Dominando o CÁLCULO

Livro das Respostas

Tem Ciência
Professor Daniel Nunes

Olá!

Atenção! Este é o Livro das Respostas, um livro proibido. Ou quase. Você deve evitar usar este livro o máximo que puder. Antes de recorrer a ele, passe primeiro pela Apostila de Aulas, e tente encontrar ali o que falta para você resolver algum problema específico. Esse processo é mais lento e doloroso, mas eu te garanto que será muito mais proveitoso para você construir um conhecimento muito mais sólido em Cálculo.

Então esse é o material que eu menos recomendo que você utilize, ok? Pense nele como seu último recurso, aquele que você deve adiar o máximo que puder. E nunca, jamais utilize o Livro das Respostas sem antes tentar bastante resolver o exercício. Porque só assim você irá tirar algum proveito da solução, pois já saberá onde está a dificuldade (já que você tentou resolver sem sucesso diversas vezes) e com isso irá reter de forma muito melhor a técnica ou o detalhe que faltavam para completar a sua solução.

Bons estudos!

Daniel Nunes

Índice

Parte I – Pré-Cálculo

CONJUNTOS

NÚMEROS

FUNÇÕES

SÉRIES INFINITAS

Exercício 1. Escreva com símbolos:

(a) o conjunto dos múltiplos inteiros de 3, entre -10 e 10;

(b) o conjunto dos divisores inteiros de 42;

(c) o conjunto dos múltiplos inteiros de 0;

(d) o conjunto das frações com numerador e denominador compreendidos entre 0 e 3.

(a) $\{n \in \mathbb{Z} \mid 3 \text{ divide } n, -10 < n < 10\}$

$= \{3n \mid n \in \mathbb{Z}, -3 \leq n \leq 3\}$

(b) $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$

(c) $\{0\}$

(d) $\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, 0 \leq p \leq 3, 0 < q \leq 3\}$

$= \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 3, \frac{3}{2}\}$

Exercício 2. Quais dos conjuntos abaixo são unitários?

$A = \left\{ x \,\middle|\, x < \dfrac{9}{4} \text{ e } x > \dfrac{6}{5} \right\}$

$B = \{ x \,|\, 0 \cdot x = 2 \}$

$C = \left\{ x \,\middle|\, x \text{ é inteiro e } x^2 = 3 \right\}$

$D = \{ x \,|\, 2x + 1 = 7 \}$

Somente D é unitário:

$D = \{3\}$

Temos $A = \left\{ \frac{6}{5} < x < \frac{9}{4} \right\}$, enquanto B e C são vazios.

Exercício 3. Quais dos conjuntos abaixo são vazios?

$A = \{x \,|\, 0 \cdot x = 0\}$

$B = \left\{x \,\middle|\, x > \dfrac{9}{4} \text{ e } x < \dfrac{6}{5}\right\}$

$C = \{x \,|\, x \text{ é divisor de zero }\}$

$D = \{x \,|\, x \text{ é divisível por zero }\}$

B é vazio pois $x > \frac{9}{4} = 2{,}25$ e $x < \frac{6}{5} = 1{,}2$ é impossível ao mesmo tempo.

$D = \emptyset$ também pois 0 não divide nenhum número.

Exercício 4. Sendo $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$, classifique em V ou F cada sentença abaixo e justifique.

(a) $A \subset D$ (b) $A \subset B$ (c) $B \subset C$ (d) $B \subset D$ (e) $C = D$

(a) V

(b) F, pois $1 \notin B$

(c) F, pois $2 \notin C$

(d) V

(e) F, pois $2 \notin C$

Exercício 5. Quais das igualdades abaixo são verdadeiras?

(a) $\{a, a, a, b, b\} = \{a, b\}$ (b) $\{x \mid x^2 = 4\} = \{x \mid x \neq 0 \text{ e } x^3 - 4x = 0\}$

(c) $\{x \mid 2x + 7 = 11\} = \{2\}$ (d) $\{x \mid x < 0 \text{ e } x \geqslant 0\} = \varnothing$

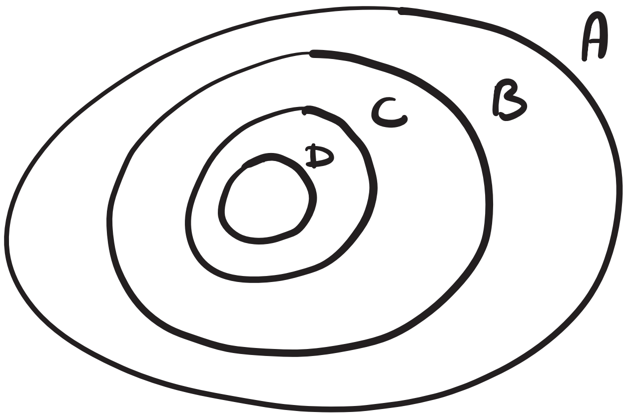
(a) V

(b) V

(c) V

(d) V

Exercício 6. Faça um diagrama de Venn que simbolize a situação seguinte: A, B, C e D são conjuntos não vazios, $D \subset C \subset B \subset A$.



Exercício 7. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$ e $C = \{c, e\}$, determine $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$.

$A \cup B = \{a, b, c, d\}$

$A \cup C = \{a, b, c, e\}$

$B \cup C = \{c, d, e\}$

$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e\}$

Exercício 8. Classifique em V ou F:

(a) $\varnothing \subset (A \cup B)$ (b) $(A \cup B) \subset A$ (c) $(A \cup B) \subset (A \cup B)$

(d) $B \subset (A \cup B)$ (e) $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$

(a) V (b) F, a menos que $B \subset A$

(c) V (d) V (e) V

Exercício 9. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ e $C = \{c, e, f\}$, determine $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.

$A \cap B = \{b, c, d\}$

$A \cap C = \{c\}$

$B \cap C = \{c, e\}$

$A \cap B \cap C = \{c\}$

Exercício 10. Classifique em V ou F:

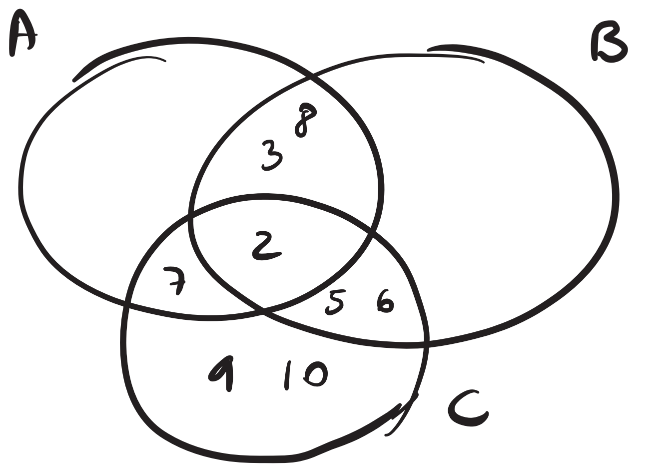
(a) $\varnothing \subset (A \cap B)$ (b) $A \subset (A \cap B)$ (c) $A \in (A \cap B)$

(d) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ (e) $(A \cap B) \subset B$ (f) $(A \cap B \cap C) \subset (A \cap B)$

(a) V (b) F, a menos que $A \subset B$

(c) F (d) V (e) V (f) V

Exercício 11. Sabe-se que $A \cup B \cup C = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 10\}$, $A \cap B = \{2, 3, 8\}$, $A \cap C = \{2, 7\}$, $B \cap C = \{2, 5, 6\}$ e $A \cup B = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 8\}$. Determine C.



$C = \{2, 5, 6, 7, 9, 10\}$

OBS: pode ser
$1 \in A \setminus B$ ou
$1 \in B \setminus A$

Exercício 12. Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$ e $C = \{b, d, e, g\}$. Determine:

(a) $A \backslash B$ (b) $B \backslash A$ (c) $C \backslash B$ (d) $(A \cup B) \backslash B$ (e) $A \backslash (B \cap C)$ (f) $(A \cup B) \backslash (A \cap C)$

(a) $A \backslash B = \{a, b\}$

(b) $B \backslash A = \{e, f, g\}$

(c) $C \backslash B = \{b\}$

(d) $(A \cup B) \backslash B = A \backslash B = \{a, b\}$

(e) $A \backslash (B \cap C) = \{a, b, c\}$

(d) $(A \cup B) \backslash (A \cap C) = \{a, c, e, f, g\}$

Exercício 13. Classifique em V ou F as seguintes sentenças:

(a) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

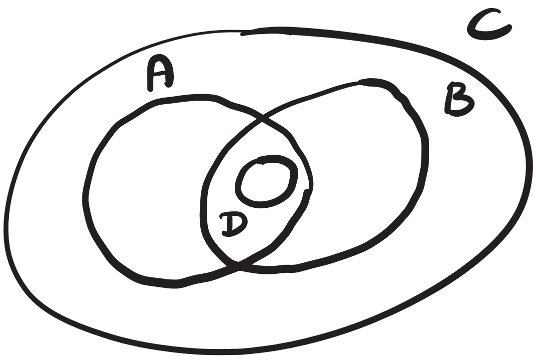
(b) se $A \subset B$, então $B^C \subset A^C$

(c) $A \backslash B \subset A^C$

(d) $A \backslash B \subset B^C$

(a) V (b) V (c) F (d) V

Exercício 14. Desenhe um diagrama de Venn representando quatro conjuntos, A, B, C e D, não vazios, de modo que se tenha $A \not\subset B$, $B \not\subset A$, $(A \cup B) \subset C$ e $D \subset (A \cap B)$.



Exercício 15. *(Leis de DeMorgan)* Mostre que

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Vamos provar primeiro que

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Seja $x \in A \setminus (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ e $x \notin B$, $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A \setminus B$ e $x \in A \setminus C$

$\Rightarrow x \in A \setminus B \cap A \setminus C$

$\Rightarrow A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Inversamente,

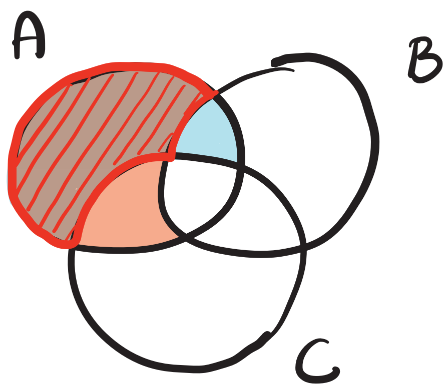
se $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, então

$x \in A$ e $x \notin B$, $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$

$\Rightarrow (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C)$

Logo, $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$



Agora vamos provar que

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Se $x \in A \setminus (B \cap C)$, temos

$x \in A$ e $x \notin B \cap C$

$\Rightarrow x \in A \setminus B$ ou $x \in A \setminus C$

$\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$\Rightarrow A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Inversamente, se

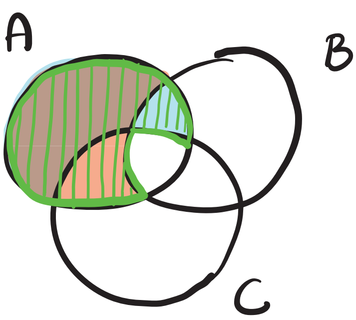
$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$\Rightarrow x \in (A \setminus B)$ ou $x \in A \setminus C$

$\Rightarrow x \in A \setminus (B \cap C)$

$\Rightarrow (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C)$

Logo, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$



Exercício 16. Classifique em V ou F as seguintes sentenças:

(a) se $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$, então $x \in A$ para ao menos um $A \in \mathcal{C}$

(b) se $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$, então $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{C}$

(c) se $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$, então $x \in A$ para ao menos um $A \in \mathcal{C}$

(d) se $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$, então $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{C}$

(a) V

(b) F. Por exemplo, $1 \in \{1\}$, $1 \notin \{2\}$, mas $1 \in \{1\} \cup \{2\}$.

(c) V. Note que a afirmação oposta é falsa: se $x \in A$ para ao menos um $A \in \mathcal{C}$, não é necessário que $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$, pois poderia haver algum $A \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin A$, e então $x \notin \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$.

(d) V

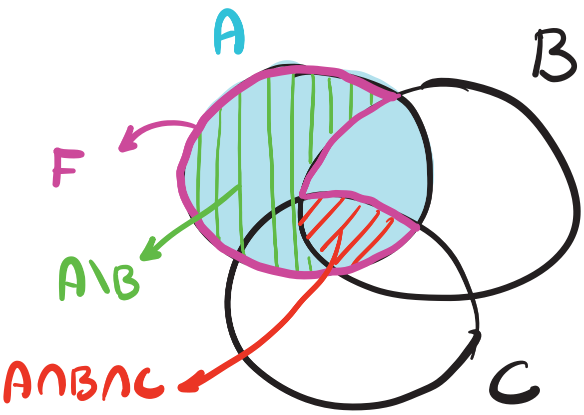
Exercício 17. Dados os conjuntos A, B e C, expresse cada um dos conjuntos abaixo em termos de A, B e C usando os símbolos de união, interseção e diferença de conjuntos:

$$D = \{x \mid x \in A \text{ e } (x \in B \text{ ou } x \in C)\}$$
$$E = \{x \mid (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } x \in C\}$$
$$F = \{x \mid x \in A \text{ e } (\text{se } x \in B, \text{ então } x \in C)\}$$

$D = A \cap (B \cup C)$

$E = (A \cap B) \cup C$

$F = A \setminus B \cup (A \cap B \cap C)$



Exercício 18. Prove as seguintes propriedades básicas de conjuntos:

(a) $(A^c)^c = A$ (b) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$ (c) $\left(\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A\right)^c = \bigcap_{A\in\mathcal{C}} A^c$ (d) $\left(\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A\right)^c = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A^c$

(a) $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$

(b) $x \in B^c \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A^c$

Logo $B^c \subset A^c$ se $A \subset B$.

(c) $x \in \left(\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A \Leftrightarrow$

$x \notin A \ \forall\, A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x \in A^c \ \forall\, A \in \mathcal{C}$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{A\in\mathcal{C}} A^c \Leftrightarrow$

(d) $\left(\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A\right)^c \underset{\text{por (a)}}{=} \left(\bigcap_{A\in\mathcal{C}} (A^c)^c\right)^c \underset{\text{por (c)}}{=} \left(\left[\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A^c\right]^c\right)^c$

$\underset{\text{por (a)}}{=} \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A^c$

Exercício 1. Expanda $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\
&= (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\
&= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}
$$

Exercício 2. Seja $H = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant n \leqslant 40,\ n \text{ múltiplo de } 2,\ n \text{ não múltiplo de } 3\}$. Qual é o número de elementos de H?

De 2 a 40 há 20 números múltiplos de 2. Os que também são múltiplos de 3 correspondem àqueles que são múltiplos de 6. Existem 6 múltiplos de 6 entre 2 e 40. Logo H tem $20 - 6 = 14$ elementos.

Exercício 3. Sendo $A = \{n \mid n = 2p - 1 \text{ e } p \in B\}$, qual é a condição sobre B para que A seja o conjunto dos números naturais ímpares?

$B = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Exercício 4. Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

(a) $0 \in \mathbb{N}$ (b) $(2-3) \in \mathbb{N}$ (c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (d) $(-3)^2 \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ (e) $(-4) \cdot (-5) \in \mathbb{N}$

(a) F pela nossa convenção de que $0 \notin \mathbb{N}$.

(b) F, $2-3=-1 \notin \mathbb{N}$

(c) V

(d) F, $(-3)^2 = 9 \in \mathbb{N}$

(e) V, $(-4)(-5) = 20 \in \mathbb{N}$

Exercício 5. Faça a decomposição em fatores primos dos seguintes números:

(a) 2024 (b) 91 (c) 735 (d) 456 (e) 231 (f) 4096

(a)
$$\begin{array}{r|l} 2024 & 2 \\ 1012 & 2 \\ 506 & 2 \\ 253 & 11 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array} \qquad 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$$

(b) $91 = 7 \cdot 13$

(c)
$$\begin{array}{r|l} 735 & 3 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

(d)
$$\begin{array}{r|l} 456 & 2 \\ 228 & 2 \\ 114 & 2 \\ 57 & 3 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad 456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19$$

(e)
$$\begin{array}{r|l} 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad 231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$$

(f)

$$
\begin{array}{r|l}
4096 & 2 \\
2048 & 2 \\
1024 & 2 \\
512 & 2 \\
256 & 2 \\
128 & 2 \\
64 & 2 \\
32 & 2 \\
16 & 2 \\
8 & 2 \\
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 &
\end{array}
\qquad 4096 = 2^{12}
$$

Exercício 6. Determine os seguintes números inteiros:

(a) $mdc(2, 3)$

(b) $mdc(-4, 6)$

(c) $mdc(-6, -14)$

(a) $mdc(2,3) = 1$

(b) $mdc(-4,6) = 2$

(c) $mdc(-6,-14) = 2$

Exercício 7. Mostre que se r_1 e r_2 são racionais, $r_1 < r_2$, então existe um racional r tal que $r_1 < r < r_2$.

Basta fazer

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Exercício 8. Avalie cada expressão sem usar calculadora:

(a) $(-3)^4$ (b) -3^4 (c) 3^{-4} (d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ (e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ (f) $16^{-3/4}$

(a) $(-3)^4 = 81$

(b) $-3^4 = -81$

(c) $3^{-4} = \dfrac{1}{81}$

(d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}} = 5^2 = 25$

(e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$

(f) $16^{-3/4} = \dfrac{1}{(2^4)^{3/4}} = \dfrac{1}{8}$

Exercício 9. Simplifique cada expressão. Escreva sua resposta sem expoentes negativos.

(a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$ (b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$ (c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

(a) $\sqrt{200} - \sqrt{32} = 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

(b) $3a^3b^3 \cdot (4ab^2)^2 = 48a^5b^7$

(c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3y^{7/2}}{x^{1/2}}\right)^{-2} = \dfrac{x}{9y^7}$

Exercício 10. Expanda e simplifique

(a) $3(x+6)+4(2x-5)$ (b) $(x+3)(4x-5)$ (c) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

(d) $(x+2)^3$ (e) $(2x+3)^2$

(a) $3x + 18 + 8x - 20 = 11x - 2$

(b) $4x^2 - 5x + 12x - 15 = 4x^2 + 7x - 15$

(c) $a - \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt{b} - b = a - b$

(d) $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

(e) $4x^2 + 12x + 9$

Exercício 11. Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

(a) $3 \in \mathbb{R}$ (b) $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$ (c) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (d) $\sqrt{4} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

(e) $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (f) $\sqrt{2} - 3\sqrt{3} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (g) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{18}} \in \mathbb{Q}$

(a) V

(b) F: o correto é $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ (contido).

(c) F, pois $1/2 \in \mathbb{Q}$

(d) F, pois $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$

(e) V

(f) V. Senão,

$$\sqrt{2} - 3\sqrt{3} = r \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow 2 - 6\sqrt{6} + 27 = r^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} = \frac{29 - r^2}{6} \in \mathbb{Q},$$

o que é falso pois $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

(g) V, pois

$$\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{18}} = \frac{3\sqrt{2}}{5 \cdot 9\sqrt{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15} \in \mathbb{Q}$$

Exercício 12. Mostre que se $a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ e $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ então $a + x, ax \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Vamos provar por absurdo.

Suponha que $a + x = r \in \mathbb{Q}$. Então

$$x = r - a \in \mathbb{Q}, \text{ absurdo.}$$

Da mesma forma, se $ax = r \in \mathbb{Q}$, então

$$x = \frac{r}{a} \in \mathbb{Q}, \text{ absurdo.}$$

Assim, $a + x$ e $ax \notin \mathbb{Q}$.

Exercício 13. Mostre que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2}$$

$$= 1+\sqrt{3}$$

Exercício 14. Racionalize a expressão e simplifique:

(a) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

(a) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2} \cdot \dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \dfrac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{5-4}$

$= (5 + 2\sqrt{5})\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$

(b) $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}$

$= \dfrac{\cancel{4}+h-\cancel{4}}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$

Exercício 15. Simplifique as expressões racionais:

(a) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{x+1}{x+2}$ (c) $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-9}\cdot\dfrac{x+3}{2x+1}$ (d) $\dfrac{\frac{y}{x}-\frac{x}{y}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$

(a) $$\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}=\frac{\cancel{(x+1)}(x+2)}{\cancel{(x+1)}(x-2)}=\frac{x+2}{x-2}$$

(b) $$\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}-\frac{x+1}{x+2}=\frac{x^2-(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+2x-x+2}{(x-2)(x+2)}=\frac{\cancel{x+2}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}=\frac{1}{x-2}$$

(c) $$\frac{2x^2-x-1}{(x-3)(x+3)}\cdot\frac{x+3}{2x+1}$$

$$=\frac{\cancel{(2x+1)}\cdot(x-1)\cdot\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}\cancel{(2x+1)}}=\frac{x-1}{x-3}$$

(d) $$\frac{\frac{y}{x}-\frac{x}{y}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{y^2-x^2}{\cancel{xy}}}{\frac{x-y}{\cancel{xy}}}=\frac{\cancel{(y-x)}(y+x)}{-\cancel{(y-x)}}$$

$$=-(x+y)$$

Exercício 16. Diga se cada equação é verdadeira ou falsa:

(a) $(p+q)^2 = p^2 + q^2$ (b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (c) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

(d) $\dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ (e) $\dfrac{1+TC}{C} = 1+T$ (f) $\dfrac{1/x}{a/x - b/x} = \dfrac{1}{a-b}$

(a) F: $(1+1)^2 = 2^2 = 4 \neq 2 = 1^2 + 1^2$

(b) V

(c) F: $\sqrt{3^2+4^2} = 5 \neq 7 = 3+4$

(d) F: $\dfrac{1}{2-1} = 1 \neq -\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1}$

(e) F: $\dfrac{1+1\cdot 2}{2} = \dfrac{3}{2} \neq 2 = 1+1$

(f) V

Exercício 17. Suponha que t seja um número irracional. Explique por que $1/t$ também é irracional.

Se $\frac{1}{t} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, então $t = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, absurdo. Assim, $t \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1/t \notin \mathbb{Q}$.

Exercício 18. Dê um exemplo de dois números irracionais cuja soma seja irracional.

$\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ pois, caso contrário,

se $\sqrt{2}+\sqrt{3} = r \in \mathbb{Q}$, teríamos

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} = r^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} = \frac{r^2-5}{2} \in \mathbb{Q},$$

o que é falso pois $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

Exercício 19. Dê um exemplo de dois números irracionais cuja soma seja racional.

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1$$

Exercício 20. Expanda a expressão dada:

(a) $(x-y)(z+w-t)$

(b) $(x+y-r)(z+w-t)$

(c) $(x+y+z)^2$

(d) $(x+1)(x-2)(x+3)$

(e) $(b-3)(b+3)(b^2+9)$

(f) $xy(x+y)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$

(g) $(m-2)(m^4+2m^3+4m^2+8m+16)$

(a) $(x-y)\cdot(z+w-t)$

$= xz + xw - xt - yz - yw + yt$

(b) $(x+y-r)(z+w-t)$

$= xz + xw - xt + yz + yw - yt - rz - rw + rt$

(c) $(x+y+z)^2 = (x+y)^2 + 2z(x+y) + z^2$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$

(d) $(x+1)(x-2)(x+3) = (x+1)(x^2+x-6)$

$= x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6$

$= x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

(e) $(b-3)(b+3)(b^2+9) = (b^2-9)(b^2+9)$

$= b^4 - 81$

(f) $xy(x+y)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) = \cancel{xy}(x+y)\frac{(y-x)}{\cancel{xy}}$

$= y^2 - x^2$

(g) $(m-2)(m^4+2m^3+2^2m^2+2^3m+2^4)$

$= m^5 - 2^5 = m^5 - 32$

Exercício 21. Simplifique as expressões dadas o máximo possível:

(a) $4(2m+3n)+7m$ (b) $3(2m+4(n+5p))+6n$ (c) $\frac{3}{4}+\frac{6}{7}$

(d) $\frac{3}{10}+\frac{7}{8}$ (e) $\frac{3}{4}\cdot\frac{14}{39}$ (f) $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{3}}$

(g) $\frac{1}{x-y}\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$ (h) $\frac{\frac{x-4}{y+3}}{\frac{y-3}{x+4}}$ (i) $\frac{\frac{a-t}{b-c}}{\frac{b+c}{a+t}}$

(j) $\frac{(x+a)^2-x^2}{a}$ (k) $\frac{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}{a}$ (l) $\frac{2}{5}\cdot\frac{m+3}{7}+\frac{1}{2}$

(a) $8m+12n+7m = 15m+12n$

(b) $3(2m+4n+20p)+6n = 6m+18n+60p$

(c) $\frac{3}{4}+\frac{6}{7} = \frac{21+24}{28} = \frac{45}{28}$

(d) $\frac{3}{10}+\frac{7}{8} = \frac{24+70}{80} = \frac{94}{80} = \frac{47}{40}$

(e) $\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{\cancel{14}^7}{\cancel{39}_{13}} = \frac{7}{26}$

(f) $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{2} = \frac{15}{14}$

(g) $\frac{1}{x-y}\cdot\frac{x^2-y^2}{xy} = \frac{x+y}{xy}$

(h) $\frac{x-4}{y+3}\cdot\frac{x+4}{y-3} = \frac{x^2-16}{y^2-9}$

(i) $\frac{a-t}{b-c}\cdot\frac{a+t}{b+c} = \frac{a^2-t^2}{b^2-c^2}$

(j) $\frac{(x+a)^2-x^2}{a} = \frac{2ax+a^2}{a} = 2x+a$

(k) $$\frac{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}{a} = \frac{\cancel{x}-\cancel{x}-a}{x(x+a)a} = \frac{-1}{x(x+a)}$$

(ℓ) $$\frac{2}{5}\cdot\frac{m+3}{7}+\frac{1}{2} = \frac{4m+12+35}{70}$$

$$= \frac{4m+47}{70}$$

Exercício 22. Demonstre que $(a+1)^2 = a^2 + 1$ se e somente se $a = 0$.

$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a^2 + 1$

$\iff 2a = 0 \iff a = 0$

Exercício 23. Dentre os reais $-1, 0, 1, 2$ e 3, qual não pode ser escrito sob a forma $r = \dfrac{x+1}{x}$, com $x \in \mathbb{R}$?

$$r = \frac{x+1}{x} \iff xr = x + 1$$

$$\iff (r-1)x = 1 \iff x = \frac{1}{r-1}$$

Assim, $\forall\, r \neq 1$, podemos escrever

$$r = \frac{x+1}{x} \quad \text{com} \quad x = \frac{1}{r-1}.$$

Se $r = 1$, não é possível pois

$$1 = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x = x + 1 \Rightarrow 0 = 1,$$

absurdo.

Exercício 24. Sejam $a, b \in [0, \infty)$. Mostre que

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$$

Note que

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2.$$

Assim,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \leq \frac{2 \cdot (a^2 + b^2)}{4}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2}$$

Exercício 25. Prove que se p é primo então $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Conclua que se $n \in \mathbb{N}$ for tal que sua decomposição em fatores primos possua potência ímpar de algum primo, então $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

Se $\sqrt{p}$ fosse racional, então haveria $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $mdc(a,b) = 1$ e

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}$$

Então

$$p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow b^2 p = a^2 \Rightarrow p \text{ divide } a$$

Logo, existe $\tilde{a} \in \mathbb{N}$ tal que

$$a = p \cdot \tilde{a}$$

Assim,

$$\sqrt{p} = \frac{\tilde{a} p}{b} \Rightarrow \frac{b}{\tilde{a}} = \sqrt{p}.$$

De forma análoga, isso implica que p divide b. Mas então p é divisor comum de a e b, contrariando a suposição de que $mdc(a,b) = 1$. Essa contradição prova que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

Seja n um inteiro tal que haja algum primo na decomposição de n que tenha potência ímpar. Vamos mostrar que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

Sejam $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ todos os primos na decomposição de n com potências ímpares.

Suponha por absurdo que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$.
Então, como $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$, segue que se $\sqrt{n} = r \in \mathbb{Q}$ então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt{n} = \sqrt{p_1 \cdots p_k} \cdot m = r$$

$$\Rightarrow \sqrt{p_1 \cdots p_k} = \frac{r}{m} \in \mathbb{Q}.$$

O mesmo argumento que usamos para provar que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ mostra que $\sqrt{p_1 \cdots p_k} \notin \mathbb{Q}$: senão, existiriam $a, b \in \mathbb{N}$ primos entre si tais que

$$\sqrt{p_1 \cdots p_k} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow (p_1 \cdots p_k)\, b^2 = a^2$$

$$\Rightarrow p_1 \cdots p_k \text{ divide } a.$$

$$\Rightarrow a = \tilde{a}\, p_1 \cdots p_k \quad (\tilde{a} \in \mathbb{N}).$$

Daí,

$$\sqrt{p_1 \cdots p_k} = \frac{\tilde{a}\, p_1 \cdots p_k}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\tilde{a}} = \sqrt{p_1 \cdots p_k}$$

$\Rightarrow p_1 \cdots p_k$ divide b, absurdo pois também divide a e $mdc(a, b) = 1$.
Assim, $\sqrt{p_1 \cdots p_k} \notin \mathbb{Q}$, concluindo a prova de que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ quando n tem fator primo com potência ímpar.

Exercício 26. Prove que se a, b, c e d são racionais, p é primo positivo e $a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p}$, então $a = c$ e $b = d$.

$$a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p}$$

$$\Rightarrow a - c = (b - d)\sqrt{p}$$

Se $b - d \neq 0$, então

$$\sqrt{p} = \frac{a-c}{b-d} \in \mathbb{Q},$$

absurdo em face do exercício anterior.

Assim, $b - d = 0 \Rightarrow a - c = 0$, e então

$a = c$ e $b = d$.

Exercício 1. Demonstre, usando o princípio da indução finita, que:

(a) $2+5+8+\ldots+(2+3n)=\dfrac{(n+1)(4+3n)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(c) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(d) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(e) 8 divide $3^{2n}-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(f) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(g) $(1+1)\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=n+1$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(h) $2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Para $n=1$,

$$2+5=7=\frac{(1+1)(4+3)}{2},$$

portanto vale para $n=1$.

Assuma válido para n como hipótese de indução:

$$2+5+8+\cdots+(2+3n)=\frac{(n+1)(4+3n)}{2}$$

Temos

$$2+5+8+\cdots+(2+3n)+[2+3(n+1)]$$

$$=\frac{(n+1)(4+3n)}{2}+2+3(n+1)$$

$$=\frac{4(n+1)+3n(n+1)+4+6(n+1)}{2}$$

$$=\frac{4(n+2)+3(n+2)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)\cdot[4+3(n+1)]}{2},$$

e então a fórmula vale também para $n+1$. Segue por indução que vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Se $n=1$,

$$2^0 = 1 = 2^1 - 1,$$

então vale a fórmula.

Assuma válida para n como hipótese de indução:

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Temos

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n$$
$$= 2^{n+1} - 1,$$

e então a fórmula vale também para $n+1$. Segue por indução que vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Se $n=1$, temos

$$1 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6},$$

então vale a fórmula.

Assuma válida para n como hipótese de indução:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Temos

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6},$$

e então a fórmula vale também para $n+1$. Segue por indução que vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

(d) Se $n = 1$,

$$1^3 = 1 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2,$$

então vale a fórmula.

Assuma válida para n como hipótese de indução:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Temos

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$

$$=\frac{(n+1)^2\cdot(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{2^2},$$

e então a fórmula vale também para $n+1$. Segue por indução que vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

(e) Se $n=1$,

$3^2-1=8$, e a afirmação vale.

Assuma válida para n como hipótese de indução:

8 divide $3^{2n}-1$

Temos

$$3^{2(n+1)}-1=\quad 9\cdot 3^{2n}-1=9(3^{2n}-1)+8$$

Como 8 divide $3^{2n}-1$, segue que 8 divide $9\cdot(3^{2n}-1)+8=3^{2(n+1)}-1$.

Ou seja, a afirmação vale também para $n+1$. Segue por indução que vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

(f) Se $n=1$,

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

então vale a fórmula.

Assuma válida para n como hipótese de indução:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Temos

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2},$$

e então a fórmula vale também para $n+1$. Segue por indução que vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

(g) Se $n=1$,

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)=2=1+1,$$

então vale a fórmula.

Assuma válida para n como hipótese de indução:

$$(1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$

Temos

$$(1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=(n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=n+1+1=n+2,$$

e então a fórmula vale também para $n+1$. Segue por indução que vale $\forall n\in\mathbb{N}$.

(h) Se $n=1$,

$$2^1>1,$$

então vale a afirmação.

Assuma válida para n como hipótese de indução:

$$2^n>n$$

Temos

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n = n + n \geq n + 1$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} > n+1,$$

e então a afirmação vale também para $n+1$. Segue por indução que vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercício 2. Dado um número natural a, seja $Y \subset \mathbb{N}$ um conjunto com as seguintes propriedades:

(i) $a \in Y$;

(ii) $n \in Y \Rightarrow n + 1 \in Y$.

Prove que Y contém todos os números naturais maiores do que ou iguais a a.

Seja $X = \{n \in \mathbb{N} \mid a+n \in Y\}$

Como $a \in Y$, temos $a+1 \in Y$ por (ii).

Logo, $1 \in X$.

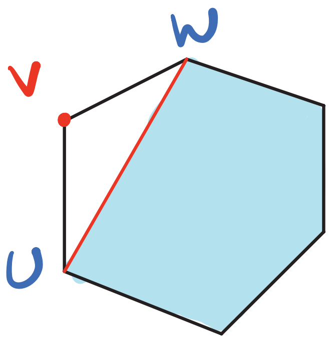
A propriedade (ii) diz que se $n \in X$, então $a+n \in Y \Rightarrow a+n+1 \in Y$, logo, $n+1 \in X$. Assim, pelo princípio da indução, temos que $X = \mathbb{N}$.

Logo, $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq a\}$.

Exercício 3. Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Se $n=3$, temos um triângulo, que não possui diagonais. Portanto, vale a fórmula nesse caso.

