Aula 20

Banco do Brasil - Matemática - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

13 de Janeiro de 2023

Índice

Olá, amigos! Como estão os estudos de Estatística?

Nesta aula, vamos estudar **análise combinatória**, que são ferramentas de **contagem**.

Como assim? Uma aula sobre contagem? 1, 2, 3, ...?

Sim e não! Sim, porque, de fato, você pode *contar* os eventos, simplesmente. Essa é uma boa estratégia quando há **poucos** eventos.

Mas, quando há muitos eventos, essa contagem se torna muito trabalhosa, você se perde no meio do caminho, ... Então, a ideia dessas ferramentas é ajudá-lo a "contar" os eventos com **eficiência**!

Algumas questões de concursos cobram a análise combinatória, puramente; e outras cobram no cálculo de **probabilidades**. Então, esse é um assunto bem importante.

Até já!

Luana Brandão

*Posso te contar um pouquinho sobre a minha **trajetória**? Sou Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense, e Auditora Fiscal da SEFAZ-RJ. Sou professora de Estatística do Estratégia porque quero muito te ajudar na sua trajetória, rumo à aprovação!*

Se tiver alguma dúvida, entre em **contato** comigo!

professoraluanabrandao@gmail.com

@professoraluanabrandao

"Lute e conquiste, supere seus medos. Acredite em seus sonhos."

Aislan Dlano

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Introdução

A Análise Combinatória, ou simplesmente combinatória, estuda **técnicas de contagem**, para que você não precise efetivamente *contar* todos os elementos.

Por exemplo, quantos números de 3 algarismos podemos formar com o conjunto {1, 3, 4}, sem repetir os algarismos, em um mesmo número?

Bem, as possibilidades são:

i) 134; ii) 143; iii) 314;

iv) 341; v) 413; vi) 431.

Portanto, são 6 números distintos.

Para resolver esse problema, não precisamos de nenhuma técnica específica. Só precisamos raciocinar e **contar** todas as possibilidades.

Mas, e se o conjunto de algarismos fosse de todos os números de 1 a 9? Perderíamos muito tempo para relacionar todas as possibilidades, e talvez nos perderíamos em algum momento.

A análise combinatória facilita justamente a **contagem** das possibilidades, em conjuntos finitos.

Ela também permite efetuar contagens de **subconjuntos** com determinadas características. Por exemplo, poderíamos estar interessados apenas nos números pares ou nos números primos.

Princípios Fundamentais da Contagem

Nesta seção, veremos os princípios fundamentais de contagem, que você vai utilizar muito. Eles permeiam as ferramentas da análise combinatória e são requisitados em praticamente todas as questões sobre o assunto, desde as mais simples, até as mais complexas.

Princípio Multiplicativo

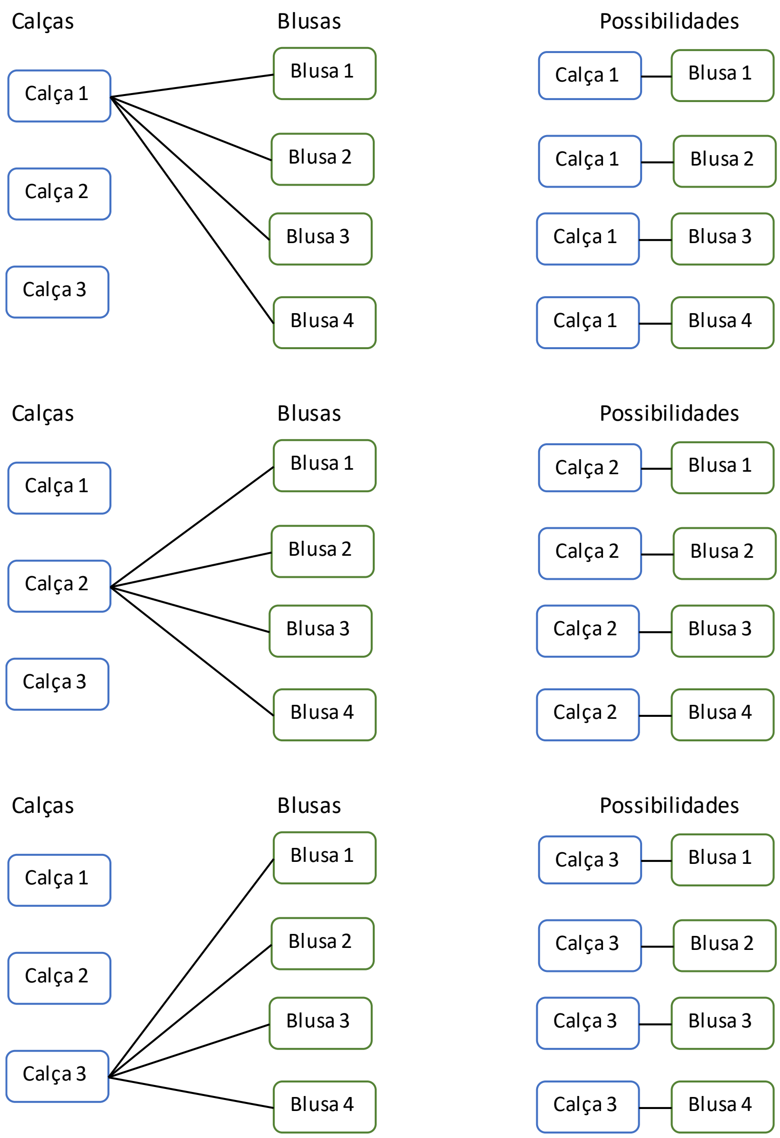
Esse princípio enuncia o seguinte:

> *Se um evento A ocorre de **m** maneiras diferentes **e** se, para cada uma dessas maneiras, um outro evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de **ambos** os eventos (A **e** B) ocorrerem é **m x n**.*

Para ilustrar, vamos considerar que João precisa se vestir com uma calça e uma blusa e que ele tem **3 calças** e **4 blusas**. Nesse caso, o evento A corresponde a vestir uma calça, com ***m* = 3** possibilidades, e o evento B corresponde a vestir uma blusa, com ***n* = 4** possibilidades.

Segundo o princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de João se vestir é:

$$m \times n = 3 \times 4 = 12$$



Observe que, para cada calça, há 4 possibilidades de blusas. Portanto, são 4 blusas possíveis para a calça 1; 4 blusas possíveis para a calça 2; e 4 blusas possíveis para a calça 3. Somando todas essas possibilidades, temos **4 + 4 + 4 = 3 x 4 = 12**.

Obtemos o mesmo resultado se pensarmos que há 3 possibilidades de calça para cada blusa.

Podemos **extrapolar** esse princípio para **qualquer número de eventos**. Ou seja, se tivermos um terceiro evento **C** que ocorre de **p** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de os eventos A, B e **C** ocorrerem é **m x n x p**.

Utilizando o mesmo exemplo, considerando que João precisa utilizar um cinto e que ele tem **p = 2** cintos distintos, então o número de maneiras distintas de João colocar uma calça, uma blusa e um cinto é:

$$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p} = \mathbf{3} \times \mathbf{4} \times \mathbf{2} = 24$$

Generalizando para n eventos, com $\mathbf{p_1}$ possibilidades para o evento A_1, $\mathbf{p_2}$ possibilidades para o evento A_2, ... e $\mathbf{p_n}$ possibilidades para o evento A_n, então o número de maneiras de **todos** os n eventos ocorrerem é:

$$P(A_1 \textbf{ e } A_2 \textbf{ e } \ldots \textbf{ e } A_n) = p_1 \mathbf{x}\, p_2 \mathbf{x} \ldots \mathbf{x}\, p_n$$

(VUNESP/2019 – Prefeitura de dois Córregos/SP) Em um grupo de pessoas, há 12 homens e 13 mulheres. Com essas pessoas, uma dupla será aleatoriamente formada, com um homem e uma mulher, para participar de um concurso. O número total de possibilidades para a formação dessa dupla é

a) 12.

b) 144.

c) 156.

d) 168.

e) 288.

Comentários:

Havendo 12 homens e 13 mulheres, o número de possibilidades de selecionar um homem **E** uma mulher é, pelo princípio multiplicativo:

$$12 \mathbf{x} 13 = 156$$

Gabarito: C

(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG) Assinale a alternativa que contém a quantidade de vezes que é possível usar de maneiras diferentes duas blusas, três calças e quatro meias:

a) 24 maneiras diferentes.

b) 28 maneiras diferentes.

c) 32 maneiras diferentes.

d) 36 maneiras diferentes.

Comentários:

Há **2** blusas para cada uma das **3** calças.

Além disso, para cada possível combinação de uma blusa e uma calça, há **4** meias diferentes.

Logo, o número de alternativas é, pelo princípio multiplicativo:

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

Gabarito: A

(CESPE/2013 – TRT-ES) Os alunos de uma turma cursam 4 disciplinas que são ministradas por 4 professores diferentes. As avaliações finais dessas disciplinas serão realizadas em uma mesma semana, de segunda a sexta-feira, podendo ou não ocorrerem em um mesmo dia. A respeito dessas avaliações, julgue o item seguinte.

Se cada professor escolher o dia em que aplicará a avaliação final de sua disciplina de modo independente dos demais, haverá mais de 500 maneiras de se organizar o calendário dessas avaliações.

Comentários:

Vamos representar as escolhas dos 4 professores da seguinte forma:

Sabendo que há 5 dias disponíveis, então cada professor terá 5 possibilidades de escolha:

5	5	5	5

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de organizar o calendário para os 4 professores é:

$$\text{Número de maneiras} = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

Ou seja, há mais de 500 maneiras de organizar.

Gabarito: Certo.

(FGV/2022 – PM-PB) Cada vértice de um quadrado ABCD deverá ser pintado com uma cor. Há 5 cores diferentes disponíveis para essa tarefa. A única restrição é que os vértices que estejam em extremidades opostas de qualquer diagonal do quadrado (AC e BD) sejam pintados com cores diferentes. O número de maneiras diferentes de pintar os vértices desse quadrado é:

a) 18

b) 60

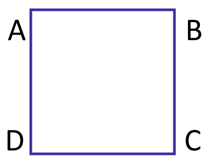
c) 120

d) 240

e) 400

Comentários:

A questão informa que temos **5** cores disponíveis para pintar 4 vértices de um quadrado:



No entanto, a cor do vértice **A** deve ser **diferente** da cor do vértice **C**; e a cor do vértice **B** deve ser **diferente** da cor do vértice **D**.

Assim, há **5** possibilidades para o vértice A e **4** possibilidades para o vértice C.

Similarmente, há **5** possibilidades para o vértice B e **4** possibilidades para o vértice D.

Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades para **todos** os 4 vértices é:

5 **x** 5 **x** 4 **x** 4 = 400

Gabarito: E

Contagem de Divisores

Com base no princípio multiplicativo, é possível calcular a **quantidade de divisores** de um número natural. O primeiro passo é **fatorar** o número natural em números **primos**. Por exemplo, vamos fatorar o número 60:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, podemos representar o número 60, a partir dos seus **divisores primos**, da seguinte forma:

$$60 = 2^{\mathbf{2}} \times 3^{\mathbf{1}} \times 5^{\mathbf{1}}$$

Agora é o *pulo do gato*: **Todos** os divisores de um número são formados pelo **produto** de um **subconjunto** dos seus **divisores primos**. Por exemplo, o número 15 é produto de 3 e 5 e pode ser representado como:

$$15 = 2^{\mathbf{0}} \times 3^{\mathbf{1}} \times 5^{\mathbf{1}}$$

Assim, todos os divisores de 60, que indicamos como d_{60}, podem ser representados da seguinte forma:

$$d_{60} = 2^{x} \times 3^{y} \times 5^{z}, \qquad sendo\ \boldsymbol{x} \leq \mathbf{2}, \boldsymbol{y} \leq \mathbf{1}, \boldsymbol{z} \leq \mathbf{1}$$

Logo, as possibilidades para cada expoente são:

- x: 0, 1 ou 2 (**3** possibilidades);
- y: 0 ou 1 (**2** possibilidades);
- z: 0 ou 1 (**2** possibilidades).

Pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades desses eventos para encontrar o número de possibilidades, no total:

3 x **2** x **2** = 12

Logo, há 12 divisores de 60.

Os **expoentes** dos divisores primos de 60 eram **2**, **1** e **1**, e os valores multiplicados para encontrar o número de divisores foram **3**, **2** e **2**.

Portanto, basta **somar 1** a cada **expoente** e **multiplicá-los**:

Número de Divisores = (2 **+ 1**) x (1 **+ 1**) x (1 **+ 1**) = 3 x 2 x 2

Isso porque o número de possibilidades que cada expoente pode assumir é igual ao **seu valor**, **mais 1**, correspondente ao **zero**.

(FCC/2016 – Companhia Metropolitana/SP) Uma tabela retangular de 12 linhas por 18 colunas possui 216 campos de preenchimento. Outras tabelas retangulares com combinações diferentes de linhas e colunas também possuem 216 campos de preenchimento. Observando-se que uma tabela de 12 linhas por 18 colunas é diferente de uma tabela de 18 linhas por 12 colunas, o total de tabelas retangulares diferentes com 216 campos de preenchimento é igual a

a) 14

b) 12

c) 10

d) 16

e) 18

Comentários:

O enunciado pede a quantidade de tabelas distintas que podem ser formadas com 216 campos, de modo que uma tabela com A linhas e B colunas é **diferente** de uma tabela B linhas e A colunas.

Essa quantidade corresponde ao número de maneiras de obter 216 pelo produto de 2 números inteiros:

1 x 216; 2 x 108; ...; 108 x 2; 216 x 1

Ou seja, ela corresponde ao número **divisores** de 216.

Para isso, vamos primeiro fatorar 216 em números primos:

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$216 = 2^3 \times 3^3$$

Os divisores de 216 podem ser, portanto, representados da seguinte forma:

$$d_{216} = 2^x \times 3^y$$

Nesse caso, x pode assumir **3 + 1 = 4** possibilidades (0, 1, 2 ou 3), assim como y., que também pode assumir as mesmas **3 + 1 = 4** possibilidades. Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades é:

4 x 4 = 16

Gabarito: D.

Princípio Aditivo

Agora, veremos outro princípio fundamental de contagem, chamado de **princípio aditivo**:

> *Se o evento A ocorre de **m** maneiras diferentes e o evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, e se A e B são **mutuamente exclusivos*** (ou seja, se um ocorrer o outro **não** ocorre)*, então o número de maneiras de ocorrer **um** dos eventos (A **ou** B) é **m + n**.*

Para ilustrar esse princípio, vamos considerar que João precisa se **calçar** e que ele possui **3** opções de tênis e **2** opções de sapatos.

Nesse caso, o evento A corresponde a calçar um tênis, com ***m*** = 3 possibilidades, e o evento B corresponde a calçar um sapato, com ***n*** = 2 possibilidades. Esses eventos são **mutuamente excludentes** (João calçará um tênis **ou** um sapato; ele **não** pode calçar os dois). Assim, o número de maneiras de João se calçar é a soma:

m* + *n = 3 + 2 = 5

Podemos generalizar esse princípio para qualquer número de eventos.

> Havendo n eventos **mutuamente exclusivos**, com $\mathbf{p_1}$ possibilidades para o evento A_1, $\mathbf{p_2}$ possibilidades para o evento A_2, ... e $\mathbf{p_n}$ possibilidades para o evento A_n, então o número de maneiras **um** dos n eventos ocorrer é:
>
> $$P(A_1 \textbf{ ou } A_2 \textbf{ ou } \ldots \textbf{ ou } A_n) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

RESUMINDO

- Quando **ambos** ocorrem os eventos (A **E** B), **multiplicamos** as possibilidades;
- Quando ocorre **somente um** dos eventos (A **OU** B), **somamos** as possibilidades.

