENTES SÃO IGUAIS

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$$

$$p(x) \equiv q(x)$$



$$a_0 = b_0 ; a_1 = b_1 ; a_2 = b_2 ; \dots ; a_n = b_n$$



$$p(x) = 3x^2 + (m+1)x + 5$$

$$q(x) = Kx^2 + 16x + 3n + 8$$

$$p(x) \equiv q(x)$$

$$K = 3$$

$$m+1 = 16$$

$$m = 15$$

$$3n + 8 = 5$$

$$n = -1$$



EXEMPLO

DETERMINE OS VALORES DE a , b E c PARA QUE TENHAMOS $p(x) \equiv q(x)$.

$$p(x) = 1x^3 + (a-1)x^2 + b+2$$

$$q(x) = (c+3)x^3 + dx + 1$$

$$c+3 = 1 \rightarrow \boxed{c = -2}$$

$$a-1 = 0 \rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\boxed{d = 0}$$

$$b+2 = 1 \rightarrow \boxed{b = -1}$$



* POLINÔMIOS EQUIVALENTES *

$p(x)$ e $q(x)$ SÃO EQUIVALENTES :

$$p(x) = K \cdot q(x)$$

$$K \neq 0$$

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & 1x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \\ & \searrow & \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\ q(x) & = & 3x^3 + 6x^2 - 9x + 15 \end{array}$$

$$q(x) = 3 \cdot p(x)$$



$$p(x) = 3x^2 + \overset{?}{m}x + 5$$

$$q(x) = 6x^2 + 14x + 3\overset{?}{n} - 2$$

$\downarrow x^2$
 $\downarrow x^2$
 $\downarrow x^2$

$p(x)$ e $q(x)$ SÃO EQUIVALENTES

$$14 = 2.m \rightarrow \boxed{m = 7}$$

$$3n - 2 = 5.2 \rightarrow 3n = 12$$

$$\boxed{n = 4}$$



PROPRIEDADE

POLINÔMIOS EQUIVALENTES POSSUEM
AS MESMAS RAÍZES.

DEM.: SEJA α RAÍZ DE $p(x)$
 $\hookrightarrow p(\alpha) = 0$

$$q(x) = K \cdot p(x); \quad K \neq 0$$

$$q(\alpha) = K \cdot \cancel{p(\alpha)}^0$$

$$\boxed{q(\alpha) = 0} \hookrightarrow \alpha \text{ É RAÍZ DE } q(x)$$



EXEMPLO

DETERMINE a , b e c PARA QUE $p(x)$ E $q(x)$ SEJAM EQUIVALENTES.

$$p(x) = a \cdot x^5 + 2x^3 + (c+1)x^2 + 3$$

$$q(x) = -4x^5 - 8x^3 - 16x^2 - d$$

$\downarrow (-4)$

$$q(x) = K \cdot p(x) \rightarrow K = \frac{-8}{2} = -4$$

$$-4 = a \cdot (-4) \rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$(c+1)(-4) = -16 \rightarrow c+1 = 4 \rightarrow \boxed{c = 3}$$

$$-d = 3(-4) \rightarrow -d = -12 \rightarrow \boxed{d = 12}$$



* GRAU DE UM POLINÔMIO *

É O MAIOR EXPOENTE DA VARIÁVEL.

$$p(x) = 2x^7 + 4x^2 + 1 \rightarrow \text{GRAU } 7$$

$$q(x) = 5^9 x^3 + 2x \rightarrow \text{GRAU } 3$$

NOTAÇÃO : $\partial(p(x))$

$$\text{O GRAU DE } p(x) \text{ É } 4 \equiv \begin{cases} \partial(p(x)) = 4 \\ \partial(p) = 4 \end{cases}$$

$$r(x) = 2x^2 + 4 \rightarrow \partial(r(x)) = 2$$

$$s(x) = x^9 \rightarrow \partial(s(x)) = 9$$



EXEMPLO

DETERMINE OS VALORES DE POLINÔMIOS ABAIXO.

PARA QUE $1, 3$ E -1 SEJAM
RAÍZES DE $a(x) = x^7 + 3x^5 \rightarrow \partial(a(x)) = 7$
 $p(x) = x^4 + ax + b$

$$b(x) = 1 + 7x^5 - 3x^2 \rightarrow \partial(b(x)) = 5$$

$$1^4 + a(1) + b = 0 \rightarrow a + b = -1$$

$$c(x) = x^8 + 5x^2 \rightarrow \partial(c(x)) = 8$$

$$p(-1) = 0$$

$$(-1)^4 + a(-1) + b = 0 \rightarrow \underline{-a + b = -1}$$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ -a + b = -1 \end{cases}$$

(+)

$$2b = -2$$

$$\boxed{b = -1}$$

$$a + (-1) = -1$$

$$\boxed{a = 0}$$

$$\underline{p(x) = x^4 - 1}$$