Suponha que a fórmula seja válida para todo polígono convexo com exatamente n lados, e considere um polígono convexo com $n+1$ lados.



Escolha um vértice V. Repare que se retirarmos V e considerarmos o polígono formado pelos demais lados e mais a diagonal entre os vértices adjacentes a V (U e W), obtemos um polígono convexo de n lados, P'.

As diagonais do polígono original são as mesmas de P' mais UW e mais as $n-2$ diagonais traçadas a partir de V. Portanto, o total de diagonais é

$$d_n + 1 + n - 2 = \frac{n(n-3)}{2} + (n-1)$$

$$= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n-2)}{2},$$

e então a fórmula também vale para um polígono convexo de $n+1$ lados.

Assim, por indução,

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2} \quad \forall\ n \geqslant 3,\ n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 1. Ache os valores numéricos das seguintes somas:

(a) $\sum_{k=1}^{4} k$ (b) $\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2}$ (c) $\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{4} n^n$ (e) $\sum_{i=0}^{5}(2i+1)$

(a) $\sum_{k=1}^{4} k = 1+2+3+4 = 10$

(b) $\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 1+2+4+8 = 15$

(c) $\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1} = 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7$

$= 2 + 8 + 32 + 128 = 170$

(d) $\sum_{n=1}^{4} 1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 = 1 + 4 + 27 + 256$

$= 288$

(e) $\sum_{i=0}^{5} (2i+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

$= 36$

Exercício 2. Escreva as seguintes somas na notação de somatório:

(a) $2 + 4 + 6 + \ldots + 100$ (b) $1 + 3 + 5 + \ldots + 201$ (c) $\frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \frac{5}{81} + \ldots + \frac{5}{3^{40}}$

(a) $\sum_{n=1}^{50} 2n$

(b) $\sum_{n=0}^{100} 2n + 1$

(c) $\sum_{n=2}^{40} \frac{5}{3^n}$

Exercício 3. Diga se é V ou F (e justifique):

(a) $\sum_{n=0}^{100} n^4 = \sum_{n=1}^{100} n^4$ (b) $\sum_{i=1}^{100} (i+1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2$ (c) $\sum_{j=0}^{100} 2 = 200$

(d) $\sum_{k=0}^{100} (2+k) = 2 + \sum_{k=0}^{100} k$ (e) $\sum_{k=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{100} k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} k^2\right)$ (f) $\sum_{k=0}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{100} k\right)^3$

(a) V: somar 0 não altera

(b) F: $\sum_{i=1}^{100} (i+1)^2 = \sum_{i=2}^{101} i^2$

(c) F: $\sum_{j=0}^{100} 2 = 2 \cdot \underbrace{101}_{} = 202$

de 0 a 100 são 101 termos

(d) F: $\sum_{k=0}^{100} (2+k) = 2 \cdot 101 + \sum_{k=0}^{100} k$

(e) F: Basta olhar para somas de apenas 2 números:

$$(1+2) \cdot (1+2^2) = 3 \cdot 5 = 15$$

ao passo que

$$1+2^3 = 8$$

(f) F: Basta olhar para somas de apenas 2 números:

$$(1+2)^3 = 3^3 = 27$$

ao passo que

$$1+2^3 = 8$$

Exercício 4. Mostre que

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

(*Sugestão:* $2k-1 = k^2-(k-1)^2$)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}\left[k^2-(k-1)^2\right] = \sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$$

$$= n^2$$

Exercício 5. Escreva sob a forma de somatório e encontre o valor da expressão

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

Exercício 1. Calcule:

(a) $\binom{9}{3}$ (b) $\binom{11}{4}$ (c) $\binom{9}{6}$ (d) $\binom{11}{7}$ (e) $\binom{n}{n}$ (f) $\binom{n}{n-1}$ (g) $\binom{n}{0}$

(a) $\binom{9}{3} = \dfrac{9!}{3!6!} = \dfrac{\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}^{4}\cdot 7\cdot\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84$

(b) $\binom{11}{4} = \dfrac{11!}{4!7!} = \dfrac{11\cdot 10\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{7!}}{\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{7!}} = 330$

(c) $\binom{9}{6} = \dfrac{9!}{3!6!} = \binom{9}{3} = 84$

(d) $\binom{11}{7} = \dfrac{11!}{4!7!} = \binom{11}{4} = 330$

(e) $\binom{n}{n} = \dfrac{\cancel{n!}}{0!\cancel{n!}} = 1$

(f) $\binom{n}{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!1!} = \dfrac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$

(g) $\binom{n}{0} = \dfrac{\cancel{n!}}{0!\,\cancel{n!}} = 1$

Exercício 2. Demonstre que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = 2^n$$

Pelo teorema do binômio,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercício 3. Expanda e simplifique:

(a) $\left(2-\sqrt{3}\right)^5$ (b) $\left(3-\sqrt{6}\right)^6$

(a) Vamos usar o triangulo de Pascal para descobrir $\binom{5}{k}$:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Assim,

$$(2-\sqrt{3})^5 = 2^5 - 5\cdot 2^4\cdot\sqrt{3} + 10\cdot 2^3\cdot 3 - 10\cdot 2^2\cdot 3\sqrt{3} + 5\cdot 2\cdot 3^2 - \sqrt{3}\cdot 3^2$$

$$\Rightarrow (2-\sqrt{3})^5 = 32 - 80\sqrt{3} + 240 - 120\sqrt{3} + 90 - 9\sqrt{3}$$

$$= 362 - 209\sqrt{3}$$

(b) Aproveitando o triangulo de Pascal anterior, determinamos $\binom{6}{k}$:

1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Assim,

$$(3-\sqrt{6})^6 = \left[\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right]^6 = 3^3\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6$$

Temos

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6 = 3^3 - 6\cdot 3^2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} + 15\cdot 3^2\cdot 2$$

$$- 20\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2} + 15\cdot 3\cdot 2^2 - 6\cdot\sqrt{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{2} + 2^3$$

$$= 27 - 54\sqrt{6} + 270 - 120\sqrt{6} + 180 - 24\sqrt{6} + 8$$

$$= 485 - 198\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow (3-\sqrt{6})^6 = 27\cdot(485 - 198\sqrt{6})$$

$$= 13.095 - 5.346\sqrt{6}$$

Exercício 4. Determine a décima linha do triângulo de Pascal.

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Exercício 5. Determine o coeficiente de t^{47} na expansão de $(t+2)^{50}$.

Pelo teorema do binômio,

$$(t+2)^{50} = \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} t^k \cdot 2^{50-k}$$

Assim, o coeficiente em t^{47} ocorre para $k = 47$ e vale

$$\binom{50}{47} \cdot 2^{50-47} = \frac{50 \cdot 49 \cdot \overset{8}{\cancel{48}} \cdot \cancel{47!}}{\cancel{47!} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} \cdot 8 = 156.800$$

Exercício 6. Determine o coeficiente de w^{198} na expansão de $(w+3)^{200}$.

Pelo teorema do binômio,

$$(w+3)^{200} = \sum_{k=0}^{200} \binom{200}{k} w^k \cdot 3^{200-k}$$

Assim, o coeficiente em w^{198} ocorre para $k = 198$ e vale

$$\binom{200}{198} \cdot 3^2 = \frac{\overset{100}{\cancel{200}} \cdot 199 \cdot \cancel{198!}}{\cancel{198!} \cdot \cancel{2!}} \cdot 9 = 179.100$$

Exercício 7. Demonstre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Exercício 8. Explique por que

$$\sum_{m=1}^{1000} m^2 = \sum_{m=0}^{999} (m^2 + 2m + 1)$$

$$\sum_{m=1}^{1000} m^2 = \sum_{m=0}^{999} (m+1)^2 = \sum_{m=0}^{999} (m^2 + 2m + 1)$$

Exercício 9. Expanda na forma de produto do maior número de fatores com coeficientes reais que conseguir:

(a) (a^7+b^7) (b) $(1-t^6)$ (c) $(x^{2^n}-1)$

(a) a^7+b^7

$= (a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$

(b) $(1-t^6) = (1-t^3)(1+t^3)$

$= (1-t)(1+t+t^2)(1+t)(1-t+t^2)$

(c) $(x^{2^n}-1) = (x^{2^{n-1}}-1)(x^{2^{n-1}}+1)$

$= (x^{2^{n-2}}-1)(x^{2^{n-2}}+1)(x^{2^{n-1}}+1)$

$= \cdots = (x^2-1)(x^2+1)(x^{2^2}+1)\cdots(x^{2^{n-1}}+1)$

$= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^{2^2}+1)\cdots(x^{2^{n-1}}+1)$

$= (x-1)\prod_{k=0}^{n-1}(x^{2^k}+1)$

Exercício 10. Prove as seguintes identidades:

(a) $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

(b) $1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

(c) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n(2^{n-1})$

(d) $1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

(a) Pelo teorema do binômio,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

(b) Pelo teorema do binômio,

$$0 = 0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$$

(c)
$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\cdot n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{k}\cdot n\cdot(n-1)!}{\cancel{k}(k-1)!\,[n-1-(k-1)]!}$$

$$= n\cdot\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$$

$$= n\cdot(1+1)^{n-1} = n\cdot 2^{n-1}$$

pelo teorema do binômio.

(d) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,[(n+1)-(k+1)]!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \left[-1 + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \left[-1 + (1+1)^{n+1}\right] = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Exercício 11. Determine a soma de todos os inteiros positivos com quatro dígitos.

É a soma de 1000 até 9999:

$$S = \sum_{n=1000}^{9999} n = \sum_{n=1}^{9999} n - \sum_{n=1}^{999} n$$

$$= \frac{9999.(9999+1)}{2} - \frac{999.(999+1)}{2}$$

$$= \frac{9999.10.000 - 999.1000}{2}$$

$$= 500.(99.990 - 999)$$

$$= 500.98.991$$

$$= 49.495.500$$

Exercício 12. Determine a soma de todos os inteiros positivos ímpares com quatro dígitos.

A soma dos ímpares é

$$S = \sum_{n=500}^{4999} (2n+1) = 2\left(\sum_{n=500}^{4999} n\right) + (5000 - 500)$$

$$= 2\cdot\left(\sum_{n=1}^{4999} n - \sum_{n=1}^{499} n\right) + 4500$$

$$= 2\cdot\left(\frac{4999.5000 - 499.500}{2}\right) + 4500$$

$$= 500\cdot(49.990 - 499) + 4500$$

$$= 500.49491 + 4500 = 24.750.000$$

Exercício 13. Calcule:

(a) $302 + 305 + 308 + \ldots + 6002 + 6005 + 6008$

(b) $300 + 293 + 286 + \ldots + 55 + 48 + 41$

(c) $\sum_{m=1}^{80} (4 + 5m)$

(d) $\sum_{k=10}^{900} (3k - 2)$

(a) $$\sum_{n=0}^{1902} 302 + 3n = 302 \cdot 1903 + 3 \cdot \frac{1902 \cdot 1903}{2}$$
$$= 6.003.965$$

(b) $$\sum_{n=0}^{37} 300 - 7n = 300 \cdot 38 - 7 \cdot \frac{37 \cdot 38}{2}$$
$$= 6479$$

(c) $$\sum_{m=1}^{80} (4 + 5m) = 4 \cdot 80 + 5 \cdot \frac{80 \cdot 81}{2}$$
$$= 16.520$$

(d) $$\sum_{k=10}^{900} (3k-2) = 3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{900} k - \sum_{k=1}^{9} k \right) - 2 \cdot (900 - 10)$$
$$= 3 \cdot \frac{900 \cdot 901}{2} - 3 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} - 2 \cdot 891$$
$$= 1.214.433$$

Exercício 14. Determine a soma dos 100 primeiros inteiros positivos que deixam resto 3 na divisão por 7.

São números da forma

$$7n + 3$$

$$S = \sum_{n=0}^{99} 7n+3 = 7 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} + 300$$

$$= 34950$$

Exercício 15. Se $3 - x, -x, \sqrt{9-x}, \ldots$ é uma progressão aritmética, determine x e calcule o quinto termo.

Como é PA, a diferença entre um termo e seu antecessor é constante. Então

$$-x - (3 - x) = \sqrt{9-x} - (-x)$$

$$\Rightarrow -3 = \sqrt{9-x} + x$$

$$\Rightarrow -\sqrt{9-x} = x + 3$$

$$\Rightarrow \cancel{9} - x = x^2 + 6x + \cancel{9}$$

$$\Rightarrow x(x+7) = 0$$

Repare que $x = 0$ não serve:

$$3, 0, 3, \ldots$$

não é PA. Com $x = -7$, temos

$$10, 7, 4, \ldots$$

Ou seja, a razão é -3 e o 5° termo será $4 - 2 \cdot 3 = -2$.

Exercício 16. Podem os números $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ pertenceram a uma mesma progressão aritmética?

Se eles estivessem na mesma PA, haveria $q \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\sqrt{3} = \sqrt{2} + n \cdot q \quad \text{e} \quad \sqrt{5} = \sqrt{2} + m \cdot q,$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{2} = nq \quad \text{e} \quad \sqrt{5} - \sqrt{2} = mq$$

Assim,

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{m}{n} = r \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \frac{5 - 2\sqrt{10} + 2}{3 - 2\sqrt{6} + 2} = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{5 - 2\sqrt{6}} = r^2 \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow 7 - 2\sqrt{10} = 5 \cdot r^2 - 2r^2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \frac{7 - 5 \cdot r^2}{2} = \sqrt{10} - r^2\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{5} - r^2\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{7 - 5 \cdot r^2}{2}\right)^2 = 2 \cdot 5 - 2r^2\sqrt{15} + r^4 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{15} = \frac{1}{2r^2} \cdot \left[10 + 3r^4 - \left(\frac{7 - 5r^2}{2}\right)^2\right] = s,$$

onde $s \in \mathbb{Q}$. Ou seja $\sqrt{15}$ seria um número racional o que é falso:

se $\sqrt{15} = \frac{u}{v}$, com $u, v \in \mathbb{N}$ e $mdc(u, v) = 1$, então

$$15 = \frac{u^2}{v^2} \Rightarrow 15v^2 = u^2$$

$\Rightarrow$ 15 divide $u \Rightarrow u = 15 \cdot \tilde{u}$, $\tilde{u} \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$\sqrt{15} = 15\frac{\tilde{u}}{v} \Rightarrow \frac{v}{\tilde{u}} = \sqrt{15}.$$

O mesmo raciocínio de antes prova que $v = 15\tilde{v}$. Mas então u e v têm 15 como divisor comum, contradição com a hipótese de que $mdc(u, v) = 1$.

Assim, $\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$, e por conta disso não pode haver uma PA da qual $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ sejam termos.

Exercício 17. Calcule:

(a) $\sum_{k=1}^{40} \frac{3}{2^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{90} \frac{5}{7^k}$ (c) $\sum_{m=5}^{91} (-2)^m$ (d) $\sum_{m=3}^{77} (-5)^m$

(a) $3\sum_{k=1}^{40} \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{40}}{1-\frac{1}{2}} = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{40}}\right)$

(b) $5\sum_{k=1}^{90} \frac{1}{7^k} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1-\frac{1}{7^{90}}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{5}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{7^{90}}\right)$

(c) $\sum_{m=5}^{91} (-2)^m = (-2)^5 \cdot \frac{(-2)^{87}-1}{(-2)-1} = \frac{-32}{3}\left(2^{87}+1\right)$

(d) $\sum_{m=3}^{77} (-5)^m = (-5)^3 \cdot \frac{(-5)^{75}-1}{-5-1} = \frac{-5}{6} \cdot \left(5^{75}+1\right)$

Exercício 18. Quanto vale o produto $(a)(aq)(aq^2)(aq^3)...(aq^{n-1})$?

$$P = a^n \cdot q^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = a^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Exercício 19. Calcule o valor da soma de n parcelas $1 + 11 + ... + 111...1$.

$$S = \underbrace{1}_{a_1} + \underbrace{11}_{a_2} + \underbrace{111}_{a_3} + \cdots + \underbrace{111\cdots1}_{a_n}$$

Temos

$$a_k = \sum_{\ell=0}^{k-1} 10^\ell = \frac{10^k - 1}{10 - 1} = \frac{10^k - 1}{9}$$

Daí,

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{10^k - 1}{9}$$

$$= \frac{10}{9} \sum_{k=1}^{n} 10^{k-1} - \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{10}{9} \sum_{t=0}^{n-1} 10^t - \frac{n}{9} = \frac{10}{9} \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - \frac{n}{9}$$

$$= \frac{10}{9} \cdot \frac{10^n - 1}{9} - \frac{n}{9}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$$

Exercício 20. Mostre que o número 444...488...89, formado por n dígitos iguais a 4, $n-1$ dígitos iguais a 8 e um dígito igual a 9, é um quadrado perfeito (ou seja, k^2 para algum $k \in \mathbb{N}$). Determine a sua raiz quadrada.

$$x = \underbrace{4\cdots4}_{n\times}\underbrace{8\cdots8}_{(n-1)\times}9$$

$$= 4\cdot10^n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}10^k + 8\cdot10\cdot\sum_{k=0}^{n-2}10^k + 9$$

$$= 4\cdot10^n\cdot\frac{10^n-1}{9} + 8\cdot10\cdot\frac{10^{n-1}-1}{9} + 9$$

$$= \frac{4\cdot10^{2n}}{9} - \frac{4\cdot10^n}{9} + \frac{8\cdot10^n}{9} - \frac{80}{9} + \frac{81}{9}$$

$$= \frac{4\cdot10^{2n}}{9} + \frac{4\cdot10^n}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{(2\cdot10^n)^2 + 2\cdot(2\cdot10^n) + 1}{9}$$

$$= \left(\frac{2\cdot10^n+1}{3}\right)^2 = k^2, \quad \text{com } k \in \mathbb{N}$$

pois

$$k = \frac{2\cdot10^n+1}{3} = \frac{2\cdot(9+1)^n+1}{3}$$

$$= \frac{2\cdot\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l}3^{2l} + 3}{3} = 2\cdot\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l}3^{2l-1} + 1 \in \mathbb{N}$$

Com isso,

$$\sqrt{x} = k = \frac{2\cdot10^n+1}{3}$$

Exercício 21. Determine os limites das somas abaixo:

(a) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots$

(b) $\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + \ldots$

(c) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$, onde $-1 < x < 1$

(d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \ldots$

(a) $$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 3$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^{2n}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} + \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{49}}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{9}{48} = \frac{3}{16}$$

(c)

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

$$\Rightarrow xS = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$$

$$\Rightarrow S - xS = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4 - 2 = 2,$$

onde fizemos uso do item (c) para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^{n-1} = \frac{1}{(1 - 1/2)^2}$

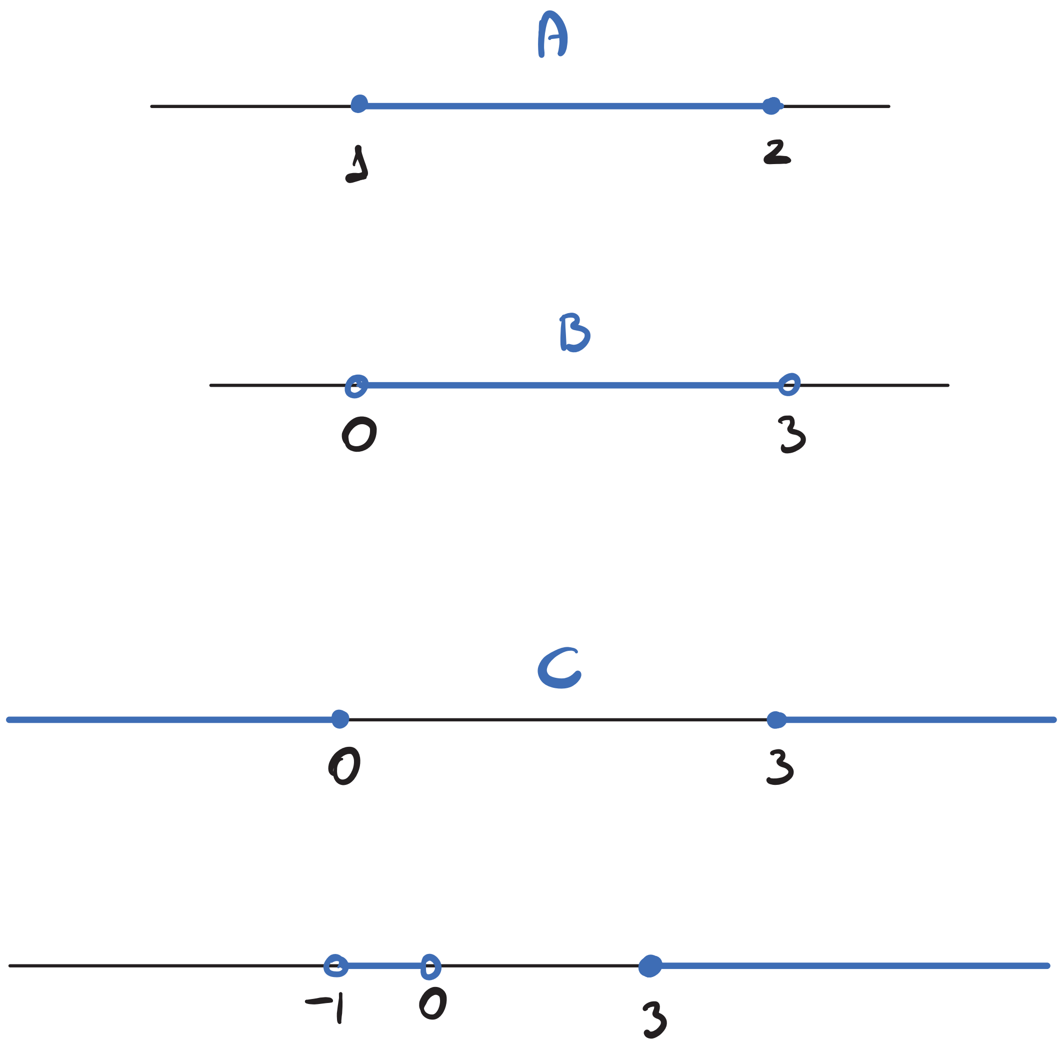
Exercício 1. Represente sobre a reta real cada um dos seguintes conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$

$B = (0, 3)$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

$D = (-1, 0) \cup [3, \infty)$



Exercício 2. Sendo $A = [0, 5)$ e $B = (1, 3)$, determine $B \backslash A$.

$B \backslash A = \emptyset$, pois $B \subset A$

Exercício 3. Encontre o conjunto solução das seguintes igualdades e desigualdades:

(a) $|x-1| = 4$ (b) $|x+1| < 2$ (c) $|x-1| < |x-5|$ (d) $|x-2| + |x+4| = 8$

(e) $|x-2| + |x+4| = 1$ (f) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 2$ (g) $|x+3| = x+5$ (h) $|x-5| = 5-x$

(a) $x-1=4 \Rightarrow x=5$ ou $1-x=4 \Rightarrow x=-3$ $\Big\}$ Sol $=\{-3,5\}$

(b) $|x+1|<2 \Rightarrow -2<x+1<2$

$\Rightarrow -3<x<1 \Rightarrow$ Sol $=(-3,1)$

(c) Seja $f(x)=|x-5|-|x-1|$. Queremos encontrar os pontos onde $f(x)>0$.

Repare que

$$f(x)=\begin{cases}(5-x)-(1-x)=4 & \text{se } x\leq 1\\ (5-x)-(x-1)=6-2x & \text{se } 1<x<5\\ (x-5)-(x-1)=-4 & \text{se } x\geq 5\end{cases}$$

Assim, em $1<x<5$,

$f(x)=6-2x>0$ se $x<3$

Logo, o conjunto solução é

$(-\infty,3)$

(d) Seja $f(x)=|x-2|+|x+4|$. Temos

$$f(x)=\begin{cases}2-x-(4+x)=-2-2x & \text{se } x\leq -4\\ 2-x+x+4=6 & \text{se } -4<x<2\\ x-2+x+4=2x+2 & \text{se } x\geq 2\end{cases}$$

Em $x \leq -4$,

$$f(x) = 8 \Rightarrow -2(1+x) = 8$$
$$\Rightarrow 1+x = -4 \Rightarrow x = -5$$

Em $x \geq 2$,

$$f(x) = 8 \Rightarrow 2(x+1) = 8$$
$$\Rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

Solução: $\{-5, 3\}$

(e) Aproveitando $f(x)$ do item (d), temos que

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| - 2 & \text{se } x \leq -4 \\ 6 & \text{se } -4 < x < 2 \\ 2x + 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Assim, $f(x) \geq 6 \ \forall x \in \mathbb{R}$, e então o conjunto solução de $f(x) = 1$ é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\} = \emptyset$$

(f) Seja $f(x) = |x+1| - 2|x-1|$.

Queremos encontrar as raízes de f.

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1) - 2(1-x) = x - 3 & (x < -1) \\ x+1 - 2(1-x) = 3x - 1 & (-1 \leq x \leq 1) \\ x+1 - 2(x-1) = -x + 3 & (x > 1) \end{cases}$$

Se $-1 \leq x \leq 1$,

$f(x) = 3x - 1 = 0$ se $x = \frac{1}{3}$

Se $x > 1$,

$f(x) = 3 - x = 0$ se $x = 3$

Assim, o conjunto solução é

$\left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$

(g) Seja $f(x) = |x+3| - (x+5)$. Temos

$$f(x) = \begin{cases} -(x+3)-(x+5) = -2x-8 & \text{se } x < -3 \\ x+3-(x+5) = -2 & \text{se } x \geq -3 \end{cases}$$

Em $x < -3$,

$f(x) = 0 \Rightarrow -2x = 8 \Rightarrow x = -4$.

Sol: $\{-4\}$

(h) Se $x < 5$,

$|x-5| = 5 - x$ sempre.

Se $x \geq 5$,

$|x-5| = x-5 = 5-x = -(x-5)$

$\Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Solução: $(-\infty, 5]$

Exercício 4. Resolva cada desigualdade e escreva a resposta usando a notação de intervalo:

(a) $-4 < 5 - 3x \leqslant 17$ (b) $x(x-1)(x+2) > 0$ (c) $\dfrac{2x-3}{x+1} \leqslant 1$

(d) $x^2 < 2x + 8$ (e) $|x - 4| < 3$

(a) $-4 < 5 - 3x \leq 17$

$\Rightarrow -9 < -3x \leq 12$

$\Rightarrow -3 < -x \leq 4$

$\Rightarrow 3 > x \geq -4 \Rightarrow$ Sol: $[-4, 3)$

(b) Sinais:

	$x+2$	x	$x-1$	$x(x-1)(x+2)$
$x<-2$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-2<x<0$	$+$	$-$	$-$	$+$
$0<x<1$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x>1$	$+$	$+$	$+$	$+$

Solução: $(-2, 0) \cup (1, +\infty)$

(c) $\dfrac{2x-3}{x+1} \leq 1$

Se $x < -1$, $x + 1 < 0$, e então é preciso ter

$2x - 3 \geq x + 1$

$\Rightarrow x \geq 4$, que não é possível pois estamos no caso $x < -1$.

Se $x > -1$, é preciso ter

$2x - 3 \leq x + 1 \Rightarrow x \leq 4$

$\Rightarrow (-1, 4]$ é solução

(d) $x^2 < 2x + 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$\Rightarrow (x-4)(x+2) < 0$

$\Rightarrow$ Solução: $(-2, 4)$

(e) $|x-4| < 3 \Rightarrow -3 < x - 4 < 3$

$\Rightarrow 1 < x < 7 \Rightarrow$ Sol: $(1, 7)$

Exercício 5. Escreva cada uma das uniões sob a forma de um único intervalo:

(a) $[2,7) \cup [5,20)$ (b) $[-8,-3) \cup [-6,-1)$ (c) $[-2,8] \cup (-1,4)$

(d) $(3,\infty) \cup [2,8]$ (e) $(-\infty,4) \cup (-2,6]$ (f) $(-\infty,-3) \cup [-5,\infty)$

(g) $(-\infty,-10] \cup (-\infty,-8]$

(a) $[2, 20)$ (b) $[-8, -1)$ (c) $[-2, 8]$

(d) $[2, \infty)$ (e) $(-\infty, 6]$ (f) $(-\infty, \infty)$

(g) $(-\infty, -8]$

Exercício 6. Escreva cada conjunto como um intervalo ou uma união de dois intervalos:

(a) $\{x \mid |x-4| < 1/10\}$ (b) $\{x \mid |x+2| < 1/100\}$ (c) $\{x \mid |x+4| < \epsilon/2\}$ (onde $\epsilon > 0$)

(d) $\{x \mid |x| > 2\}$ (e) $\{x \mid |x-5| \geqslant 3\}$ (f) $\{x \mid |x+6| \geqslant 2\}$

(a) $|x-4| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{-1}{10} < x-4 < \frac{1}{10}$

$\Rightarrow 4 - \frac{1}{10} = \frac{39}{10} < x < 4 + \frac{1}{10} = \frac{41}{10}$

$\Rightarrow x \in \left(\frac{39}{10}, \frac{41}{10}\right)$

(b) $-2 - \frac{1}{100} = -\frac{201}{100} < x < -2 + \frac{1}{100} = -\frac{199}{100}$

$\Rightarrow x \in \left(-\frac{201}{100}, -\frac{199}{100}\right)$

(c) $-\frac{\epsilon}{2} - 4 < x < -4 + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow x \in \left(-\frac{\epsilon}{2} - 4, -4 + \frac{\epsilon}{2}\right)$

(d) $x < -2$ ou $x > 2 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

(e) $x - 5 \leq -3$ ou $x - 5 \geqslant 3$

$\Rightarrow x \leq 2$ ou $x \geqslant 8 \Rightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [8, +\infty)$

(f) $x + 6 \leq -2$ ou $x + 6 \geqslant 2$

$\Rightarrow x \leq -8$ ou $x \geqslant -4 \Rightarrow x \in (-\infty, -8] \cup [-4, \infty)$

Exercício 7. Escreva cada interseção como um único intervalo:

(a) $[2,7) \cap [5,20)$ (b) $[-8,-3) \cap [-6,-1)$ (c) $(3,\infty) \cap [2,8]$
(d) $(-\infty,4) \cap (-2,6]$ (e) $(-\infty,-3) \cap [-5,\infty)$ (f) $(-3,\infty) \cap [-5,\infty)$

(a) $[5,7)$ (b) $[-6,-3)$ (c) $(3,8]$
(d) $(-2,4)$ (e) $[-5,-3)$ (f) $(-3,\infty)$

Exercício 8. Determine:

(a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left[0,\frac{1}{n}\right]$ (b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(0,\frac{1}{n}\right]$ (c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(0,\frac{1}{n}\right)$

(a) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{n}\right] = \{0\}$

(b) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right] = \emptyset$

(c) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right) = \emptyset$

Exercício 9. Determine todos os números reais x que satifazem a desiguadade dada:

(a) $\dfrac{2x+1}{x-3} < 4$ (b) $\left|\dfrac{5x-3}{x+2}\right| < 1$ (c) $\dfrac{x-2}{3x+1} < 2$ (d) $\dfrac{4x+1}{x+3} < 2$

(a) $\dfrac{2x+1}{x-3} < 4$

Se $x<3$, é preciso ter

$2x+1 > 4(x-3)$

$\Rightarrow 13 > 2x \Rightarrow x < \frac{13}{2}$

Como também temos $x<3$, segue que nesse caso $x<3$ resolve.

Se $x>3$, é preciso ter

$2x+1 < 4(x-3) = 4x-12$

$\Rightarrow 13 < 2x \Rightarrow x > \frac{13}{2}$

Logo, o conjunto solução é

$(-\infty, 3) \cup \left(\frac{13}{2}, +\infty\right)$

(b) Seja $f(x) = |5x-3| - |x+2|$.

Queremos determinar $\{x \mid f(x) < 0\}$. Temos

$$f(x) = \begin{cases} 3-5x+x+2 = 5-4x, & \text{se } x<-2 \\ 3-5x-x-2 = 1-6x, & \text{se } -2 \leq x \leq \frac{3}{5} \\ 5x-3-x-2 = 4x-5, & \text{se } x > \frac{3}{5} \end{cases}$$

Se $-2 \leq x \leq \frac{3}{5}$,

$f(x) = 1 - 6x < 0$ se $x > \frac{1}{6}$

Se $\frac{3}{5} < x$,

$f(x) = 4x - 5 < 0$ se $x < \frac{5}{4}$

Logo, o conjunto solução é

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{4}\right)$$

(c) $\frac{x-2}{3x+1} < 2$

Se $x < \frac{-1}{3}$, é preciso ter

$x - 2 > 2(3x+1) = 6x + 2$

$\Rightarrow 5x < -4 \Rightarrow x < -\frac{4}{5}$

Se $x > -\frac{1}{3}$, é preciso ter

$x - 2 < 2(3x+1) = 6x + 2$

$\Rightarrow 5x > -4 \Rightarrow x > -\frac{4}{5}$

Como também é preciso ter $x > \frac{-1}{3}$, segue que, nesse caso, a solução é $x > -\frac{1}{3}$.

Logo, o conjunto solução final é

$$\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

(d) $\dfrac{4x+1}{x+3} < 2$

Se $x < -3$, é preciso ter

$4x+1 > 2(x+3) = 2x+6$

$\Rightarrow 2x > 5 \Rightarrow x > 5/2$

Como também é necessário ter $x < -3$, não há solução nesse caso.

Se $x > -3$, é preciso ter

$4x+1 < 2(x+3) = 2x+6$

$\Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < \dfrac{5}{2}$

Como também é preciso ter $x > -3$, o conjunto solução é

$\left(-3, \dfrac{5}{2}\right)$

Exercício 10. Cada desigualdade (a_i) a seguir é equivalente a uma desigualdade (b_j). Por exemplo, $|x| < 3$ se e só se $-3 < x < 3$, portanto, (a_1) é equivalente a (b_2). Estabeleça todos os pares equivalentes.