Eventos Concomitantes: A **e** B → Princípio Multiplicativo: n(A) **x** n(B)

Eventos Excludentes: A **ou** B → Princípio Aditivo: n(A) **+** n(B)

EXEMPLIFICANDO

Agora, vejamos um exemplo **combinando** esses dois princípios.

Vamos considerar que Maria precisa se vestir e se calçar, dispondo de:

- **4 vestidos**;
- **2 saias**;
- **3 blusas**; e
- **5 sapatos**.

Nesse caso, Maria irá colocar um **vestido** (evento **A**) **OU** um conjunto de **saia** (evento **B**) **E** **blusa** (evento **C**). De uma forma ou de outra, irá colocar **também** um **sapato** (evento **D**).

Nessa situação, as possibilidades de Maria se vestir e se calçar são:

i) Os eventos **B (saia)** e **C (blusa)** são concomitantes – princípio multiplicativo:

2 x 3 = **6** possibilidades;

ii) Os eventos **A (vestido)** e **(i) (saia e blusa)** são excludentes – princípio aditivo:

4 + 6 = **10** possibilidades;

iii) Os eventos **D (sapato)** e **(iii) (saia e blusa ou vestido)** são concomitantes – princípio multiplicativo:

5 x 10 = 50 possibilidades.

(2017 – Conselho Regional de Educação Física/CE) Numa estante encontram-se 4 dicionários de inglês, 3 de espanhol e 2 de francês.

De quantas maneiras uma pessoa pode escolher dois dicionários dessa estante e que sejam de idiomas diferentes?

a) 22

b) 24

c) 26

d) 28

Comentários:

Selecionando 2 dicionários de idiomas diferentes, podemos encontrar uma das seguintes opções:

i) um livro de inglês **e** um de espanhol; **ou**

ii) um livro de inglês **e** um de francês; **ou**

iii) um livro espanhol **e** um de francês.

Em cada opção, temos eventos concomitantes (ambos ocorrem), aplicando-se o princípio **multiplicativo**; enquanto as opções i, ii e iii se excluem mutuamente (somente uma delas irá ocorrer), aplicando-se o princípio **aditivo** entre elas.

- para i (inglês e espanhol), temos 4 x 3 = 12 possibilidades;
- para ii (inglês e francês), temos 4 x 2 = 8 possibilidades;
- para iii (espanhol e francês), temos 3 x 2 = 6 possibilidades.

E o total de maneiras de pegar dois dicionários de idiomas distintos é (princípio aditivo):

$$12 + 8 + 6 = 26$$

Gabarito: C

(CESPE/2013 – TRT-ES) Considerando que, na fruteira da casa de Pedro, haja 10 uvas, 2 maçãs, 3 laranjas, 4 bananas e 1 abacaxi, julgue o próximo item.

Se Pedro desejar comer apenas um tipo de fruta, a quantidade de maneiras de escolher frutas para comer será superior a 100.

Comentários:

Se Pedro deseja comer apenas **um** tipo de fruta, ele poderá comer uvas **OU** maçãs **OU** laranjas **OU** bananas **OU** abacaxi.

i) Uvas: há 10 uvas, logo Pedro poderá comer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 uvas. Logo, há 10 maneiras de escolher uvas para comer;

ii) Maçãs: há 2 maçãs, logo há 2 maneiras de escolher maçãs para comer;

iii) Laranjas: com 3 laranjas, há 3 maneiras de comer laranjas;

iv) Bananas: com 4 bananas, há 4 maneiras de comer bananas;

v) Abacaxi: há 1 abacaxi, logo há 1 forma de comer abacaxi.

Como Pedro irá escolher apenas **uma** dessas opções, então devemos aplicar o princípio aditivo:

$$\text{Número de maneiras} = 10 + 2 + 3 + 4 + 1 = 20$$

Que é inferior a 100.

Gabarito: Errado.

(CESPE 2016/FUB) Em um intervalo para descanso, a assistente em administração Marta foi a uma lanchonete cujo cardápio oferecia 7 tipos diferentes de salgados, 4 tipos diferentes de bolos, 3 espécies diferentes de tapioca, sucos de 3 sabores diferentes e 5 tipos diferentes de refrigerantes. A partir dessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Se Marta desejar fazer um lanche com apenas uma opção de comida e apenas uma bebida, ela terá mais de 100 maneiras distintas de organizar seu lanche.

Comentários:

Marta deseja escolher uma comida **E** uma bebida.

Para comer, Marta pode escolher uma das 7 opções de salgado **OU** um dos 4 tipos de bolo **OU** uma das 3 espécies de tapioca. Pelo princípio aditivo, as opções de comida são:

$$7 + 4 + 3 = 14$$

Para beber, Marta pode escolher uma das 3 opções de suco **OU** uma das 5 opções de refrigerante. Pelo princípio aditivo, as opções de bebida são:

$$3 + 5 = 8$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de se escolher uma comida **E** uma bebida é:

$$14 \times 8 = 112$$

Logo, há mais de 100 maneiras.

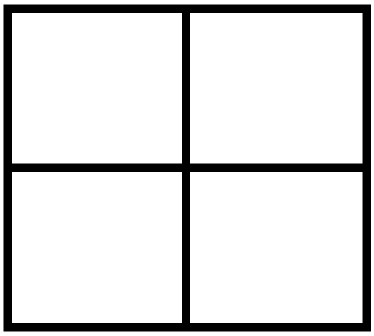
Gabarito: Certo.

Princípio da Casa dos Pombos

O **princípio do pombal** ou **da casa dos pombos** afirma que:

*Se **n** pombos devem se abrigar em **m** casas e se **n > m**, então **pelo menos uma** casa irá conter **mais de um** pombo.*

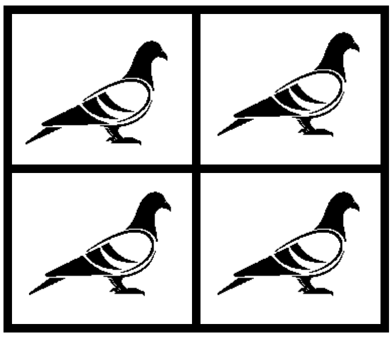
Por exemplo, podemos ter m = 4 casas. Nesse caso, se tivermos qualquer número de pombos **maior** do que 4, então pelo menos uma casa conterá **mais de um** pombo.



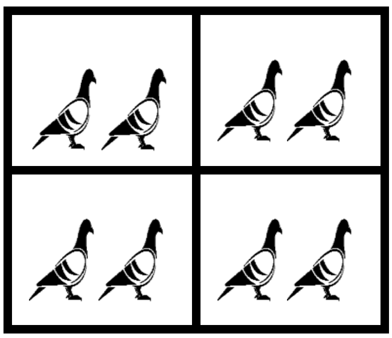
Por que pombos*?* Bem, os pombos são imprevisíveis. Eles podem resolver ficar todos juntos ou todos separados... Nesse sentido, eles representam **eventos aleatórios**, como a seleção de determinados elementos **ao acaso**. Porém, mesmo sendo imprevisíveis, é possível fazer algumas **afirmações** ou **garantias**. Para fazer essas afirmações, precisamos pensar no **pior cenário** possível.

Por exemplo, considerando um total de 4 casas, quantos pombos são necessários para **garantir** que haverá pelo menos 2 pombos em uma casa? Bem, é **possível** que, havendo apenas 2 pombos, ambos escolham a mesma casa. Porém, isso não pode ser **garantido**, pois também é possível que escolham casas distintas. A mesma situação ocorre com 3 e com 4 pombos, pois ainda é possível que todos escolham casas distintas.

Entretanto, com 5 pombos, **necessariamente** haverá **pelo menos** 2 pombos em uma casa. Como há somente 4 casas, ainda que eles tentem se espalhar, o 5º pombo não terá alternativa e terá que ficar com algum outro pombo.



Também podemos encontrar o número de pombos necessários para **garantir** que haja pelo menos **3 pombos em uma mesma casa**. No **pior cenário**, eles ficarão todos espalhados com 2 pombos por casa, antes de termos 3 pombos em uma mesma casa.



Para que haja 2 pombos em cada uma das 4 casas, serão necessários 2 x 4 = 8 pombos. Portanto, são necessários 8 + 1 = 9 pombos, para **garantir** que haverá **pelo menos** 3 pombos em uma casa.

Podemos mencionar outros exemplos, mais próximos à nossa realidade. Por exemplo, qual é o menor número de pessoas necessário para **garantir** que **pelo menos 2 pessoas** façam aniversário no mesmo mês?

Para garantir isso, precisamos pensar no pior cenário: aquele que em que os aniversariantes ficam todos "espalhados".

Assim, em um grupo de 12 pessoas, todas fariam aniversário em meses distintos. Porém, em um grupo de 13 pessoas, como há somente 12 meses, então necessariamente alguém fará aniversário no **mesmo** mês que outra pessoa. Portanto, são necessárias 13 pessoas para **garantir** que **pelo menos 2** façam aniversário no mesmo mês.

*Por que a pergunta é pelo **menor** número de pessoas?*

Note que, se houver mais do que 13 pessoas (ou seja, 14, 15,...), também poderemos garantir que pelo menos 2 pessoas farão aniversário no mesmo mês. Por isso, a questão se interessa pelo **menor** número de pessoas, para o qual temos a garantia desejada.

(FCC/2017 – Analista Executivo da Secretaria de Gestão/MA) No setor administrativo de uma empresa, há quatro tipos de cargos: estagiários, técnicos, gerentes e diretores. Alguns funcionários desse setor comporão um grupo que será transferido para o setor financeiro da empresa. Compondo-se o grupo com funcionários escolhidos ao acaso, o número mínimo de funcionários que deverá compor o grupo para que se tenha certeza de que nele haverá quatro funcionários de um mesmo cargo é igual a

a) 17

b) 15

c) 13

d) 16

e) 14

Comentários:

O pior cenário (ou seja, o cenário que exige o maior número de funcionários para garantir que 4 terão o mesmo cargo) é aquele em que os funcionários são todos de cargos diferentes. Assim, haverá 3 funcionários para cada um dos 4 tipos de cargo, antes de haver 4 funcionários de algum cargo.

Ou seja, haverá 3 x 4 = 12 funcionários distribuídos por todos os cargos, em 3 funcionários por cargo. Com o 13º funcionário, necessariamente haverá 4 funcionários para algum cargo.

Gabarito: C

(CESPE/2013 – TCE-RO) Considerando que, em uma pesquisa de rua, cada entrevistado responda sim ou não a cada uma de dez perguntas feitas pelos entrevistadores, julgue o item seguinte.

Será necessário entrevistar mais de mil pessoas para se garantir que duas pessoas respondam igualmente a todas as perguntas.

Comentários:

Para **garantir** que duas pessoas respondam igualmente a todas as perguntas, é necessário entrevistar um número de pessoas **maior** que o número de maneiras diferentes de responder ao questionário. Ou seja, essa questão combina o princípio dos pombos com o princípio multiplicativo.

Vamos representar as possibilidades de resposta para as 10 perguntas conforme abaixo:

Sabemos que há 2 respostas distintas possíveis para cada pergunta:

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de responder às 10 perguntas é:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024$$

Assim, precisamos entrevistar 1.025 pessoas para **garantir** que haverá pelo menos duas respostas iguais, ou seja, mais de 1.000 pessoas.

Gabarito: Certo.

FATORIAL DE UM NÚMERO NATURAL

Para resolvermos diversas questões de análise combinatória, utilizamos o chamado **fatorial**.

O **fatorial de um número natural** (0, 1, 2, 3, ...) é representado como:

$$\boldsymbol{n}!$$

TOME NOTA!

O fatorial representa o **produto** de **todos** os números inteiros positivos **menores ou iguais àquele número**, conforme indicado a seguir:

$$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) \times (\boldsymbol{n}-\mathbf{2}) \times \ldots \times \mathbf{2} \times \mathbf{1}$$

Por exemplo:

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Note que podemos escrever o fatorial de um número natural em função do fatorial de **qualquer** outro número natural **menor**, por exemplo:

$$4! = 4 \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!} = 4 \times 3!$$

$$7! = 7 \times \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!} = 7 \times 6!$$

$$7! = 7 \times 6 \times \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!} = 7 \times 6 \times 5!$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!$$

Esse tipo de mudança facilita o cálculo das divisões entre fatoriais (**muito comuns** em combinatória):

$$\frac{6!}{3!}=\frac{6\times5\times4\times3!}{3!}=\frac{6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}}=6\times5\times4=120$$

$$\frac{10!}{7!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{7!}=\frac{10\times9\times8\times\cancel{7!}}{\cancel{7!}}=10\times9\times8=720$$

$$\frac{15!}{13!}=\frac{15\times14\times13!}{13!}=\frac{15\times14\times\cancel{13!}}{\cancel{13!}}=15\times14=210$$

Nesses casos, aplicamos o fatorial **antes** de efetuar a divisão. Quando for necessário realizar a divisão **antes**, utilizaremos o **parêntesis**. Por exemplo:

$$\frac{6!}{3!}\neq\left(\frac{6}{3}\right)!$$

Em $\frac{6!}{3!}$, calculamos os **fatoriais antes**: $\frac{6!}{3!}=\frac{6\times5\times4\times3!}{3!}=6\times5\times4=120$; já em $\left(\frac{6}{3}\right)!$, efetuamos a **divisão** entre parêntesis, **antes** do fatorial:

$$\left(\frac{6}{3}\right)!=2!=2\times1=2$$

Analogamente, em um produto, temos: $2\times4!\neq(2\times4)!$

Em $2\times4!$, calculamos o **fatorial** de 4 **antes** da multiplicação:

$$2\times4!=2\times4\times3\times2\times1=48$$

Em $(2\times4)!$, **multiplicamos** os fatores, **antes** de aplicar o fatorial:

$$(2\times4)!=8!=8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=40.320$$

O mesmo vale para as demais operações:

$$2+4!\neq(2+4)!$$

Pois $2+4!=2+4\times3\times2\times1=26$; e $(2+4)!=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$.

$$8-3!\neq(8-3)!$$

Pois $8-3!=8-3\times2\times1=2$; e $(8-3)!=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$.

Agora, vejamos dois **casos especiais** do fatorial. O **fatorial de 1** pode ser entendido pela própria definição de fatorial. Como não há número inteiro positivo menor do que 1, apenas igual, então esse será o único fator:

$$\mathbf{1! = 1}$$

O segundo caso especial é **0!** Você pode considerar que o seguinte resultado é uma convenção:

$$\mathbf{0! = 1}$$

Para entender o porquê dos resultados desses casos especiais, devemos observar que o fatorial de um número n pode ser escrito como o **fatorial do número seguinte**, (n + 1)!, **dividido** por esse **número seguinte**, n + 1.

Por exemplo, 4! pode ser representado como 5! dividido por 5.

$$4! = \frac{5!}{5} = \frac{\cancel{5}\times4\times3\times2\times1}{\cancel{5}} = 4\times3\times2\times1$$

Similarmente, o fatorial de 1 pode ser representado como:

$$1! = \frac{2!}{2} = \frac{2\times1}{2} = 1$$

E o fatorial de 0 como:

$$0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG) O fatorial de um número é extremamente utilizado na análise combinatória. Dessa forma, analise as proposições a seguir:

I. O fatorial n! de um número $n \in \mathbb{N}$ é dado por $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$;

II. 0! = 1;

III. 1! = 0.

Está(ão) CORRETA(S) a(s) proposição(ões):

a) II apenas.

b) I e II apenas.

c) II e III apenas.

d) I e III apenas.

Comentários:

A proposição I corresponde exatamente à definição de fatorial: n! = n × (n − 1) × (n − 2) ... 3 × 2 × 1

A proposição II também está correta, pois 0! = 1.

A proposição III está incorreta, pois 1! = 1.

Ou seja, estão corretas apenas as proposições I e II.