(a_1) $\|x\| < 3$	(b_1) $4 < x < 6$
(a_2) $\|x - 1\| < 3$	(b_2) $-3 < x < 3$
(a_3) $\|3x - 2\| < 1$	(b_3) $x > 3$ ou $x < -1$
(a_4) $\|1 + 2x\| \leqslant 1$	(b_4) $\dfrac{1}{3} < x < 1$
(a_5) $\|x - 1\| > 2$	(b_5) $-2 < x < 4$
(a_6) $\|x + 2\| \geqslant 5$	(b_6) $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant -1$ ou $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$
(a_7) $\|5 - x^{-1}\| < 1$	(b_7) $x > 2$
(a_8) $\|x - 5\| < \|x + 1\|$	(b_8) $x \leqslant -7$ ou $x \geqslant 3$
(a_9) $\|x^2 - 2\| \leqslant 1$	(b_9) $\dfrac{1}{6} < x < \dfrac{1}{4}$
(a_{10}) $x < x^2 - 12 < 4x$	(b_{10}) $-1 \leqslant x \leqslant 0$

Exercício 11. Dizer se cada uma das afirmações a seguir é V ou F. Justifique sua resposta.

(a) $x < 5$ implica $|x| < 5$.

(b) $|x - 5| < 2$ implica $3 < x < 7$.

(c) $|1 + 3x| \leqslant 1$ implica $x \geqslant -\frac{2}{3}$.

(d) Não há nenhum número real x para o qual $|x - 1| = |x - 2|$.

(e) Para cada $x > 0$, existe um $y > 0$ tal que $|2x + y| = 5$.

(a) Falso: $-10 < 5$ mas $|-10| = 10 > 5$

(b) Verdade:

$|x-5|<2 \Rightarrow -2 < x-5 < 2$

$\Rightarrow 3 < x < 7$

(c) Verdade:

$|1+3x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 1+3x \leq 1$

$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq 0$

Em particular, $x \geqslant -\frac{2}{3}$.

(d) Falso. Se $x = \frac{3}{2}$,

$\left|\frac{3}{2} - 1\right| = \frac{1}{2} = \left|\frac{3}{2} - 2\right|$

(e) Falso. Se $x, y > 0$, então

$|2x+y| = 2x+y$

Se $x = 5$, $10 + y = 5$ não tem solução $y > 0$.

Exercício 12. Demonstre que se b é um número positivo e $a < b$, então

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$$

Temos que

$$(a+1)\cdot b - a\cdot(b+1)$$

$$= \cancel{ab} + b - \cancel{a\cdot b} - a$$

$$= b - a > 0 \iff b > a$$

Como os passos acima são inversíveis

$$a < b \Rightarrow (a+1)\cdot b > a(b+1)$$

Como $b > 0$ e $b+1 > 0$, segue que

$$\frac{a+1}{b+1} > \frac{a}{b}$$

Exercício 13. Prove que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Pela desigualdade triangular,

$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$$

O caso com n números segue da aplicação reiterada dessa desigualdade:

$$|a_1 + \cdots a_n| \leq |a_1 + \cdots + a_{n-1}| + |a_n|$$
$$\leq |a_1 + \cdots + a_{n-2}| + |a_{n-1}| + |a_n|$$
$$\leq \cdots \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

Ou seja,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Exercício 14. Demonstre que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$$

Pela desigualdade triangular,

$$|a| = |b + a - b|$$
$$\leq |b| + |a-b|$$
$$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \quad (\text{I})$$

Por outro lado,

$$|b| = |a + b - a|$$
$$\leq |a| + |b - a| = |a| + |a - b|$$
$$\Rightarrow |b| - |a| \leq |a - b|$$
$$\Rightarrow -(|a| - |b|) \leq |a - b| \quad (\text{II})$$

Logo, (I) e (II) implicam que

$$|a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$$

Exercício 1. Escreva cada uma das expressões abaixo na forma $a+bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $(4+2i)+(3+8i)$ (b) $(5+3i)-(2+9i)$ (c) $(6+2i)-(9-7i)$

(d) $(2+3i)(4+5i)$ (e) $(5+6i)(2-7i)$ (f) $(4-3i)(-2+3i)$

(g) $(3+4i)^2$ (h) $(5-2i)^2$ (i) $(4+\sqrt{3}i)^2$

(j) $(\sqrt{5}-\sqrt{7}i)^2$ (k) $(2+3i)^3$ (l) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

(m) i^{8001} (n) i^{1003} (o) $\overline{8+3i}$

(p) $\overline{-7-\frac{2}{3}i}$ (q) $\frac{1+2i}{3+4i}$ (r) $\frac{5+6i}{2+3i}$

(s) $\frac{4+3i}{5-2i}$ (t) $\frac{3-4i}{6-5i}$

(a) $7+10i$ (b) $3-6i$ (c) $-3+9i$

(d) $8+10i+12i-15 = -7+22i$

(e) $10-35i+12i+42 = 52-23i$

(f) $-8+12i-6i+9 = 1+6i$

(g) $9+24i-16 = -7+24i$

(h) $25-20i-4 = 21-20i$

(i) $16+8\sqrt{3}i-3 = 13+8\sqrt{3}i$

(j) $5-2\sqrt{35}i-7 = -2-2\sqrt{35}i$

(k) $8+3\cdot 4\cdot 3i-3\cdot 2\cdot 9-27i$
$= 8+36i-54-27i = -46+9i$

(l) $\frac{1-3\sqrt{3}i-9+3\sqrt{3}i}{8} = -1$

(m) $8001 = 4\cdot 2000+1 \Rightarrow i^{8001} = i$

(h) $1003 = 4 \cdot 250 + 3 \Rightarrow i^{1003} = i^3 = -i$

(o) $\overline{8 + 3i} = 8 - 3i$

(p) $\overline{-7 - \frac{2}{3}i} = -7 + \frac{2}{3}i$

(q) $\dfrac{1+2i}{3+4i} \cdot \dfrac{3-4i}{3-4i} = \dfrac{3-4i+6i+8}{9+16} = \dfrac{11+2i}{25}$

(r) $\dfrac{5+6i}{2+3i} \cdot \dfrac{2-3i}{2-3i} = \dfrac{10-15i+12i+18}{4+9} = \dfrac{28-3i}{13}$

(s) $\dfrac{4+3i}{5-2i} \cdot \dfrac{5+2i}{5+2i} = \dfrac{20+8i+15i-6}{25+4} = \dfrac{14+23i}{29}$

(t) $\dfrac{3-4i}{6-5i} \cdot \dfrac{6+5i}{6+5i} = \dfrac{18+15i-24i+20}{36+25} = \dfrac{38-9i}{61}$

Exercício 2. Determine dois números complexos que satisfaçam a equação $z^2 + 4z + 6 = 0$.

$$(z+2)^2 - 4 + 6 = (z+2)^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (z+2)^2 = -2 \Rightarrow z+2 = \pm\sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow z = -2 \pm \sqrt{2}i$$

Exercício 3. Determine um número complexo cujo quadrado seja igual a $5 + 12i$.

$z = a + bi$

$\Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$

Assim,

$$\begin{cases} 2ab = 12 \Rightarrow b = \dfrac{6}{a} \\ a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow a^2 - \dfrac{36}{a^2} = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow a^4 - 36 = 5a^2$

$\Rightarrow (a^2 - 9)(a^2 + 4) = 0$

$\Rightarrow a = \pm 3, \quad b = \pm 2$

Logo,

$z = 3 + 2i$ ou $z = -3 - 2i$

Exercício 4. Determine um número complexo cujo quadrado seja igual a $21 - 20i$.

$z = a + bi$

$\Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 21 - 20i$

Assim,

$$\begin{cases} 2ab = 20 \Rightarrow b = -\frac{10}{a} \\ a^2 - b^2 = 21 \Rightarrow a^2 - \frac{100}{a^2} = 21 \end{cases}$$

$\Rightarrow a^4 - 21a^2 - 100 = 0$

$\Rightarrow (a^2 - 25)(a^2 + 4) = 0$

$\Rightarrow a = \pm 5 \Rightarrow b = \mp 2$

Logo,

$z = 5 - 2i$ ou $z = -5 + 2i$

Exercício 5. Determine dois números complexos cuja soma seja igual a 7 e cujo produto seja igual e 13.

Elas serão raízes de

$$p(z) = z^2 - 7z + 13$$

$$\Rightarrow z = \frac{7 \pm \sqrt{49-52}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Os número são

$$z_1 = \frac{7-\sqrt{3}i}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{7+\sqrt{3}i}{2}$$

Exercício 6. Determine dois números complexos cuja soma seja igual a S e o produto seja igual a P.

Eles serão raízes de

$$p(z) = z^2 - Sz + P$$

$$\Rightarrow z = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

Os números são

$$z_1 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \text{ e } z_2 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

Exercício 7. Calcule $(\sqrt{3}+i)^6$.

Repare que

$$(\sqrt{3}+i)^3 = \cancel{3\sqrt{3}} + 3\cdot 3i - \cancel{3\sqrt{3}} - i = 8i$$

Logo,

$$(\sqrt{3}+i)^6 = (8i)^2 = -64$$

Exercício 8. Calcule o módulo dos seguintes números complexos:

(a) $(1+i)^3$ (b) $\dfrac{1+i}{2-2i}$ (c) $(1+i)(2+2i)(4+4i)$ (d) $(1-i)^4$

(a) $|z| = |1+i|^3 = (\sqrt{2})^3 = 3\sqrt{2}$

(b) $\left|\dfrac{1+i}{2-2i}\right| = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{|1+i|}{|1-i|} = \dfrac{1}{2} \dfrac{|z|}{|\bar{z}|} = \dfrac{1}{2}$

(c) $|1+i| \cdot 2|1+i| \cdot 4|1+i| = 8(\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2}$

(d) $|1-i|^4 = (\sqrt{2})^4 = 4$

Exercício 9. Mostre que se $a + bi \neq 0$, então

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Exercício 10. Explique por que não existe um número real b tal que $|5 + bi| = 3$.

$$|5+bi| = \sqrt{25+b^2} \geqslant \sqrt{25} = 5 > 3$$

Logo nenhum $b \in \mathbb{R}$ satisfaz $|5+bi| = 3$.

Exercício 11. Demonstre que se $z \in \mathbb{C}$, então sua parte real e sua parte imaginária estão no intervalo $[-|z|, |z|]$.

$z = a + bi$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2} \begin{cases} \geqslant \sqrt{a^2} = |a| \\ \geqslant \sqrt{b^2} = |b| \end{cases}$$

Logo, $|a| \leq |z|$ e $|b| \leq |z|$.

Segue que $a, b \in [-|z|, |z|]$

Exercício 1. Determine as geratrizes das dízimas periódicas:

(a) $0,14141414...$ (b) $0,345454545...$ (c) $1,711111111...$

(a) $x = 0,141414...$

$\Rightarrow 100x - x = 14,1414... - 0,1414... = 14$

$\Rightarrow 99x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{99}$

(b) $x = 0,3454545...$

$y = 0,454545...$

$\Rightarrow x = 0,3 + \frac{1}{10} \cdot y = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} y$

Temos que

$100y - y = 45 \Rightarrow y = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$

$\Rightarrow x = \frac{3}{10} + \frac{5}{110} = \frac{33+5}{110} = \frac{38}{110} = \frac{19}{55}$

(c) $x = 1,7111... = 1,7 + \frac{1}{10} \cdot 0,111...$

Seja $y = 0,111...$

$\Rightarrow 10y - y = 1 \Rightarrow y = 1/9$

$\Rightarrow x = \frac{17}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{153+1}{90} = \frac{154}{90} = \frac{77}{45}$

Exercício 2. Diga se as afirmações são V ou F:

(a) Se um número real a tem expansão decimal infinita, então ele é irracional;

(b) Todo número racional tem expansão decimal finita;

(c) Se a expansão decimal de a é infinita e não periódica, então a é irracional;

(d) π tem expansão decimal infinita e periódica;

(e) $\sqrt{2}$ tem expansão decimal que se estende indefinidamente sem se repetir num padrão.

(a) Falso: $\frac{1}{3} = 0,3333\ldots \in \mathbb{Q}$

(b) Falso: $\frac{1}{3} = 0,333\ldots \in \mathbb{Q}$

(c) Verdadeiro

(d) Falso, pois $\pi \notin \mathbb{Q}$

(e) Verdadeiro, pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercício 1. Suponha que $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1}$. Calcule:

(a) $f(0)$ (b) $f(1)$ (c) $f(-1)$ (d) $f(-2)$ (e) $f(2a)$
(f) $f(b/3)$ (g) $f(2a+1)$ (h) $f(2x^2+3)$ (i) $f(a/b-1)$

(a) $f(0) = 2$ (b) $f(1) = \frac{3}{2}$ (c) $f(-1) = \frac{1}{2}$

(d) $f(-2) = 0$ (e) $f(2a) = \dfrac{2a+2}{4a^2+1}$

(f) $f(b/3) = \dfrac{\frac{b+6}{3}}{\frac{b^2+9}{9}} = \dfrac{3(b+6)}{b^2+9}$

(g) $f(2a+1) = \dfrac{2a+3}{4a^2+4a+2}$

(h) $f(2x^2+3) = \dfrac{2x^2+5}{4x^4+20x^2+26}$

(i) $f(a/b-1) = \dfrac{\frac{a}{b} - 1 + 2}{\frac{a^2}{b^2} - \frac{2a}{b} + 1 + 1} = \dfrac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a^2-2ab+2b^2}{b^2}}$

$= \dfrac{ab+b^2}{a^2-2ab+2b^2}$

Exercício 2. Suponha que $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$. Simplifique as seguintes expressões:

(a) $\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$ (b) $\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}$ (c) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

(a)
$$\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \frac{\dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{1}{4}}{x-2} = \frac{4x-4-x-2}{4(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{3x-6}{4(x-2)(x+2)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{3}{4(x+2)}$$

(b)
$$\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \frac{\dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{2}{5}}{x-2} = \frac{5x-5-2x-4}{5(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{3\cancel{(x-3)}}{5\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{3}{5(x+3)}$$

(c)
$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{\dfrac{x+h-1}{x+h+2} - \dfrac{x-1}{x+2}}{h}$$

$$= \frac{(x+h-1)(x+2) - (x-1)(x+h+2)}{h(x+h+2)(x+2)}$$

$$= \frac{h(x+2) + \cancel{(x-1)(x+2)} - \cancel{(x-1)(x+2)} - (x-1)h}{h(x+h+2)(x+2)}$$

$$= \frac{\cancel{h}(x+2) - (x-1)\cancel{h}}{\cancel{h}(x+h+2)(x+2)} = \frac{3}{(x+h+2)(x+2)}$$

Exercício 3. Encontre o domínio da função:

(a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ (b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ (c) $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

(a) $\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x^2+x-2=0\}$

Como $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$, as raízes são $x=-2$, $x=1$. Assim,

$$\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$

(b) $\text{Dom}\, g = \mathbb{R}$, pois $x^2+1 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

(c) É preciso ter $4-x \geq 0$ e $x^2-1 \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 \geq 1 \Rightarrow -1 \leq x \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

Logo,

$$\text{Dom} f = (-\infty, -1] \cup [1, 4]$$

Exercício 4. Se $f(x) = x^3$, calcule o quociente $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ e simplifique sua resposta

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \frac{\cancel{2^3} + 3\cdot 2^2 h + 3\cdot 2 \cdot h^2 + h^3 - \cancel{2^3}}{h}$$

$$= \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = 12 + 6h + h^2$$

Exercício 5. Explique por que não existe uma função cujo domínio seja $\{-1, 0, 3\}$ e cuja imagem seja $\{3, 4, 7, 9\}$.

Uma função f associa cada $x \in \mathrm{Dom} f$ a um único $f(x) \in \mathrm{Im} f$. Assim, como $\mathrm{Dom} f$ só tem 3 elementos, não é possível que $\mathrm{Im} f$ tenha 4 elementos.

Exercício 6. Se $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e $g(x) = 2x - 3$, encontre cada uma das seguintes funções:

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $g \circ g \circ g$

(a) $(f \circ g)(x) = (2x-3)^2 + 2(2x-3) - 1$

$= 4x^2 - 12x + 9 + 4x - 6 - 1$

$= 4x^2 - 8x + 2$

(b) $(g \circ f)(x) = 2 \cdot (x^2 + 2x - 1) - 3$

$= 2x^2 + 4x - 5$

(c) $(g \circ g \circ g)(x) = 2(g(g(x))) - 3$

$= 2(2g(x) - 3) - 3 = 2[2(2x-3) - 3] - 3$

$= 2 \cdot [4x - 9] - 3$

$= 8x - 21$

Exercício 7. Para cada par de funções f e g abaixo, expresse $f \circ g$ e $g \circ f$ da forma mais simplificada que puder:

(a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ (b) $f(x) = (x+1)^2$, $g(x) = \dfrac{3}{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $g(x) = x^2 + 2$ (d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$, $g(x) = \dfrac{x+3}{x+4}$

(a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1 = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(b) $(f \circ g)(x) = \left(\dfrac{3}{x} + 1\right)^2 = \dfrac{(3+x)^2}{x^2}$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

(c) $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^2+2-1}{x^2+2+1} = \dfrac{x^2+1}{x^2+3}$

$(g \circ f)(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 + 2 = \dfrac{(x-1)^2 + 2(x+1)^2}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{x^2 - 2x + 1 + 2x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{3x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$

(d) $(f \circ g)(x) = \dfrac{\dfrac{x+3}{x+4} - 1}{\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^2 + 1} = \dfrac{\dfrac{\cancel{x}+3-\cancel{x}-4}{x+4}}{\dfrac{(x+3)^2 + (x+4)^2}{(x+4)^2}}$

$$= \frac{-(x+4)}{x^2+6x+9+x^2+8x+16} = \frac{-(x+4)}{2x^2+14x+25}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{\dfrac{x-1}{x^2+1}+3}{\dfrac{x-1}{x^2+1}+4} = \frac{x-1+3x^2+3}{x-1+4x^2+4}$$

$$= \frac{3x^2+x+2}{4x^2+x+3}$$

Exercício 8. Expresse a função na forma $f \circ g$, identificando as funções f e g:

(a) $F(x) = (2x + x^2)^4$ (b) $F(x) = \cos^2 x$ (c) $G(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

(d) $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1+x}}$ (e) $u(t) = \sec(t^2)\tan(t^2)$ (f) $u(t) = \dfrac{\tan t}{1 + \tan t}$

(a) $f(x) = x^4$, $g(x) = 2x + x^2$

(b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$

(e) $f(t) = \sec(t) \cdot \tan(t)$, $g(t) = t^2$

(f) $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$, $g(t) = \tan t$

Exercício 9. Expresse a função na forma $f \circ g \circ h$, identificando as funções f, g e h:

(a) $R(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$ (b) $S(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$ (c) $T(x) = \operatorname{sen}^2(\cos t)$

(a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 1$, $h(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \sqrt[8]{x}$, $g(x) = 2 + x$ $h(x) = |x|$

(c) $f(t) = t^2$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = \cos t$

Exercício 10. Suponha que $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Mostre que $f \circ g = g \circ f$ se, e somente se, $d(a-1) = b(c-1)$.

$(f \circ g)(x) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$

$(g \circ f)(x) = c(ax + b) + d = acx + bc + d$

Assim, $f \circ g = g \circ f$ se e só se

$ad + b = bc + d$

$\Longleftrightarrow d(a-1) = b(c-1)$

Exercício 11. O que é uma função injetora?

É uma função que não repete valores em sua imagem. Ou seja: se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$. Em outras palavras, cada ponto $z \in Im f$ está associado por f a um único $x \in Dom f$ tal que $f(x) = z$.

Exercício 12. Determine se as seguintes funções são injetoras:

(a) $f(x) = 2x - 3$ (b) $f(x) = x^4 - 16$ (c) $f(x) = 1 - \operatorname{sen} x$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(a) Sim: $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x - 3 = 2y - 3$
$\Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$

(b) Não: $f(-2) = 0 = f(2)$

(c) Não: $f(0) = f(2\pi) = 1$

(d) Sim: $f(x) = f(y) \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y}$
$\Rightarrow x = y$

Exercício 13. Encontre a função inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 + 2$ (b) $f(x) = \dfrac{4}{5x-3}$ (c) $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$ (d) $f(x) = x^2 + 8$

(a) $y = x^3 + 2 \Rightarrow x^3 = y - 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-2}$

(b) $y = \dfrac{4}{5x-3} \Rightarrow 5x - 3 = \dfrac{4}{y} \Rightarrow 5x = \dfrac{4}{y} + 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{5}$

(c) $y = \dfrac{2x}{x+3} = \dfrac{2(x+3) - 6}{x+3} = 2 - \dfrac{6}{x+3}$

$\Rightarrow \dfrac{6}{x+3} = 2 - y \Rightarrow x + 3 = \dfrac{6}{2-y}$

$\Rightarrow x = -3 + \dfrac{6}{2-y}$

(d) $y = x^2 + 8 \Rightarrow x^2 = 8 - y \Rightarrow x = \sqrt{8-y}$, onde escolhemos o ramo positivo da raiz.

Exercício 14. Indique os intervalos onde as funções abaixo são positivas:

(a) $f(x) = 2x - 1$
(b) $f(x) = 1 - 3x$
(c) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$
(d) $f(x) = x^2 + 2x + 2$
(e) $f(x) = |x| - 2$
(f) $f(x) = 2x - |x|$
(g) $f(x) = -x^2 - 3$
(h) $f(x) = \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{5-3x}{4} - 1$
(i) $(3x+1)(2x+1)$
(j) $\dfrac{3x+4}{1-x}$
(k) $(5x+4)^4(7x-2)^3$
(l) $\dfrac{1-2x}{(5-x)(3-x)}$
(m) $(1-4x^2)(2x^2+3x)$
(n) $(2x^2-7x+6)(2x^2-7x+5)$
(o) $2x^3 - 6x^2 + x - 3$

(a) $2x - 1 > 0 \iff x > 1/2 \iff x \in (1/2, +\infty)$

(b) $1 - 3x > 0 \iff \frac{1}{3} > x \iff x \in (-\infty, \frac{1}{3})$

(c) $-(x^2 - 5x + 6) = -(x-3)(x-2) > 0$
se $x \in (2, 3)$

(d) $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(e) $|x| > 2 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

(f) $2x > |x| \iff x > 0 \iff x \in (0, +\infty)$

(g) $-x^2 - 3 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ o conjunto onde $f(x) > 0$ é vazio.

(h) $\dfrac{2x - 2 - 5 + 3x - 4}{4} > 0 \iff 5x > 11 \iff x \in (\frac{11}{5}, +\infty)$

(i) Sinais:

	$2x+1$	$3x+1$	$f(x)$
$x < -\frac{1}{2}$	$-$	$-$	$+$
$-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$	$+$	$-$	$-$
$x > -\frac{1}{3}$	$+$	$+$	$+$

Logo, $f > 0$ se $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$

(j) Sinais:

	$3x+4$	$1-x$	$f(x)$
$x < -\frac{4}{3}$	$-$	$+$	$-$
$-\frac{4}{3} < x < 1$	$+$	$+$	$+$
$x > 1$	$+$	$-$	$-$

Logo, $f > 0$ se $x \in (-\frac{4}{3}, 1)$

(k) Basta ter $7x - 2 > 0 \Rightarrow x \in (\frac{2}{7}, +\infty)$

(ℓ) Sinais:

	$1-2x$	$3-x$	$5-x$	$f(x)$
$x < 1/2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{1}{2} < x < 3$	$-$	$+$	$+$	$-$
$3 < x < 5$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x > 5$	$-$	$-$	$-$	$-$

Logo, $f > 0$ se $x \in (\frac{1}{2}, 3) \cup (5, +\infty)$

(m) $(1-4x^2)(2x^2+3x) = (1-2x)(1+2x)\,x\,(2x+3)$

$\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{3}{2}$

Sinais:	$(2x+3)$	$(1+2x)$	x	$(1-2x)$	$f(x)$
$x<-3/2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
$-3/2<x<-1/2$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$-1/2<x<0$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$0<x<1/2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x>1/2$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$

Logo, $f>0$ se $x \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$

(h) $2x^2-7x+6$ tem raízes

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4} = \frac{3}{2} \text{ ou } 2$$

enquanto $2x^2-7x+5$ tem raízes

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4} = 1 \text{ ou } \frac{5}{2}$$

Sinais	$2x^2-7x+6$	$2x^2-7x+5$	$f(x)$
$x<1$	$+$	$+$	$+$
$1<x<3/2$	$+$	$-$	$-$
$3/2<x<2$	$-$	$-$	$+$
$2<x<5/2$	$+$	$-$	$-$
$x>5/2$	$+$	$+$	$+$

Logo, $f>0$ se $x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

(o) $2x^3-6x^2+x-3 = 2x^2\cdot(x-3)+(x-3)$

$= (x-3)\cdot(2x^2+1)$

Logo, $f>0$ se $x>3$, ou seja, se $x \in (3, +\infty)$

Exercício 15. Determine a imagem das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

(a) $y = x^2 - 3x$ (b) $y = -x^2 + 4$ (c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

(d) $y = -2x + \sqrt{7}$ (e) $y = \sqrt[3]{7}x + 2$ (f) $y = -4x^2 + 8x + 12$

(a) $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow \text{Im} = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

(b) $\text{Im} = (-\infty, 4]$

(c) $y = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x\right) + 1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \text{Im} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

(d) $\text{Im} = \mathbb{R}$

(e) $\text{Im} = \mathbb{R}$

(f) $y = -4(x^2 - 2x) + 12 = -4[(x-1)^2 - 1] + 12$

$= -4(x-1)^2 + 8 \Rightarrow \text{Im} = (-\infty, 8]$

Exercício 16. Resolva as seguintes equações e inequações modulares, determinando seu conjunto solução:

(a) $|x+1| - |x| = 2x + 1$ (b) $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ (c) $|3x-2| < 4$ (d) $1 < |x-1| \leqslant 3$

(a) • Se $x \leq -1$, a equação é

$-(x+1) + x = 2x+1$

$\Rightarrow -2 = 2x \Rightarrow x = -1$

• Se $-1 < x < 0$, temos

$x+1+x = 2x+1$, satisfeita por $\forall x \in (-1,0)$

• Se $x \geqslant 0$, temos

$\cancel{x} + \cancel{1} - \cancel{x} = 2x + \cancel{1} \Rightarrow x = 0.$

Assim, o conjunto solução é $[-1, 0]$

(b) A expressão não está definida em $x=0$ nem $x=1$. Fora desses pontos,

$$\frac{u}{|u|} = \begin{cases} 1, & \text{se } u > 0 \\ -1, & \text{se } u < 0 \end{cases}$$

Como x e $x-1$ têm mesmo sinal em $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, este é o conjunto solução.

(c) $-4 < 3x - 2 < 4$

$\Rightarrow -2 < 3x < 6 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < 2$

$\Rightarrow$ Conjunto solução: $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$

(d) $1 < |x-1| \Rightarrow \begin{cases} 1 < x-1 \Rightarrow 2 < x \\ \text{ou} \\ x-1 < -1 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$

$|x-1| \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x-1 \leq 3 \\ \Rightarrow -2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Logo, o conjunto solução é $x \in (2, 4]$

Exercício 17. Um balão esférico com raio de r centímetros tem o volume $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Econtre uma função que represente a quantidade de ar necessária para inflar o balão de um raio de r centímetros até um raio de $r+1$ centímetros.

Seja $f(r)$ tal função. Então

$$f(r) = V(r+1) - V(r) = \frac{4}{3}\pi\left[(r+1)^3 - r^3\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot (3r^2 + 3r + 1)$$

Exercício 18. Um retângulo tem um perímetro de 20 m. Expresse a área do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

Temos que

$$20 = 2(a+b)$$

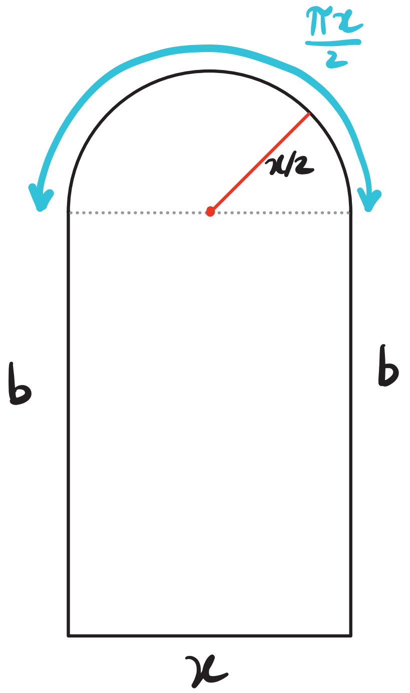
$$\Rightarrow a+b = 10$$

$$\Rightarrow b = 10 - a$$

Logo, a área em função do lado a é

$$A(a) = a \cdot b = a(10-a) = 10a - a^2$$

Exercício 19. Uma janela normanda tem o formato de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo. Se o perímetro da janela for de 10 m, expresse a área A da janela como uma função de sua largura x.



$$\frac{\pi}{2}x + x + 2b = 10$$

$$\Rightarrow b = 5 - x\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Área} = A(x)$$

$$A(x) = b \cdot x + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$= \left[5 - \frac{x(\pi+2)}{4}\right]x + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^2}{4}$$

$$= 5x - x^2\frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{\pi x^2}{8}$$

$$= 5x - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right)x^2$$

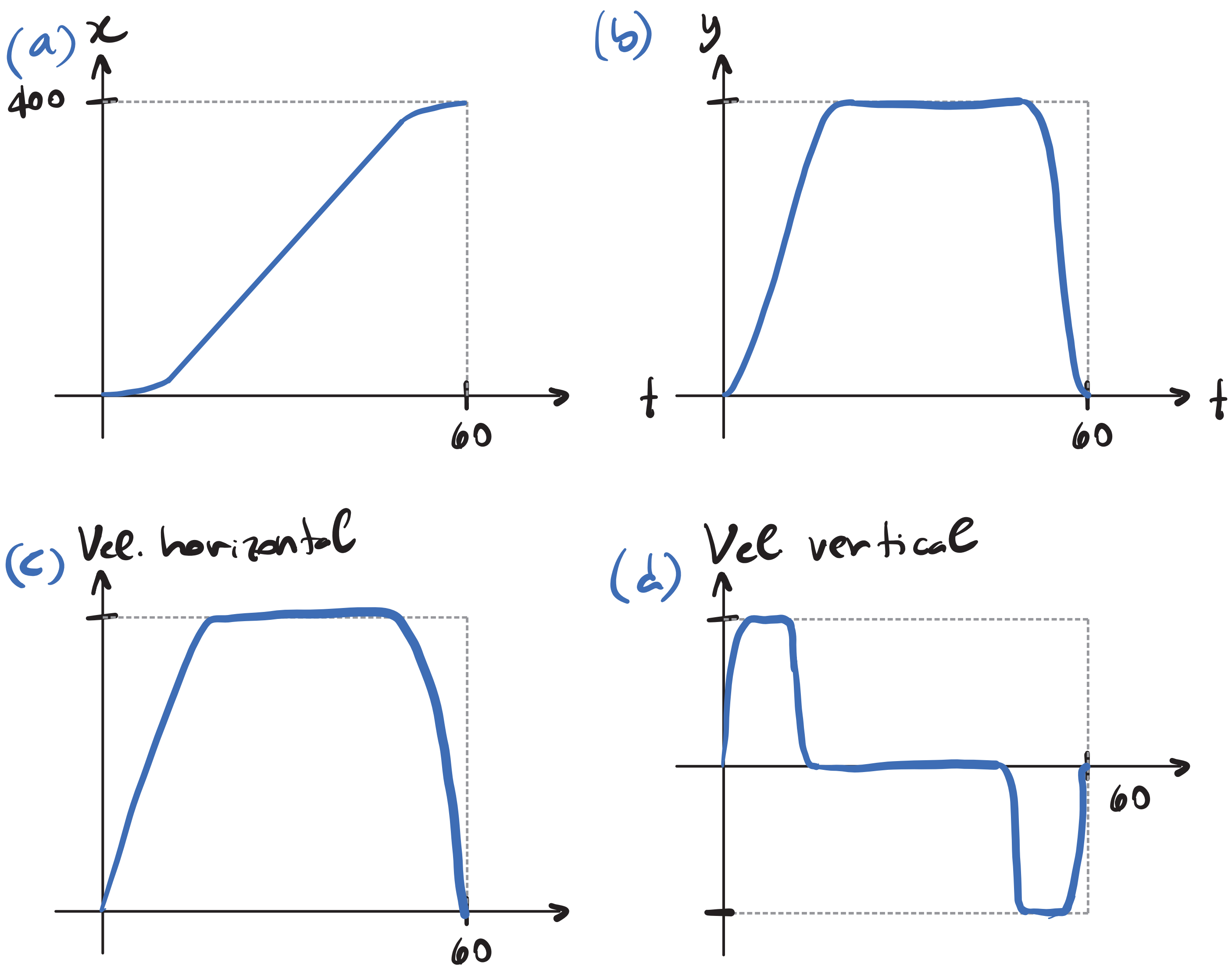
Exercício 1. Um avião decola de um aeroporto e aterrissa uma hora depois em outro aeroporto, a 400 km. Se t representa o tempo em minutos desde a partida do avião, seja $x(t)$ a distância horizontal percorrida e $y(t)$ a altura do avião.

(a) Esboce um possível gráfico de $x(t)$.

(b) Esboce um possível gráfico de $y(t)$.

(c) Esboce um possível gráfico da velocidade no solo.

(d) Esboce um possível gráfico da velocidade vertical.



Exercício 2. Como os gráficos das funções são obtidos a partir do gráfico de f?

(a) $y = -f(x)$ (b) $y = 2f(x) - 1$ (c) $y = f(x-3) + 2$

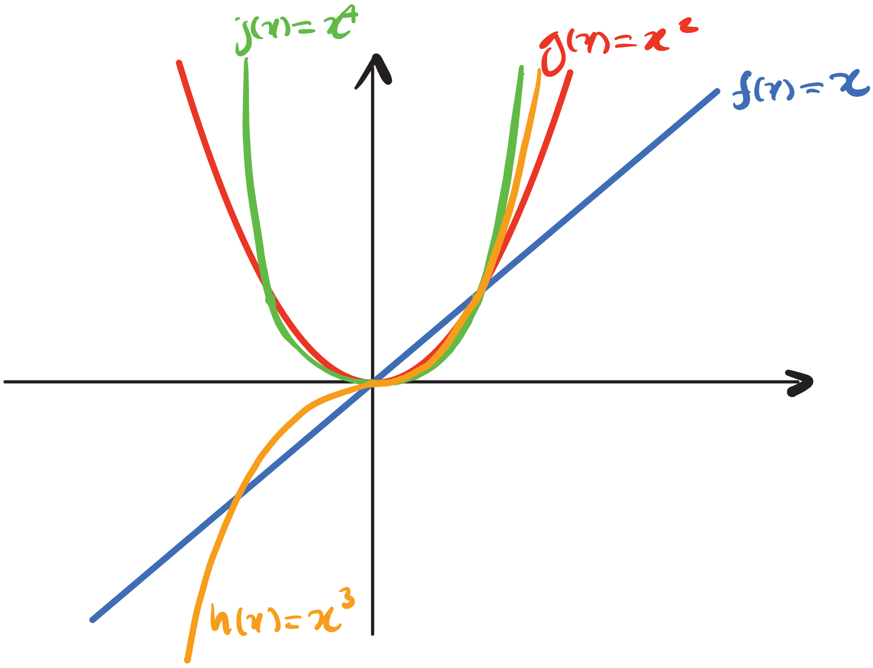
(a) Reflexão horizontal

(b) dilatação $(\times 2)$ e translação vertical (-1)

(c) translação horizontal $(+3)$ e translação vertical $(+2)$

Exercício 3. Esboce à mão, no mesmo sistema de coordenadas, os gráficos das seguintes funções:

(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$ (c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$



Exercício 4. Sem usar calculadora, faça um esboço grosseiro do gráfico:

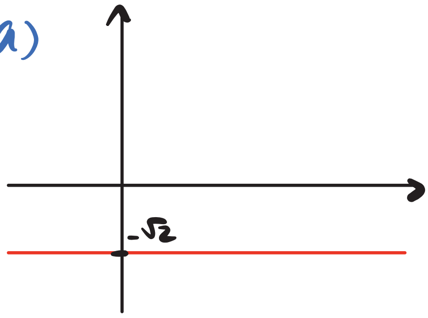
(a) $y = -\sqrt{2}$ (b) $x = 1$ (c) $y = 3x + 2$ (d) $y = -x - 1$

(e) $y = -3x$ (f) $y = \dfrac{x}{2}$ (g) $y = 2x + 1$ (h) $y = -2x + 1$

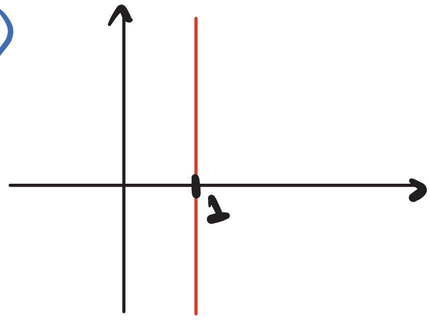
(i) $y = x^3$ (j) $y = (x+1)^3$ (k) $y = (x-2)^3 + 3$ (l) $y = 4 - x^2$

(m) $y = \sqrt{x}$ (n) $y = 2\sqrt{x}$ (o) $y = -2^x$ (p) $y = 1 + x^{-1}$

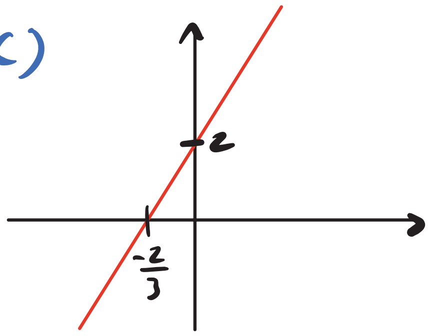
(a)



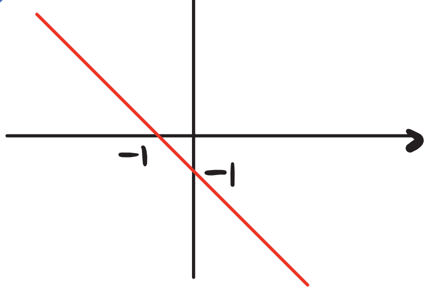
(b)



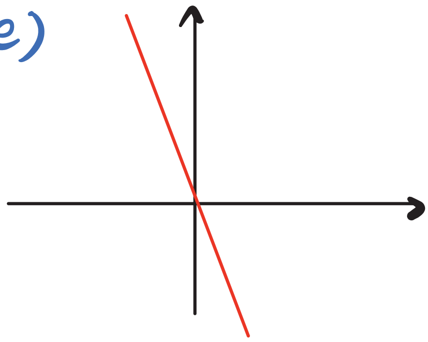
(c)



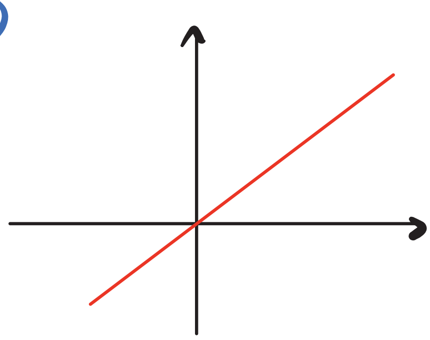
(d)



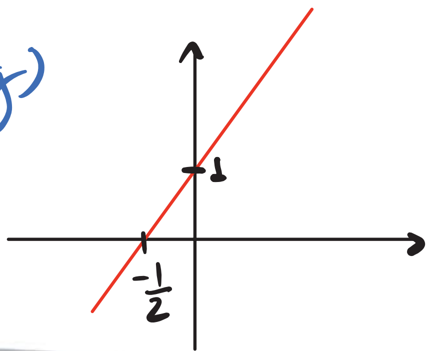
(e)



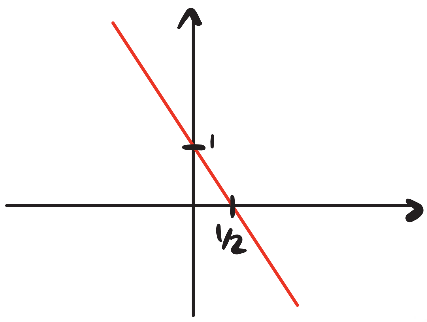
(f)



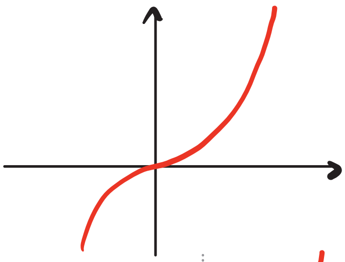
(g)



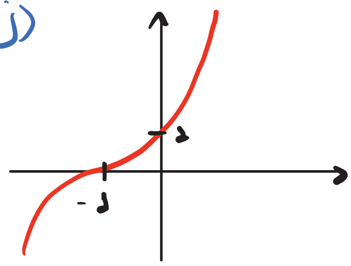
(h)



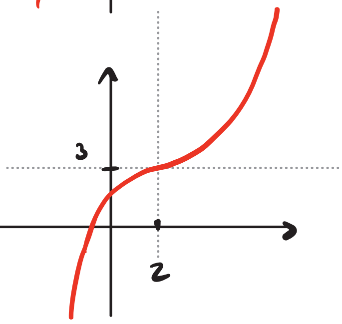
(i)



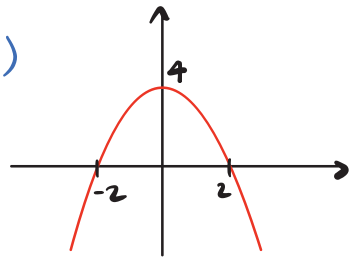
(j)



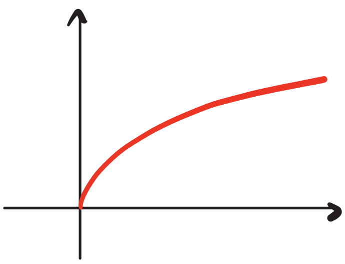
(k)



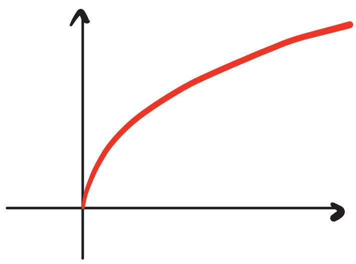
(l)



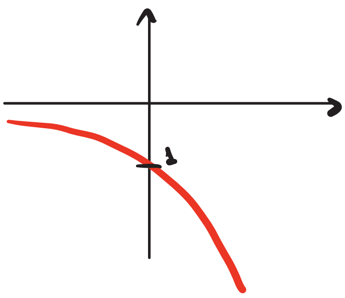
(m)



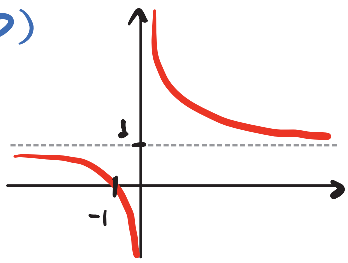
(n)



(o)



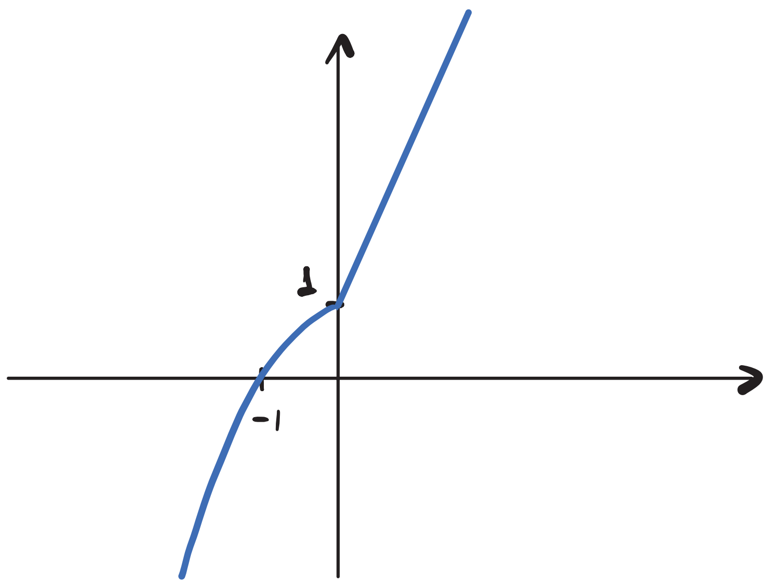
(p)



Exercício 5. Calcule $f(-2)$ e $f(1)$ e esboce o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$f(-2) = -3$, $f(1) = 3$

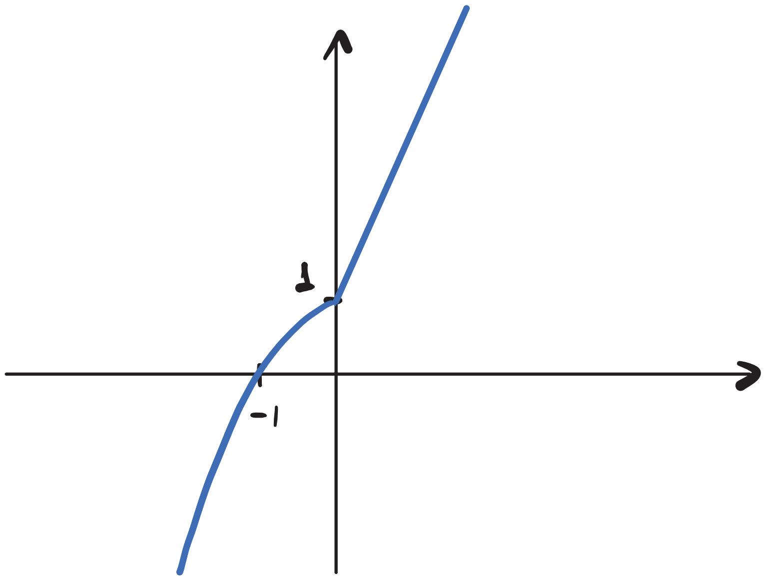


Exercício 6. Calcule $f(-3)$, $f(0)$ e $f(2)$ e esboce o gráfico de

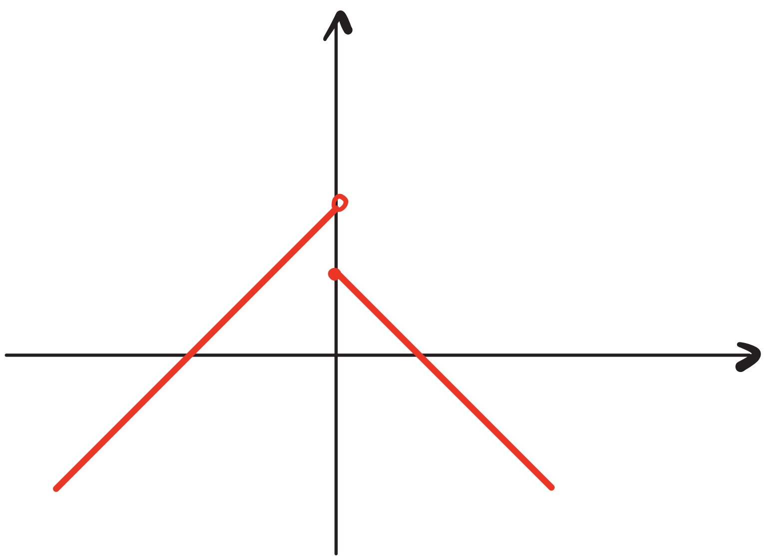
$$(a)\ f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad (b)\ f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(c)\ f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{se } x < 2 \\ 2x - 5 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases} \qquad (d)\ f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

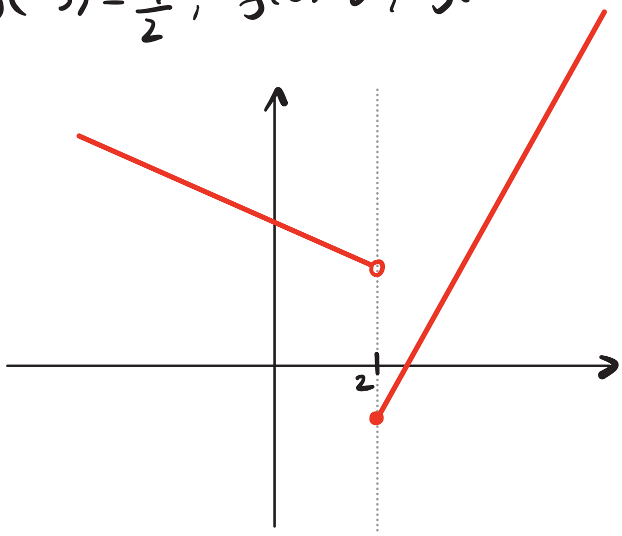
(a) $f(-3) = -8$, $f(0) = 1$, $f(2) = 5$



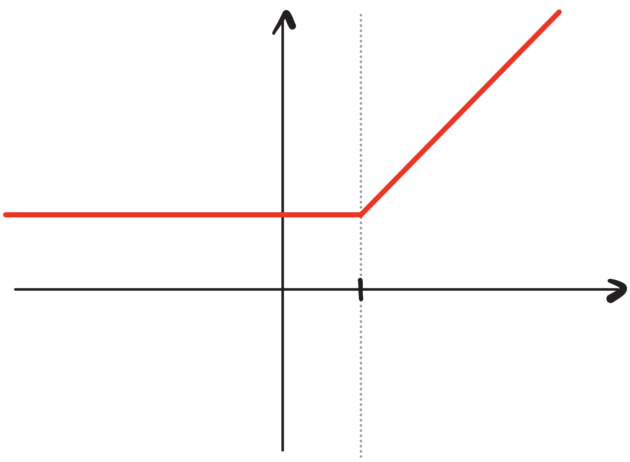
(b) $f(-3) = -1$, $f(0) = 1$, $f(2) = -1$



(c) $f(-3)=\frac{9}{2}$, $f(0)=3$, $f(2)=-1$



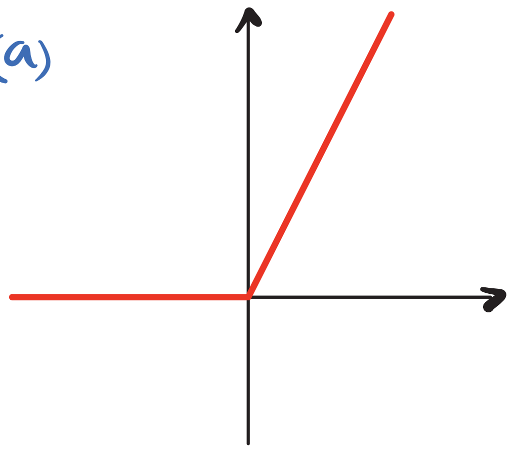
(d) $f(-3)=\frac{9}{2}$, $f(0)=3$, $f(2)=-1$



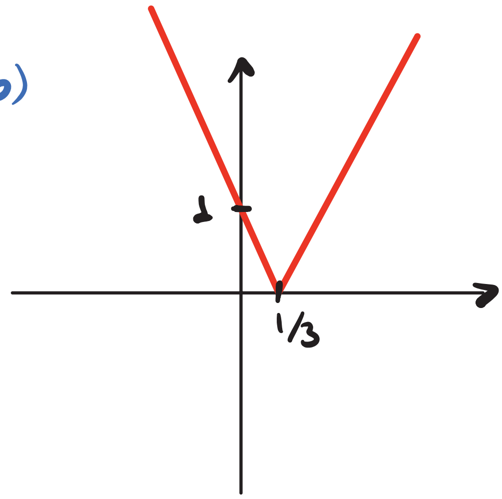
Exercício 7. Esboce o gráfico de:

(a) $f(x) = x + |x|$ (b) $g(t) = |1 - 3t|$ (c) $h(t) = |t| + |t + 1|$ (d) $f(x) = ||x| - 1|$

(a)

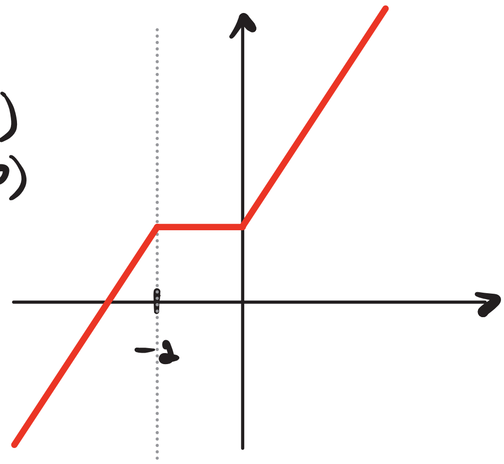


(b)



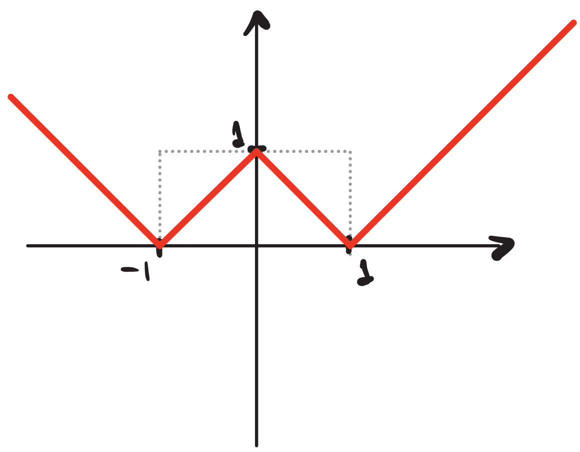
(c)

$$h(t) = \begin{cases} -t - (1+t) = -1 - 2t & (t < -1) \\ -t + (1+t) = 1 & (-1 \leq t < 0) \\ t + (1+t) = 2t + 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$



(d)

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & (|x| \geq 1) \\ 1 - |x| & (|x| < 1) \end{cases}$$



Exercício 8. Determine se a função é par, ímpar ou nenhum dos dois:

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$ (f) $f(x) = x|x|$

(g) $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

(a) Ímpar: $f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -(x^5 + x) = -f(x)$

(b) par: $g(-x) = 1 - x^4 = g(x)$

(c) nem par, nem ímpar: $h(1) = 1$, $h(-1) = -3$

(d) Ímpar: $f(-x) = \dfrac{-x}{x^2+1} = -f(x)$

(e) par: $f(-x) = \dfrac{x^2}{x^4+1} = f(x)$

(f) Ímpar: $f(-x) = -x|x| = -f(x)$

(g) par: $f(-x) = 1 + 3x^2 - x^4 = f(x)$

(h) nem par, nem ímpar: $f(-2) = 2$, $f(2) = \dfrac{2}{3}$

Exercício 9. Se f e g são pares, $f+g$ é par? Se f e g são ímpares, $f+g$ é ímpar? O que se pode dizer se f for par e g for ímpar?

f, g par $\Rightarrow f+g$ par pois

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$$
$$= (f+g)(x)$$

f, g ímpar $\Rightarrow f+g$ ímpar pois

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x)$$
$$= -(f(x) + g(x)) = -(f+g)(x)$$

Quando f é par e g é ímpar, nada pode ser dito, já que qualquer coisa pode ocorrer:

- $f \equiv 0$ (par), $g(x) = x$ (ímpar)
  $\Rightarrow f+g = x$ (ímpar)

- $f \equiv x^2$ (par), $g(x) = 0$ (ímpar)
  $\Rightarrow f+g = x^2$ (par)

- $f \equiv 1$ (par), $g(x) = x$ (ímpar)
  $\Rightarrow f+g = 1+x$, que não é par nem ímpar: $(f+g)(1) = 2$, $(f+g)(-1) = 0$

OBS: usamos o fato de que a função $h(x) \equiv 0$ é par e ímpar.

Exercício 10. Se f e g são pares, fg é par? Se f e g são ímpares, fg é ímpar? O que se pode dizer se f for par e g for ímpar?

f, g pares $\Rightarrow$ $f \cdot g$ par pois

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$$

Se f, g são ímpares, $f \cdot g$ é par pois

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)][-g(x)]$$
$$= f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$$

Se f é par e g é ímpar, $f \cdot g$ é ímpar pois

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)]$$
$$= -f(x) \cdot g(x) = -(f \cdot g)(x)$$

Exercício 11. Mostre que $f(x) = mx + b$ é ímpar se, e somente se, $b = 0$, e é par se, e somente se, $m = 0$.

f ímpar $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow m(-x) + b = -(mx + b)$

$\Rightarrow \cancel{-mx} + b = \cancel{-mx} - b$

$\Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0.$

Como as etapas acima são reversíveis, então $b = 0 \Rightarrow f$ ímpar.

Por outro lado,

f par $\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$\Rightarrow m(-x) + \cancel{b} = mx + \cancel{b}$

$\Rightarrow 2mx = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow m = 0$

Como as etapas acima são reversíveis, então $m = 0 \Rightarrow f$ par.

Exercício 12. Mostre que $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função par se, e somente se, $b = 0$.

Suponha que f é par. Então

$$f(x) = f(-x)$$

$$\Rightarrow \cancel{ax^2} + bx + \cancel{c} = \cancel{ax^2} - bx + \cancel{c}$$

$$\Rightarrow 2bx = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow b = 0$$

Como as etapas acima são reversíveis, vale também a implicação contrária: se $b=0$, então f é par.

Exercício 1. Escreva 9^{3000} como potência de 3.

$9^{3000} = 3^{6000}$

Exercício 2. Escreva 5^{4000} como potência de 25.

$$5^{4000} = (5^2)^{2000} = 25^{2000}$$

Exercício 3. Escreva $2^{100} \cdot 4^{200} \cdot 8^{300}$ como potência de 2.

$$2^{100} \cdot 4^{200} \cdot 8^{300} = 2^{100} \cdot 2^{400} \cdot 2^{900} = 2^{1400}$$

Exercício 4. Simplifique as expressões:

(a) $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ (c) $8^{4/3}$ (d) $x(3x^2)^3$ (e) $b^8(2b)^4$

(f) $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$ (g) $\dfrac{x^{2n}\cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}}$ (h) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$ (i) $\left(\dfrac{(x^2y^{-5})^{-4}}{(x^5y^{-2})^{-3}}\right)^2$ (j) $y^4(y^2(y^5)^2)^{3/5}$

(a) $\dfrac{2^8}{2^6} = 2^2 = 4$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{8}}{4}$

(c) $8^{4/3} = 2^4$

(d) $27x^7$

(e) $16b^{12}$

(f) $\dfrac{6^4 \cdot y^{12}}{2 \cdot y^5} = 2^3 \cdot 3^4 \cdot y^7$

(g) $x^{5n-1-n-2} = x^{4n-3}$

(h) $\dfrac{a^{1/2} \cdot b^{1/4}}{a^{1/3} \cdot b^{1/3}} = a^{1/6} \cdot b^{-1/12} = \dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{b}}$

(i) $\left(\dfrac{x^{-8} \cdot y^{20}}{x^{-15} \cdot y^6}\right)^2 = \dfrac{x^{-16} \cdot y^{40}}{x^{-30} \cdot y^{12}} = x^{14} \cdot y^{28}$

(j) $y^4 \cdot (y^2 \cdot y^{10})^{3/5} = y^4 \cdot y^{\frac{36}{5}} = y^{\frac{56}{5}}$

Exercício 5. Determine os números reais x que satisfazem a cada uma das equações:

(a) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$ (b) $x^{2/3} + 3x^{1/3} = 10$ (c) $x - \sqrt{x} = 6$ (d) $x^4 - 3x^2 = 10$

(a) Seja $y = \sqrt{x}$. Então

$0 = y^2 - 5y + 6 = (y-3)(y-2) \Rightarrow y = 2$ ou $y = 3$

$\Rightarrow x = 4$ ou $x = 9$

(b) Seja $y = x^{1/3}$. Então

$y^2 + 3y - 10 = 0 \Rightarrow (y+5)(y-2) = 0$

$\Rightarrow y = -5$ ou $y = 2$

$\Rightarrow x = -125$ ou $x = 8$

(c) Seja $y = \sqrt{x}$. Temos

$y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow (y-3)(y+2) = 0$

Como $y = \sqrt{x} \geq 0$, a única possibilidade é ter $y = 3 \Rightarrow x = 9$

(d) Seja $y = x^2$. Temos

$y^2 - 3y - 10 = 0 \Rightarrow (y-5)(y+2) = 0$

Como $y = x^2 \geq 0$, a única possibilidade é $x^2 = y = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

Exercício 6. Calcule (sem usar calculadora):

(a) $25^{3/2}$ (b) $32^{3/5}$ (c) $32^{-4/5}$ (d) $(-8)^{7/3}$ (e) $8^{5/3}$

(f) $81^{3/4}$ (g) $8^{-5/3}$ (h) $(-27)^{4/3}$ (i) $\sqrt{2}^{3}\sqrt{8}^{3}$ (j) $3^{3/2}12^{3/2}$

(a) $25^{3/2} = 5^3 = 125$

(b) $32^{3/5} = 2^3 = 8$

(c) $32^{-4/5} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$

(d) $(-8)^{7/3} = (-2)^7 = -128$

(e) $8^{5/3} = 2^5 = 32$

(f) $81^{3/4} = 3^3 = 27$

(g) $8^{-5/3} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

(h) $(-27)^{4/3} = (-3)^4 = 81$

(i) $2^{1/3} \cdot 2 = 2\sqrt[3]{2}$

(j) $3^{3/2} \cdot 12^{3/2} = 3^{3/2} \cdot 4^{3/2} \cdot 3^{3/2} = 3^3 \cdot 2^3 = 27 \cdot 8 = 216$

Exercício 7. Encontre uma fórmula para a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^9$ (b) $f(x) = x^{12}$ (c) $f(x) = x^{1/7}$ (d) $f(x) = x^{-2/5}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^4}{81}$ (f) $f(x) = 32x^5$ (g) $f(x) = 6 + x^3$ (h) $f(x) = 4x^{3/7} - 1$

(i) $f(x) = 7 + 8x^{5/9}$

(a) $y = x^9 \Rightarrow x = \sqrt[9]{y}$

(b) $y = x^{12} \Rightarrow x = \sqrt[12]{y}$

(c) $y = x^{1/7} \Rightarrow x = y^7$

(d) $y = x^{-2/5} \Rightarrow x = y^{5/2}$

(e) $y = \dfrac{x^4}{81} = \dfrac{x^4}{3^4} \Rightarrow x = 3y^{1/4}$

(f) $y = 2^5 \cdot x^5 \Rightarrow x = \frac{1}{2} y^{1/5}$

(g) $y = 6 + x^3 \Rightarrow x^3 = y - 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-6}$

(h) $y = 4x^{3/7} - 1 \Rightarrow x^{3/7} = \dfrac{y+1}{4} \Rightarrow x = \left(\dfrac{y+1}{4}\right)^{7/3}$

(i) $y = 7 + 8x^{5/9} \Rightarrow x^{5/9} = \dfrac{y-7}{8} \Rightarrow x = \left(\dfrac{y-7}{8}\right)^{9/5}$

Exercício 8. Demonstre que:

(a) $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ (b) $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$

(c) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$ (d) $(23-8\sqrt{7})^{1/2} = 4-\sqrt{7}$

(a) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{3}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2+\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

(b) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{3}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2-\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

(c) $(\sqrt{5}-2)^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{5} - 2 = \sqrt{9-4\sqrt{5}}$

(d) $(4-\sqrt{7})^2 = 16 - 8\sqrt{7} + 7 = 23 - 8\sqrt{7}$

$\Rightarrow 4-\sqrt{7} = \sqrt{23-8\sqrt{7}}$

Exercício 9. Demonstre que se $x, y > 0$, com $x \neq y$, então

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{x-y}}$$

$$= \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

Exercício 10. Explique por que a equação $\sqrt{x^2} = x$ não é válida para todo $x \in \mathbb{R}$ e deve ser substituída pela equação $\sqrt{x^2} = |x|$.

Temos $\sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1$. A invalidade de $\sqrt{x^2} = x$ é porque $\sqrt{u}$ é definida como sendo não-negativa para qualquer $u \geqslant 0$. Assim o correto é

$$\sqrt{x^2} = |x| \geqslant 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$$

Exercício 11. Explique por que

$$\sqrt{x} < \sqrt[3]{x} \text{ se } 0 < x < 1$$

e

$$\sqrt{x} > \sqrt[3]{x} \text{ se } x > 1.$$

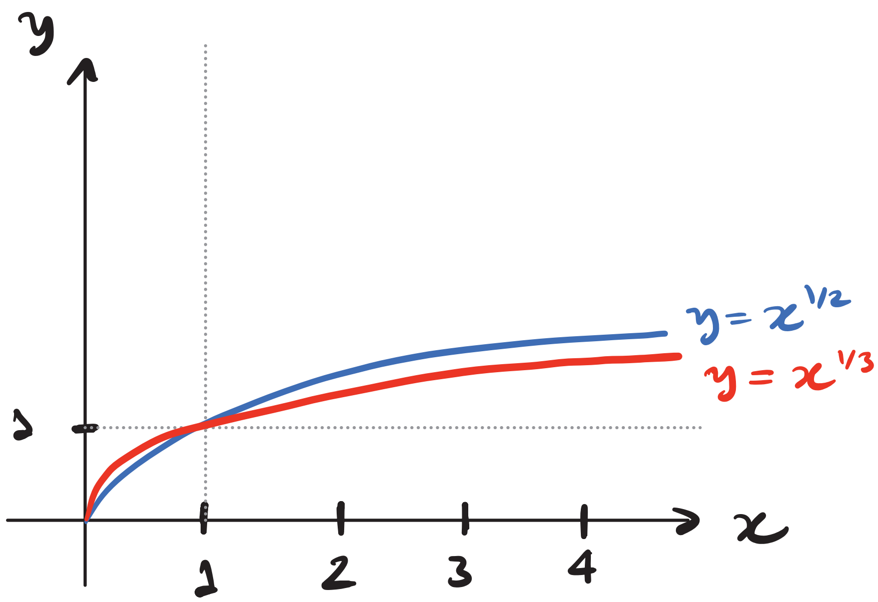
Esboce os gráficos das funções $\sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x}$ no mesmo par de eixos coordenados no intervalo $[0, 4]$.

Se $x > 1$, como $a \mapsto x^a$ é uma função crescente temos que $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x}$.

Se $0 < x < 1$, então $x = \frac{1}{y}$, com $y > 1$.