Gabarito: B

(2018 – Prefeitura de Uruçuí/PI) A simplificação da expressão a seguir é: $\frac{200!}{198!}$

a) 200

b) 198!

c) 38.800

d) 39.800

Comentários:

Podemos escrever 200! como 200! = 200 x 199 x 198!. Assim, temos:

$$\frac{200!}{198!} = \frac{200 \times 199 \times 198!}{198!} = 200 \times 199 = 39.800$$

Gabarito: D

Permutação

Informalmente, podemos dizer que **permutar** significa **trocar de lugar**.

Ao trocar elementos de lugar, a **ordem** desses elementos se **modifica**. Por isso, podemos dizer que as técnicas de permutação permitem calcular as **diferentes possibilidades** de se **ordenar** elementos.

Permutação Simples

Na permutação simples, os elementos a serem ordenados são todos **distintos** entre si.

Digamos que 3 alunos (Ana, Beto e Caio), de um grupo de estudo, serão avaliados e, em seguida, ranqueados de acordo com o resultado da sua avaliação. Supondo que não há empates, de quantas formas esses alunos podem ser ranqueados?

Como o exemplo é pequeno poderíamos relacionar e contar todas as possibilidades, mas vamos experimentar uma outra forma de resolver: encontrando o **número de possibilidades** para **cada posição**:

___	___	___
1º	2º	3º

Quais são os alunos que podem ficar em primeiro lugar? Qualquer um deles (Ana, Beto ou Caio) **pode** ficar em primeiro lugar. Portanto, temos 3 possibilidades para o primeiro lugar.

E para o segundo lugar? Bem, sabendo que alguém ficará em primeiro lugar, restarão 2 possibilidades para o segundo colocado.

E para o terceiro lugar, sabendo que alguém ficará em primeiro lugar e outro ficará em segundo lugar, restará apenas uma possibilidade para o terceiro lugar.

3	2	1
1º	2º	3º

Como são eventos concomitantes, pois alguém ficará em primeiro lugar, outra pessoa ficará em segundo **E** outra em terceiro, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento, pelo princípio multiplicativo:

$$3 \times 2 \times 1$$

Poderíamos ter começado o raciocínio por qualquer posição, que o resultado seria o mesmo.

Como assim "sobrarão" 2 possibilidades para o 2º colocado e 1 possibilidade para o 3º colocado?

ESCLARECENDO!

Para a 1ª posição, **todos** os 3 alunos estão disponíveis:

3		
1º	2º	3º

Para cada uma dessas 3 possibilidades, teremos ordenações **diferentes**, dependendo do 2º e 3º lugares. Por exemplo, mantendo Ana em 1º lugar, temos Ana, Beto e Caio ou Ana, Caio e Beto.

Sabendo que não é possível que o mesmo aluno ocupe mais de uma posição, então há **apenas 2 possibilidades** para a 2ª posição, uma vez que um dos alunos terá ocupado a 1ª.

Por isso, dizemos que o aluno da 1ª posição "**já foi escolhido**" e assim sobrarão apenas 2 alunos para a 2ª posição:

3	2	
1º	2º	3º

Da mesma forma, só haverá 1 aluno que não terá ocupado nem a primeira nem a segunda posição, logo ele irá ocupar a terceira posição. Por isso, dizemos que, "**após a escolha**" do 1º e do 2º colocados, sobrará apenas 1 aluno para a 3ª posição:

3	2	1
1º	2º	3º

Por fim, multiplicamos todas essas possibilidades (princípio multiplicativo) para encontrar a quantidade de maneiras de ordenar todos os 3 elementos.

E se houvesse 4 alunos? Quais seriam as possibilidades de ordenação? Nesse caso, teríamos 4 possibilidades para o primeiro lugar; 3 para o segundo lugar; 2 para o terceiro e 1 para o quarto:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

E para 10 alunos? Teríamos 10 possibilidades para o primeiro lugar, 9 para o segundo, depois 8, depois 7... até sobrar 1 possibilidade para o décimo lugar:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Assim, a posição seguinte terá sempre **uma** possibilidade **a menos** do que a posição anterior.

Para n alunos, temos:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Lembrou de algo? Essa é a fórmula do **fatorial**!

Portanto, a **permutação simples** de **n** elementos distintos, que representamos como $\boldsymbol{P_n}$, que corresponde ao número de possibilidades de **ordenar n** elementos **distintos**, é:

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

Reforçando, a **permutação simples** pode ser utilizada para calcular todas as possibilidades de se **reordenar** elementos, sejam letras de uma sigla (formando anagramas distintos), algarismos em um número (formando números distintos), etc., desde que os elementos sejam **todos distintos**.

(FGV/2019 – Prefeitura de Salvador/BA) Trocando-se a ordem das letras da sigla PMS de todas as maneiras possíveis, obtêm-se os anagramas dessa sigla. O número desses anagramas é:

a) 16.

b) 12.

c) 9.

d) 8.

e) 6.

Comentários:

Considerando que todas as 3 letras de PMS são distintas, o número de anagramas, ou seja, de formas de se reordenar essas letras é a permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Gabarito: E

(VUNESP/2018 – PM/SP) Em um armário, há 5 prateleiras e será preciso colocar 5 caixas, de cores distintas, cada uma em uma prateleira desse armário, sem que haja uma ordem específica. O número total de maneiras de colocar essas caixas nesse armário é

a) 25.

b) 60.

c) 95.

d) 120.

e) 165.

Comentários:

Por se tratar de caixas distintas, a serem alocadas em determinada ordem, temos uma permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: D.

(CESPE 2018/EBSERH) Julgue o próximo item, a respeito de contagem.

Se a enfermaria de um hospital possuir cinco leitos desocupados e se cinco pacientes forem ocupar esses leitos, então haverá mais de 100 formas diferentes de fazer essa ocupação.

Comentários:

Considerando que temos 5 leitos para serem ocupados por 5 pacientes, temos uma permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Logo, há mais de 100 formas de fazer essa ocupação.

Gabarito: Certo.

(CESPE 2016/CBM-DF) Para atender uma grave ocorrência, o comando do corpo de bombeiros acionou 15 homens: 3 bombeiros militares condutores de viatura e 12 praças combatentes, que se deslocaram em três viaturas: um caminhão e duas caminhonetes. Cada veículo transporta até 5 pessoas, todas sentadas, incluindo o motorista, e somente os condutores de viatura podem dirigir uma viatura. Com relação a essa situação, julgue o item seguinte.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuir os condutores de viatura para dirigir os veículos é superior a 5.

Comentários:

Considerando que há 3 condutores para 3 veículos, a quantidade de maneiras de organizá-los corresponde a uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Logo, a quantidade de maneiras é superior a 5.

Gabarito: Certo.

Permutação Simples com Restrição

É possível que algumas questões de permutações imponham determinadas **restrições**. Nesses casos, nem todos os elementos poderão permutar livremente, o que exige mais atenção para resolver a questão.

Por exemplo, vamos considerar que há 8 elementos distintos a serem ordenados, por exemplo, os algarismos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Vamos representar as opções de ordenação com os espaços abaixo.

Suponha que o número 1 esteja **fixo** na primeira posição e o número 8, na oitava posição:

1							8

Sendo assim, restarão os algarismos 2 a 7 (ou seja, um total de **6 algarismos**) para serem ordenados nos **6 espaços** restantes. Dessa forma, teremos uma permutação de 6 elementos em 6 posições:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Poderíamos ter **fixado quaisquer 2 algarismos** em quaisquer 2 posições, que continuaríamos com a **permutação dos 6 algarismos restantes**, nos 6 espaços restantes. Portanto, o número de possibilidades de ordená-los seria o mesmo.

De modo geral, havendo **n elementos**, dos quais **p** estejam **fixos em determinadas posições**, fazemos a **permutação** de **n – p** elementos:

$$\mathbf{P_{n-p} = (n - p)!}$$

Um exemplo sutilmente **diferente** seria se esses dois algarismos fossem posicionados nos **extremos**, mas **sem fixar** qual irá ocupar a primeira posição e qual irá ocupar a última posição.

Assim, poderíamos ter o número 1 na primeira posição e o número 8 na oitava; **ou** o número 8 na primeira posição e o número 1 na oitava:

1							**8**

8							**1**

Nesse caso, para cada uma das 720 possibilidades de permutar os algarismos de 2 a 7 nas posições intermediárias, calculadas anteriormente, há **2 possibilidades distintas** de posicionar os extremos.

Pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar as possibilidades desses dois eventos:

$$2 \times P_6 = 2 \times 720 = 1440$$

Na verdade, essas **2 possibilidades** de alocar esses 2 algarismos, 1 e 8, nas 2 posições extremas correspondem à **permutação** desses 2 elementos.

Assim, podemos representar o número de maneiras de se ordenar os 8 algarismos, nessas condições, como:

$$P_2 \times P_6$$

Em outras palavras, podemos tratar como **duas permutações em separado**: uma com os 2 elementos que ocuparão as posições extremas; e a outra com os 6 elementos que ocuparão as posições não extremas.

E para ordenar **todos** os 8 elementos, **multiplicamos** esses resultados (princípio multiplicativo).

Com isso, podemos resolver outros problemas que indiquem determinadas posições a certos elementos, **sem fixar** a posição específica de cada um.

Por exemplo, vamos supor que os 3 primeiros algarismos tenham que ocupar as 3 primeiras posições, em **qualquer ordem**; e os demais algarismos, as demais posições, também em qualquer ordem:

$$\underbrace{\square\ \square\ \square}_{1,\ 2 \text{ e } 3}\ \underbrace{\square\ \square\ \square\ \square\ \square}_{4,\ 5,\ 6,\ 7 \text{ e } 8}$$

Nesse caso, temos a permutação de **3 elementos** nas 3 primeiras posições e de **5 elementos** nas demais posições.

Pelo princípio **multiplicativo**, o número de ordenações possíveis é:

$$P_3 \times P_5 = 3! \times 5! = 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Agora, vamos supor que os algarismos ímpares tenham que ocupar posições ímpares e os algarismos pares, posições pares, como ilustrado abaixo:

I	P	I	P	I	P	I	P

Também vamos resolver esse caso com **2 permutações em separado**.

Em relação aos **ímpares**, temos 4 algarismos para 4 posições, logo, temos uma permutação de **4 elementos**:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Em relação aos **pares**, temos 4 algarismos para 4 posições, logo, temos outra permutação de **4 elementos**:

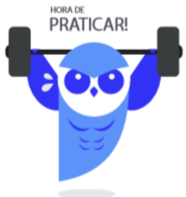
$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Pelo princípio **multiplicativo**, o número de maneiras de ordenar todos esses 8 algarismos é:

$$24 \times 24 = 576$$

Em geral, havendo **n** elementos, dos quais **p** estejam **designados a determinadas posições**, mas **sem fixar** a posição específica de cada um, fazemos a permutação de **n – p** elementos e **multiplicamos** pela permutação de **p** elementos:

$$P_{n-p} \times P_p = (n-p)! \times p!$$



(FCC/2019 – Analista Judiciário do TRF 3ª Região) Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é

a) 30

b) 4

c) 120

d) 24

e) 6

Comentários:

Essa questão trabalha com a permutação de 5 elementos, com um deles fixo.

Considerando que 1 dos candidatos está **fixo** no município A, restam 4 candidatos para serem alocados em 4 municípios (B, C, D ou E). Portanto:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: D.

(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão. A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 8! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o camelo fique na primeira posição e o elefante fique na sexta posição.

Comentários:

A questão pede para organizarmos uma fila de 10 animais, de forma que o camelo (C) fique na primeira posição e o elefante (E), na sexta:

C					E				

Como esses elementos estão **fixos** em posições específicas, basta reordenarmos os **demais elementos**.

Logo, o número de maneira de organizarmos essa fila corresponde à permutação de 10 – 2 = 8 elementos:

$$P_8 = 8!$$

Gabarito: Certo.

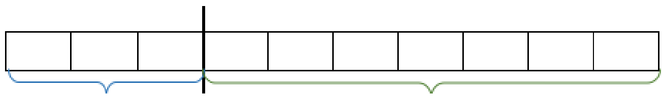
(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 3 × 7! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o elefante, o camelo e o leão fiquem nas três primeiras posições, não necessariamente nessa ordem.

Comentários:

Agora, desejamos organizar a fila de forma que os 3 animais (Elefante, Camelo e Leão) fiquem nas 3 primeiras posições, em **qualquer ordem**. Consequentemente, os outros 10 – 3 = 7 animais ocuparão as outras 7 posições, em qualquer ordem:



Elefante, Camelo, Leão — Outros 7 animais

O número de formas de organizar os 3 animais corresponde a uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3!$$

O número de formas de organizar os outros 7 animais equivale a uma permutação de 7 elementos:

$$P_7 = 7!$$

Pelo princípio multiplicativo, multiplicamos esses resultados para obter o número de maneiras possíveis de organizar toda a fila:

$$\text{Número de possibilidades} = 3! \times 7!$$

Esse resultado é **diferente** do valor informado no item, qual seja, 3 × 7!, logo, o item está errado. Aliás, como 3! = 3 x 2, o nosso resultado é o **dobro** do que consta no item da questão.

Gabarito: Errado.

Vejamos mais uma ferramenta para resolver problemas de **permutação simples com restrição**.

Vamos supor que os algarismos 1 e 2 tenham que ficar **sempre juntos**, **nessa ordem**.

Nesse caso, tratamos esses 2 algarismos como **elemento único**, que podemos chamar de **A**. Assim, em vez de 8 elementos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}, ordenaremos apenas **7 elementos** {A, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

Portanto, a quantidade de maneiras de ordenar 8 elementos, de modo que 2 estejam sempre **juntos** em uma **determinada ordem**, corresponde à **permutação de 7 elementos**.

Se houvesse 3 elementos **juntos** em **determinada ordem**, {1, 2 e 3}, chamaríamos os 3 elementos de A, e calcularíamos a permutação dos **outros 5 elementos acrescido do elemento A**, o que corresponde à permutação de **6 elementos** {A, 4, 5, 6, 7 e 8}.

De modo geral, havendo **n elementos**, dos quais **j** devam ficar **juntos em determinada ordem**, fazemos a **permutação** de **n – j + 1** elementos:

$$P_{n-j+1} = (n - j + 1)!$$

E se os elementos tivessem que ficar **juntos**, mas em **qualquer ordem**?

Nesse caso, o **início** da solução é similar, isto é, chamamos esses elementos de um **único elemento**, **A**, e fazemos a **permutação** do elemento **A** com os demais elementos.

Por exemplo, se os algarismos {1, 2 e 3} tivessem que ficar juntos, mas em qualquer ordem, dentre os 8 algarismos, faríamos a permutação dos 6 elementos {A, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Porém, para **cada uma** dessas 720 possibilidades de ordenar os elementos {A, 4, 5, 6, 7 e 8}, os algarismos {1, 2 e 3} pode aparecer como:

... 1 2 3 ...	... 1 3 2 ...	... 2 1 3 ...
... 2 3 1 ...	... 3 1 2 ...	... 3 2 1 ...

Em outras palavras, para cada uma das possibilidades que calculamos anteriormente, temos diferentes formas de **ordenar os 3 elementos**.

Como calculamos as diferentes formas de **ordenar 3 elementos**? Pela **permutação** de 3 elementos!