Temos

$$\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{y}} < \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{x}$$



Exercício 1. Escreva na forma de somatório o polinômio

$$p(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + ... + 2^n x^n$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^k x^k$$

Exercício 2. Mostre que os polinômios $f(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ e $g(x) = x^4 + 1$ são iguais.

$$f(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$
$$= [(x^2+1) + \sqrt{2}x][(x^2+1) - \sqrt{2}x]$$
$$= (x^2+1)^2 - 2x^2$$
$$= x^4 + \cancel{2x^2} + 1 - \cancel{2x^2}$$
$$= x^4 + 1 = g(x)$$

Exercício 3. Dividindo o polinômio $p(x)$ por x^2-3x+5, obtemos o quociente x^2+1 e resto $3x-5$. Determine $p(x)$.

$$p(x) = (x^2+1)\cdot(x^2-3x+5)+(3x-5)$$

$$= x^4-3x^3+5x^2+x^2-3x+5+3x-5$$

$$= x^4-3x^3+6x^2$$

Exercício 4. Divida $f(x)$ por $g(x)$ e verifique sua resposta, multiplicando quociente pelo divisor e somando ao resto:

(a) $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x - 3$ e $g(x) = x^3 - 2x + 1$

(b) $f(x) = x^4 - 2x + 13$ e $g(x) = x^2 + x + 1$

(c) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e $g(x) = 2x^2 + 3$

(d) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2$ e $g(x) = x^2 + 2$

(a)

$$\begin{array}{l|l} \cancel{3x^5} - x^4 + 2x^3 + 4x - 3 & x^3 - 2x + 1 \\ \hline -\cancel{3x^5} + 6x^3 - 3x^2 & 3x^2 - x + 8 \\ -\cancel{x^4} + 8x^3 - 3x^2 + 4x - 3 & \\ \cancel{x^4} - 2x^2 + x & \\ \cancel{8x^3} - 5x^2 + 5x - 3 & \\ -\cancel{8x^3} + 16x - 8 & \\ -5x^2 + 21x - 11 & \end{array}$$

Temos

$$(3x^2 - x + 8)\cdot(x^3 - 2x + 1) - 5x^2 + 21x - 11$$

$$= 3x^5 - 6x^3 + 3x^2 - x^4 + 2x^2 - x + 8x^3 - 16x + 8 - 5x^2 + 21x - 11$$

$$= 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x - 3$$ ✓

(b)

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^4} - 2x + 13 & x^2 + x + 1 \\ \hline -\cancel{x^4} - x^3 - x^2 & x^2 - x \\ -\cancel{x^3} - \cancel{x^2} - 2x + 13 & \\ \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + x & \\ -x + 13 & \end{array}$$

Temos

$$(x^2 - x)(x^2 + x + 1) - x + 13 =$$

$$= x^4 + x^3 + x^2 - x^3 - x^2 - x - x + 13$$

$$= x^4 - 2x + 13 \checkmark$$

(c)

$$
\begin{array}{llll|l}
 & \cancel{x^3} + x^2 + x + 1 & & & 2x^2 + 3 \\
- & \cancel{x^3} - \frac{3}{2}x & & & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\
\hline
 & \cancel{x^2} - \frac{1}{2}x + 1 & & & \\
- & \cancel{x^2} - \frac{3}{2} & & & \\
\hline
 & -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & & &
\end{array}
$$

Temos

$$\frac{1}{2}(x+1)(2x^2+3) - \frac{1}{2}(x+1) =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\cdot(2x^2+2)$$

$$= \frac{1}{2}(2x^3 + 2x + 2x^2 + 2)$$

$$= x^3 + x^2 + x + 1 \checkmark$$

(d)

$$
\begin{array}{ll|l}
 & \cancel{x^4} + 2x^3 + x^2 + 4x - 2 & x^2 + 2 \\
- & \cancel{x^4} - 2x^2 & x^2 + 2x - 1 \\
\hline
 & \cancel{2x^3} - x^2 + 4x - 2 & \\
- & \cancel{2x^3} - 4x & \\
\hline
 & -x^2 - 2 & \\
 & \underline{0} &
\end{array}
$$

Temos

$$(x^2+2)\cdot(x^2+2x-1) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x^2 + 4x - 2$$

$$= x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2 \checkmark$$

Exercício 5. Dados $p(x) = 2x^3 + ax + 3b$ e $q(x) = x^2 - 3x + 9$, determine a e b de modo que a divisão de $p(x)$ por $q(x)$ seja exata.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3} + ax + 3b & x^2 - 3x + 9 \\ \cline{2-2} -\cancel{2x^3} + 6x^2 - 18x & 2x \\ \cline{1-1} 6x^2 + (a-18)x + 3b & \end{array}$$

É preciso que

$$6x^2 + (a-18)x + 3b = 6\cdot(x^2 - 3x + 9)$$
$$= 6x^2 - 18x + 54$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 18 = -18 \Rightarrow a = 0 \\ 3b = 54 \Rightarrow b = 18 \end{cases}$$

Exercício 6. Fatore cada expressão:

(a) $4x^2 - 25$ (b) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ (c) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$

(d) $2x^2 + 5x - 12$ (e) $x^4 + 27x$ (f) $x^3y - 4xy$

(g) $x^8 - y^8$ (h) $x^{16} - y^8$ (i) $x^6 - 8x^3 + 15$

(j) $x^6 - 3x^3 - 10$ (k) $x^4 - 2x^2 - 15$ (l) $x^4 + 5x^2 - 14$

(a) $4x^2 - 25 = (2x-5)(2x+5)$

(b) Através da pesquisa por raízes racionais (que deverá dividir 12), vemos que 2 e 3 são raízes. Logo,

$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$ divide o polinômio:

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{x^3} - 3x^2 - 4x + 12 & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^3} + 5x^2 - 6x & x + 2 \\ \cline{1-1}
2x^2 - 10x + 12 & \\
0 &
\end{array}
$$

Logo:

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x+2)(x-2)(x-3)$

(c) Seja $f(x) = 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \sqrt{x} f(x) &= 3x^2 - 9x + 6 \\
&= 3(x^2 - 3x + 2) \\
&= 3(x-2)(x-1)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} \cdot (x-2)(x-1)$$

(d) Raízes:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4} = -4 \text{ ou } \frac{3}{2}$$

Logo,

$$2x^2 + 5x - 12 = 2\cdot(x+4)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$= (x+4)(2x-3)$$

(e) $x^4 + 27x = x\cdot(x^3 + 3^3)$

$= x\cdot(x+3)(x^2 - 3x + 9)$

(f) $x^3y - 4xy = xy\cdot(x^2 - 2^2)$

$= xy\cdot(x-2)(x+2)$

(g) $x^8 - y^8 = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4)$

$= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$

$= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$

(h) Pelo item anterior,

$(x^2)^8 - y^8 =$

$(x^2 - y)(x^2 + y)(x^4 + y^2)(x^8 + y^4)$

(i) $x^6 - 8x^3 + 15 = (x^3 - 3)(x^3 - 5)$

$= (x - \sqrt[3]{3})\left[x^2 + \sqrt[3]{3}x + (\sqrt[3]{3})^2\right] \cdot (x - \sqrt[3]{5})$

$\cdot \left[x^2 + \sqrt[3]{5}x + (\sqrt[3]{5})^2\right]$

(j) $x^6 - 3x^3 - 10 = (x^3 - 5)(x^3 + 2)$

$= (x - \sqrt[3]{5})\left[x^2 + \sqrt[3]{5}x + (\sqrt[3]{5})^2\right](x + \sqrt[3]{2}) \cdot$

$\cdot \left[x^2 - \sqrt[3]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2\right]$

(k) $x^4 - 2x^2 - 15 = (x^2 - 5)(x^2 + 3)$

$= (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x^2 + 3)$

(ℓ) $x^4 + 5x^2 - 14 = (x^2 + 7)(x^2 - 2)$

$= (x^2 + 7)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

Exercício 7. Reescreva, completando o quadrado:

(a) $x^2 + x + 1$ (b) $2x^2 - 12x + 11$ (c) $x^2 + 7x + 12$ (d) $-3x^2 + 5x - 1$

(a) $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

(b) $2\left(x^2 - 6x + \frac{11}{2}\right) = 2\left[(x-3)^2 - 9 + \frac{11}{2}\right]$

$= 2(x-3)^2 - 7$

(c) $x^2 + 7x + 12 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{48}{4}$

$= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

(d) $-3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) - 1 = -3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right] - 1$

$= -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{25}{12} - \frac{12}{12}$

$= -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{12}$

Exercício 8. Determine todas as escolhas de b, c e d tais que 1 e 4 sejam os únicos zeros do polinômio $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.

Como p tem grau 3, coeficientes reais e duas raízes reais distintas, ele não pode ter raízes em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (senão $\bar{z}$ seria uma 4ª raiz, contrariando o teorema fundamental da álgebra já que grau $p = 3$).

Assim,

$$p(x) = (x-1)^2(x-4)$$
$$= (x^2-2x+1)(x-4)$$
$$= x^3-4x^2-2x^2+8x+x-4$$
$$= x^3-6x^2+9x-4$$
$$\Rightarrow b=-6, \quad c=9 \text{ e } \quad d=-4$$

ou então

$$p(x) = (x-1)(x-4)^2$$
$$= (x-1)(x^2-8x+16)$$
$$= x^3-8x^2+16x-x^2+8x-16$$
$$= x^3-9x^2+24x-16$$
$$\Rightarrow b=-9, \quad c=24 \text{ e } \quad d=-16$$

Exercício 9. Determine o vértice do gráfico das seguintes funções:

(a) $7x^2 - 12$ (b) $(x-2)^2 - 3$ (c) $-2x^2 + 5x - 2$ (d) $x^2 - 6x + 2$

As raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ são

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A coordenada x do vértice é a média das raízes. Logo

$$x = -\frac{b}{2a}$$

(a) $x = 0,\ y = -12 \Rightarrow V = (0, -12)$

(b) $x = 2,\ y = -3 \Rightarrow V = (2, -3)$

(c) $x = \frac{5}{4},\ y = -2 \cdot \frac{25}{16} + \frac{25}{4} - 2$

$$= -\frac{25}{8} + \frac{50}{8} - 2$$

$$= \frac{25}{8} - \frac{16}{8} = \frac{9}{8} \Rightarrow V = \left(\frac{5}{4}, \frac{9}{8}\right)$$

(d) $x^2 - 6x + 2 = (x-3)^2 - 7$

$$\Rightarrow V = (3, -7)$$

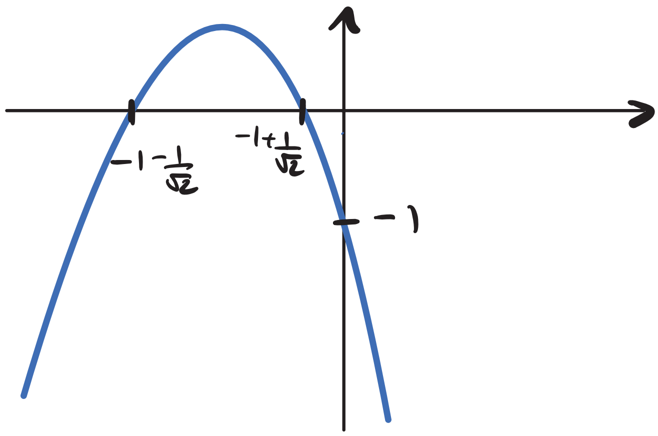
Exercício 10. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = -2x^2 + 4x - 1$ (b) $y = (x-2)^3 + 2$ (c) $y = x^2 - 3x + 2$ (d) $y = \sqrt{x+2} - 1$

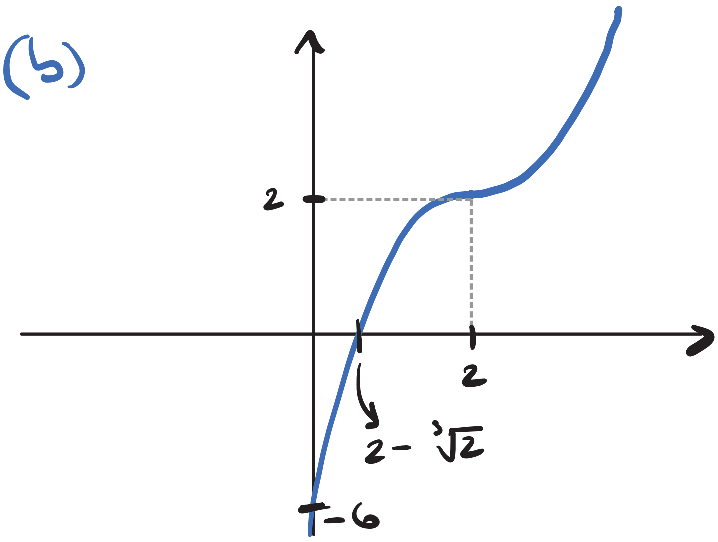
(a) $y = -2(x^2 + 2x) - 1$

$= -2 \cdot [(x+1)^2 - 1] - 1$

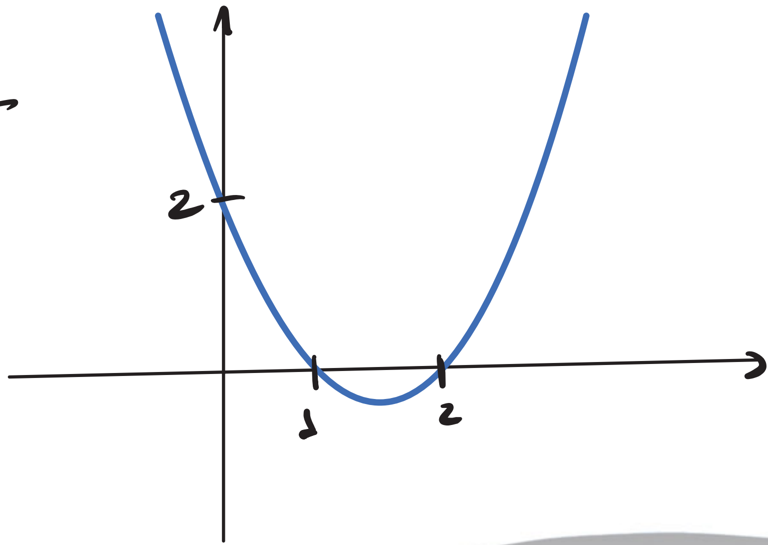
$= -2(x+1)^2 + 1$



(b)

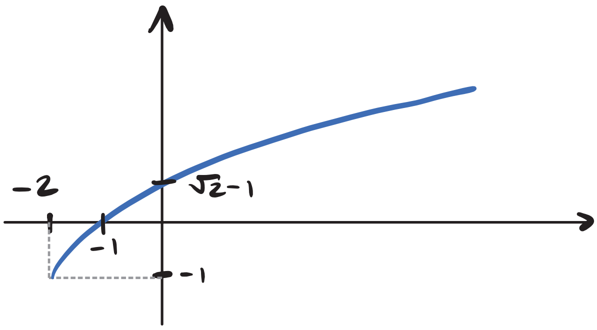


(c) $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$



(d) $y = \sqrt{x+2} - 1 \Rightarrow \sqrt{x+2} = y + 1 \Rightarrow x + 2 = (y+1)^2$

$\Rightarrow x = -2 + (y+1)^2$



Exercício 11. Para cada uma das funções abaixo, definidas em $[1, \infty)$, determine sua imagem, uma fórmula para sua inversa, bem como domínio e imagem da inversa:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ (b) $g(x) = x^2 + 4x + 7$

(a) $y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{20}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}$

Como Dom $f = [1, \infty)$ e $1 > -3/2$, temos que

$$f(x) \geq f(1) = \frac{25}{4} - \frac{11}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Assim,

$$\text{Im} f = \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$$

A partir de $y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}$, obtemos

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{4y + 11}{4}$$

$$\Rightarrow x + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{4y + 11}}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{4y + 11}}{2} - \frac{3}{2}$$

Apesar de f^{-1} fazer sentido para $y \geq -\frac{11}{4}$, como Dom f foi restrito, temos que

$$\text{Dom} f^{-1} = \text{Im} f = [7/2, +\infty)$$

e

$$\text{Im} f^{-1} = \text{Dom} f = [1, +\infty)$$

(b) $y = x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 - 4 + 7 = (x+2)^2 + 3$

Como $\text{Dom}\, g = [1, \infty)$ e $1 > -2$, temos que

$$g(x) \geq g(1) = 12$$

Assim,

$$\text{Im} f = [12, +\infty)$$

A partir de $y = (x+2)^2 + 3$, obtemos

$$(x+2)^2 = y - 3$$

$$\Rightarrow x + 2 = \sqrt{y-3}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y-3} - 2$$

Apesar de f^{-1} fazer sentido para $y \geq 3$, como $\text{Dom} f$ foi restrito, temos que

$$\text{Dom} f^{-1} = \text{Im} f = [12, +\infty)$$

e $\text{Im} f^{-1} = \text{Dom} f = [1, +\infty)$

Exercício 12. Encontre todas as soluções reais das equações:

(a) $x + 5 = 14 - \dfrac{x}{2}$ (b) $x^2 - x - 12 = 0$ (c) $2x(4-x)^{-1/2} - 3\sqrt{4-x} = 0$

(d) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (e) $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x}$ (f) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

(g) $3|x-4| = 10$

(a) $\dfrac{3x}{2} = 9 \Rightarrow x = 6$

(b) $x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 4$

(c) $\dfrac{2x}{\sqrt{4-x}} - 3\sqrt{4-x} = 0$

$\Rightarrow 2x - 3(4-x) = 0$

$\Rightarrow 5x - 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{12}{5}$

(d) $(x^2)^2 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1)$

$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x-1)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ ou $x = \pm 1$

(e) $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x} \Rightarrow \cancel{2x^2} = \cancel{2x^2} - x + 2x - 1$

$\Rightarrow x = 1$

(f) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{4}$

$= \dfrac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$

(g) $3|x-4| = 10 \Rightarrow |x-4| = \frac{10}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 4 = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{22}{3} \\ 4 - x = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Exercício 13. Mostre que não existem dois números reais cuja soma é 7 e cujo produto é 13.

Seja a e b os números. Temos que a e b são raízes de

$$f(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + a \cdot b$$

$$= x^2 - 7x + 13$$

Note que

$$f(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{52}{4}$$

$$= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, f não tem raízes reais, o que significa que $a, b \notin \mathbb{R}$

Exercício 14. Sem usar calculadora nem efetuar nenhum cálculo, explique por que $p(x) = x^2 + 87559743x - 787727821$ não possui raízes inteiras.
(*Sugestão: compare a paridade de* $t \in \mathbb{Z}$ *com a paridade de* $p(t)$)

Para $t = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$p(2n) = 4n^2 + 2 \cdot 87559743 - 787727821,$$

que é ímpar. Em particular, $p(2n) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para $t = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$p(2n+1) = (2n+1)^2 + (2n+1) \cdot 87559743 - 787727821$$

$$= 4n^2 + 2n + 1 + 2n \cdot 87559743 + 87559743 - 787727821,$$

que também é ímpar.

Assim, $p(2n+1) \neq 0$, e então p não possui raízes inteiras.

Exercício 15. Suponha que $b, c \in \mathbb{R}$ sejam tais que $f(x) = x^2 + bx + c$ não tenha raízes reais. Mostre que $g(x) = x^2 + bx - c$ possui duas raízes reais distintas.

Como f não tem raiz real,

$$b^2 - 4c < 0 \Rightarrow b^2 < 4c.$$

Por outro lado, o discriminante de g é

$$b^2 + 4c > 2b^2 > 0.$$

Logo g tem duas raízes reais distintas.

Exercício 16. Explique por que o polinômio $p(x) = x^6 + 100x^2 + 5$ não tem zeros reais.

Temos $x^2 \geq 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$. Logo,

$p(x) = (x^2)^3 + 100 \cdot x^2 + 5 \geq 5 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$.

Assim, p não possui raízes reais.

Exercício 17. Dê um exemplo de um polinômio de grau 5 que tem exatamente dois zeros.

$p(x) = x^4(x-1) = x^5 - x,$

cujas raízes são $x = 0$ e $x = 1$.

Exercício 18. Suponha que a, b e c sejam inteiros e que $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 9$. Explique por que toda raiz de p que for inteira está no conjunto $\{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$.

Se n é raiz inteira de p, então

$$an^3 + bn^2 + cn = -9$$

$$\Rightarrow (an^2 + bn + c) \cdot n = -9$$

Como $an^2 + bn + c \in \mathbb{Z}$, segue que n é um divisor de -9. Assim,

$$n \in \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$$

Exercício 19. Prove que se $z \in \mathbb{C}$ é raiz do polinômio de coeficientes reais $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, então $\overline{z}$ também é raiz de p.

$$p(z) = 0$$

$$\Rightarrow a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{a_n}(\overline{z})^n + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} = 0$$

$$\Rightarrow a_n(\overline{z})^n + \cdots + a_1(\overline{z}) + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow p(\overline{z}) = 0,$$

pois $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{a} = a.$

Exercício 20. Descubra todas as raízes reais dos seguintes polinômios e os escreva como produto de fatores lineares com fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$:

(a) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ (b) $x^6 + 2x^4 - 16x^2 - 32$

(a) Sabemos, pesquisando raízes racionais, que se $r \in \mathbb{Q}$ satisfaz $p(r) = 0$ então $r = \frac{a}{b}$ com b divisor de 1 e a divisor de 2. Ou seja, as candidatas são ± 1 e ± 2.

Por inspeção, vemos que $x = \pm 1$ são raízes. Daí, como

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1,$$

temos que x^2+1 divide $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$:

$$\begin{array}{rl|l}
\cancel{x^4} + x^3 - 3x^2 - x + 2 & & x^2 - 1 \\
-\cancel{x^4} + x^2 & & \overline{x^2 + x - 2} \\
\hline
\cancel{x^3} - 2x^2 - \cancel{x} + 2 & & \\
-\cancel{x^3} + \cancel{x} & & \\
\hline
-2x^2 + 2 & & \\
0 & &
\end{array}$$

As demais são raízes de $x^2 + x - 2$:

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2 \text{ ou } 1$$

Logo,

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x-1)^2(x+1)(x+2),$$

cujas raízes são $x = \pm 1$ e $x = -2$.

(b) $x^6 + 2x^4 - 16x^2 - 32$

$x^4 \cdot (x^2+2) - 16 \cdot (x^2+2)$

$= (x^2+2)(x^4-16)$

$= (x^2+2)(x^2-4)(x^2+4)$

$= (x^2+2)(x-2)(x+2)(x^2+4)$,

cujas raízes reais são $x = \pm 2$.

Exercício 21. Existe um número real que é exatamente uma unidade a mais do que seu cubo? Justifique.

Esse número a satisfaria

$$a = a^3 + 1$$

$$\Rightarrow a^3 - a + 1 = 0.$$

Ou seja, a seria raiz de

$$p(x) = x^3 - x + 1,$$

que é um polinômio de grau ímpar com coeficientes reais. Logo, p possui raiz real e então tal a tal que $a = a^3 + 1$ existe.

Exercício 22. Mostre que se n for um natural par então o polnômio

$$p(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$$

não possui raiz real.

Note que, da fórmula da soma de uma PG, vem

$$p(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$\Rightarrow x^{n+1} - 1 = (x-1) \cdot p(x)$$

Ou seja, se a é raiz de p então $a^{n+1} - 1 = 0 \Rightarrow |a| = 1$

Porém, se $a \in \mathbb{R}$, as únicas possibilidades são $a = \pm 1$.

Temos que

$$p(1) = n + 1 \neq 0$$

e, lembrando que n é par,

$$p(-1) = (-1)^n + (-1)^{n-1} + \cdots + (-1)^2 + (-1) + 1$$

$$= (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots + (1 - 1) + 1$$

$$= 1$$

Assim, p não tem raiz real.

Exercício 1. Escreva sob a forma de união de intervalos os domínios das seguintes funções:

(a) $y = \dfrac{5x^3 - 12x^2 + 13}{x^2 - 7}$

(b) $y = \dfrac{x^5 + 3x^4 - 6}{2x^2 - 5}$

(c) $y = \dfrac{4x^7 + 8x^2 - 1}{x^2 - 2x - 6}$

(d) $y = \dfrac{6x^9 + x^5 + 8}{x^2 + 4x + 1}$

(a) O denominador não pode ser zero. Suas raízes são $x = \pm\sqrt{7}$. Assim,

$$\text{Dom} = (-\infty, -\sqrt{7}) \cup (-\sqrt{7}, \sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, +\infty)$$

(b) $2x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}/\sqrt{2}$

$$\text{Dom} = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$$

(c) $x^2 - 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}$

$$\text{Dom} = (-\infty, 1-\sqrt{7}) \cup (1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}) \cup (1+\sqrt{7}, +\infty)$$

(d) $x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$

$$\text{Dom} = (-\infty, -2-\sqrt{3}) \cup (-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}) \cup (-2+\sqrt{3}, \infty)$$

Exercício 2. Escreva

$$\frac{x^5 + 6x^3 + 11x + 7}{x^2 + 4}$$

na forma $f(x) + \dfrac{ax + b}{x^2 + 4}$, onde $f(x)$ é um polinômio.

Vamos primeiro dividir o numerador pelo denominador:

$$\begin{array}{rl|l}
\cancel{x^5} + 6x^3 + 11x + 7 & & x^2 + 4 \\ \cline{3-3}
-\cancel{x^5} - 4x^3 & & x^3 + 2x \\ \cline{1-1}
\cancel{2x^3} + 11x + 7 & & \\
-\cancel{2x^3} - 8x & & \\ \cline{1-1}
3x + 7 & &
\end{array}$$

Logo,

$$\frac{x^5 + 6x^3 + 11x + 7}{x^2 + 4} = x^3 + 2x + \frac{3x + 7}{x^2 + 4}$$

Exercício 3. Escreva cada expressão como a soma de um polinômio e de uma função racional cujo numerador tem grau menor que seu denominador:

(a) $\dfrac{2x+1}{x-3}$ (b) $\dfrac{4x-5}{x+7}$ (c) $\dfrac{x^2}{3x-1}$

(d) $\dfrac{x^2}{4x+3}$ (e) $\dfrac{x^6+3x^3+1}{x^2+2x+5}$ (f) $\dfrac{x^6-4x^2+5}{x^2-3x+1}$

(a) $$\frac{2x+1}{x-3} = \frac{2(x-3)+7}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$$

(b) $$\frac{4x-5}{x+7} = \frac{4(x+7)-33}{x+7} = 4 - \frac{33}{x+7}$$

(c) Dividindo:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^2} & 3x-1 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^2}+\frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x+\frac{1}{9} \\ \hline \cancel{\frac{1}{3}x} & \\ -\cancel{\frac{1}{3}x}+\frac{1}{9} & \\ \hline 1/9 & \end{array}$$

Logo,

$$\frac{x^2}{3x-1} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{1}{9(3x-1)}$$

(d)

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^2} & 4x+3 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^2}-\frac{3}{4}x & \frac{1}{4}x-\frac{3}{16} \\ \hline -\cancel{\frac{3}{4}x} & \\ \cancel{\frac{3}{4}x}+\frac{9}{16} & \\ \hline 9/16 & \end{array}$$

Logo,

$$\frac{x^2}{4x+3} = \frac{1}{4}x - \frac{3}{16} + \frac{9}{16(4x+3)}$$

(e)

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^6} + 3x^3 + 1 & x^2 + 2x + 5 \\ \hline
-\cancel{x^6} - 2x^5 - 5x^4 & x^4 - 2x^3 - x^2 + 15x - 25 \\
-\cancel{2x^5} - 5x^4 + 3x^3 + 1 & \\
\cancel{2x^5} + 4x^4 + 10x^3 & \\
-\cancel{x^4} + 13x^3 + 1 & \\
\cancel{x^4} + 2x^3 + 5x^2 & \\
\cancel{15x^3} + 5x^2 + 1 & \\
-\cancel{15x^3} - 30x^2 - 75x & \\
-\cancel{25x^2} - 75x + 1 & \\
\cancel{25x^2} + 50x + 125 & \\
-25x + 126 &
\end{array}
$$

Logo,

$$\frac{x^6 + 3x^3 + 1}{x^2 + 2x + 5} = x^4 - 2x^3 - x^2 + 15x - 25 + \frac{126 - 25x}{x^2 + 2x + 5}$$

(f)

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^6} - 4x^2 + 5 & x^2 - 3x + 1 \\ \hline
-\cancel{x^6} + 3x^5 - x^4 & x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 21x + 41 \\
\cancel{3x^5} - x^4 - 4x^2 + 5 & \\
-\cancel{3x^5} + 9x^4 - 3x^3 & \\
\cancel{8x^4} - 3x^3 - 4x^2 + 5 & \\
-\cancel{8x^4} + 24x^3 - 8x^2 & \\
\cancel{21x^3} - 12x^2 + 5 & \\
-\cancel{21x^3} + 63x^2 - 21x & \\
\cancel{41x^2} - 21x + 5 & \\
-\cancel{41x^2} + 123x - 41 & \\
102x - 36 &
\end{array}
$$

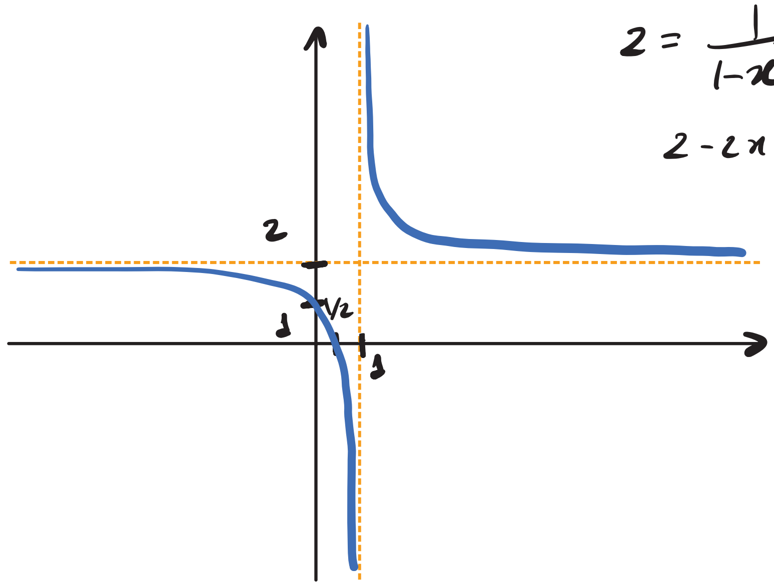
Logo:

$$\frac{x^6 - 4x^2 + 5}{x^2 - 3x + 1} = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 21x + 41 + \frac{102 - 36}{x^2 - 3x + 1}$$

Exercício 4. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ (b) $y = \dfrac{-3}{x}$ (c) $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ (d) $y = \dfrac{x+1}{x-3}$ (e) $y = \dfrac{1}{x^2-2x+1}$

(a)



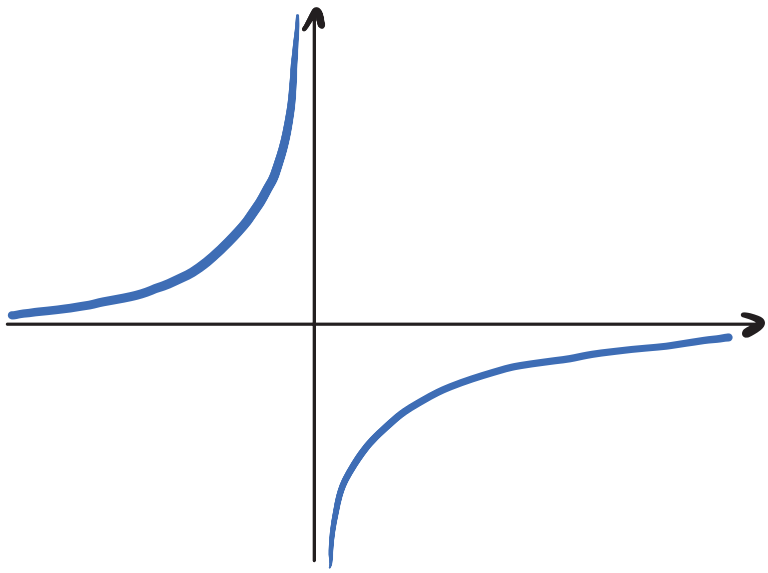
$2 = \dfrac{1}{1-x}$

$2 - 2x = 1$

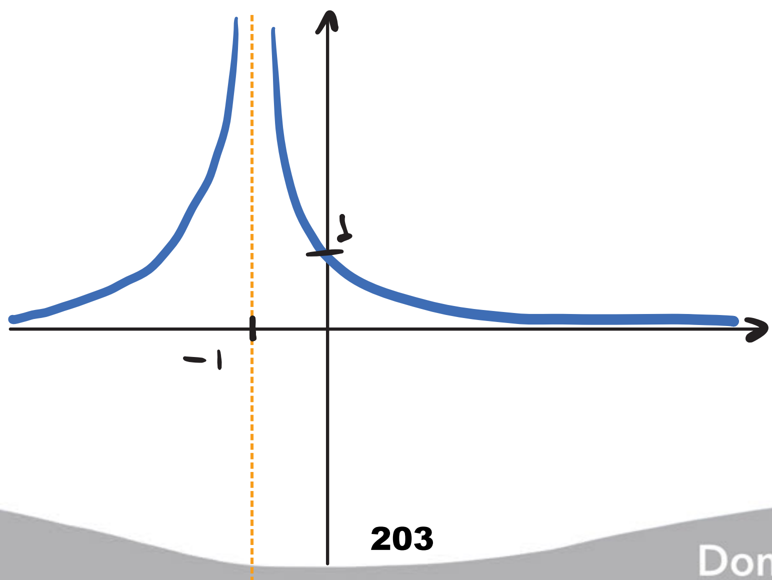
$2x = 1$

$x = 1/2$

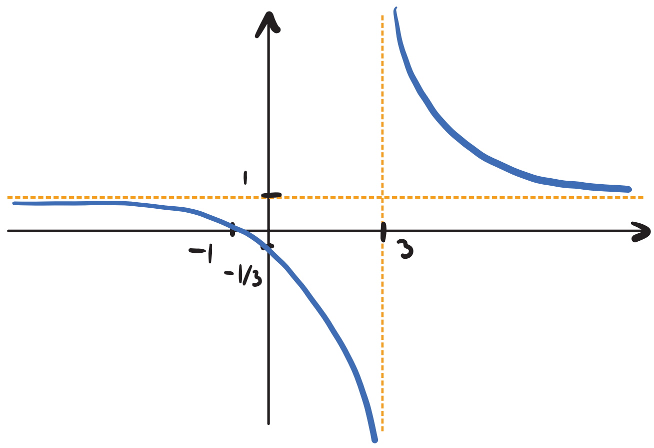
(b)



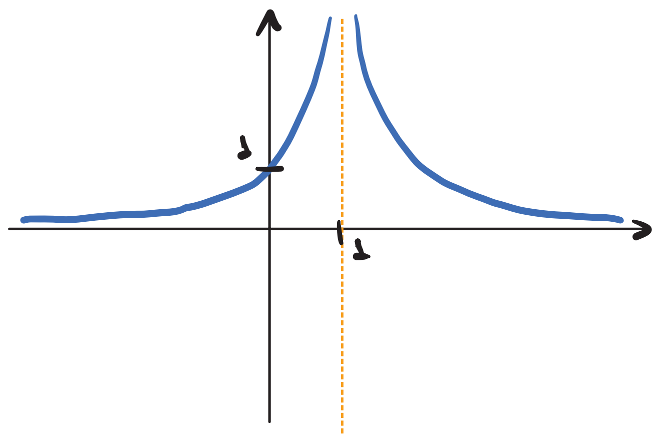
(c)



(d) $y = \dfrac{x+1}{x-3} = \dfrac{x-3+4}{x-3} = 1 + \dfrac{4}{x-3}$



(e) $\dfrac{1}{x^2-2x+1} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$



Exercício 5. Suponha que p seja um polinômio e t seja um número real. Explique por que existe um polinômio $g(x)$ tal que

$$\frac{p(x) - p(t)}{x - t} = g(x) \quad \text{para todo } x \neq t.$$

Seja

$$f(x) = p(x) - p(t)$$

Temos que $f(t) = 0$. Logo $x - t$ divide $f(x)$, e daí existe um polinômio $g(x)$ tal que

$$p(x) - p(t) = g(x) \cdot (x - t)$$

$$\Rightarrow \frac{p(x) - p(t)}{x - t} = g(x)$$

Exercício 6. Prove que $\sqrt{x}$ não é uma função racional. (*Sugestão: inspire-se na prova de que $\sqrt{2}$ não é um número racional*)

Suponha que $\sqrt{x}$ fosse racional. Então haveriam polinômios $p(x)$ e $q(x)$, sem fatores em comum, e tais que

$$\sqrt{x} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{p^2(x)}{q^2(x)} \Rightarrow x \cdot q^2(x) = p^2(x).$$

Logo, $p(0) = 0$, e daí x é fator de p. Segue que existe um polinômio $\tilde{p}$ tal que

$$p(x) = x \cdot \tilde{p}(x).$$

Assim,

$$\sqrt{x} = x \cdot \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)} \Rightarrow \frac{q(x)}{\tilde{p}(x)} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \frac{q^2(x)}{\tilde{p}^2(x)} = x \Rightarrow q^2(x) = x\, \tilde{p}^2(x)$$

Logo, $q(0) = 0$, e então x também é fator de q. No entanto, isso é uma contradição, pois supusemos que p e q não tinham fator comum, mas vimos que x é fator comum de ambos.

Essa contradição mostra que nossa hipótese de partida é falsa, e então $\sqrt{2}$ não pode ser uma função racional.

Exercício 1. Uma cultura de bactérias começa com 500 indivíduos e dobra de tamanho a cada meia hora.

(a) Quantas bactérias existem após 3 horas?

(b) Quantas bactérias existem após t horas?

(c) Quantas bactérias existem após 40 minutos?

(d) Estime o tempo para a população atingir 100.000 bactérias.

(a) Em 3 horas há 6 meias horas. Assim, a quantidade de bactérias será

$$500 \cdot 2^6 = 32.000$$

(b) $500 \cdot 2^{2t}$

(c) $500 \cdot 2^{2(4/6)} = 500 \cdot 2^{4/3} = 1000 \cdot \sqrt[3]{2}$

$$\approx 1259$$

(d) $500 \cdot 2^{2t} = 100.000$

$$\Rightarrow \cancel{1000} \cdot 2^{2t-1} = 100 \cdot \cancel{1000}$$

$$\Rightarrow 2^{2t-1} = 100 \Rightarrow (2t-1) = \log_2 10^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{1 + 2(1 + \log_2 5)}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \log_2 5 \approx 3h49\,min$$

Exercício 2. Um isótopo de sódio, ^{24}Na, tem meia-vida de 15 horas. Uma amostra desse isótopo tem massa de 2 g.

(a) Encontre a quantidade remanescente após 60 horas.

(b) Encontre a quantidade remanescente após t horas.

(c) Faça uma estimativa da quantidade remanscente após 4 dias.

(a) $60 = 4 \cdot 15$

$\Rightarrow$ sobram $2 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^3} = 0{,}125\,g$

(b) $2 \cdot 2^{-t/15} = 2^{\left(1 - \frac{t}{15}\right)}$

(c) $t = 4 \cdot 24 = 96$

$\Rightarrow$ sobram $2^{\left(1 - \frac{96}{15}\right)} = 2^{-5{,}4} \approx 0{,}02g$

Exercício 3. Determine o menor valor da expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-x^2}$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-x^2} = 2^{x^2-4x}$, que ocorre no mínimo de $x^2-4x = x(x-4)$, o qual ocorre no ponto médio das raízes $x=0$ e $x=4$, ie, ocorre em $x=2$

$\Rightarrow x^2-4x = 4-8=-4$

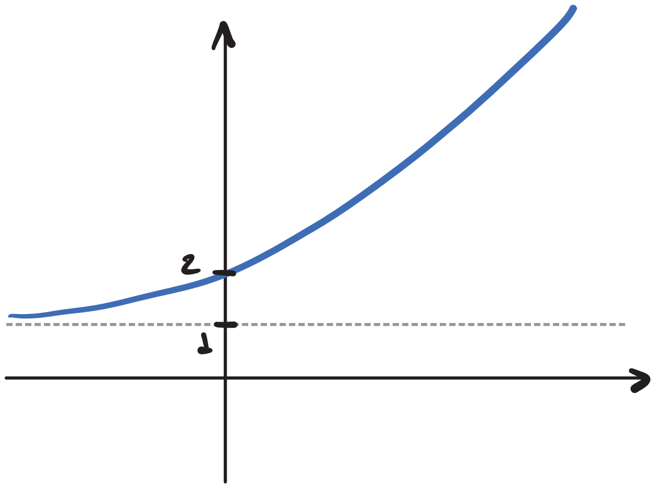
Logo, o menor valor é

$$2^{-4} = \frac{1}{16}.$$

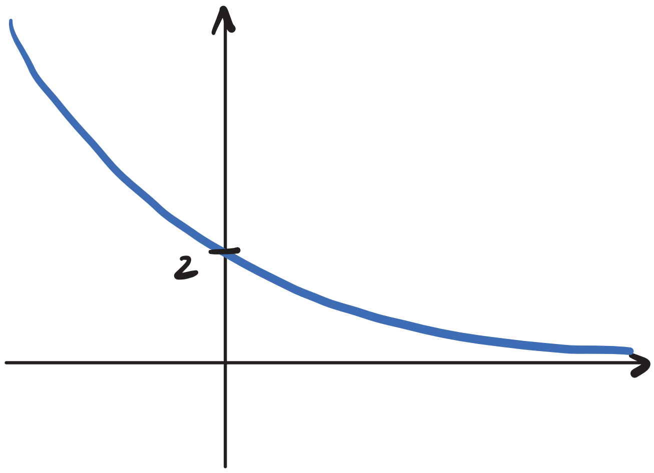
Exercício 4. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = 4^x + 1$ (b) $(0,5)^{x-1}$ (c) $y = 10^{x+2}$ (d) $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$ (e) $y = 2(1 - e^x)$

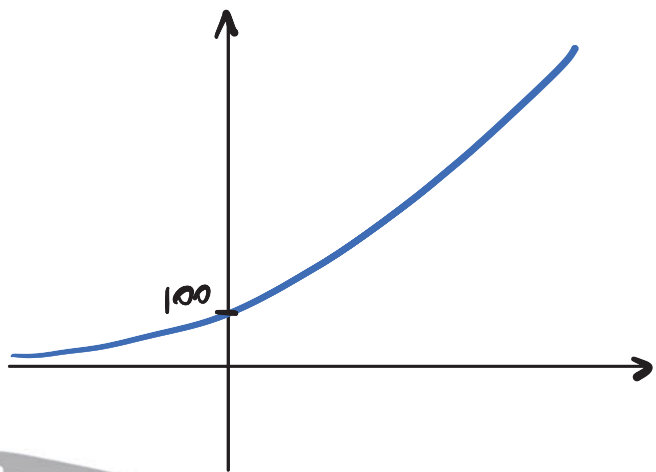
(a)



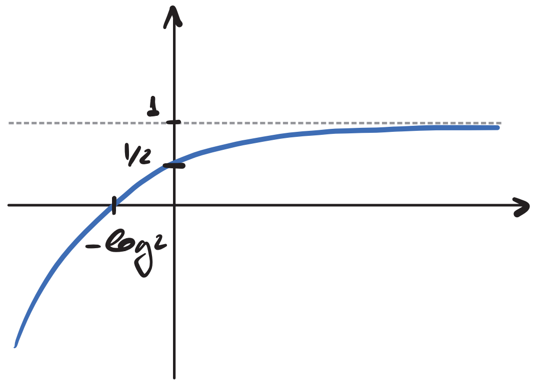
(b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2 \cdot 2^{-x}$



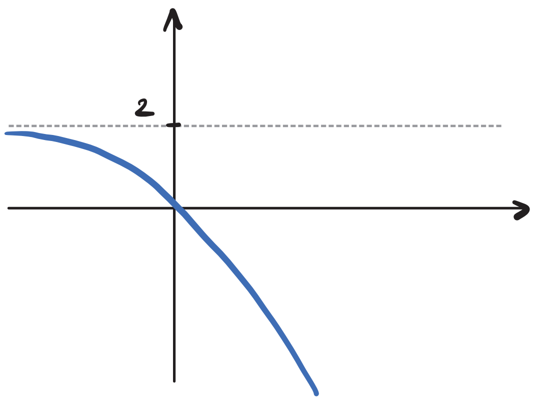
(c) $y = 100 \cdot 10^x$



(d)



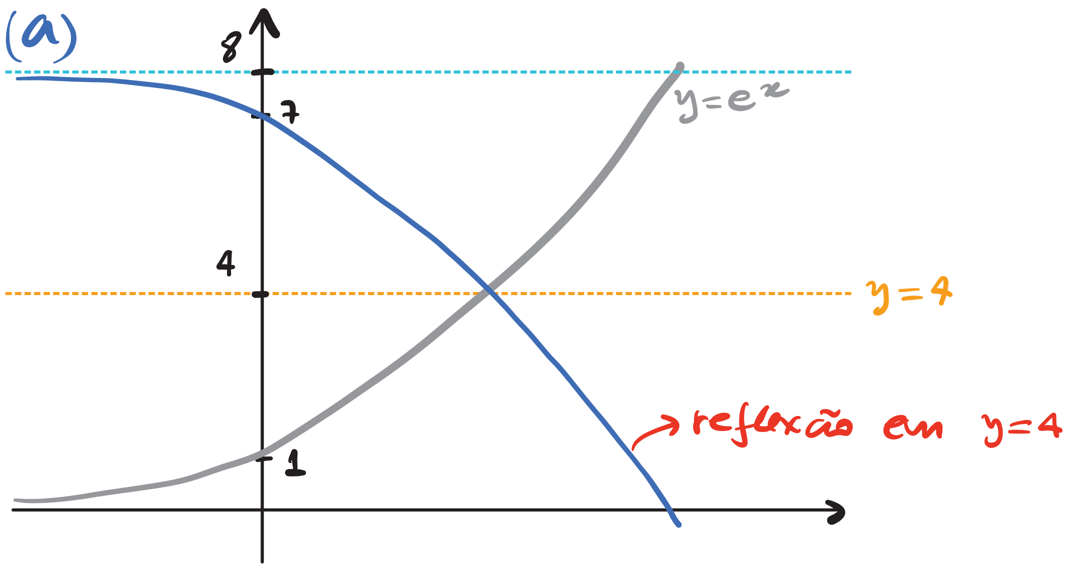
(e)

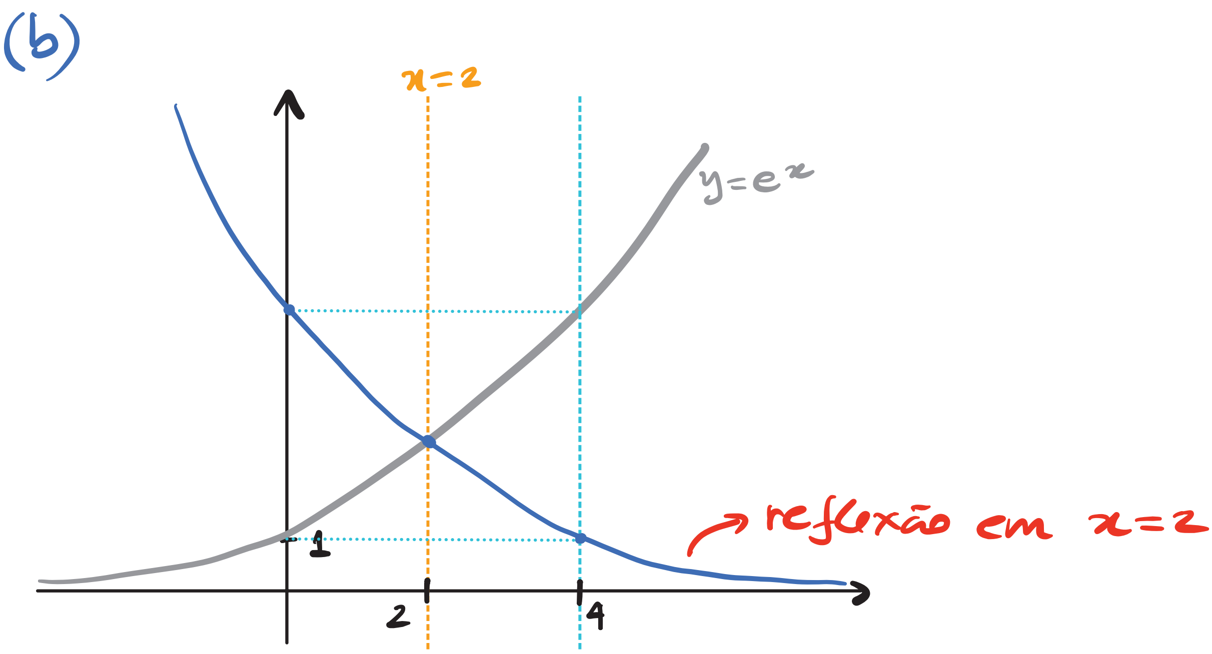


Exercício 5. Começando com o gráfico de $y = e^x$, encontre as equações dos gráficos que resultam ao

(a) refletir em torno da reta $y = 4$

(b) refletir em torno da reta $x = 2$





Exercício 6. Resolva as seguintes equações:

(a) $2^x = 64\sqrt{2}$ (b) $8^x = \dfrac{1}{32}$ (c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

(d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 125$ (e) $(\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9}$ (f) $(\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x-1}$

(g) $2^{3x-1} = 32$ (h) $5^{2x^2+3x-2} = 1$ (i) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$

(j) $(2^x)^{x-1} = 4$ (k) $4^{x^2+4x} = 4^{12}$ (l) $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = 0$

(m) $\dfrac{3^{x+2} \cdot 9^x}{243^{5x+1}} = \dfrac{81^{2x}}{27^{3-4x}}$ (n) $4^x - 2^x = 56$ (o) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

(a) $2^x = 2^{6+1/2} \Rightarrow x = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

(b) $2^{3x} = 2^{-5} \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$

(c) $3^{\frac{x}{2}} = 3^{4/3} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

(d) $5^{-x} = 5^3 \Rightarrow x = -3$

(e) $3^{\frac{x}{4}} = 3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

(f) $2^{\frac{3x-1}{2}} = 2^{\frac{4}{3}\cdot(2x-1)}$

$\Rightarrow \frac{3x-1}{2} = \frac{4}{3}(2x-1)$

$\Rightarrow 9x - 3 = 16x - 8 \Rightarrow 7x = 5 \Rightarrow x = 5/7$

(g) $2^{3x-1} = 2^5 \Rightarrow 3x - 1 = 5 \Rightarrow x = 2$

(h) $5^{2x^2+3x-2} = 5^0 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow x = -2$ ou $x = \frac{1}{2}$

(i) $3^{2x-1+6x+8} = 3^{3x+3}$

$\Rightarrow 8x+7 = 3x+3 \Rightarrow x = \frac{-4}{5}$

(j) $(2^x)^{x-1} = 2^2$

$\Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = -1$ ou $x = 2$

(k) $4^{x^2+4x} = 4^{12}$

$\Rightarrow x^2 + 4x = 12$

$\Rightarrow (x+2)^2 - 4 = 12 \Rightarrow (x+2)^2 = 4^2$

$\Rightarrow x = -2 \pm 4 \Rightarrow x = -6$ ou $x = 2$

(l) $2^{\frac{3x-1}{3} \cdot \frac{1}{x-1}} = 2^{\frac{3x-9}{3x-7}}$

$\Rightarrow \frac{3x-1}{3x-3} = \frac{3x-9}{3x-7}$

$\Rightarrow \cancel{9x^2} - 24x + 7 = \cancel{9x^2} - 36x + 27$

$\Rightarrow 12x = 20 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

(m) $\frac{3^{x+2+2x}}{3^{25x+5}} = \frac{3^{8x}}{3^{9-12x}}$

$$\Rightarrow 3^{3x+2-25x-5} = 3^{8x+12x-9}$$

$$\Rightarrow -22x-3 = 20x-9$$

$$\Rightarrow 42x = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

(n) $2^{2x} - 2^x = 2^x(2^x - 1) = 56$

Faça $y = 2^x$. Temos

$$y^2 - y - 56 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2}$$

Como $y = 2^x \in \mathbb{R}$, temos que ter $y \geq 0$

$$\Rightarrow y = 8 = 2^x \Rightarrow x = 3$$

(o) $5^{\frac{x-2}{2}} \cdot 5^{\frac{4x-10}{x}} = 5^{\frac{3x-2}{2x}}$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{2} + \frac{4x-10}{x} = \frac{3x-2}{2x}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 8x - 20 = 3x - 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -6 \text{ ou } x = 3.$$

Exercício 7. Se $f(x) = 5^x$, mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x \left(\frac{5^h - 1}{h} \right)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{5^{x+h} - 5^x}{h} = \frac{5^x \cdot 5^h - 5^x}{2}$$

$$= 5^x \cdot \left(\frac{5^h - 1}{h} \right)$$

Exercício 8. Prove que

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

é uma função ímpar.

$$f(-x) = \frac{1 - e^{-1/x}}{1 + e^{-1/x}} = \frac{1 - 1/e^{1/x}}{1 + 1/e^{1/x}}$$

$$= \frac{(e^{1/x} - 1)\cancel{/e^{1/x}}}{(e^{1/x} + 1)\cancel{/e^{1/x}}} = -\left(\frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}\right) = -f(x),$$

Logo, f é ímpar

Exercício 1. Calcule (sem usar calculadora):

(a) $\log_2 64$ (b) $\log_2 \frac{1}{128}$ (c) $\log_4 2$ (d) $\log_8 128$

(e) $\log_{10} 10000$ (f) $\log_{10} \frac{1}{1000}$ (g) $\log_2 8^{3,1}$ (h) $\log_{27} 81$

(a) $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \log_2 2 = 6$

(b) $\log_2 \frac{1}{128} = \log_2 2^{-7} = -7 \log_2 2 = -7$

(c) $\log_4 2 = \log_4 4^{1/2} = \frac{1}{2} \log_4 4 = \frac{1}{2}$

(d) $\log_8 2^7 = \log_8 \sqrt[3]{8} \cdot 8^2 = \log_8 8^{2+\frac{1}{3}}$

$= \left(2+\frac{1}{3}\right) \log_8 8 = \frac{7}{3}$

(e) $\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3 \log_{10} 10 = 3$

(f) $\log_{10} \frac{1}{1000} = \log_{10} 10^{-3} = -3 \log_{10} 10 = -3$

(g) $\log_2 8^{3,1} = \log_2 2^{9,3} = 9,3$

(h) $\log_{27} 81 = \frac{\log 81}{\log 27} = \frac{\log 3^4}{\log 3^3} = \frac{4}{3}$

Exercício 2. Determine $a > 0$ tal que:

(a) $\log_2 a = 7$ (b) $\log_2 a = 8$ (c) $\log_2 a = -5$ (d) $\log_2 a = -9$

(e) $\log_a 64 = 1$ (f) $\log_a 64 = 6$ (g) $\log_a 64 = \frac{3}{2}$ (h) $\log_a 64 = \frac{6}{5}$

(a) $a = 2^7 = 128$

(b) $a = 2^8 = 256$

(c) $a = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

(d) $a = 2^{-9} = \frac{1}{512}$

(e) $a = 64$

(f) $\log_a 64 = \log_a 2^6 = 6 \log_a 2 = 6$

$\Rightarrow \log_a 2 = 1 \Rightarrow a = 2$

(g) $\log_a 64 = \log_a 2^6 = 6 \log_a 2 = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \log_a 2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow a^{1/4} = 2 \Rightarrow a = 2^4 = 16$

(h) $\log_a 64 = \frac{6}{5} \Rightarrow a^{\frac{6}{5}} = 64 = 2^6$

$\Rightarrow a^{\frac{1}{5}} = 2 \Rightarrow a = 2^5 = 32$

Exercício 3. Resolva as seguintes equações:

(a) $\log|x| = 2$ (b) $|\log x| = 2$ (c) $\log_3(5x+1) = 2$

(a) $|x| = e^2 \Rightarrow x = \pm e^2$

(b) $\log x = \pm 2 \Rightarrow x = e^{\pm 2}$

(c) $5x + 1 = 3^2 = 9 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$

Exercício 4. Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$.

$$e^{5-3x} = 10 \Rightarrow 5 - 3x = \log 10$$

$$\Rightarrow 3x = 5 - \log 10$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 - \log 10}{3}$$

Exercício 5. Expresse $\log a + \dfrac{1}{2}\log b$ como um único logaritmo.

$$\log a + \frac{1}{2}\log b = \log a + \log\sqrt{b}$$
$$= \log(a \cdot \sqrt{b})$$

Exercício 6. Sabendo que $\log_3 x = 5,3$ e $\log_3 y = 2,1$, calcule:

(a) $\log_3(9xy)$ (b) $\log_3(x^2y^3)$ (c) $\log_3 \frac{x}{3y}$ (d) $\log_3 \frac{x^3}{y^2}$ (e) $\log_9 x^{10}$

(a) $\log_3(9xy) = \log_3 3^2 + \log_3 x + \log_3 y$

$= 2 + 5,3 + 2,1 = 9,4$

(b) $\log_3(x^2y^3) = 2\log_3 x + 3\log_3 y$

$= 2 \cdot 5,3 + 3 \cdot 2,1 = 10,6 + 6,3 = 16,9$

(c) $\log_3 \frac{x}{3y} = \log_3 x - \log_3 3 - \log_3 y$

$= 5,3 - 1 - 2,1 = 2,2$

(d) $\log_3 \frac{x^3}{y^2} = 3\log_3 x - 2\log_3 y$

$= 3 \cdot 5,1 - 2 \cdot 2,1 = 15,3 - 4,2 = 11,1$

(e) $\log_9 x^{10} = 10 \log_9 x = 10 \cdot \frac{\log x}{\log 9}$

$= 10 \cdot \frac{\log x}{2\log 3} = 5 \log_3 x = 5 \cdot 5,1 = 25,5$

Exercício 7. Se $f(x) = 2x + \log x$, encontre $f^{-1}(2)$.

Inspecionando a equação, como

$\log 1 = 0$, temos que

$$f(1) = 2 \cdot 1 + \log 1 = 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2) = 1.$$

Exercício 8. Encontre a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3^x$ (b) $f(x) = 2^{x-5}$ (c) $f(x) = 4 \cdot 5^x$
(d) $f(x) = \log_8 x$ (e) $f(x) = \log_4(3x+1)$ (f) $f(x) = 8 + 9\log_2(4x-7)$
(g) $f(x) = \log_x 13$ (h) $f(x) = \log_{5x} 6$

(a) $y = 3^x \Rightarrow x = \log_3 y$

(b) $y = 2^{x-5} \Rightarrow x - 5 = \log_2 y$
$\Rightarrow x = 5 + \log_2 y$

(c) $y = 4 \cdot 5^x \Rightarrow \frac{y}{4} = 5^x$
$\Rightarrow x = \log_5(y/4)$

(d) $y = \log_8 x \Rightarrow x = 8^y$

(e) $y = \log_4(3x+1) \Rightarrow 4^y = 3x + 1$
$\Rightarrow x = \frac{4^y - 1}{3}$

(f) $y = 8 + 9\log_2(4x-7)$
$\Rightarrow \log_2(4x-7) = \frac{y-8}{9}$
$\Rightarrow 4x - 7 = 2^{\frac{y-8}{9}} \Rightarrow x = \frac{2^{\frac{y-8}{9}} + 7}{4}$

(g) $y = \log_x 13 = \frac{\log 13}{\log x}$

$$\Rightarrow \log x = \frac{\log 13}{y} = \log 13^{1/y}$$

$$\Rightarrow x = 13^{\frac{1}{y}}$$

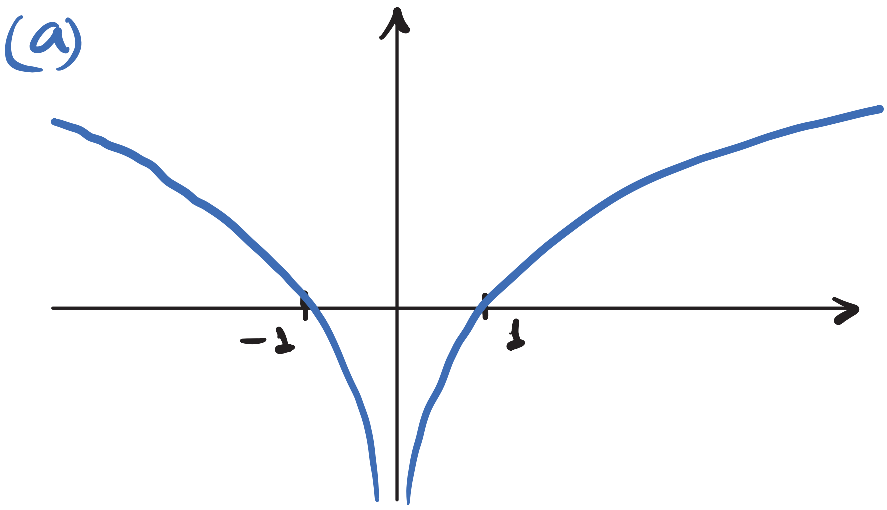
(h) $y = \log_{5x} 6 = \dfrac{\log 6}{\log 5x}$

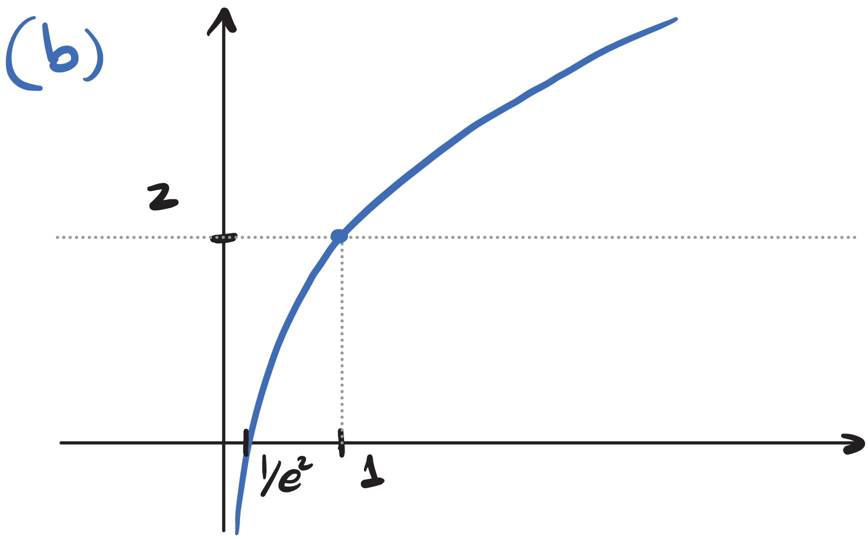
$$\Rightarrow \log 5x = \frac{1}{y} \log 6 = \log 6^{1/y}$$

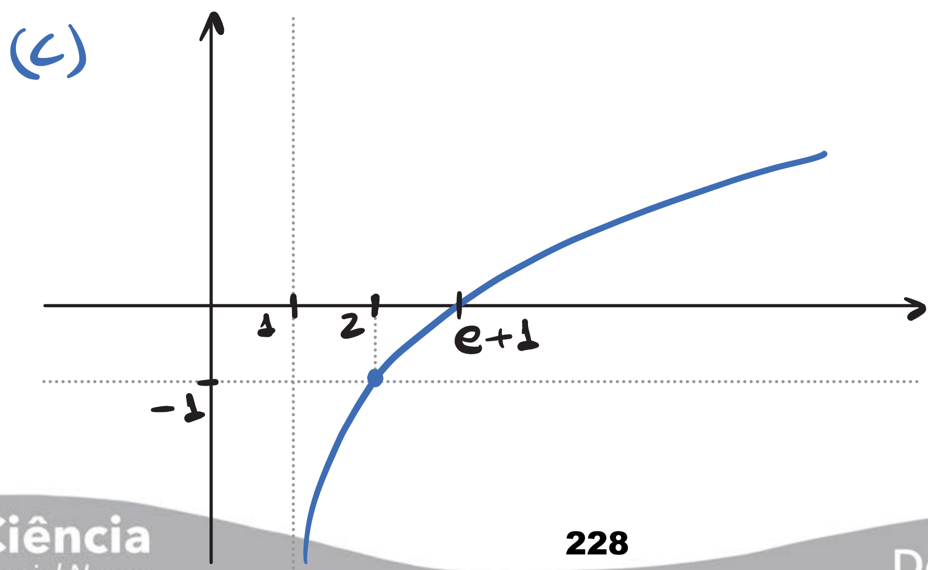
$$\Rightarrow 5x = 6^{1/y} \Rightarrow x = \frac{6^{1/y}}{5}$$

Exercício 9. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = \log|x|$ (b) $f(x) = \log x + 2$ (c) $g(x) = \log(x-1) - 1$







Exercício 10. Resolva cada equação ou inequação em x:

(a) $e^{7-4x} = 6$ (b) $\log(x^2 - 1) = 3$ (c) $2^{x-5} = 3$

(d) $\log(\log x) = 1$ (e) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ (f) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde $a \neq b$

(g) $\log x + \log(x-1) = 1$ (h) $1 < e^{3x-1} < 2$ (i) $1 - 2\log x < 3$

(a) $e^{7-4x} = 6 \Rightarrow 7-4x = \log 6$

$\Rightarrow 4x = 7 - \log 6 \Rightarrow x = \dfrac{7 - \log 6}{4}$

(b) $x^2 - 1 = e^3 \Rightarrow x^2 = 1 + e^3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1+e^3}$

(c) $x - 5 = \log_2 3 \Rightarrow x = 5 + \log_2 3$

(d) $e^1 = \log x \Rightarrow x = e^e$

(e) $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$

$\Rightarrow (e^x - 2)(e^x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = \log 2$ ou $x = 0$

(f) $ax = \log C + bx$

$\Rightarrow (a-b)x = \log C \Rightarrow x = \dfrac{\log C}{a-b}$

(g) $\log[x(x-1)] = 1 \Rightarrow x(x-1) = e$

$\Rightarrow x^2 - x - e = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4e}}{2}$

(h) $1 < e^{3x-1} < 2$

$\Rightarrow 0 < 3x - 1 < \log 2$

$\Rightarrow 1 < 3x < 1 + \log 2$

$\Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log 2$

(i) $1 - 2\log x < 3$

$\Rightarrow -2 < 2\log x$

$\Rightarrow \log x > -1 \Rightarrow x > \frac{1}{e}$

Exercício 11. Calcule $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\ldots(\log_{31} 32)$

Temos que

$$\log_n(n+1) = \frac{\log(n+1)}{\log n}$$

Assim o produto procurado é

$$P = \frac{\cancel{\log 3}}{\log 2} \cdot \frac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 3}} \cdot \ldots \frac{\log 32}{\cancel{\log 31}} = \frac{\log 32}{\log 2}$$

$$= \frac{\log 2^5}{\log 2} = 5\,\frac{\cancel{\log 2}}{\cancel{\log 2}} = 5$$

Exercício 12. Mostre que $\log_{10} 2$ é irracional.

Suponha que $\log_{10} 2$ fosse racional. Vamos mostrar que essa suposição nos conduz a um absurdo.

Se $\log_{10} 2 \in \mathbb{Q}$, então existem $p, q \in \mathbb{N}^*$ tais que

$$\log_{10} 2 = \frac{p}{q} > 0$$

Podemos supor que $\text{mdc}(p, q) = 1$.
Logo,

$$10^{\frac{p}{q}} = 2 \Rightarrow 10^p = 2^q$$
$$\Rightarrow 2^p \cdot 5^p = 2^q$$

Pelo teorema fundamental da aritmética, devemos ter a mesma decomposição em fatores primos dos dois lados da igualdade. Assim, como não há 5 na direita, segue que $p = 0$.

Logo,

$$q \log_{10} 2 = 0,$$

absurdo pois $10^0 = 1 \neq 2$. Essa contradição implica que $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$.

Exercício 13. Determine $x > 0$ tal que

$$\frac{\log_b x}{4} = \log_b \frac{x}{4}$$

para todo $b > 0$, $b \neq 1$.

$$\frac{1}{4}\,\frac{\log x}{\log b} = \frac{\log_b x}{4} = \log_b \frac{x}{4} = \frac{\log x - \log 4}{\log b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\log x = \log x - \log 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\log x = \log 4$$

$$\Rightarrow \log x = \frac{4}{3}\log 4 = \log 4^{4/3}$$

$$\Rightarrow x = 4^{4/3} = 4\cdot\sqrt[3]{4}$$

Exercício 14. Sejam $b, y > 0$, com $b \notin \{1/2, 1\}$. Demonstre que

$$\log_{2b} y = \frac{\log_b y}{1 + \log_b 2}$$

$$\log_{2b} y = \frac{\log_b y}{\log_b 2b} = \frac{\log_b y}{\log_b b + \log_b 2}$$

$$= \frac{\log_b y}{1 + \log_b 2}$$

Exercício 15. Resolva a inequação $\log(x^2 - 2x - 2) \geqslant 0$

Devemos ter

$$x^2 - 2x - 2 \geqslant 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1) \geqslant 0$$

Logo, x deve estar entre as raízes, que são -1 e 3. Assim,

$$-1 < x < 3.$$

Exercício 16. Suponha que $a, b > 0$, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Mostre que

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{1}{\frac{\log a}{\log b}} = \frac{1}{\log_b a}$$

Exercício 17. Mostre que a função

$$f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

é ímpar e calcule a sua inversa.

$$f(-x) = \log(-x + \sqrt{x^2+1})$$

$$= \log\left[\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}\right]$$

$$= \log\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \log\left[\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}\right]$$

$$= -\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$= -f(x).$$

Logo, $f(x)$ é ímpar.