Logo, para calcular o número de maneiras de organizar **todos** os 8 elementos nessas condições, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela permutação de **3 elementos** (princípio multiplicativo):

$$P_6 \times P_3 = 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$$

De modo geral, havendo **n** elementos, dos quais **j** elementos devem ficar **juntos em qualquer ordem**, fazemos a permutação de **n – j + 1** elementos e **multiplicamos** pela permutação de **j** elementos:

$$P_{n-j+1} \times P_j = (n - j + 1)! \times j!$$

Na permutação simples com restrição, podemos (i) designar **posições** para determinados elementos ou (ii) determinar elementos a permanecerem **juntos**.

i) Quando designamos **posições**, devemos permutar os demais elementos.

i.a) Havendo p elementos **fixos** em determinadas posições, dentre n elementos no total, devemos permutar **n – p** elementos:

$$P_{n-p} = (n - p)!$$

i.b) Caso os p elementos possam ser **reordenados** dentre as posições designadas, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela permutação de p elementos:

$$P_{n-p} \times P_p = (n - p)! \times p!$$

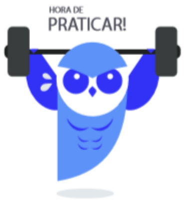
ii) Quando determinamos elementos devem permanecer **juntos**, devemos considerá-los como **elementos único** e permutar esse novo elemento junto aos demais.

ii.a) Havendo **j** elementos que deverão permanecer **juntos em determinada ordem**, dentre n elementos no total, devemos permutar os demais **n – j** elementos acrescidos de **1** unidade, a qual corresponde ao **conjunto** dos j elementos:

$$P_{n-j+1} = (n - j + 1)!$$

i.b) Se os **j** elementos, que deverão permanecer juntos, puderem ser **reordenados** entre si, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela permutação de **j** elementos:

$$P_{n-j+1} \times P_j = (n - j + 1)! \times j!$$



(FGV/2017 – Prefeitura de Salvador/BA) Três casais vão ocupar seis cadeiras consecutivas de uma fila do cinema, e os casais não querem sentar separados. Assinale a opção que indica o número de maneiras diferentes em que esses três casais podem ocupar as seis cadeiras.

a) 6.

b) 12.

c) 24.

d) 36.

e) 48.

Comentários:

Primeiro, vamos tratar cada casal como elemento único. Assim, temos a permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Uma vez definida a ordem entre os casais, é necessário que cada casal decida a sua ordem.

Assim, para cada uma dessas 6 possibilidades de ordem entre os casais, há $P_2 = 2$ possibilidades de cada um dos três casais se organizarem:

$$6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

Gabarito: E

(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 7 × 7! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o elefante, o camelo e o leão estejam sempre juntos, mantendo-se a seguinte ordem: leão na frente do camelo e camelo na frente do elefante.

Comentários:

Para organizar uma fila de 10 animais, de modo que o leão, o camelo e o elefante apareçam sempre nessa ordem, podemos tratá-lo como elemento único.

Assim, o número de formas de organizar os outros 10 – 3 = 7 animais e **mais** esse trio corresponde a uma permutação de 8 elementos:

$$P_8 = 8! = 8 \times 7!$$

Esse resultado é diferente de **7** x 7!, descrito no item.

Gabarito: Errado.

(CESPE 2018/BNB) Julgue o próximo item, relativo a análise combinatória e probabilidade.

A quantidade de números naturais distintos, de cinco algarismos, que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, de modo que 1 e 2 fiquem sempre juntos e em qualquer ordem, é inferior a 25.

Comentários:

A quantidade de números que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 corresponde a uma permutação desses elementos. Para que os números 1 e 2 fiquem sempre juntos, podemos considerá-lo com elemento único. Assim, temos uma permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Porém, para cada uma dessas 24 maneiras de organizar os algarismos 3, 4, 5 e o elemento 1-2, podemos ter 1 primeiro e depois 2, ou 2 primeiro e depois 1. Logo, pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar esse resultado pela permutação de 2 elementos $P_2 = 2! = 2$:

Quantidade de números possíveis = 24 x 2 = 48

Essa quantidade é **superior** a 25.

Gabarito: Errado.

Permutação com Repetição

Na permutação **simples**, todos os elementos são **distintos**.

Por exemplo, se houver 3 elementos {A, B, C}, há $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades de ordená-los. São elas:

i) A B C ii) A C B iii) B A C iv) B C A v) C A B vi) C B A

Agora, vamos supor que, em vez C, haja um **segundo elemento** A. Vamos escrever novamente as 6 possibilidades descritas acima, porém substituindo C por um segundo A:

I) A B A II) A A B III) B A A IV) B A A V) A A B VI) A B A

Agora, a ordem descrita em I é igual à ordem em VI; a ordem em II é igual à ordem em V; e a ordem em III é igual à ordem em IV. Portanto, temos apenas 3 possibilidades **distintas** de ordenar os elementos {A, A, B}:

I) A B A II) A A B III) B A A

Ou seja, quando há **elementos repetidos**, o número de possibilidades distintas de ordenação **diminui**.

Mas, por quê? O que aconteceu?

Bem, a redução ocorreu porque na opção i da **primeira** permutação, os elementos A e C estavam **invertidos** em relação à opção vi, enquanto **todo o restante se manteve igual**. Por isso, na **segunda** permutação, essas opções se tornaram uma **única** opção. O mesmo ocorreu com as opções ii e v; e com as opções iii e iv.

Em outras palavras, precisamos **dividir** o resultado da primeira permutação pelo número de vezes em que A e C **trocam de posição**.

E como calculamos a quantidade de maneiras em que elementos trocam de posição? Pela **permutação**!

Portanto, na permutação com repetição, **dividimos** a permutação **simples** pela permutação dos elementos **repetidos**. Indicamos essa permutação de **3** elementos com **repetição de 2** elementos por P_3^2:

$$P_3^2 = \frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = \frac{3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3$$

Assim, se tivéssemos 5 elementos distintos para permutar, teríamos **P_5 = 5!**. Havendo **3 elementos iguais**, dentre esses 5, dividimos esse resultado pela **permutação dos 3** elementos **P_3 = 3!**:

$$P_5^3 = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \mathbf{3!}}{\mathbf{3!}} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 5 \times 4 = 20$$

E se além de um elemento repetido, tivéssemos **outro elemento repetido**? Por exemplo, {A, A, B, B, B, C, D}.

Vamos pensar em etapas: primeiro calculamos a permutação simples dos 7 elementos, como se fossem distintos: P_7 = 7!. Em seguida, consideramos que o elemento A está repetido 2 vezes e dividimos pela permutação de 2 elementos: P_2 = 2!. Por fim, consideramos que o elemento B está repetido 3 vezes e dividimos novamente pela permutação de 3 elementos: P_3 = 3!:

$$\boldsymbol{P_7^{2,3}} = \frac{\boldsymbol{P_7}}{\boldsymbol{P_2} \times \boldsymbol{P_3}} = \frac{7!}{2! \times 3!}$$

$$P_7^{2,3} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \mathbf{3!}}{2 \times \mathbf{3!}} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2 \times \cancel{3!}} = 7 \times 3 \times 5 \times 4 = 420$$

Ou seja, na permutação com mais de um elemento repetido, **dividimos** a permutação **simples** pelas permutações dos elementos **repetidos**.

De modo geral, sendo $\boldsymbol{n}$ elementos **totais**, com $\boldsymbol{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ elementos distintos **repetidos**, a permutação desses elementos é dada por:

$$\boldsymbol{P_n^{m_1, m_2, \ldots, m_k}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{m_1! \times m_2! \times \ldots \times m_k!}}$$

(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Com as letras, A, B e C, é possível fazer seis agrupamentos diferentes de três letras: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Se as três letras fossem A, A e B, só poderiam ser feitos três desses agrupamentos diferentes: AAB, ABA, BAA. Com as letras F, F, G e G, o número de agrupamentos diferentes de quatro letras é

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 16.

Comentários:

A quantidade de agrupamentos com as letras F, F, G e G corresponde à permutação de 4 elementos, com 2 repetições de F e 2 repetições de G:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Gabarito: A.

(FGV/2018 – ALE-RO) Assinale a opção que indica o número de permutações das letras da palavra SUSSURRO

a) 1680

b) 1560

c) 1440

d) 1320

e) 1260

Comentários:

A palavra SUSSURRO contém 8 letras, sendo o S repetido 3 vezes, o U repetido 2 vezes e o R repetido 2 vezes.

Assim, temos a permutação de 8 elementos com repetição de 2, 2 e 3 elementos:

$$P_8^{2,2,3} = \frac{8!}{2! \times 2! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 2 \times 3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

Gabarito: A

(FCC/2015 – Professor da Secretaria de Educação/ES) O número de anagramas que podem ser obtidos utilizando as letras da palavra VITÓRIA, e que terminam com uma consoante é igual a

a) 2520

b) 1080

c) 840

d) 5040

e) 1980

Comentários:

Na palavra VITÓRIA, há **7 letras**:

___	___	___	___	___	___	___
1	2	3	4	5	6	7

i) Para terminar com uma consoante, há 3 possibilidades para essa posição, todas distintas:

___	___	___	___	___	___	3
1	2	3	4	5	6	7

ii) As outras 6 letras podem permutar livremente pelas 6 posições restantes. Considerando que dessas 6, há 2 elementos repetidos (letra I), temos:

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

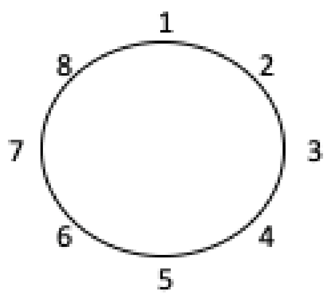
Pelo princípio **multiplicativo**, o número de possibilidades, no total, é:

3 **x** 360 = 1080

Gabarito: B.

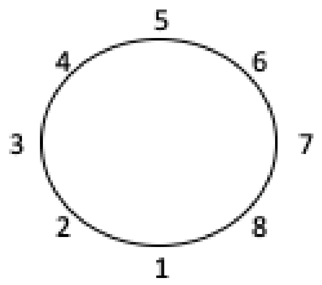
Permutação Circular

Na permutação circular, considera-se que os elementos estão dispostos em um **círculo**.

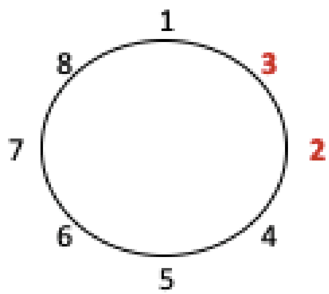


No círculo, considera-se que **não** há posições **fixas** (primeiro lugar, segundo, terceiro, ..., ou tampouco referências como acima, abaixo, à direita ou à esquerda).

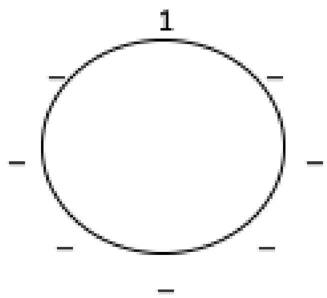
A figura a seguir representa a **mesma** disposição daquela indicada na figura acima, como se tivéssemos **girado** o círculo 180º, mantendo todos os elementos na **mesma posição**:



A disposição varia somente com a mudança da posição de algum elemento em **relação aos demais.** A figura abaixo representa uma disposição **diferente**, haja vista a **troca** dos elementos 2 e 3.



Para calcular a quantidade de disposições distintas, podemos **fixar** (qualquer) **um** dos elementos, por exemplo, o elemento 1, em qualquer posição:



Agora sim, as posições de **todos** os outros elementos irão **importar** porque elas serão **relativas** ao elemento 1 fixado. Portanto, calculamos a **permutação simples** para os **demais** elementos (no caso, os 7):

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

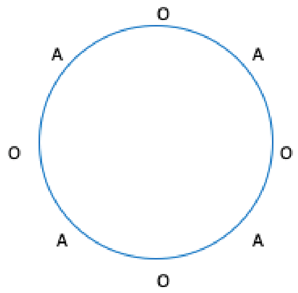
Em geral, como **fixamos um** dos elementos, a permutação circular de $\boldsymbol{n}$ elementos, indicada por $\boldsymbol{PC_n}$, é:

$$\boldsymbol{PC_n = (n-1)!}$$

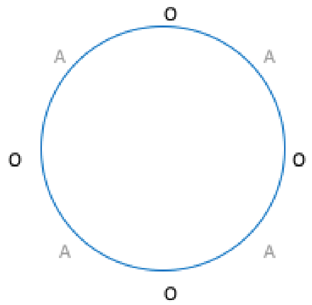
Permutação Circular com Restrições

É possível que uma permutação **circular** apresente **restrições**.

Por exemplo, suponha que haja 4 meninos (O) e 4 meninas (A) para se sentarem a uma mesa circular, de forma que todo menino esteja entre duas meninas (e, portanto, toda menina esteja entre dois meninos), como indicado abaixo.



Nesse tipo de situação, resolvemos o problema em **2 etapas**: primeiro sentamos os meninos e, depois, as meninas (ou vice-versa). Para sentarmos os 4 meninos, há 4 posições possíveis:



Nessa primeira etapa, temos uma **permutação circular**, em que **fixamos** a posição de **um** deles e calculamos a permutação dos demais:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_4 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Na segunda etapa, vamos sentar as 4 meninas. Nesse caso, **todas** as posições são **diferentes**, pois já temos meninos sentados, de modo que a posição de **todas as meninas** importa.

Assim, temos a **permutação simples** de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 24$$

Portanto, para cada uma das 6 possibilidades de se posicionar os meninos, há 24 possibilidades de posicionar as meninas. Pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar as possibilidades desses eventos:

$$6 \text{ x } 24 = 144$$

(2019 – Prefeitura de Ibiaçá/RS) O número máximo de maneiras distintas que um grupo de cinco amigos pode se sentar ao redor de uma mesa circular para realizar um lanche coletivo é:

a) 120

b) 50

c) 24

d) 12

e) 1

Comentários:

A permutação circular de n = 5 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: C

(2016 – Prefeitura de Ouricuri/PE) De quantas maneiras possíveis podemos dispor nove crianças em um círculo em que todas brincam de mãos dadas?

a) 9!

b) 8!

c) 7!

d) 6!

e) 5!

Comentários:

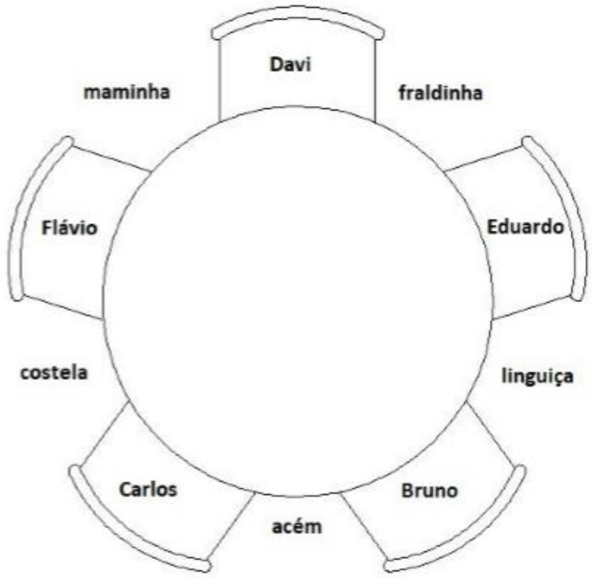
A permutação circular de n = 9 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_9 = 8!$$

Gabarito: B

(2017 – Companhia de Desenvolvimento Habitacional/DF)



Bruno, Carlos, Davi, Eduardo e Flávio são amigos e jantam em uma churrascaria. Na mesa circular em que se encontram, há 5 cadeiras idênticas, equidistantes duas a duas, e 5 espaços entre cada par de cadeiras para os garçons servirem carnes: acém; costela; fraldinha; linguiça; e maminha. A figura acima ilustra uma possível configuração da mesa, com os 5 amigos e as 5 carnes do rodízio. Sabe-se que as carnes preferidas de Bruno são costela e acém e Davi prefere fraldinha.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

O número possível de configurações da mesa, contando que os 5 amigos estejam sentados e as 5 carnes estejam entre cada par de cadeiras, é maior que 3.000.

Comentários:

Vamos resolver essa questão em 2 etapas. Primeiro, sentamos os 5 amigos e, em seguida, colocamos as 5 carnes (ou vice-versa).

Para sentar os 5 amigos em uma mesa redonda, podemos sentar um amigo em qualquer posição e, em seguida, permutar os demais:

$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Ao colocarmos as 5 carnes, a posição de todas elas importam, pois elas estarão entre amigos distintos. Portanto, temos a permutação simples de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Portanto, para cada 24 possibilidades de sentar os amigos, há 120 possibilidades de colocar as carnes. Pelo princípio **multiplicativo**, as possibilidades desses eventos devem ser multiplicadas:

$$24 \times 120 = 2.880$$

Como 2.880 é menor que 3.000, o item está errado.

Gabarito: Errado

OUTROS TIPOS DE PERMUTAÇÃO

Nesta seção, veremos tipos de permutação mais complexos e menos frequentes nas provas de concursos, quais sejam, a permutação com **elementos ordenados** e a permutação **caótica** (ou **desarranjo**).

Permutação com Elementos Ordenados

Na permutação com elementos ordenados, determinados elementos devem **seguir uma ordem** definida, não podendo ser permutados livremente.

Vamos considerar o exemplo do grupo de estudo dos 3 alunos Ana, Beto e Caio. De quantas maneiras, podemos ordená-los, de acordo com as suas notas (sem empates), sabendo que a **nota da Ana foi maior do que a nota do Beto**?

Para responder, vamos primeiro relacionar todas as possibilidades, ignorando essa restrição (sabemos que são $P_3 = 3! = 6$ possibilidades):

i) Ana, Beto, Caio
ii) Ana, Caio, Beto
iii) Beto, Ana, Caio
iv) Beto, Caio, Ana
v) Caio, Ana, Beto
vi) Caio, Beto, Ana

Agora vamos eliminar as possibilidades em que Beto está à frente de Ana (ordem incorreta):

i) Ana, Beto, Caio
ii) Ana, Caio, Beto
~~iii) Beto, Ana, Caio~~
~~iv) Beto, Caio, Ana~~
v) Caio, Ana, Beto
~~vi) Caio, Beto, Ana~~

Claramente, há uma **redução** das ordenações possíveis, em relação à permutação simples. *Mas por quê?*

Na permutação simples, se mantivermos constantes as posições dos **demais** elementos, haverá sempre uma opção em que Ana fica à frente de Beto e outra em que Beto ficará à frente de Ana. Entretanto, apenas uma dessas opções atende à restrição de ordenação.

Por esse motivo, precisamos **dividir** o resultado pelo número de vezes em que os elementos ordenados **trocam de posição**.

Já sabemos como fazer isso! Dividindo a permutação simples pela permutação dos **elementos ordenados**!

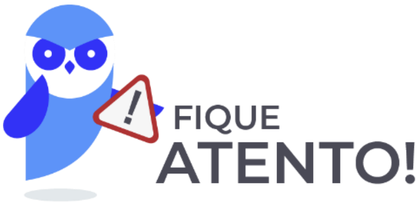
Nesse exemplo, dividimos P_3 por P_2:

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3$$

De maneira geral, havendo $\boldsymbol{n}$ elementos, dos quais $\boldsymbol{k}$ elementos devem respeitar uma **ordem específica**, o número de possibilidades de ordená-los é:

$$\frac{\boldsymbol{P_n}}{\boldsymbol{P_k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!}$$

Esta fórmula é **igual** à da permutação **com repetição**!



Na permutação com **elementos ordenados**, os elementos **não** devem ser necessariamente **consecutivos**.

No exemplo em que a ordenação foi Ana > Beto, aceitamos a opção ii (Ana, Caio, Beto), sem que Ana e Beto estivessem em posições consecutivas.

Se o problema apontar que dois elementos estejam **em determinada ordem** e que sejam **consecutivos**, então será necessário tratá-lo como elemento **único**.

Em geral, havendo $\boldsymbol{k_1}$ elementos que devam seguir uma ordem e outros $\boldsymbol{k_2}$ elementos que devam seguir outra ordem, dividimos a permutação dos $\boldsymbol{n}$ elementos pela permutação de $\boldsymbol{k_1}$ e de $\boldsymbol{k_2}$ (o que também é similar à permutação com repetição):

$$\frac{\boldsymbol{P_n}}{\boldsymbol{P_{k_1}} \times \boldsymbol{P_{k_2}}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k_1}! \times \boldsymbol{k_2}!}$$

Por exemplo, vamos supor a palavra ORDEM. O número de anagramas que podem ser formados de modo que as letras ORD estejam sempre nesta ordem, assim como as letras EM, corresponde a uma permutação de 5 elementos, de modo que 3 elementos sigam uma ordem e outros 2 elementos sigam uma ordem:

$$\frac{P_5}{P_3 \times P_2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Para ilustrar, vejamos quais são essas 10 possibilidades:

i. ORDEM
ii. OREDM
iii. OERDM
iv. EORDM
v. OREMD
vi. OERMD
vii. EORMD
viii. OEMRD
ix. EOMRD
x. EMORD

Essa fórmula pode ser estendida para qualquer número de ordenações necessárias.

HORA DE PRATICAR!

(FCC/2014 – TRF 3ª Região) Álvaro, Benedito, Cléber e outros dois amigos participam de uma corrida. Se apenas os cinco participaram dessa corrida, o número de possibilidades diferentes de maneira que Álvaro chegue antes que Benedito e este, por sua vez, chegue antes de Cléber é igual a:

a) 20

b) 24

c) 18

d) 22

e) 26

Comentários:

Há n = 5 elementos, dos quais k = 3 elementos estão ordenados: Álvaro > Benedito > Cléber. Portanto, temos:

$$\frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

$$\frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Gabarito: A.

Permutação Caótica ou Desarranjo

Na permutação caótica ou desarranjo, considera-se que os elementos estão originalmente ordenados de certa maneira e que **nenhum** deles pode retornar para a sua posição **original.**

Vamos supor que 3 elementos {A, B, C} estejam originalmente posicionados nesta ordem, isto é, A em primeiro lugar, B em segundo lugar e C em terceiro lugar. Agora, vamos reordenar esses elementos, de modo que nenhum deles retorne à sua posição original.

Como o elemento A estava em primeiro lugar, ele poderá ocupar o 2º ou o 3º lugar:

- **A em 2º lugar: __ A __**
    - Como o elemento **C** estava em 3º lugar originalmente, ele terá que ocupar o **1º lugar**
    - Assim, resta a **3ª posição** para o elemento **B**

  Possível ordenação: C A B

- **A em 3º lugar: __ __ A**
  - Como o elemento **B** estava em 2º lugar originalmente, ele terá que ocupar o **1º lugar**
  - Assim, resta a **2ª posição** para o elemento **C**

  Possível ordenação: B C A

Portanto, há **2 possibilidades** de permutação caótica para esse exemplo.

Para calcular o número de possibilidades em uma permutação caótica (ou desarranjo) de $\boldsymbol{n}$ elementos, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{D_n} = \boldsymbol{n}! \times \left[\frac{\mathbf{1}}{0!} - \frac{\mathbf{1}}{1!} + \frac{\mathbf{1}}{2!} - \frac{\mathbf{1}}{3!} + \cdots + \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!}\right]$$

Calma! Vamos juntos tentar digerir essa fórmula.

Observe que os denominadores das frações são **fatoriais** de 0 até $\boldsymbol{n}$ (total de elementos) e que os sinais das frações vão se alternando: quando o denominador é o fatorial de um número **par**, o sinal é **positivo**, quando o denominador é o fatorial de um número **ímpar**, o sinal é **negativo**.

Como não sabemos se $\boldsymbol{n}$ é par ou ímpar, utilizamos a expressão $(-1)^n$. Assim, quando $\boldsymbol{n}$ é par, $(-1)^n = +1$, e o sinal da fração é positivo; quando $\boldsymbol{n}$ é ímpar, $(-1)^n = -1$, e o sinal da fração é negativo. Em outras palavras, não precisamos calcular uma função exponencial, apenas nos atentar para o sinal de n.

Ademais, considerando que 0! = 1 e que 1! = 1, os resultados da primeira e da segunda fração são:

$$\frac{1}{0!} = 1$$

$$\frac{1}{1!} = 1$$

Como o sinal da primeira fração é positivo e o da segunda é negativo, essas frações se **anulam** (1 – 1 = 0). Logo, podemos retirá-las da fórmula:

$$\boldsymbol{D_n} = \boldsymbol{n}! \times \left[\frac{\mathbf{1}}{2!} - \frac{\mathbf{1}}{3!} + \cdots + \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!}\right]$$

No nosso exemplo, tivemos n = 3, portanto:

$$D_3 = 3! \times \left[\frac{\mathbf{1}}{2!} - \frac{\mathbf{1}}{3!}\right] = \frac{3!}{2!} - \frac{3!}{3!} = 3 - 1 = 2$$

Que foi o resultado que obtivemos anteriormente.

(CESPE/2014 – TER-GO – *Adaptada*) As prestações de contas das campanhas dos 3 candidatos a governador de determinado estado foram analisadas por 3 servidores do TRE desse estado. Considerando que um servidor deve analisar exatamente prestação de contas e que, por coincidência, cada um dos 3 candidatos é parente de um dos 3 servidores, julgue o item que se segue.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuírem as prestações de contas entre os 3 servidores de modo que nenhum deles analise as contas de um parente é inferior a 5.

Comentários:

O enunciado informa que há 3 servidores que irão analisar as contas de 3 candidatos e que cada candidato é parente de um servidor:

Candidato	A	B	C
Servidor	a	b	c

Para que nenhum candidato seja avaliado pelo seu parente, devemos reordenar os candidatos de modo que nenhum deles retorne à posição original, indicada acima. Assim, temos uma permutação caótica (ou desarranjo) de 3 elementos.

Como há poucos elementos, podemos contar as possibilidades, como fizemos anteriormente:

- O candidato A pode ser analisado pelo servidor b:

Candidato		A	
Servidor	a	b	c

- Nessa situação, o candidato C terá que ser analisado pelo servidor a;
- E restará o servidor c para o candidato B, resultando na seguinte possibilidade:

Candidato	C	A	B
Servidor	a	b	c

- O candidato A pode ser analisado pelo servidor c:

Candidato			A
Servidor	a	b	c

- Nessa situação, o candidato B terá que ser analisado pelo servidor a;
- E restará o servidor b para o candidato C, resultando na seguinte possibilidade:

Candidato	B	C	A
Servidor	a	b	c

Portanto, há 2 possibilidades.

Alternativamente, podemos aplicar a fórmula de desarranjo que aprendemos:

$$D_n = n! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

$$D_4 = 3! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right] = \frac{3!}{2!} - \frac{3!}{3!} = 3 - 1 = 2$$

Logo, o número de maneiras é inferior a 5.

Resposta: Certo.

(FCC/2019 – Prefeitura de Recife/PE) Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação.

a) de 4 maneiras diferentes.

b) de 24 maneiras diferentes.

c) de 9 maneiras diferentes.

d) de 6 maneiras diferentes.

e) de 12 maneiras diferentes.

Comentários:

Novamente, temos uma permutação caótica (ou desarranjo), mas agora com 4 elementos. Por haver uma maior quantidade de elementos, vamos direto para a fórmula:

$$D_n = n! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

$$D_4 = 4! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 4 \times 3 - 4 + 1 = 9$$

Gabarito: C

ARRANJO E COMBINAÇÃO

As técnicas que veremos nesta seção (arranjo e combinação) trabalham com a **seleção** de um subconjunto dos elementos.

A **ordem** dos elementos selecionados será **relevante** para o **arranjo**, mas **não** para a **combinação**. Em outras palavras, selecionar os elementos A e B ou os elementos B e A são possibilidades **distintas** para o **arranjo**, porém **equivalentes** para a **combinação**.

Arranjo Simples

O arranjo de um conjunto finito de elementos é um **subconjunto** desses elementos, de tal maneira que a sua **ordenação** seja **relevante**.

Por exemplo, em um sorteio, em que o primeiro sorteado ganha um carro, e o segundo sorteado ganha uma bicicleta, a ordem, com certeza, será relevante. Em outras palavras, o cenário em que Ana é sorteada primeiro e Beto é sorteado depois será **diferente** daquele em que Beto é sorteado primeiro e Ana é sorteada depois.

Suponha que existam 6 pessoas em um sorteio, em que 3 delas serão sorteadas, **não** sendo possível sortear a mesma pessoa mais de uma vez. Considerando a ordem relevante, de quantas formas as 3 pessoas poderão ser sorteadas?

Como a ordem importa, vamos sortear uma pessoa por vez, preenchendo os seguintes espaços com o número de possibilidades de cada sorteio:

$$\underset{1}{\underline{\qquad}} \quad \underset{2}{\underline{\qquad}} \quad \underset{3}{\underline{\qquad}}$$

Havendo 6 pessoas no total, há 6 possibilidades para sortearmos a primeira pessoa. Assim, restarão 5 pessoas para o segundo sorteio. Em seguida, haverá 4 possibilidades para o terceiro e último sorteio:

$$\underset{1}{\underline{\quad 6 \quad}} \quad \underset{2}{\underline{\quad 5 \quad}} \quad \underset{3}{\underline{\quad 4 \quad}}$$

Como os três sorteios irão ocorrer, pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento. Dessa forma, o resultado desse arranjo é:

$$6 \times 5 \times 4$$

E se houvesse 10 pessoas para 4 sorteios?

Para o primeiro sorteio, haveria 10 possibilidades; para o segundo, 9 possibilidades; para o terceiro, 8 possibilidades; e para o quarto, 7 possibilidades:

10 x 9 x 8 x 7

Parece um pouco a fórmula do fatorial, certo? Na verdade, é o início do fatorial do **total de n elementos**, "estancado" após k fatores, sendo k o número de **elementos sorteados**.

E como fazemos para "estancar" um fatorial? **Dividindo por um fatorial menor**!

No caso de $k = 4$ sorteios para um conjunto de $n = 10$ pessoas, fazemos:

$$\frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$$

No caso geral, um **arranjo** sem reposição de k elementos, dentre n elementos distintos é:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Outra notação possível para o arranjo é A_n^k.

Por exemplo, o número de maneiras de sortear 5 pessoas, dentre um total de 8, para prêmios **distintos** corresponde ao **arranjo** de 5 elementos, dentre 8:

$$A_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6.720$$

Nem sempre a **importância da ordem** da seleção será fácil de visualizar. Vamos supor que, dentre um grupo de 10 funcionários de uma empresa, tivermos que selecionar **1 supervisor**, **1 coordenador** e **1 técnico**.

Nesse caso, selecionar um funcionário como supervisor é **diferente** de selecionar esse mesmo funcionário como coordenador ou como técnico.

Imagine que a **seleção** desses cargos ocorre em uma **sequência**, por exemplo, primeiro supervisor, depois coordenador e depois técnico.

Assim, há diferença entre ser chamado primeiro, segundo ou terceiro. Logo, a **ordem da seleção** é, de fato, **importante**, motivo pelo temos um **arranjo**.

FIQUE ATENTO!

A fórmula de arranjo que acabamos de ver serve para casos **sem reposição**, ou seja, quando um mesmo elemento **não** puder ser selecionado **mais de uma vez**.

Caso haja reposição, o **número de elementos disponíveis** para cada sorteio é sempre o **mesmo**. Por exemplo, em uma seleção **com reposição**, cuja ordem importe, de 3 elementos, dentre 6 elementos disponíveis no total, o número de possibilidades é:

$$6 \times 6 \times 6 = 6^3$$

De modo geral, o arranjo **com reposição** (ou **repetição**) de k elementos dentre n elementos no total é dado por:

$$A_{n,k} = \underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{k \text{ vezes}} = n^k$$

HORA DE PRATICAR!

(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Na bilheteria de um teatro há apenas 5 ingressos à venda para a seção de uma peça. Se 4 amigos comprarem ingressos para essa seção, então o número total de posições distintas em que esses amigos poderão se acomodar no teatro é

a) 120.

b) 80.

c) 60.

d) 20.

e) 5.