Vamos calcular f^{-1}:

$$y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow (e^y - x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow e^{2y} - 2xe^y + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Exercício 1. Converta de graus para radianos:

(a) 300° (b) −18° (c) 36° (d) 9°

De um modo geral, o ângulo de $\theta°$ em radianos é

$$x = \frac{\theta}{180} \cdot \pi$$

(a) $x = \frac{300}{180}\pi = \frac{30}{18}\pi = \frac{5\pi}{3}$

(b) $x = \frac{-18}{180} \cdot \pi = -\frac{\pi}{10}$

(c) $x = \frac{36}{180} \cdot \pi = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

(d) $x = \frac{9}{180}\pi = \frac{\pi}{20}$

Exercício 2. Converta de radiano para graus:

(a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) 2 (c) $-\frac{3\pi}{8}$ (d) 4π

De um modo geral, o ângulo de θ radianos em graus é

$$x = \frac{\theta}{\pi} \cdot 180$$

(a) $x = \frac{5\cancel{\pi}}{\cancel{6}\cancel{\pi}} \cdot \overset{30}{\cancel{180}} = 150°$

(b) $x = \frac{2}{\pi} \cdot 180 = \left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ} \approx 114{,}59°$

(c) $x = -\frac{3\cancel{\pi}}{\underset{2}{\cancel{8}}\cancel{\pi}} \cdot \overset{45}{\cancel{180}} = -67{,}5°$

(d) $x = \frac{4\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} \cdot 180 = 720°$

Exercício 3. Encontre o comprimento de um arco de um círculo de raio 12 cm, cujo ângulo central é 30°.

A medida do arco é $\theta \cdot r$, onde θ é o ângulo central em radianos e r é o raio. Assim, o arco em questão mede

$$12 \cdot \frac{\pi}{6} = 2\pi \text{ cm}$$

Exercício 4. Um círculo tem raio de 1,5 m. Qual o ângulo subentendido no centro do círculo por um arco de 1 m de comprimento?

Temos que

$$\theta r = \theta \cdot 1{,}5 = \theta \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{2}{3}$$

OBS: valor em radianos!

Exercício 5. Determine o raio de um setor circular com ângulo $3\pi/4$ e comprimento de arco 6 cm.

$$\theta \cdot r = \text{arco}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3\pi}{4} \cdot r = 6 \Rightarrow r = \frac{24}{3\pi} = \frac{8}{\pi} \text{ cm}$$

Exercício 6. Encontre os valores exatos:

(a) $\tan \pi/3$ (b) $\operatorname{sen}(7\pi/6)$ (c) $\sec(5\pi/3)$

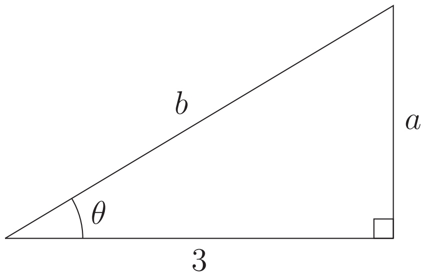
(a) $$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen}\pi/3}{\cos\pi/3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

(b) $$\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

(c) $$\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sec\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{1/2} = 2$$

Exercício 7. Expresse os comprimentos a e b na figura abaixo em termos de θ.



Temos que

$$\frac{a}{3} = \tan\theta \Rightarrow a = 3 \cdot \tan\theta$$

$$\frac{3}{b} = \cos\theta \Rightarrow b = \frac{3}{\cos\theta} = 3 \cdot \sec\theta$$

Exercício 8. Determine todos os números t tais que $(1/3, t)$ seja um ponto sobre o círculo unitário.

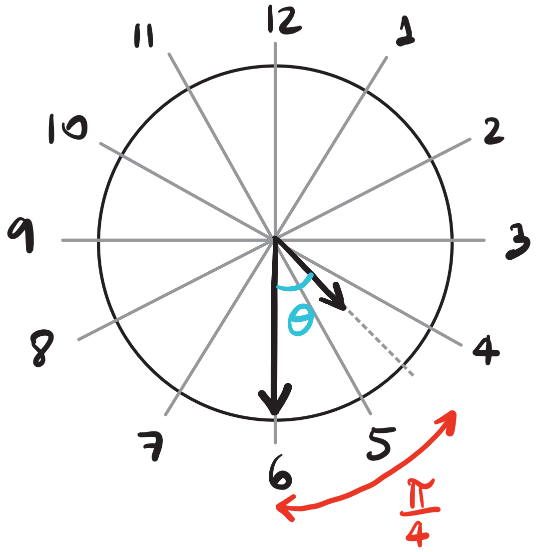
É preciso que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + t^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} + t^2 = 1 \Rightarrow t^2 = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow t = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Exercício 9. Qual o ângulo entre o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos em um relógio marcando 4 horas e 30 minutos?



O ângulo entre cada marcação de horas é de $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Assim, no caso temos

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Exercício 10. Mostre que a soma das medidas dos ângulos (em radianos) de um polígono convexo de n lados é $S_n = (n-2)\pi$.

Quando $n=3$, temos um triângulo e sabemos que

$$S_3 = \pi = (3-2)\pi$$

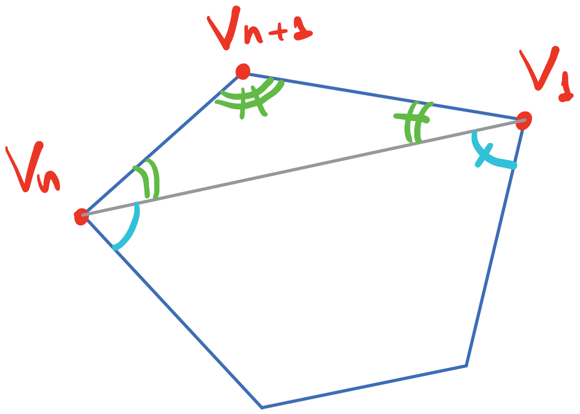
Vamos provar os demais casos usando indução.

Assuma como hipótese indutiva que

$$S_n = (n-2)\pi$$

para um certo $n \geq 3$ natural.

Considere um polígono convexo com $n+1$ lados. Em ordem horária, os vértices são $V_1, V_2, \ldots, V_n, V_{n+1}$.



Unindo V_1 a V_n, obtemos um polígono convexo $[V_1, V_2, \ldots, V_n]$ de n lados. Pela fórmula,

$$S_n = (n-2)\pi$$

Então a soma dos ângulos do polígono $[V_1, \ldots, V_{n+1}]$ é igual à S_n mais a soma dos ângulos internos do triângulo de vértices V_1, V_n e V_{n+1}. Ou seja,

$$S_{n+1} = S_n + \pi$$
$$= (n-2)\pi + \pi$$
$$= (n+1-2)\pi,$$

completando a indução. Assim,

$$S_n = (n-2)\pi \quad \forall\, n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 1. Encontre o domínio da função:

(a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{1 - \tan x}$

(a) $1 - \operatorname{sen} x = 0$ se $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Logo,

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(b) $1 - \tan x = 0$ se $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Além disso, é necessário excluir do domínio também os pontos onde $\tan x$ não está definida, que são da forma

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Conseguimos afastar ambas as condições excluindo pontos da forma

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi + p\cdot\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}, \ p \in \{0, 1\}$$

Logo:

$$\operatorname{Dom} g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi + p\cdot\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}, \ p \in \{0,1\} \right\}$$

Exercício 2. Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde $x, y \in [0, \pi/2]$, avalie $\operatorname{sen}(x+y)$.

Como $x, y \in [0, \pi/2]$,

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

e

$$\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5},$$

lembrando que $\cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{4}{5}$.

Assim,

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \operatorname{sen} y \cdot \cos x$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4 + 6\sqrt{2}}{15}$$

Exercício 3. Demonstre as identidades:

(a) $\tan\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sec\theta$

(b) $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \operatorname{sen} 2\theta$

(a) $\tan\theta \cdot \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

(b) $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}} = \dfrac{2\operatorname{sen}\theta \cdot \cos^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{\cos\theta} \cdot \underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{=1}}$

$= 2\operatorname{sen}\theta \cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta$

Exercício 4. Encontre todos os valores de x tais que $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$ e $x \in [0, 2\pi]$.

$$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} x$$

$$\iff \quad \operatorname{sen} x \cdot (2\cos x - 1) = 0$$

Assim, temos

$$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi \text{ ou } 2\pi$$

ou então

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3}$$

Exercício 5. Determine o menor número $\theta > 4\pi$ tal que $\cos\theta = 0$

$$\theta = 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$$

Exercício 6. Determine o menor número $\theta > 6\pi$ tal que $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\theta = 6\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{25\pi}{4}$$

Exercício 7. Encontre o menor número $x > 0$ tal que $\text{sen}(e^x) = 0$

$\pi = e^x \Rightarrow x = \log \pi$

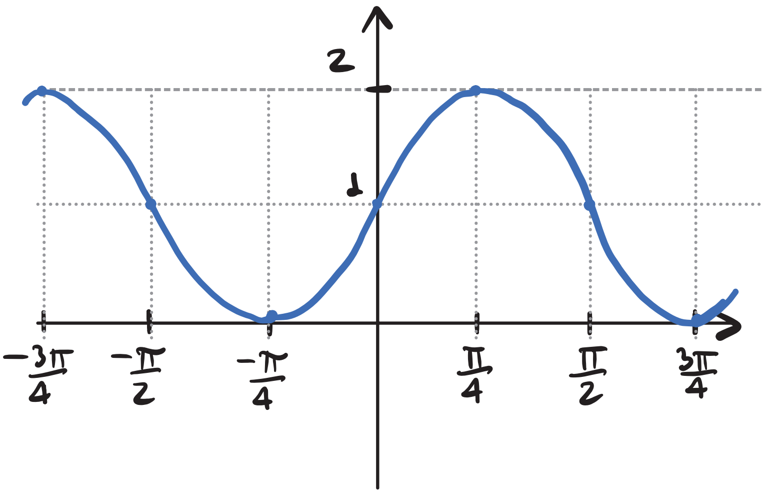
Exercício 8. Explique por que $\pi^{\cos x} > \frac{1}{4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Temos $\cos x \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \pi^{\cos x} \geq \pi^{-1} = \frac{1}{\pi} > \frac{1}{4}$$

já que $\pi = 3{,}14\ldots < 4$.

Exercício 9. Esboce o gráfico da função $y = 1 + \operatorname{sen} 2x$ sem usar recursos computacionais.



Exercício 10. Demonstre as identidades:

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

(b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

(c) $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

(d) $\operatorname{sen}\theta \cot\theta = \cos\theta$

(e) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

(f) $\cot^2 x + \sec^2 x = \tan^2 x + \operatorname{cossec}^2 x$

(g) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

(h) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta} = 2\sec^2\theta$

(i) $\tan x + \tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos x \cos y}$

(j) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$

(b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos x + \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x = \cos x$

(c) $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}\pi\cos x - \operatorname{sen} x\cos\pi = \operatorname{sen} x$

(d) $\operatorname{sen}\theta \cdot \cot\theta = \cancel{\operatorname{sen}\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}} = \cos\theta$

(e) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x + \cos^2 x$

$= 1 + 2\operatorname{sen} x\cos x$

$= 1 + \operatorname{sen} 2x$

(f) $\cot^2 x + \sec^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$

$= \operatorname{cossec}^2 x + \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{cossec}^2 x + \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$

$= \operatorname{cossec}^2 x + \tan^2 x$

(g) $\tan 2\theta = \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta} = \dfrac{2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}$

$= \dfrac{\cancel{\cos^2\theta} \cdot \dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\cancel{\cos^2\theta} \cdot \left(1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)} = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

(h) $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1 + \cancel{\operatorname{sen}\theta} + 1 - \cancel{\operatorname{sen}\theta}}{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$

$= \dfrac{2}{\cos^2\theta} = 2\sec^2\theta$

(i) $\tan x + \tan y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}$

$= \dfrac{\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cdot \cos y} = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$

(j) $\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$

$= \dfrac{\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\theta}{\cos\theta \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta} = -\cot\theta$

Exercício 11. Se $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{3}$ e $\sec y = \dfrac{5}{4}$, onde $x, y \in [0, \pi/2]$, calcule:

(a) $\operatorname{sen}(x+y)$ (b) $\cos(x-y)$ (c) $\operatorname{sen} 2y$

(d) $\cos(x+y)$ (e) $\operatorname{sen}(x-y)$ (f) $\cos 2y$

Como $x, y \in [0, \pi/2]$,

$$\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

e

$$\operatorname{sen} y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5},$$

lembrando que $\cos y = \dfrac{1}{\sec y} = \dfrac{4}{5}$.

(a) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \operatorname{sen} y \cdot \cos x$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4+6\sqrt{2}}{15}$$

(b) $\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8\sqrt{2}+3}{15}$$

(c) $\operatorname{sen} 2y = 2 \operatorname{sen} y \cos y$

$$= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

(d) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8\sqrt{2}-3}{15}$$

(e) $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \operatorname{sen} y \cdot \cos x$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4-6\sqrt{2}}{15}$$

(f) $\cos 2y = \cos^2 y - \text{sen}^2 y$

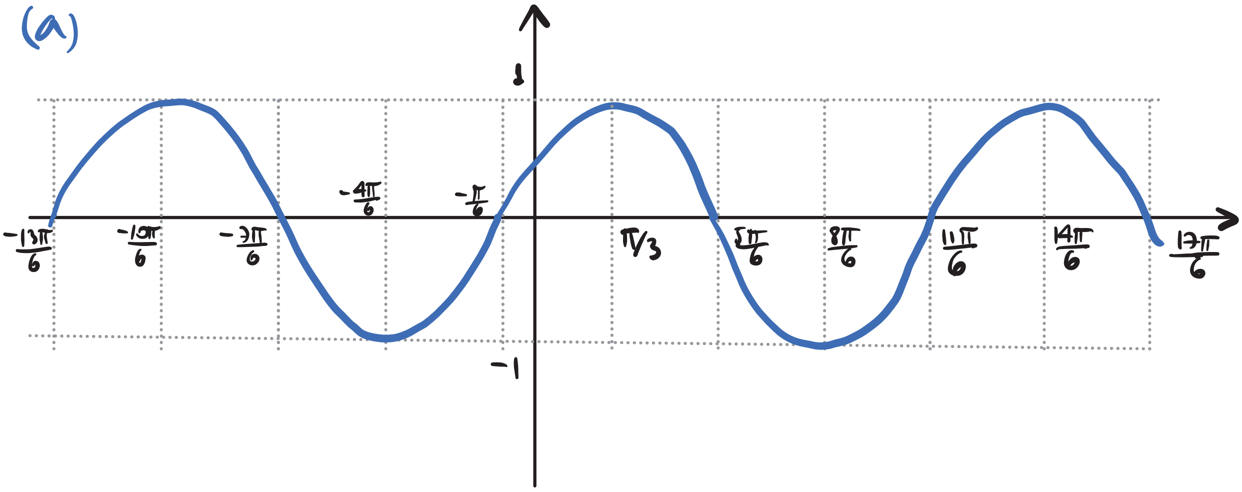
$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

Exercício 12. Esboce o gráfico das seguintes funções:

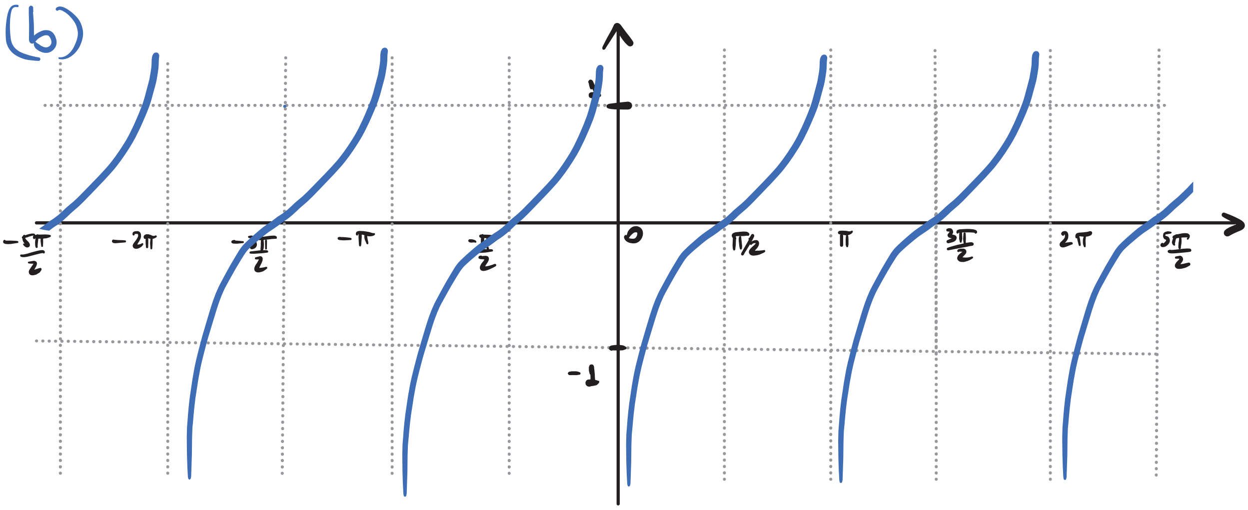
(a) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ (b) $y = \dfrac{1}{3}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

(c) $y = |\operatorname{sen} x|$ (d) $y = 2 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

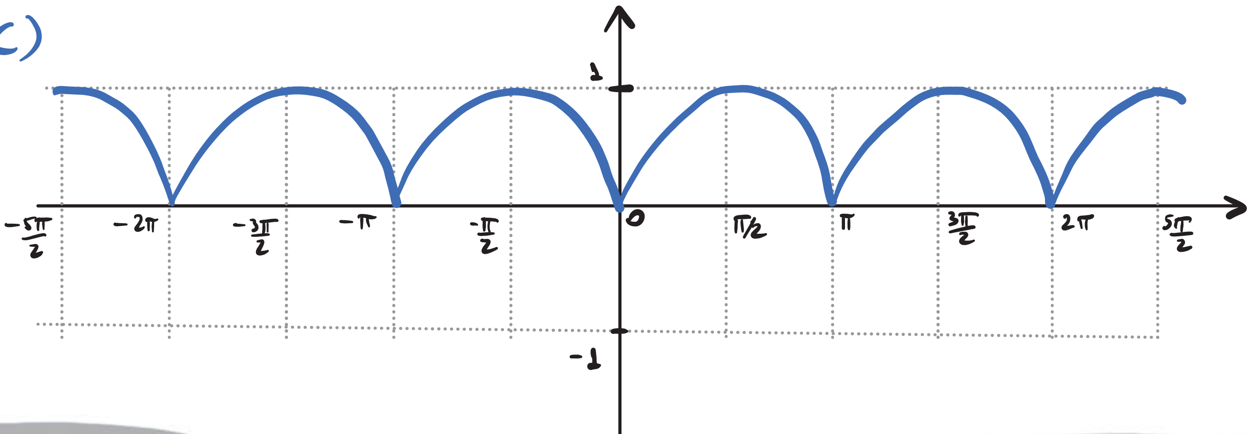
(a)



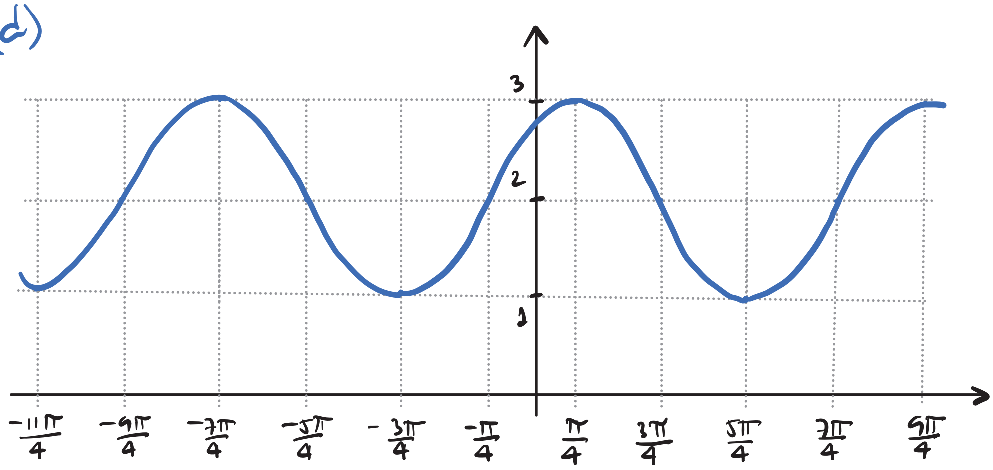
(b)



(c)



(d)


3
2
1
$-\frac{11\pi}{4}$
$-\frac{9\pi}{4}$
$-\frac{7\pi}{4}$
$-\frac{5\pi}{4}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{9\pi}{4}$

Exercício 13. A função arco cosseno é par, ímpar ou nenhuma das duas opções? E quanto a arco seno?

Definimos $\arccos x$ tomando valores em $[0,\pi]$. Então ela não é par nem ímpar:

$\arccos(-1) = \pi$, e $\arccos(1) = 0$

Já $\operatorname{arcsen} x$ é ímpar:

$$y = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow \operatorname{sen} y = x$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y = -x$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsen}(-x) = -y = -\operatorname{arcsen} x.$$

Exercício 14. Mostre que, para todo $t \in (-1, 1)$,

$$\operatorname{arcsen} t = \arctan \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Se $y = \operatorname{arcsen} t$, então

$$\operatorname{sen} y = t.$$

Por convenção, $y = \operatorname{arcsen} t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Logo, $\cos y \geq 0$, e então

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$$

Assim,

$$\tan y = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsen} t = y = \arctan \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exercício 15. Mostre que

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$$

$$= \cos(2\theta) \cdot \cos\theta - \operatorname{sen}(2\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$= (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \cdot \cos\theta - (2\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$= (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \cdot \cos\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta$$

$$= \cos^3\theta - 3 \cdot (1 - \cos^2\theta) \cdot \cos\theta$$

$$= 4\cos^3\theta - 3 \cdot \cos\theta$$

Exercício 16. Mostre que

$$\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

e

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

Logo,

$$\tan^2\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Exercício 17. Demonstre que $\cos 20°$ é um zero do polinômio $8x^3 - 6x - 1$.

Temos que se $\theta = 20°$, então,

como $\cos 60° = \frac{1}{2}$, segue do

exercício (15) que

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$

$$\Rightarrow \quad 8x^3 - 6x - 1 = 0,$$

onde $x = \cos\theta = \cos 20°$.

Exercício 18. Mostre que

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

Temos que

$$\begin{cases} x = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2} \\ y = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} + \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} - \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

Subtraindo, vem

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

Exercício 19. Prove uma identidade análoga à do exemplo anterior para $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$.

Temos que

$$\begin{cases} x = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2} \\[2mm] y = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} + \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} - \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

Somando, vem

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$$

Exercício 20. Mostre que

$$\cos x - \cos y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{y-x}{2}$$

Temos que

$$\begin{cases} x = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{y-x}{2} \\ y = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{y-x}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\cos x = \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{y-x}{2} + \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{y-x}{2}$$

$$\cos y = \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{y-x}{2} - \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{y-x}{2}$$

Subtraindo, vem

$$\cos x - \cos y = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{y-x}{2}$$

Exercício 21. Prove que

$$\tan\frac{x+y}{2} = \frac{\cos x - \cos y}{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}$$

Pelos exercícios (18) e (20), temos que

$$\cos x - \cos y = 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{y-x}{2}$$

$$= -2 \cdot \operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

e

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = -2\operatorname{sen}\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}$$

Assim,

$$\frac{\cos x - \cos y}{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x} = \frac{\cancel{-2} \cdot \operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\,\cancel{\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}}}{\cancel{-2}\,\cancel{\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}} \cdot \cos\frac{x+y}{2}}$$

$$= \tan\frac{x+2}{2}$$

Exercício 22. Mostre que

$$\cos\frac{\pi}{32} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

Temos

$$\cos\theta = \cos\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\cdot\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Fazendo $\theta = \frac{\pi}{4}$, vem

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Reaplicando a fórmula para $\theta = \frac{\pi}{8}$, vem

$$\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

Por fim, aplicando a fórmula para $\theta = \frac{\pi}{16}$, obtemos

$$\cos\frac{\pi}{32} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{16}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

Exercício 23. Mostre a identidade

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$$

(*Sugestão: calcule* $\tan(\arctan 2 + \arctan 3)$)

Temos que

$$\tan(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}$$

$$= \frac{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} \right)}{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cdot \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} \right)}$$

$$= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

Se $a = \arctan 2$, $b = \arctan 3$, temos

$$\tan(\arctan 2 + \arctan 3) = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1$$

Logo,

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$$

Como

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

segue que

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$$

Exercício 1. Escreva na forma polar:

(a) $2 - 2i$ (b) $-3 + 3\sqrt{3}i$ (c) 4 (d) $1 + \sqrt{3}i$ (e) $-3i$ (f) $\dfrac{1+i}{i}$ (g) $\dfrac{1}{1-i} - \dfrac{1}{i}$

(a) $z = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

(b) $z = 6\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 6\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 6\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)$

(c) $z = 4\cdot(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$

(d) $z = 2\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$

(e) $z = 3\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$

(f) $z = \frac{1+i}{i}\cdot\frac{(-i)}{(-i)} = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

(g) $z = \frac{1}{1-i} - \frac{1}{i} = \frac{i - (1-i)}{1+i} = \frac{-1+2i}{1+i}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)}$

$= \frac{-1 + i + 2i + 2}{2} = \frac{1+3i}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}i\right)$

Assim se $\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$, temos

$z = \frac{\sqrt{10}}{2}(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

Exercício 2. Demonstre que

$$\frac{1}{\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta} \cdot \frac{\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta}$$

$$= \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Exercício 3. Escreva na forma polar:

(a) $\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{7}\right)\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{9}\right)$ (b) $\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{\pi}{11}-i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{11}\right)$

(a) $z=\cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{9}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{9}\right)=\cos\frac{16\pi}{63}+i\,\text{sen}\,\frac{16\pi}{63}$

(b) $z=\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5}\right)\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{11}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{11}\right)\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{11}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{11}\right)$

$=\cos\frac{6\pi}{55}+i\,\text{sen}\,\frac{6\pi}{55}$

Exercício 4. Calcule:

(a) $(2-2i)^{333}$ (b) $(-3+3\sqrt{3}i)^{555}$ (c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{100}$

(d) $\dfrac{i}{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{6}}$ (e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{7}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$

(a) $z=\left[2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right]^{333}=\left\{2^{3/2}\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}^{333}$

$$=2^{\frac{999}{2}}\cdot\left[\cos\left(-\frac{333\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{333\pi}{4}\right)\right]$$

Note que

$333=336-3=8\cdot42-3$

Então

$-\frac{333\pi}{4}=-42\cdot2\pi+\frac{3\pi}{4}$

Logo,

$$z=2^{\frac{999}{2}}\cdot\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2^{499}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}+\frac{i}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)=2^{499}\cdot(-1+i)$$

(b) $z=6^{555}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{555}=6^{555}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{6}\right)^{555}$

$$=6^{555}\cdot\left(\cos\frac{2775\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\frac{2775\pi}{6}\right)$$

Note que

$$2775 = 2772 + 3 = 12 \cdot 231 + 3$$

Então

$$\frac{2775\pi}{6} = 231 \cdot (2\pi) + \frac{3\pi}{6} = 231 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

Logo,

$$z = 6^{555} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 6^{555} \cdot i$$

(c) $$z = \left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{100}$$

$$= \cos\left(-\frac{50\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{50\pi}{3}\right)$$

Note que

$$50 = 54 - 4 = 9 \cdot 6 - 4$$

$$\Rightarrow -\frac{50\pi}{3} = -9 \cdot (2\pi) + \frac{4\pi}{3}$$

Assim,

$$z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

(d) Temos

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^6 = (-1)^6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^6$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)^6 = \cos\frac{6\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{6\pi}{3}$$

$$= \cos 2\pi + i\,\text{sen}\, 2\pi = 1$$

Assim,

$$z = \frac{i}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6} = i$$

(e) $$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^7 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$$

$$= \left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]^7 - \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{10}$$

$$= \left(\cos\frac{49\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{49\pi}{4}\right) - \left(\cos\frac{30\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{30\pi}{4}\right)$$

Note que

$$49 = 48 + 1 = 8\cdot 6 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{49\pi}{4} = 6\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

e $$30 = 32 - 2 = 8\cdot 4 - 2$$

$$\Rightarrow \frac{30\pi}{4} = 4\cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$$

Assim,

$$z = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) - \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} + i = \frac{1 + (1+\sqrt{2})\,i}{\sqrt{2}}$$

Exercício 5. Calcule todas as raízes n-ésimas abaixo:

(a) $\sqrt{-7+24i}$ (b) $\sqrt{5+12i}$ (c) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ (d) $\sqrt[3]{-8i}$ (e) $\sqrt[3]{-1}$

(a) $-7+24i = 25\cdot\left(\frac{-7}{25}+\frac{24}{25}i\right)$

Seja $\theta = \arccos\left(-\frac{7}{25}\right)$

Assim,

$$z = \sqrt{-7+24i} = 5\cdot\sqrt{\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta}$$

$$= 5\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)+\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)\right],$$

onde $k=0,1$.

Lembre que

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \text{sen}^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2}-1 = 1-2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \\ \text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} \end{cases}$$

Como θ está no 2º quadrante, $\frac{\theta}{2}$ está no 1º, e então

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-7/25}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+7/25}{2}} = \frac{4}{5}$$

Logo, as raízes são

$$z = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4i}{5}\right) = 3 + 4i$$

e

$$z = -3 - 4i$$

(b) Poderíamos proceder como em (a). Mas uma forma mais fácil (e que também funciona em (a)) é buscar

$$z = a + bi$$

tal que

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2ab = 12 \Rightarrow b = \dfrac{6}{a} \\ a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow a^2 - \dfrac{36}{a^2} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^4 - 5a^2 - 36 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = -9 \quad \text{ou} \quad a^2 = 4$$

Como $a \in \mathbb{R}$, segue que $a^2 = 4$

$$\Rightarrow a = \pm 2$$

Assim,

$$z = \pm(2 + 3i)$$

(c) $z = \sqrt[4]{-\frac{16}{2} + 16\frac{\sqrt{3}}{2}i} = 2 \cdot \sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$= 2 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right)^{1/4}$

$= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$

$= 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\cos \frac{k\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2}\right)$

$= (\sqrt{3} + i) \cdot \left(\cos \frac{k\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$

Assim, as 4 raízes são

$z = \sqrt{3} + i$

$z = (\sqrt{3} + i) \cdot i = -1 + \sqrt{3}i$

$z = (\sqrt{3} + i) \cdot (-1) = -\sqrt{3} - i$

$z = (\sqrt{3} + i) \cdot (-i) = 1 - \sqrt{3}i$

(d) $\sqrt[3]{-8i} = 2 \sqrt[3]{\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}}$

$= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$, $k = 0, 1, 2$

$= 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$

$$= 2i \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{3}\right), \; k = 0, 1, 2$$

Assim, as 3 raízes são

$$z = 2i$$

$$z = 2i \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$z = 2i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

(e) $z = \sqrt[3]{\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi}$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

Assim, as 3 raízes são

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$$

$$z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Exercício 6. Determine três números complexos distintos tais que $z^3 = 4i$.

Pelo item (d) do exercício (5), concluímos que, se $\xi^3 = i$, então como $(-2\xi)^3 = -8i$, temos que os 3 valores possíveis de ξ são

$$\xi = \frac{2i}{(-2)} = -i$$

$$\xi = \frac{-\sqrt{3} - i}{(-2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\xi = \frac{\sqrt{3} - i}{(-2)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

Daí, se $z^3 = 4i = (\sqrt[3]{4})^3 \cdot i$, então as 3 raízes são

$$z = -\sqrt[3]{4}\, i$$

$$z = \sqrt[3]{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

$$z = \sqrt[3]{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

Exercício 7. Determine quatro números complexos distintos tais que $z^4 = -2$.

$$z^4 = -2 \Rightarrow z^2 = \pm\sqrt{2}\,i = \sqrt{2}\cdot(\pm i)$$

Temos $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{i} = \pm\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \pm\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$$

Tambem temos $-i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \sqrt{-i} = \pm\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) = \pm\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)$$

Logo, as 4 raízes são

$$z = \sqrt[4]{2}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt[4]{2}}$$

$$z = -\sqrt[4]{2}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-1-i}{\sqrt[4]{2}}$$

$$z = \sqrt[4]{2}\cdot\frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-1+i}{\sqrt[4]{2}}$$

$$z = \sqrt[4]{2}\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt[4]{2}}$$

Exercício 1. Determine a distância entre os dois pontos:

(a) $(1, 1)$ e $(4, 5)$ (b) $(1, -6)$ e $(-1, -3)$ (c) (a, b) e (b, a)

(a) $d^2 = (4-1)^2 + (5-1)^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow d = 5$

(b) $d^2 = (1+1)^2 + (-6+3)^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow d = \sqrt{13}$

(c) $d^2 = (a-b)^2 + (b-a)^2 = 2(a-b)^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}\,|a-b|$

Exercício 2. Determine a inclinação da reta que passa por P e Q:

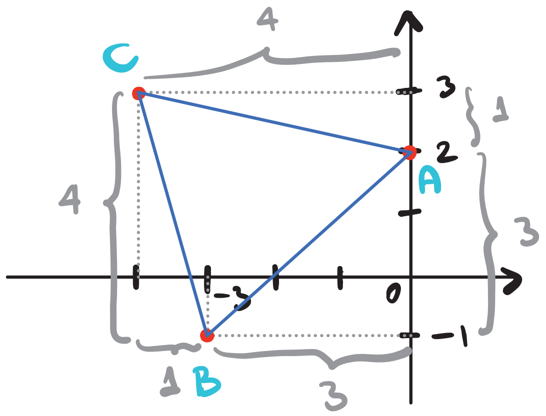
(a) $P(1,5)$ e $Q(4,11)$ (b) $P(-1,-4)$ e $Q(6,0)$ (c) $P(-3,3)$ e $Q(-1,-6)$

(a) $m = \dfrac{11-5}{4-1} = \dfrac{6}{3} = 2$

(b) $m = \dfrac{0+4}{6+1} = \dfrac{4}{7}$

(c) $m = \dfrac{-6-3}{-1+3} = \dfrac{-9}{2}$

Exercício 3. Mostre que o triângulo com vértices $(A0,2)$, $B(-3,-1)$ e $C(-4,3)$ é isósceles.