Comentários:

Temos uma seleção de 4 lugares, dentre 5 disponíveis, com importância de ordem, pois cada lugar é **distinto** do outro. Assim, temos o arranjo de 4 elementos, dentre 5:

$$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: A.

(VUNESP/2018 – PM/SP) Utilizando-se os algarismos 2, 3, 5, 6, 7 e 9, a quantidade de números múltiplos de 5 e que tenham três algarismos distintos que podem ser formados é

a) 25.

b) 20.

c) 15.

d) 10.

Comentários:

Para que o número formado pelos 6 algarismos indicados no enunciado seja múltiplo de 5, é necessário que o algarismo 5 seja o último algarismo. Assim, os diferentes números que podem ser formados com 3 algarismos correspondem a um arranjo de 2 elementos, dentre 5:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Gabarito: B.

(CESPE 2019/COGE-CE) Em determinado órgão, sete servidores foram designados para implantar novo programa de atendimento ao público. Um desses servidores será o coordenador do programa, outro será o subcoordenador, e os demais serão agentes operacionais.

Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de distribuir esses sete servidores nessas funções é igual a

a) 21.

b) 42.

c) 256.

d) 862.

e) 5.040.

Comentários:

Nessa questão, devemos definir o número de maneiras distintas de distribuir 7 servidores em funções distintas: 1 será coordenador, 1 será subcoordenador e os demais serão agentes. Note que, após a definição do coordenador e do subcoordenador, os que **sobrarem** serão **necessariamente** agentes. Por isso, não precisamos nos preocupar com eles, apenas com o **coordenador** o **subcoordenador**.

Para a escolha do coordenador, há 7 servidores, ou seja, 7 possibilidades:

7	

Após a escolha do coordenador, restarão 6 possibilidades para o subcoordenador:

7	6

Como devemos escolher o coordenador E o subcoordenador, devemos multiplicar as possibilidades (princípio multiplicativo):

Número de Possibilidades = 7 x 6 = 42

Alternativamente, poderíamos calcular o arranjo de 2 elementos, dentre 7:

$$A_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

Gabarito: B

(CESPE 2020/TJ-PA) Em um sistema de acesso a uma rede de computadores, os usuários devem cadastrar uma senha de 6 dígitos, que deve ser formada da seguinte maneira:

• os 2 primeiros dígitos devem ser letras minúsculas distintas, escolhidas entre as 26 letras do alfabeto;

• os demais 4 dígitos da senha devem ser números inteiros entre 0 e 9, admitindo-se repetição.

Nessa situação, a quantidade de senhas diferentes que podem ser formadas é igual a

a) 3.674.

b) 5.690.

c) 1.965.600.

d) 3.276.000.

e) 6.500.000.

Comentários:

Nessa questão, temos os dois tipos de arranjo, com e sem reposição. Isso porque as letras devem ser distintas (não podem repetir) e os números podem ser repetir.

Vamos representar a senha de 6 dígitos por 6 espaços:

Os dois primeiros dígitos admitem as 26 letras do alfabeto, sem repetição. Logo, temos 26 possibilidades para o primeiro espaço e 25 possibilidades para o segundo espaço (uma vez que a letra escolhida para o primeiro espaço não pode se repetir):

26	25				

Os demais 4 dígitos admitem os 10 números (de 0 a 9), podendo haver repetição. Logo, há 10 possibilidades para cada espaço:

26	25	10	10	10	10

Como a senha é formada por todos os 6 dígitos, então devemos multiplicar as possibilidades (princípio multiplicativo):

Número de Senhas Possíveis = 26 x 25 x 10 x 10 x 10 x 10 = 6.500.000

Gabarito: E

Combinação Simples

Assim como no caso do arranjo, a combinação é uma **seleção** de elementos de um conjunto finito. Entretanto, para a combinação, a **ordem não importa**.

Por exemplo, em um sorteio de participantes para um **grupo** de estudo, a ordem do sorteio de cada participante é irrelevante.

Nessa situação, algumas possibilidades **distintas** identificadas no **arranjo** são **equivalentes** na **combinação**. Consequentemente, a **combinação** de determinados elementos resulta em um número **menor** do que o **arranjo** dos mesmos elementos.

Menor, quanto?

Bem, todas as possibilidades de sorteio das mesmas pessoas, em que elas apenas **mudam de lugar**, são consideradas o mesmo resultado na combinação. Logo, precisamos **dividir** as possibilidades do arranjo pelo número de possibilidades em que os elementos selecionados **trocam de posição**, isto é, pela **permutação dos elementos selecionados**!

No caso de um sorteio de 3 pessoas, dividimos o número de possibilidades do **arranjo** por P_3:

$$C_{6,3} = \frac{A_{6,3}}{P_3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!}$$

De maneira geral, a combinação sem reposição de k elementos, de um total de n elementos, é dada por:

$$\boldsymbol{C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

Outras notações comuns para a combinação são $\boldsymbol{C_n^k}$ ou $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$.

(FGV/2019 – Pref. Angra dos Reis/RJ) Maria possui em casa quatro tipos de frutas: banana, mamão, abacate e manga. Ela decidiu fazer uma vitamina com duas dessas frutas, batendo-as juntas com leite no liquidificador. O número de vitaminas diferentes que Maria poderá fazer é

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

e) 12.

Comentários:

O número de vitaminas diferentes corresponde ao número de maneiras diferentes de Maria escolher 2, das 4 frutas, sem que a ordem importe, logo, temos uma combinação de 2 elementos, dentre 4:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4!}{2! \times 2} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Gabarito: D

(FGV/2022 – PC-RJ) Do grupo dos 6 novos policiais de uma delegacia, 2 deles serão escolhidos para um treinamento especial. O número de pares diferentes de policiais que podem ser enviados para o treinamento especial é:

a) 10

b) 12.

c) 15.

d) 16.

e) 18.

Comentários:

O número de pares de policiais que podem ser escolhidos, dentre 6, corresponde ao número de maneiras de escolher 2 elementos, dentre 6. Como a ordem dos escolhidos não importa, temos a combinação de 2 elementos dentre 6:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

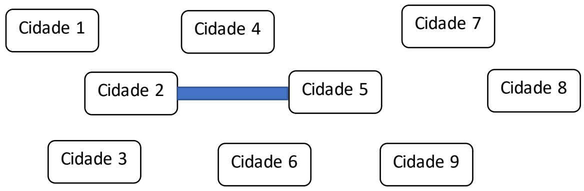
Gabarito: C

(CESPE 2018/BNB) Julgue o próximo item, relativo a análise combinatória e probabilidade.

Se 9 cidades forem interligadas por rodovias, de forma que entre quaisquer duas dessas cidades haja apenas uma rodovia interligando-as e essa rodovia não passe por nenhuma outra cidade, então essa malha viária será composta de 72 rodovias.

Comentários:

A ilustração a seguir representa as 9 cidades e 1 das rodovias possíveis.



Considerando que há exatamente 1 rodovia entre cada 2 cidades, então o número de rodovias é igual ao número de maneiras de selecionar 2 cidades, sem importância de ordem.

Sabendo que há 9 cidades, o número de maneiras de escolher 2 cidades é:

$$C_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)! \times 2!} = \frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Gabarito: Errado.

É comum que a questão imponha restrições à seleção, da forma "**pelo menos um**".

Por exemplo, suponha um conjunto de 5 mulheres e de 4 homens. Quantos grupos distintos de 3 pessoas podem ser formados com **pelo menos uma** mulher?

Você pode resolver esse tipo de questão calculando **todas** as possibilidades de grupos, **desconsiderando-se** a restrição imposta, e, em seguida, **subtrair** o número de possibilidades que **não** atendem à restrição.

Para o nosso exemplo, o número de maneiras possíveis de selecionar 3 pessoas, de um total de 4 + 5 = 9 pessoas, no total, é:

$$C_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

Dentre essas possibilidades, **não** servem aquelas em que **apenas** homens são selecionados. A quantidade de maneiras possíveis de selecionar 3 homens, dentre 4, é:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 4$$

Logo, o número de maneiras de formar grupos de 3 pessoas com pelo menos 1 mulher é:

84 – 4 = 80

Casos Particulares de Combinação

Nessa seção, veremos alguns casos particulares da combinação simples. Você **não** precisa decorá-los, mas conhecê-los pode ajudar a resolver alguns problemas com mais **rapidez**.

i) Combinação de n elementos em n elementos ($C_{n,n}$).

De quantas formas é possível selecionar 5 jogadores dentre 5 jogadores? Só **uma**, certo? Selecionando todos os jogadores! De todo modo, vamos às contas:

$$C_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{(0)!\,n!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$$

$$\boxed{C_{n,n} = 1}$$

ii) Combinação de 0 elemento em n elementos ($C_{n,0}$).

De quantas formas é possível selecionar 0 jogador dentre 5? Só **uma** também, certo? Não selecionando jogador algum! Vejamos como ficam as contas:

$$C_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n! \times 1} = 1$$

$$\boxed{C_{n,0} = 1}$$

iii) Combinação de 1 elemento em n elementos ($C_{n,1}$).

Considerando 5 jogadores (A, B, C, D, E), quantas são as possibilidades de selecionar 1 jogador? 5, certo? Podemos selecionar A, ou B, ou C, ou D ou E:

$$C_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n}{1} = n$$

$$\boxed{C_{n,1} = n}$$

iv) Combinação de $n-1$ elementos em n elementos ($C_{n,n-1}$).

Considerando os 5 jogadores (A, B, C, D, E), quantas são as possibilidades de selecionar 4 jogadores? Podemos responder a essa pergunta, pensando em quem fica de fora em cada seleção.

Ou seja, podemos selecionar todos exceto A; ou todos exceto B; ou todos exceto C; ou todos exceto D; ou todos exceto E. Assim, temos 5 possibilidades!

$$C_{n,n-1} = \frac{n!}{[n-(n-1)]!\,(n-1)!} = \frac{n}{[n-n+1]!} = \frac{n}{1} = n$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_{n,n-1} = n}}$$

v) A combinação de k elementos em n é igual à combinação de $n-k$ em n ($C_{n,k} = C_{n,n-k}$).

No item anterior, construímos o raciocínio de que **selecionar** 4 jogadores dentre 5 é o mesmo que **deixar** 1 jogador. Além disso, o número de maneiras de **deixar** 1 jogador é o mesmo de **selecionar** 1 jogador.

Em outras palavras, de um total de 5 jogadores, o número de maneiras de selecionar 4 jogadores é o mesmo de selecionar 1 jogador.

Em geral, de um total de n elementos, selecionar k elementos é o mesmo que selecionar $n-k$ elementos:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{n,n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!\,(n-k)!} = \frac{n!}{[n-n+k]!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_{n,k} = C_{n,n-k}}}$$

Vamos a mais um "facilitador de contas":

O **somatório** de **todas** as **combinações possíveis** de n **elementos** é $\boldsymbol{2^n}$

$$\boldsymbol{C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n-1} + C_{n,n} = 2^n}$$

Ou seja, o somatório de todas as possibilidades de combinações distintas de um total de n elementos, ou seja, a combinação com 0 elemento, as combinações com 1 elemento, combinações com 2 elementos, etc., até a combinação com n elementos, é igual a 2^n.

INDO MAIS FUNDO!

Essa propriedade que acabamos de ver é um dos teoremas associados ao chamado **Triângulo de Pascal**, que pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{array}{llllll} C_{0,0} & & & & & \\ C_{1,0} & C_{1,1} & & & & \\ C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & & & \\ C_{3,0} & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & & \\ C_{4,0} & C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & \\ C_{5,0} & C_{5,1} & C_{5,2} & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5} \\ \dots & & & & & \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \dots & & & & & \end{array}$$

O Triângulo de Pascal é formado por combinações $C_{n,k}$, sendo $\boldsymbol{n}$ o número da **linha** e $\boldsymbol{k}$ o número da **coluna**, iniciando-se pela linha e coluna **zero**.

Os números $C_{n,k}$ podem ser chamados **Números Binomiais** ou **Coeficientes Binomiais**.

Para construir o Triângulo, somamos 2 elementos consecutivos (colunas $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k+1}$) de uma mesma linha ($\boldsymbol{n}$), para obter o elemento da linha abaixo ($\boldsymbol{n+1}$) na coluna $\boldsymbol{k+1}$:

$$\begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ 1+ & 1 & & & & \\ 1 & 2+ & 1 & & & \\ 1 & 3+ & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6+ & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \dots & & & & & \end{array}$$

Essa propriedade é chamada de **Relação de Stifel** e corresponde ao seguinte:

$$C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}$$

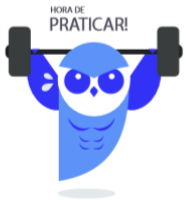
Além disso, a soma dos elementos de uma coluna ($\boldsymbol{k}$), desde o seu início (linha $\boldsymbol{k}$) até alguma linha $\boldsymbol{k+n}$, é igual ao elemento da linha seguinte ($\boldsymbol{k+n+1}$) e coluna seguinte ($\boldsymbol{k+1}$), conforme ilustrado abaixo para a coluna 1:

$$\begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \dots & & & & & \end{array}$$

Essa propriedade é chamada de **Teorema das Colunas** e pode ser descrita como:

$$C_{k,k} + C_{k+1,k} + C_{k+2,k} + \cdots + C_{k+n,k} = C_{k+n+1,k+1}$$

A propriedade que vimos antes ($C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n} = 2^n$) é chamada de **Teorema das Linhas**, pois $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n}$ é a soma de todos os elementos de uma linha n.



(2019 – Prefeitura de Colômbia/SP) Em uma pequena escola de música os estudantes são especializados em instrumentos conforme tabela a seguir:

Instrumentos	Número de estudantes
Guitarra	6
Contrabaixo	2
Bateria	4
Teclado	3

O número de bandas diferentes que poderão ser formadas com os estudantes desta escola de música com a seguinte constituição: 2 guitarristas, 1 contrabaixista, 1 baterista e 1 tecladista está compreendido entre:

a) 1 e 300

b) 301 e 400

c) 401 e 600

d) 601 e 800

Comentários:

Para selecionar 2 guitarristas, dentre 6, temos:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!\,2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Para as demais combinações, basta conhecer o caso especial $C_{n,1} = n$.

Para selecionar 1 contrabaixista, temos n = 2: $C_{2,1} = 2$.

Para selecionar 1 baterista, temos n = 4: $C_{4,1} = 4$.

Para selecionar 1 tecladista, temos n = 3: $C_{3,1} = 3$.

Como a banda terá todos esses instrumentistas, pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar todas essas possibilidades:

$$C_{\text{guitarristas}} \text{ x } C_{\text{contrabaixistas}} \text{ x } C_{\text{bateristas}} \text{ x } C_{\text{tecladistas}}$$

15 x 2 x 4 x 3 = 360

Gabarito: B

(CESPE 2018/PF) Para cumprimento de um mandado de busca e apreensão serão designados um delegado, 3 agentes (para a segurança da equipe na operação) e um escrivão. O efetivo do órgão que fará a operação conta com 4 delegados, entre eles o delegado Fonseca; 12 agentes, entre eles o agente Paulo; e 6 escrivães, entre eles o escrivão Estêvão.

Em relação a essa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Considerando todo o efetivo do órgão responsável pela operação, há mais de 5.000 maneiras distintas de se formar uma equipe para dar cumprimento ao mandado.

Comentários:

A questão pede o número de maneiras de escolher 1 delegado (dentre 4), 3 agentes (dentre 12) e 1 escrivão (dentre 6):

- O número de formas de escolher 1 delegado, dentre 4, é igual a 4 – caso especial $C_{4,1} = 4$;

- O número de formas de escolher 3 agentes, dentre 12, é igual a:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{9!\,3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 2 \times 11 \times 10 = 220$$

- O número de formas de escolher 1 escrivão, dentre 6, é igual a 6 – caso especial $C_{6,1} = 6$.

Para formar toda a equipe, multiplicamos esses resultados (princípio multiplicativo):

Número de possibilidades = 4 x 220 x 6 = 5280

Logo, há mais de 5.000 maneiras de formar a equipe.

Gabarito: Certo.

(FCC/2018 – Analista Judiciário do TRT 15ª Região) Dez pastas diferentes devem ser guardadas em duas caixas diferentes. Se a única regra é que cada uma das caixas contenha pelo menos uma pasta, então a quantidade de maneiras distintas como se pode guardar essas pastas nas caixas é

a) 510

b) 1.022

c) 126.

d) 2.048

e) 256

Comentários:

Como a ordem dentro das caixas não importa, utilizaremos combinação. Além disso, é importante notar que ao selecionarmos as pastas para uma das caixas, teremos definido as pastas que serão guardadas na outra caixa. Por isso, podemos pensar na combinação para **uma das caixas** apenas.

Assim, podemos selecionar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 pastas para a primeira caixa. Não podemos selecionar 10 pastas porque não sobraria pastas para a segunda caixa, o que não é permitido (cada caixa deve conter pelo menos 1 pasta). Pelo mesmo motivo, não podemos selecionar 0 pasta para a primeira caixa.

Devemos, portanto, calcular as possibilidades de combinação $C_{10,1}$, $C_{10,2}$, $C_{10,3}$, $C_{10,4}$, $C_{10,5}$, $C_{10,6}$, $C_{10,7}$, $C_{10,8}$ e $C_{10,9}$. Esses eventos são mutuamente exclusivos (selecionamos 1 OU 2 OU 3 OU ... OU 9 pastas para a primeira caixa). Portanto, as possibilidades desses eventos devem ser **somadas** **(princípio aditivo)**.

Para facilitar as contas, utilizaremos a propriedade de combinação que vimos:

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n-1} + C_{n,n} = 2^n$$

$$C_{10,0} + C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} + C_{10,10} = 2^{10}$$

Porém, não é exatamente essa soma que estamos buscando, pois não temos nem $C_{10,0}$ nem $C_{10,10}$. Por isso, devemos subtrair os valores dessas combinações do resultado:

$$C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} = 2^{10} - C_{10,0} - C_{10,10}$$

Sabemos, ainda, que $C_{n,0} = 1$, logo, $C_{10,0} = 1$; e $C_{n,n} = 1$, logo, $C_{10,10} = 1$:

$$C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} = 1024 - 1 - 1 = 1022$$

Gabarito: B

Combinação Completa

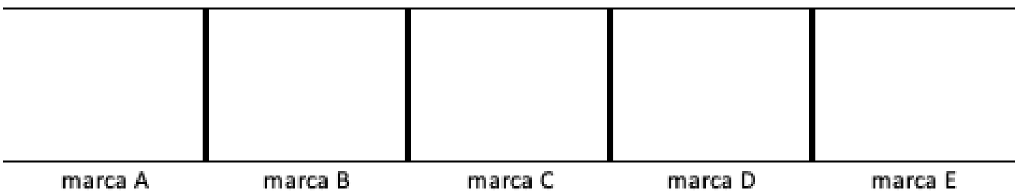
Os problemas de combinação completa (ou **combinação com repetição**) envolvem um conjunto de **n tipos** de elementos **diferentes**, dos quais serão escolhidos **k** elementos **iguais ou diferentes**. Também podemos pensar que será selecionado um número **k** de **objetos**, **iguais ou diferentes**, dentre **n tipos diferentes**.

Por exemplo, escolher **k = 3** potes de sorvete havendo um total de **n = 5 marcas distintas** (os potes podem ser de uma **mesma marca** ou de **marcas distintas**).

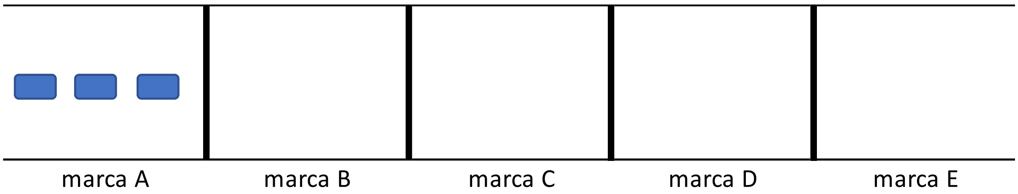
Observe que essa situação é diferente da escolha de 3 potes de sorvete dentre 5 potes, o que seria a combinação simples de 3 elementos, dentre 5 ($C_{5,3}$ = 10). Essa também seria a combinação para escolher 3 marcas dentre 5 marcas.

Porém, no nosso exemplo atual, temos que escolher 3 **potes** dentre 5 **marcas**. O número de possibilidades é muito **maior** do que a combinação simples de 3 dentre 5 elementos.

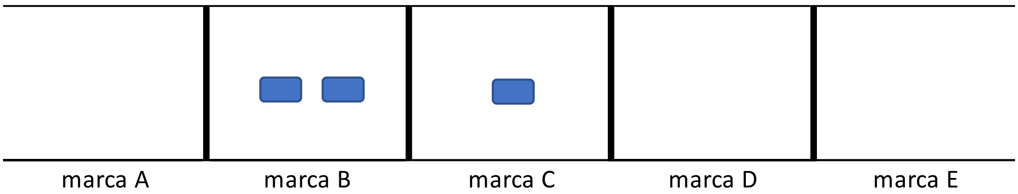
Para calcular todas as possibilidades, vamos imaginar que cada marca de sorvete esteja em uma **seção** separada do congelador:



Podemos escolher, por exemplo, 3 potes da marca A.



Ou 2 potes da marca B e 1 da marca C:



Ou, ainda, 1 da marca A, outro da D e outro da E:

Repare que podemos considerar esse problema como a **permutação** dos **objetos** (potes de sorvetes) e das **divisórias** que separam as diferentes **marcas**.

Nesse caso, temos 3 potes de sorvete e 4 divisórias – o número de **divisórias** é sempre o número de **marcas menos 1**. Assim, temos a permutação de 7 elementos, sendo 3 potes e 4 divisórias (elementos repetidos).

Portanto, a **combinação completa** de 3 objetos de 5 marcas, indicada por CR_5^3, é igual à **permutação** de 7 elementos, com repetição de 3 e 4 elementos:

$$CR_5^3 = P_7^{3,4} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$$

De maneira geral, a combinação de $\boldsymbol{p}$ **objetos** de $\boldsymbol{n}$ **tipos** (ou marcas), equivale à permutação de $\boldsymbol{n-1}$ **divisórias** com $\boldsymbol{p}$ **objetos**, ou seja, à permutação de $\boldsymbol{n-1+p}$ elementos, com repetição de $\boldsymbol{n-1}$ e $\boldsymbol{p}$ elementos:

$$\boldsymbol{CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}}$$

Também devemos utilizar a **combinação completa** em problemas de **distribuição** de objetos entre pessoas (ou lugares). Por exemplo, a distribuição de 3 cestas básicas para 5 famílias segue o mesmo raciocínio.

ESCLARECENDO!

A **combinação completa** de p **objetos** de n **tipos** também equivale à **combinação simples** de p **elementos**, dentre $n-1+p$ **elementos disponíveis**:

$$CR_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!} = C_{n-1+p,p}$$

No nosso exemplo, a combinação completa de p = 3 potes de sorvete, havendo um total de n = 5 marcas distintas, corresponde à combinação de 3 elementos, dentre 5 – 1 + 3 = 8 elementos no total.

HORA DE PRATICAR!

(FGV/2018 – ALE-RO) Helena entra em uma sorveteria que oferece sorvetes de 8 sabores diferentes. Helena deseja escolher uma casquinha com duas bolas de sorvete não necessariamente de sabores diferentes. A ordem em que as bolas forem colocadas na casquinha não fará a escolha de Helena ser diferente.

O número de maneiras de Helena escolher sua casquinha é

a) 64.

b) 56.

c) 36.

d) 28.

e) 16.

Comentários:

Nessa questão, temos um exemplo de combinação com reposição (ou combinação completa). Trata-se de uma combinação porque a ordem **não** importa, como a questão informa. E há reposição pelo fato de Helena poder escolher sabores não necessariamente diferentes. A fórmula da combinação completa é:

$$CR_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

Sabendo que há 8 sabores disponíveis (n = 8) e que Helena irá escolher 2 bolas de sorvete (p = 2):

$$CR_8^2 = \frac{(8+2-1)!}{(8-1)! \times 2!} = \frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Gabarito: C

(2019 – Conselho Regional de Medicina/AC) O pai de 3 filhos, com idades diferentes, distribuiu 9 balas idênticas entre eles, de forma que o mais velho recebeu o dobro de balas do caçula e o filho do meio recebeu mais balas que o caçula e menos balas que o mais velho. O filho caçula recebeu X balas e o filho do meio recebeu Y balas.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Se alguém deseja distribuir 9 balas idênticas entre 3 pessoas, sem qualquer critério de distribuição, com cada uma delas recebendo pelo menos uma bala, então existem 28 maneiras de se fazer a distribuição.

Comentários:

Esse também é um caso de combinação completa, em que as balas correspondem aos objetos e as pessoas correspondem às seções.

Porém, o problema apontou para uma restrição: todas as pessoas receberão pelo menos uma bala.

Após distribuir uma bala por pessoa, totalizando 3 balas, sobrarão 9 – 3 = 6 balas a serem distribuídas, sem critério, para as 3 pessoas.

Portanto, temos a combinação completa de k = 6 objetos para n = 3 pessoas, ou seja, n – 1 = 2 divisórias:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

$$CR_3^6 = P_8^{2,6} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

Gabarito: Certo

(CESPE 2018/SEFAZ-RS) Se 7 kg de feijão forem distribuídos para até quatro famílias, de modo que cada uma delas receba um número inteiro de quilos, então, nesse caso, a quantidade de maneiras distintas de se distribuírem esses 7 kg de feijão para essas famílias será igual a

a) 30.

b) 120.

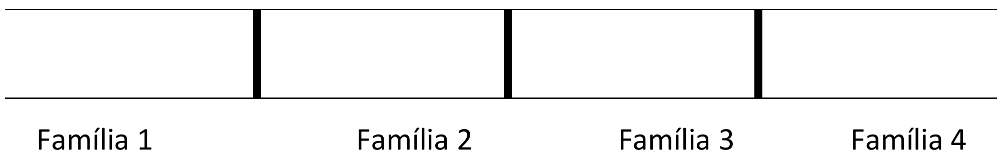
c) 330.

d) 820.

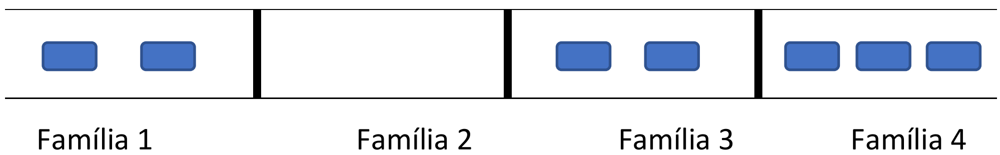
e) 1.320.

Comentários:

Podemos representar os quilos de feijão como  e as 4 famílias como seções separadas por uma barra:



Podemos distribuir os 7 quilos de feijão da seguinte forma, por exemplo:



O enunciado permite que alguma(s) família(s) fique sem quilos de feijão porque menciona que a distribuição será para "até" 4 famílias. Assim, há 7 quilos de feijão (p = 7) a serem distribuídos livremente para 4 famílias (n = 4).

Essa distribuição pode ser vista como a permutação dos 7 e das 3 barras que separam as famílias, isto é, uma permutação de 10 elementos, com repetição de 7 e de 3 elementos:

$$CR_4^7 = P_{10}^{3,7} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

Gabarito: B.

(FGV/2021 – Pref. Paulínia) Eva tem 9 maçãs indistinguíveis e deseja distribuí-las a 3 amigos de forma que cada um deles fique com, ao menos, 2 maçãs. O número de maneiras distintas de Eva distribuir as maçãs é

a) 12

b) 10

c) 9

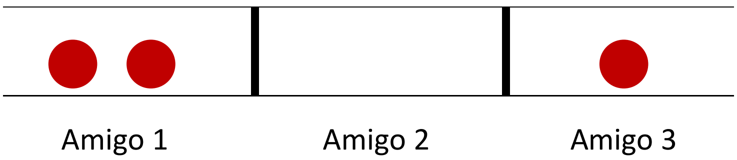
d) 8

e) 6

Comentários:

Essa questão trabalha com combinação completa, em que precisamos distribuir 9 maçãs para 3 amigos. Primeiro, distribuímos as maçãs obrigatórias, quais sejam, 2 para cada amigo. Após a distribuição das 6 maçãs, restarão 3 a serem distribuídas livremente.

A figura a seguir ilustra uma forma de distribuir as 3 maçãs:



A combinação completa, entre $n = 3$ amigos e $p = 3$ objetos, pode ser vista como a permutação dos 3 objetos e das 2 barras que separam os amigos, que corresponde a permutação de 5 elementos no total, com repetição de 3 e de 2 elementos:

$$CR_3^3 = P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Gabarito: B

Número de Soluções Inteiras de Equações

Os problemas de combinação completa, que acabamos de ver, podem ser analisados de **outra perspectiva**.

Vamos considerar o mesmo exemplo da compra de 3 potes de sorvete, dentre 5 marcas distintas.

Podemos representá-lo por uma **equação**, em que x_A representa a quantidade de potes de sorvete adquiridos da marca A; x_B representa a quantidade de potes de sorvete da marca B; x_C, a quantidade de potes da marca C; x_D, a quantidade de potes da marca D; e x_E, a quantidade de potes da marca E.

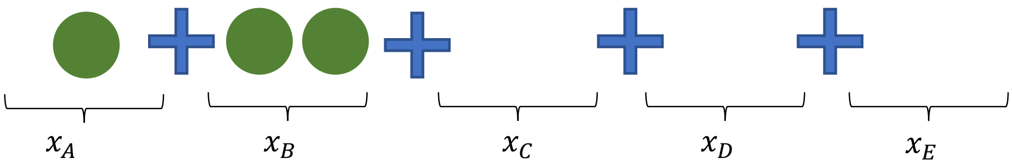
Sabendo que o total de potes de sorvete adquiridos é igual a 3, então a soma dos potes adquiridos de todas as marcas é igual a 3:

$$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 3$$

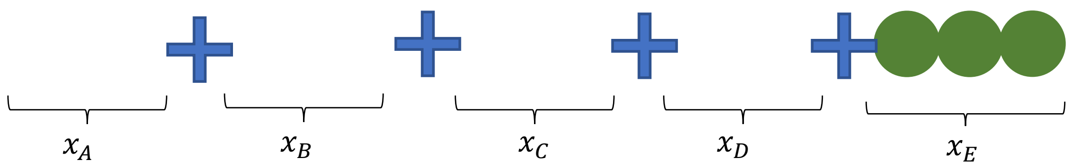
Como os valores de x representam as quantidades de **potes** adquiridos de cada uma das 5 marcas, de modo que o **total** de potes seja igual a 3, o número de maneiras de escolher os 3 potes de sorvete corresponde ao número de maneiras de encontrar os valores de x que **resolvem** essa **equação**.

Ou seja, o problema de **combinação completa**, que vimos antes, corresponde ao **número de soluções possíveis** para essa equação.

Afinal, podemos representar os diferentes x_i por espaços entre os símbolos de + e os valores que eles assumem por ●, de forma que o total seja igual a 3. Um exemplo dessa representação é:



Aqui, temos $x_A = 1, x_B = 2, x_C = 0,\ x_D = 0,\ x_E = 0$. Outra opção seria:



Nesse exemplo, temos $x_A = 0, x_B = 0, x_C = 0,\ x_D = 0$ e $x_E = 3$.