Plotando os pontos, vemos que

$\overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{1+4^2} = \sqrt{17}$

e

$\overline{AB} = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

Logo o triângulo é isósceles.

Exercício 4. Ache uma equação da reta que satisfaça às condições dadas:

(a) Passa pelo ponto $(2,-3)$ e tem inclinação 6.

(b) Passa pelo ponto $(1,7)$ e tem inclinação -3.

(c) Inclinação 3 e cruza o eixo y em -2.

(d) Interseção com o eixo x em 1, e com o eixo y em -3.

(e) Passa pelo ponto $(4,5)$, paralela ao eixo x.

(f) Pasa pelo ponto $(1,-6)$, paralela à reta $x+2y=6$.

(g) Passa pelo ponto $(-1,-2)$, perpendicular à reta $2x+5y+8=0$.

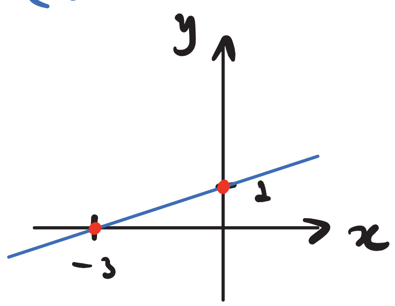
(h) Passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$, perpendicular à reta $4x-8y=1$.

(a) $y = 6(x-2)-3$

(b) $y = -3(x-1)+7$

(c) $y = 3(x+2)$

(d) $(0,1)$ e $(-3,0)$ são pontos da reta



Assim, a equação é

$$y = \frac{1-0}{0+3}\cdot(x-0)+1$$

$$= \frac{1}{3}x + 1$$

(e) $y = 5$

(f) A reta paralela é $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Logo, a reta procurada é

$$y = -\frac{1}{2}(x-1) - 6$$

(g) A reta perpendicular é $y = \frac{-2}{5}x - \frac{8}{5}$
Logo, a reta procurada é

$$y = \frac{5}{2}(x+1) - 2$$

(h) A reta perpendicular é $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$
Logo, a reta procurada é

$$y = -2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}$$

Exercício 5. Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(2, -5)$ e:

(a) tem inclinação -3

(b) é paralela ao eixo x

(c) é paralela ao eixo y

(d) é paralela à reta $2x - 4y = 3$

(a) $y = -3(x-2) - 5$

(b) $y = -5$

(c) $x = 2$

(d) A reta paralela é $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

Logo, a reta procurada é

$$y = \frac{1}{2}(x-2) - 5$$

Exercício 6. Sejam $A(-7,4)$ e $B(5,-12)$ pontos no plano:

(a) Encontre a inclinação da reta que contém A e B.

(b) Encontre uma equação da reta que passa por A e B. Quais são as interseções com os eixos?

(c) Encontre o ponto médio do segmento AB.

(d) Encontre o comprimento do segmento AB.

(e) Encontre uma equação para a mediatriz de AB, ou seja, a reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo seu ponto médio.

(f) Encontre uma equação para o círculo para o qual AB é um diâmetro.

(a) $m = \dfrac{-12-4}{5+7} = \dfrac{-16}{12} = \dfrac{-4}{3}$

(b) $y = -\dfrac{4}{3}(x+7)+4$

$x=0 \Rightarrow y = -\dfrac{28}{3} + \dfrac{12}{3} = \dfrac{-16}{3}$

(interseção com eixo y)

$y=0 \Rightarrow x+7=3 \Rightarrow x=-4$

(interseção com eixo x)

(c) $M = \dfrac{A+B}{2} = \left(\dfrac{-7+5}{2}, \dfrac{4-12}{2}\right) = (-1,-4)$

(d) $\overline{AB} = \sqrt{(-7-5)^2+(4+12)^2} = \sqrt{12^2+16^2} =$

$= 4\sqrt{3^2+4^2} = 4 \cdot 5 = 20$

(e) Por (b) e (c), temos que

$y = \dfrac{3}{4}(x+1)-4$

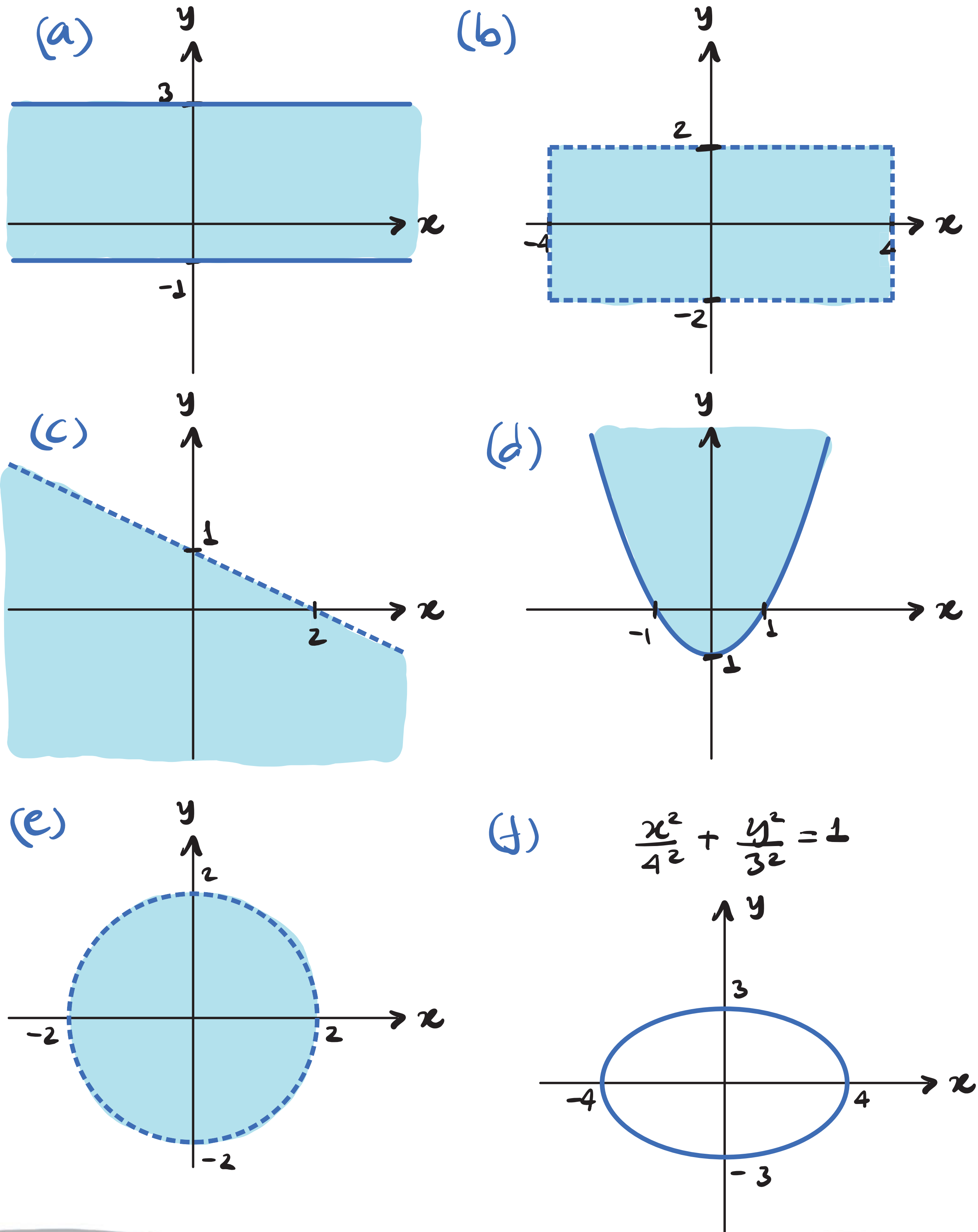
(d) O círculo tem centro no ponto médio e raio metade de $\overline{AB}$. Por (c) e (d), ele tem equação

$$(x+1)^2+(y+4)^2=10^2$$

Exercício 7. Esboce as regiões do plano xy definidas pelas equações ou inequações:

(a) $-1 \leqslant y \leqslant 3$ (b) $|x| < 4$ e $|y| < 2$ (c) $y < 1 - \dfrac{x}{2}$

(d) $y \geqslant x^2 - 1$ (e) $x^2 + y^2 < 4$ (f) $9x^2 + 16y^2 = 144$



Exercício 8. Determine w tal que a reta que passa pelos pontos $(1, w)$ e $(3, 7)$ tenha inclinação 5.

$$5 = m = \frac{7-w}{3-1} = \frac{7-w}{2}$$

$$\Rightarrow 7 - w = 10 \Rightarrow w = -3$$

Exercício 9. Mostre que se as interseções com os eixos x e y de uma reta são os números a e b, diferentes de zero, então a equação da reta pode ser colocada na forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

A informação significa que $(a,0)$ e $(0,b)$ são pontos da reta. Então sua equação é

$$y = \frac{b-0}{0-a}(x-0) + b$$

$$= -\frac{b}{a}x + b$$

$$\Rightarrow bx + ay = ab \quad (\div ab)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Exercício 10. Determine um número m tal que as três retas $y = mx + 3$, $y = 4x + 1$ e $y = 5x + 7$ possuam o mesmo ponto de interseção.

As duas últimas se intersectam em

$$4x + 1 = 5x + 7 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow y = -23$$

Assim, é preciso que

$$-23 = m \cdot (-6) + 3$$

$$\Rightarrow 6m = 26 \Rightarrow m = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

Exercício 11. Determine t tal que a reta que contém os pontos $(4, t)$ e $(1, 6)$ seja perpendicular à reta que contém os pontos $(4, 7)$ e $(1, 11)$.

A reta que contém $(4,7)$ e $(1,11)$ tem inclinação

$$m = \frac{11-7}{1-4} = -\frac{4}{3}$$

Logo, a reta procurada deve ter inclinação $\frac{3}{4}$. Assim,

$$\frac{3}{4} = \frac{t-6}{4-1} = \frac{t-6}{3}$$

$$\Rightarrow t-6 = \frac{9}{4} \Rightarrow t = \frac{33}{4}$$

Exercício 12. Calcule a distância do ponto P à reta r nos seguintes casos:

(a) $P(2,0)$ e $r: 2x + 3y - 5 = 0$

(b) $P(1,-1)$ e $r: x + 3y - 5 = 0$

(c) $P(0,0)$ e $r: ax + by + c = 0$

(a) $r: \; y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

A reta s que passa por P e é perpendicular a r é

$$s: \; y = \frac{3}{2}(x-2)$$

A interseção $r \cap s$ satisfaz

$$\frac{3}{2}x - 3 = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{\cancel{6}\,2}x = \frac{14}{\cancel{3}} \Rightarrow x = \frac{28}{13}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2}\left(\frac{28}{13} - 2\right) = \frac{3}{13}$$

A distância de P a r é a distância de P a $\left(\frac{28}{13}, \frac{3}{13}\right)$:

$$d = \sqrt{\left(\frac{28}{13} - 2\right)^2 + \left(\frac{3}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{4+9}}{13} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

(b) $r: \; y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

A reta s que passa por P e é perpendicular a r é

$$s: \; y = 3(x-1) - 1 = 3x - 4$$

A interseção $r \cap s$ satisfaz

$$3x - 4 = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 9x - 12 = -x + 5$$

$$\Rightarrow 10x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{10}$$

$$\Rightarrow y = 3 \cdot \frac{17}{10} - 4 = \frac{11}{10}$$

A distância de P a r é a distância de P a $\left(\frac{17}{10}, \frac{11}{10}\right)$:

$$d = \sqrt{\left(\frac{17}{10} - 1\right)^2 + \left(\frac{11}{10} + 1\right)^2} = \frac{\sqrt{7^2 + (3\cdot 7)^2}}{10} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$$

(c) Se $b = 0$, então

$$r: \; x = \frac{-c}{a},$$

e a distância ao ponto $P(0,0)$ é $\left|\frac{c}{a}\right|$.

Suponha agora $b \neq 0$. Se $a = 0$,

$$r: \; y = \frac{-c}{b},$$

e a distância ao ponto $P(0,0)$ é $\left|\frac{c}{b}\right|$.

Por fim, suponha $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Temos

$$r: \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

A reta s que passa por P e é perpendicular a r é

$$s: \quad y = \frac{b}{a}x$$

A interseção $r \cap s$ satisfaz

$$\frac{b}{a}x = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{(a^2+b^2)x}{a\cancel{b}} = \frac{-c}{\cancel{b}} \Rightarrow x = \frac{-ac}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-bc}{a^2+b^2}$$

A distância de P a r é a distância de P a $\frac{-c}{a^2+b^2}(a, b)$:

$$d = \frac{|c|}{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

que permanece válida se $a=0$ ou $b=0$.

Exercício 1. Encontre uma equação para o círculo que tem centro $(-1, 4)$ e passa pelo ponto $(3, -2)$.

O raio r do círculo é a distância entre $(-1, 4)$ e $(3, -2)$. Daí,

$$r^2 = (3+1)^2 + (-2-4)^2 = 16 + 36 = 52$$

Assim, a equação do círculo é

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 52$$

Exercício 2. Encontre o centro e o raio do círculo com equação $x^2+y^2-6x+10y+9=0$

Vamos completar quadrados:

$$x^2+y^2-6x+10y+9 = x^2-6x+y^2+10y+9$$

$$=(x-3)^2-\cancel{9}+(y+5)^2-25+\cancel{9}=0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2+(y+5)^2=5^2$$

Logo, o círculo tem centro em $(3,-5)$ e raio 5.

Exercício 3. Determine uma equação de uma circunferência que satisfaça:

(a) Centro $(3, -1)$, raio 5.

(b) Centro na origem, passa por $(4, 7)$.

(c) Centro $(-1, 5)$, passa por $(-4, -6)$.

(a) $(x-3)^2+(y+1)^2=25$

(b) $r^2=4^2+7^2=16+49=65$

$\Rightarrow x^2+y^2=65$

(c) $r=(-4+1)^2+(-6-5)^2=9+121=130$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y-5)^2=130$

Exercício 4. Mostre que a equação representa uma circunferência e determine seu centro e raio:

(a) $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + x = 0$ (d) $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y + 1 = 0$

(e) $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

(a) $x^2+y^2-4x+10y+13=0$

$\Rightarrow (x-2)^2-4+(y+5)^2-25+13=0$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y+5)^2=4^2$

$\Rightarrow$ Centro $(2,-5)$, raio 4

(b) $x^2+y^2+6y+2=0$

$\Rightarrow x^2+(y+3)^2-9+2=0$

$\Rightarrow x^2+(y+3)^2=7$

$\Rightarrow$ Centro $(0,-3)$, raio $\sqrt{7}$

(c) $x^2+y^2+x=0$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+y^2=0$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow$ Centro $\left(-\frac{1}{2},0\right)$, raio $\frac{1}{2}$

(d) $16x^2+16y^2+8x+32y+1=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+\frac{1}{2}x+2y+\frac{1}{16}=0$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\cancel{\frac{1}{16}}+(y+1)^2-1+\cancel{\frac{1}{16}}=0$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2+(y+1)^2=1$

$\Rightarrow$ Centro $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$, raio 1

(e) $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{8} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

$\Rightarrow$ Centro $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, raio $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

Exercício 5. Que condições nos coeficientes a, b e c fazem com que a equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ represente um círculo? Quando a condição for satisfeita, determine o centro e o raio do círculo.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

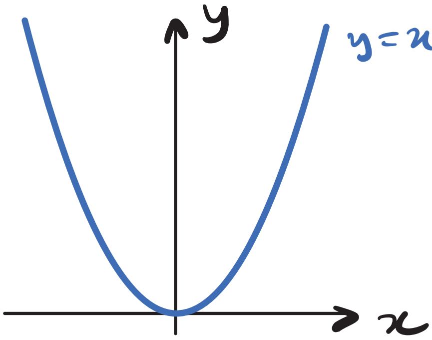
$$\Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

É preciso que $a^2 + b^2 > 4c$. Neste caso, o centro do círculo é $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e o raio é $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$.

Exercício 6. Esboce o gráfico das seguintes funções (não é necessário marcar pontos; apenas desloque os gráficos padrões das cônicas envolvidas):

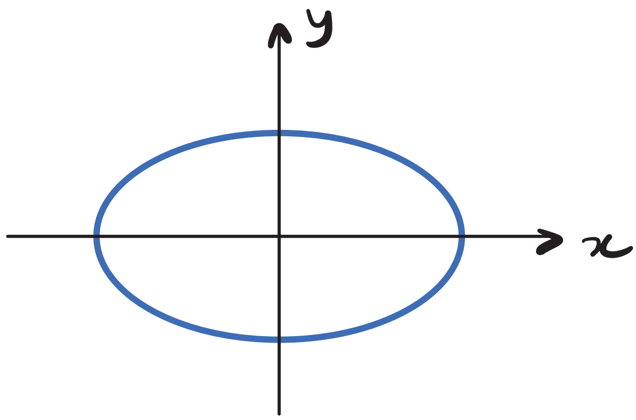
(a) $y = x^2$
(b) $x^2 + 4y^2 = 16$
(c) $y^2 - x^2 = 1$
(d) $x = -2y^2$
(e) $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$
(f) $9y^2 - x^2 = 9$
(g) $xy = 4$
(h) $9(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 36$
(i) $x = y^2 - 1$
(j) $16x^2 - 25y^2 = 400$
(k) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

(a)

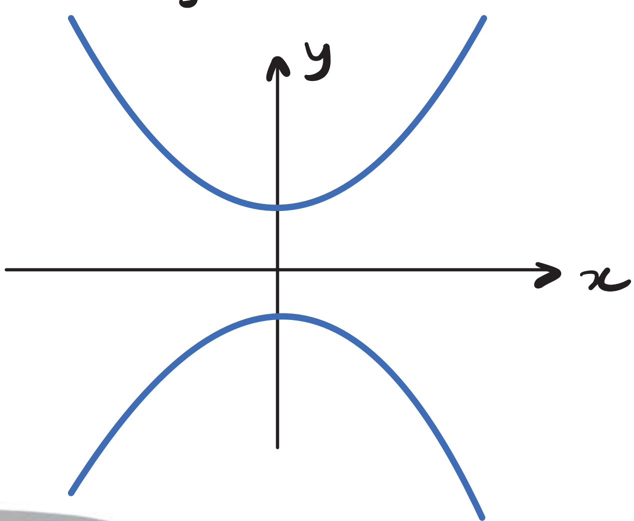


(b) $x^2 + 4y^2 = 16$

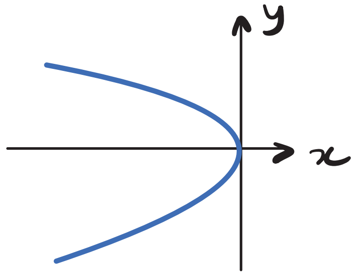
$\iff \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$



(c) $y^2 - x^2 = 1$

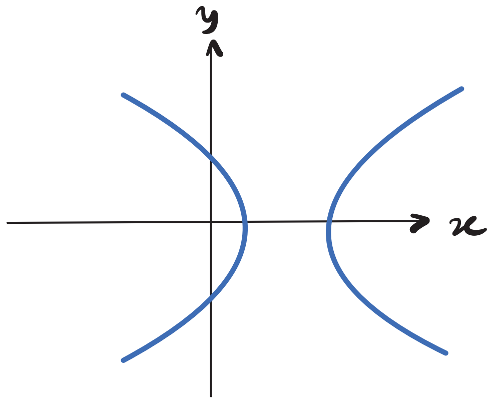


(d)

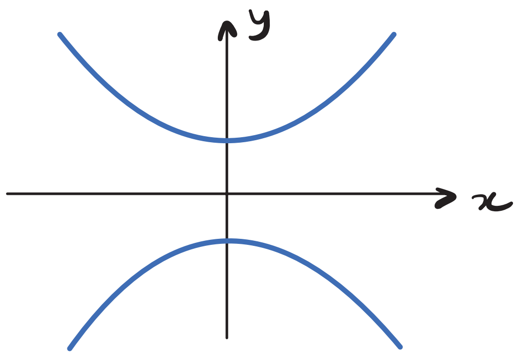


(e) $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$

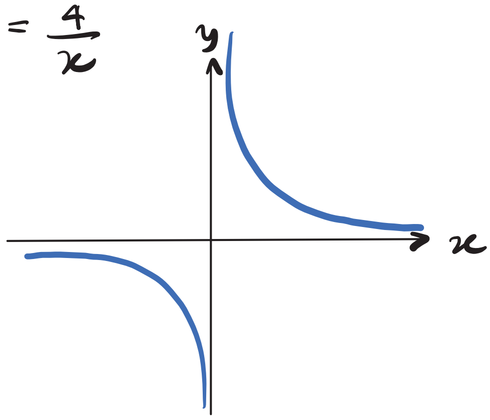
$\Leftrightarrow (x-2)^2 - y^2 = 1$



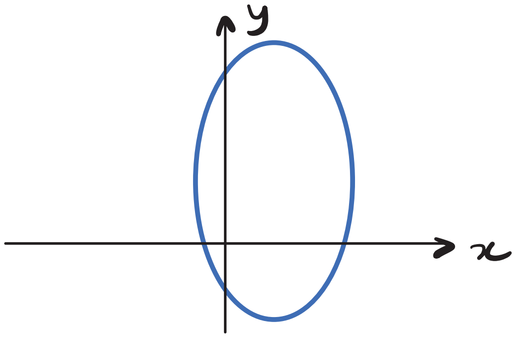
(f) $y^2 - \frac{x^2}{3^2} = 1$



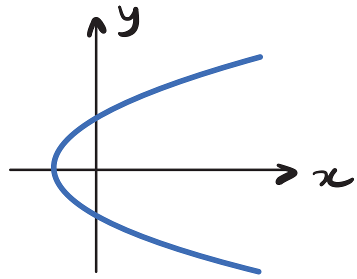
(g) $y = \frac{4}{x}$



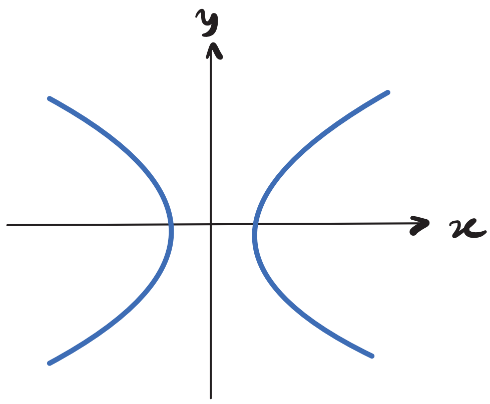
(h) $\dfrac{(x-1)^2}{2^2} + \dfrac{(y-2)^2}{3^2} = 1$



(i)



(j) $\dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

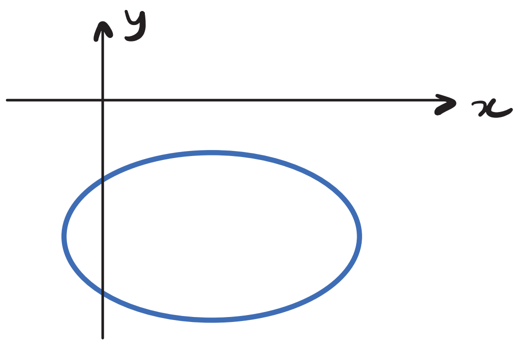


(k) $4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 6y) + 61 = 0$

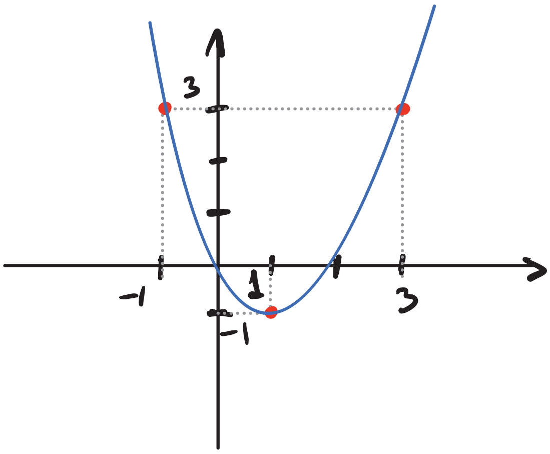
$\Rightarrow 4(x-2)^2 - 16 + 9(y+3)^2 - 81 + 61 = 0$

$\Rightarrow 4(x-2)^2 + 9(y+3)^2 = 36$

$\Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{3^2} + \dfrac{(y+3)^2}{2^2} = 1$



Exercício 7. Determine uma equação da parábola com vértice $(1,-1)$ que passa pelos pontos $(-1,3)$ e $(3,3)$.



A parábola é

$$y = a(x-1)^2 - 1$$

Fazendo $x = 3$, temos

$$3 = a \cdot 2^2 - 1$$

$$\Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

Logo, a equação da parábola é

$$y = (x-1)^2 - 1$$

Exercício 8. Mostre que os focos da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

são os pontos $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ e $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, onde $a > b > 0$.

Basta mostrar que se (x,y) é um ponto da elipse, então a soma das distâncias de (x,y) a $(\sqrt{a^2-b^2},0)$ e a $(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ é constante. Essa soma é

$$S = \sqrt{\left(x-\sqrt{a^2-b^2}\right)^2+y^2} + \sqrt{\left(x+\sqrt{a^2-b^2}\right)^2+y^2}$$

$$= \sqrt{x^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+(a^2-b^2)+y^2}$$

$$+ \sqrt{x^2+2x\sqrt{a^2-b^2}+(a^2-b^2)+y^2}$$

Temos que, pela equação da elipse,

$$y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

Assim,

$$S = \sqrt{x^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2\cancel{-b^2}\cancel{+b^2}-\frac{b^2x^2}{a^2}}$$

$$+ \sqrt{x^2+2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2\cancel{-b^2}\cancel{+b^2}-\frac{b^2x^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2} - \frac{2x\sqrt{a^2-b^2}\cdot a}{a} + a^2} + \sqrt{\frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2} + \frac{2x\sqrt{a^2-b^2}\cdot a}{a} + a^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\cdot x}{a} - a\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\cdot x}{a} + a\right)^2}$$

$$= \left|\frac{\sqrt{a^2-b^2}\cdot x}{a} - a\right| + \left|\frac{\sqrt{a^2-b^2}\cdot x}{a} + a\right|$$

Repare que, como (x,y) está na elipse,

$$-a \leq x \leq a \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2-b^2}\cdot |x|}{a} \leq \sqrt{a^2-b^2} < a$$

Logo,

$$S = a - \cancel{\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,x}{a}} + a + \cancel{\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,x}{a}}$$

$$= 2a.$$

Exercício 9. Encontre uma equação da elipse com centro na origem que passe pelos pontos $(1, -10\sqrt{2}/3)$ e $(-2, 5\sqrt{5}/3)$.

A equação será da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como $\left(1, -\frac{10\sqrt{2}}{3}\right)$ e $\left(-2, 5\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ estão na elipse, temos que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{200}{9b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a^2} = 1 - \dfrac{200}{9b^2} \\ \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{125}{9b^2} = 1 \Rightarrow 4 - \dfrac{800}{9b^2} + \dfrac{125}{9b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{675}{9b^2} = \frac{75}{b^2}$$

$$\Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$$

Assim,

$$\frac{1}{a^2} = 1 - \frac{200}{9 \cdot 25} = 1 - \frac{200}{225} = \frac{25}{225} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow a = 3.$$

A elipse é

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

Exercício 10. Suponha que a órbita de um planeta em torno de uma estrela seja a elipse $3x^2 + 7y^2 = 1$. Qual é a localização da estrela? (Suponha que a primeira coordenada da estrela seja positiva.)

A estrela está em um dos focos da elipse, cuja equação é

$$\frac{x^2}{(1/\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{7})^2} = 1$$

Pelo exercício 8, como $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{7}}$, o foco da elipse com primeira coordenada positiva (onde se encontra a estrela) é

$$\left(\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}}, 0\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{21}}, 0\right)$$

Exercício 11. Mostre que os focos da hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

são os pontos $(0, -\sqrt{a^2+b^2})$ e $(0, \sqrt{a^2+b^2})$

Basta mostrar que se (x,y) é um ponto da hipérbole, então a diferença das distâncias de (x,y) a $(0, \sqrt{a^2+b^2})$ e a $(0, -\sqrt{a^2+b^2})$ é constante em módulo. Essa diferença é

$$D = \sqrt{x^2 + \left(y + \sqrt{a^2+b^2}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(y - \sqrt{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2y\sqrt{a^2+b^2} + a^2 + b^2}$$

$$- \sqrt{x^2 + y^2 - 2y\sqrt{a^2+b^2} + a^2 + b^2}$$

Como (x,y) está na hipérbole, temos que

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2y^2}{b^2} - a^2$$

Assim,

$$D = \sqrt{\frac{a^2y^2}{b^2} - \cancel{a^2} + y^2 + 2y\sqrt{a^2+b^2} + \cancel{a^2} + b^2}$$

$$- \sqrt{\frac{a^2y^2}{b^2} - \cancel{a^2} + y^2 - 2y\sqrt{a^2+b^2} + \cancel{a^2} + b^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)y^2}{b^2} + 2\frac{y\sqrt{a^2+b^2}}{b}\cdot b + b^2} - \sqrt{\frac{(a^2+b^2)y^2}{b^2} - 2\frac{y\sqrt{a^2+b^2}}{b}\cdot b + b^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,y}{b} + b\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,y}{b} - b\right)^2}$$

$$= \left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,y}{b} + b\right| - \left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,y}{b} - b\right|$$

Pela equação da hiperbole, vemos que $|y| \geq b$. Daí,

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,|y|}{b} \geq \sqrt{a^2+b^2} > b$$

Assim, se $y > 0$,

$$D = \cancel{\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,y}{b}} + b - \cancel{\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,y}{b}} + b = 2b$$

Se $y < 0$,

$$D = \frac{\sqrt{a^2+b^2}\,|y|}{b} - b - \frac{\sqrt{a^2+b^2}\,|y|}{b} - b = -2b$$

Em ambos os casos, temos

$$|D| = 2b.$$

Exercício 12. Suponha que a órbita de um cometa em torno da uma estrela seja o ramo superior da hipérbole $3y^2 - 2x^2 = 5$. Qual é a localização da estrela?

A estrela fica no foco superior. A equação da hipérbole na forma canônica é

$$\frac{y^2}{(\sqrt{5/3})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{5/2})^2} = 1$$

Pelo exercício (11), o foco superior (onde está a estrela)

$$\left(0, \sqrt{\frac{5}{3}+\frac{5}{2}}\right) = \left(0, \frac{5}{\sqrt{6}}\right)$$

Exercício 13. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam do eixo x e do ponto $(0,2)$.

Um ponto (x,y) deste lugar geométrico satisfaz

$$|y| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{y^2} = x^2 + \cancel{y^2} - 2y + 4$$

$$\Rightarrow 2y = x^2 + 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + 2$$

O lugar geométrico corresponde à parábola $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$.

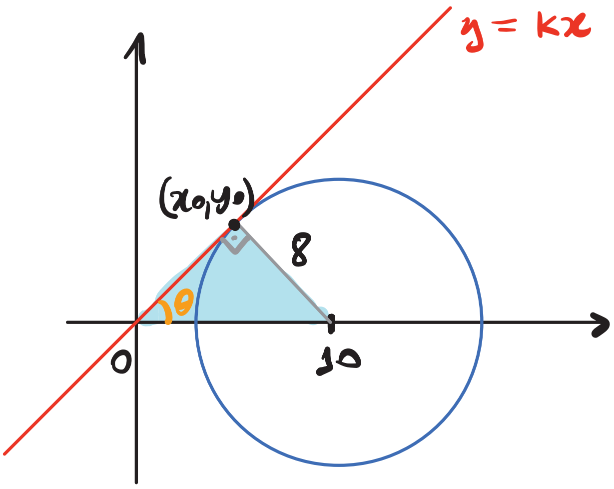
Exercício 14. Determine os valores de k tais que a reta $y = kx$ é tangente ao círculo $x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$.

Completando quadrados, a equação do círculo na forma canônica é

$$(x-10)^2 - 100 + y^2 + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x-10)^2 + y^2 = 8^2$$

Portanto, estamos diante do círculo de centro $(10,0)$ e raio 8.



Se $y=kx$ é tangente ao círculo no ponto (x_0,y_0) então a reta que passa por (x_0,y_0) e pelo centro do círculo é perpendicular à tangente.

Temos o triângulo retângulo da figura, que satisfaz

$$|k| = \tan\theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Assim, os valores de k tais que $y=kx$ é tangente ao círculo são

$$k = \pm\frac{4}{5}$$