Ou seja, o número de maneiras de encontrar os possíveis valores de x, isto é, o **número de soluções possíveis** para a equação, corresponde a uma permutação de p = 3 ● com n – 1 = 4 símbolos de +

$$CR_5^3 = P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \times 3!}$$

Em outras palavras, a combinação completa CR_5^3 também indica o **número de soluções possíveis** para a equação $x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 3$.

> De modo geral, o **número de soluções possíveis** para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ é:
>
> $$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p}$$

O **resultado** da equação corresponde ao número de objetos: $\boldsymbol{p}$

O **número de variáveis** corresponde ao número de seções: $\boldsymbol{n}$

Mais precisamente, a combinação completa CR_n^p indica o **número de soluções inteiras e não-negativas possíveis** para a referida equação.

Por que somente soluções **inteiras** e **não-negativas**?

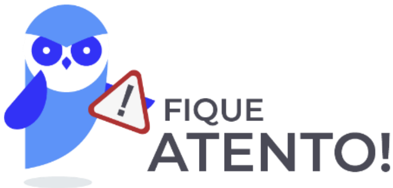
Se pudéssemos escolher números **negativos**, poderíamos sempre diminuir uma unidade de uma variável e aumentar uma unidade de outra para manter a soma constante (no nosso exemplo, igual a 3).

Ou seja, poderíamos ter $x_A = 4$ e $x_B = -1$ (e as demais variáveis nulas), $x_A = 5$ e $x_B = -2$, $x_A = 6$ e $x_B = -3$, etc. O número de soluções seria **infinita**!

O mesmo vale para números **decimais**. Há **infinitos** números decimais entre quaisquer números inteiros. Por exemplo, entre 2 e 3, há 2,1; 2,11; 2,111; 2,1111;...

Portanto, se as incógnitas pudessem assumir quaisquer valores reais, sempre poderíamos aumentar uma incógnita um "pouquinho" e diminuir outra esse mesmo "pouquinho" e manter a soma constante.

Portanto, somente o conjunto das soluções **inteiras** e **não-negativas** da equação é um conjunto **finito**.



Como vimos, a princípio, são **permitidas** soluções **nulas** para algumas incógnitas.

Caso o problema traga alguma situação especial diferente dessa, como exigir que as soluções sejam **positivas** (ou seja, **não** permitir soluções **nulas**), precisamos fazer as adaptações necessárias.

Por exemplo, considere a seguinte equação, em que os valores de x precisam ser **positivos**:

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 6, com\ x > 0$$

Nesse caso, precisamos primeiro distribuir 1 unidade para cada x.

Assim, sobrarão 6 – 4 = 2 unidades a serem **livremente** distribuídas, o que pode ser representado pela seguinte equação (em que x **pode** assumir valores **nulos**):

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 2, com\ x \geq 0$$

Sabemos que o número de soluções possíveis para essa equação é:

$$CR_4^2 = P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \times 2!}$$

(CESPE/2011 – SEDUC/AM) A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 18$ possui mais de 200 soluções inteiras e não negativas.

Comentários:

O número de soluções inteiras e não-negativas para essa equação é o número de combinações completas com p = 18 objetos em n = 3 seções, ou seja:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p}$$

$$CR_3^{18} = P_{20}^{2,18} = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$$

O resultado (190) é inferior a 200.

Gabarito: Errado.

(2015 – Prefeitura de Mangaratiba/RJ) Considerando o conjunto universo dos números inteiros não negativos, podemos afirmar que a equação x + y + z – 5 = 0:

a) possui uma única solução.

b) possui infinitas soluções.

c) possui 21 soluções.

d) possui 35 soluções.

e) possui 42 soluções.

Comentários:

Primeiro fazemos o seguinte ajuste na equação:

$$x + y + z = 5$$

O número de soluções inteiras e não-negativas para essa equação é o número de combinações completas com p = 5 objetos em n = 3 seções, ou seja:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p}$$

$$CR_3^5 = P_7^{2,5} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

Gabarito: C.

PARTIÇÕES

O conceito de partição em matemática é bastante similar ao que utilizamos no dia a dia. Se vamos partir uma pizza, iremos dividi-la em algumas fatias (não necessariamente iguais). Seja qual for o número ou tamanho das fatias, se juntarmos todas elas (antes de comê-las, é claro!), teremos a pizza completa.

Com a partição em matemática, temos uma situação muito semelhante. A pizza inteira corresponderia a um conjunto de elementos, que seria particionado (fatiado) em alguma quantidade de subconjuntos (fatias), que podem **ser ou não iguais**.

Por exemplo, podemos particionar um grupo de 9 trabalhadores em 3 grupos (um com 5 trabalhadores, outro com 2 trabalhadores e outro com 1). Atente-se que a **soma** dos trabalhadores de todos os grupos equivale ao **total** de trabalhadores.

O fato de a soma dos elementos nos grupos ser equivalente ao total de elementos é a característica que **diferencia** as **partições** dos problemas de **combinação**.

Em outras palavras, é possível resolver problemas de partição com as técnicas de **combinação**. Porém, conhecer o cálculo específico para a partição é importante, tanto para acelerar a resolução do problema quanto para reduzir as chances de erros.

Há dois tipos de partição: a partição ordenada e a partição não-ordenada. Na partição **ordenada**, os grupos são **diferentes**. Por exemplo, há um grupo dos coordenadores, outro dos supervisores e outro dos trabalhadores de uma linha de montagem. Assim, participar do primeiro grupo é **diferente** de participar do segundo ou do terceiro, ou seja, a ordem **entre** os grupos **importa**.

Na partição **não-ordenada**, os grupos são **iguais**. Por exemplo, as equipes formadas terão que fazer um mesmo trabalho. Assim, se um mesmo grupo de pessoas é selecionado entes ou depois, não haverá diferença. Portanto, a ordem **entre** os grupos **não importa**.

Partição Ordenada

A partição ordenada representa a separação de um conjunto de elementos em **subconjuntos distintos** entre si, de modo que a soma dos elementos dos subconjuntos seja equivalente ao total de elementos do conjunto original.

Por exemplo, podemos particionar um conjunto de 10 profissionais entre os subconjuntos de 1 gerente, 2 coordenadores, e 7 trabalhadores de linha de frente. Como os subconjuntos são **distintos**, ser chamado para o primeiro grupo é diferente de ser chamado para o segundo, terceiro ou quarto grupos. Nesse caso, temos uma partição ordenada, em que a **ordem** dos subconjuntos **importa**.

Atenção! Dentro de um mesmo subconjunto, a ordem dos participantes não importa. O que **importa** é a ordem **entre os subconjuntos**.

Vamos resolver esse exemplo com as técnicas de combinação que conhecemos. Podemos começar calculando as possibilidades de se escolher o único gerente (k = 1, n = 10). Esse é um caso especial de combinação $C_{n,1} = n$:

$$C_{10,1} = 10$$

Agora, escolhemos k = 2 coordenadores, dentre as n = 9 opções que restaram após a escolha do gerente:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{9,2} = \frac{9!}{7!\,2!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Por fim, temos uma única opção para escolher k = 7 trabalhadores, dentre as n = 7 opções que restaram (outro caso especial $C_{n,n} = 1$).

Pelo princípio multiplicativo, temos 10 x 36 x 1 = 360 possibilidades de formar esses três subconjuntos. O resultado seria o mesmo se começássemos por qualquer outro subconjunto.

Alternativamente, esse problema poderia ser resolvido com a seguinte fórmula de **partição**:

$$\binom{10}{1,2,7} = \frac{10!}{1!\,2!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{2 \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{2} = 10 \times 9 \times 4 = 360$$

Bem mais simples, certo?

Por que esses resultados são iguais? Vamos entender essa "coincidência"!

Para a escolha de k = 1 gerente, dentre todas as n = 10 opções, temos:

$$C_{10,1} = \frac{10!}{(10-1)!1!}$$

Para a escolha de k = 2 coordenadores, dentre as n = 10 – 1 opções que sobraram após a escolha do gerente, temos:

$$C_{10-1,2} = \frac{(10-1)!}{(10-1-2)!2!}$$

Para a escolha de k = 7 trabalhadores, dentre as n = 10 – 1 – 2 opções que sobraram após a escolha do gerente e dos coordenadores, temos:

$$C_{10-1-2,7} = \frac{(10-1-2)!}{(10-1-2-7)!7!}$$

Agora, precisamos multiplicar todos esses resultados:

$$C_{10,1} \times C_{10-1,2} \times C_{10-1-2,7}$$

$$= \frac{10!}{(10-1)!1!} \times \frac{(10-1)!}{(10-1-2)!2!} \times \frac{(10-1-2)!}{(10-1-2-7)!7!}$$

Nessa expressão, podemos simplificar $\frac{(10-1)!}{(10-1)!}$ e também $\frac{(10-1-2)!}{(10-1-2)!}$:

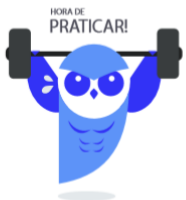
$$= \frac{10!}{\cancel{(10-1)!}1!} \times \frac{\cancel{(10-1)!}}{\cancel{(10-1-2)!}2!} \times \frac{\cancel{(10-1-2)!}}{(10-1-2-7)!7!}$$

Além disso, $(10-1-2-7)! = 0! = 1$. Portanto, conforme vimos antes, temos:

$$= \frac{10!}{1!2!7!}$$

Em geral, uma partição ordenada de n elementos no total, em m subconjuntos com $p_1, p_2, \dots, p_m$ elementos cada, temos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!p_2!\dots p_m!}$$



(CESPE/2011 – STF) O colegiado do Supremo Tribunal Federal (STF) é composto por 11 ministros, responsáveis por decisões que repercutem em toda a sociedade brasileira. No julgamento de determinados processos, os ministros votam pela absolvição ou pela condenação dos réus de forma independente uns dos outros. A partir dessas informações e considerando que, em determinado julgamento, a probabilidade de qualquer um dos ministros decidir pela condenação ou pela absolvição do réu seja a mesma, julgue o item seguinte.

Se, no julgamento de determinado réu, 8 ministros votarem pela absolvição e 3 ministros votarem pela condenação, a quantidade de maneiras distintas de se atribuir os votos aos diferentes ministros será inferior a 170.

Comentários:

Temos uma partição de 11 elementos em dois subconjuntos com 8 e 3 elementos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\, p_2! \dots p_m!}$$

$$\binom{11}{8,3} = \frac{11!}{8!\,3!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 3 \times 2} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = 11 \times 5 \times 3 = 165$$

Como 165 é menor do que 170, portanto o item está certo.

Gabarito: Certo

(FCC/2015 – Julgador Administrativo Tributário da SEFAZ/PE) A tabela a seguir mostra a pontuação obtida pelas cinco empresas que participaram da concorrência pública para a construção das dez estações de uma linha de metrô.

Empresa	Pontuação
I	500
II	300
III	200
IV	120
V	80

De acordo com as regras do edital da concorrência, somente as empresas com mais de 150 pontos seriam consideradas aprovadas.

Além disso, o edital determinava que as dez estações seriam distribuídas entre as empresas aprovadas proporcionalmente ao número de pontos que cada uma delas obteve.

Sabendo que as dez estações são iguais, o número de maneiras diferentes de distribuí-las entre as empresas aprovadas, de acordo com as regras do edital, é igual a

a) 3780.

b) 2520.

c) 7560.

d) 1260.

e) 5040.

Comentários:

Pela regra da pontuação mínima, apenas as empresas I, II e III são aprovadas. As 10 estações serão divididas entre elas proporcionalmente ao número de pontos.

Podemos chamar de x a quantidade de estações por ponto, que é constante para todas as empresas. Assim, temos:

$$500x + 300x + 200x = 10$$

$$1000x = 10$$

$$x = 1/100$$

Portanto, cada empresa irá receber 1/100 estação por ponto:

I) A empresa I irá receber: 500 x 1/100 = 5

II) A empresa II irá receber 300 x 1/100 = 3

III) A empresa III irá receber 200 x 1/100 = 2

Agora, vamos calcular o número de possibilidades de distribuição. Podemos calcular as combinações para cada empresa e, em seguida, multiplicar os resultados, tendo em vista o princípio multiplicativo.

Porém, a solução será muito mais rápida se considerarmos que as 10 estações serão particionadas entre as 3 empresas (não sobrará nenhuma estação), com n = 10, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$ e $p_3 = 2$.

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\,p_2!\dots p_m!}$$

$$\binom{10}{5,3,2} = \frac{10!}{5!\,3!\,2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 2} = 10 \times 9 \times 4 \times 7 = 2520$$

Gabarito: B

Partição Não-Ordenada

A partição não-ordenada representa a separação de um conjunto de elementos em subconjuntos **equivalentes** entre si. Por exemplo, podemos particionar um conjunto de 6 profissionais em 3 duplas, que deverão realizar um **mesmo trabalho**.

Como os subconjuntos são equivalentes, se uma mesma dupla é chamada primeiro ou depois, a situação será a **mesma**. Ou seja, a **ordem entre** os subconjuntos **não importa.**

Repare que a ordem **dentro** do subconjunto **não importa**, como também não importava para a partição ordenada. A diferença é que, na partição não-ordenada, a ordem **entre** os subconjuntos **também não importa**.

Se esse exemplo de 3 duplas de profissionais, dentre 6, fosse uma partição **ordenada**, teríamos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\,p_2!\dots p_m!}$$

$$\binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 6 \times 5 \times 3 = 90$$

Nessa situação, as **mesmas duplas**, selecionadas em **ordens diferentes**, correspondem a possibilidades **distintas**. Por exemplo, suponha que os 6 profissionais sejam Ana, Beto, Caio, Dedé, Eduardo e Fátima e que as duplas formadas sejam Ana e Beto, Caio e Dedé, Eduardo e Fátima.

Em uma **partição ordenada**, teríamos as seguintes possibilidades **distintas**, com exatamente essas duplas:

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
1.	Ana e Beto	Caio e Dedé	Eduardo e Fátima
2.	Ana e Beto	Eduardo e Fátima	Caio e Dedé
3.	Caio e Dedé	Ana e Beto	Eduardo e Fátima
4.	Caio e Dedé	Eduardo e Fátima	Ana e Beto
5.	Eduardo e Fátima	Ana e Beto	Caio e Dedé
6.	Eduardo e Fátima	Caio e Dedé	Ana e Beto

Porém, em uma partição **não ordenada**, todas essas 6 possibilidades representam o **mesmo resultado**, uma vez que as duplas são as mesmas.

Assim, para calcular a permutação **não ordenada**, precisamos **dividir** as 90 possibilidades da permutação ordenada pelo número de maneiras de **reordenar** as 3 duplas, ou seja, pela **permutação** dos 3 elementos:

$$\frac{\binom{6}{2,2,2}}{P_3} = \frac{\binom{6}{2,2,2}}{3!} = \frac{90}{3 \times 2 \times 1} = 15$$

De maneira geral, na **partição não ordenada**, precisamos dividir o resultado da partição ordenada pelo número de maneiras de **permutar os $\boldsymbol{m}$ grupos**, como indicado abaixo.

$$\frac{\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m}}{P_m} = \frac{\frac{n!}{p_1!\,p_2! \dots p_m!}}{m!}$$

A fórmula da partição não ordenada é praticamente essa, porém com alguns ajustes. Para que sejam iguais, os grupos devem possuir o **mesmo tamanho**, então chamamos $p_1, p_2, \dots, p_m$ de $\boldsymbol{p}$. Logo, substituímos $p_1!\,p_2! \dots p_m!$ por:

$$\underbrace{\boldsymbol{p}!\,\boldsymbol{p}! \dots \boldsymbol{p}!}_{\boldsymbol{m} \text{ vezes}} = (\boldsymbol{p}!)^{\boldsymbol{m}}$$

Além disso, sabendo que há $\boldsymbol{m}$ subconjuntos com p elementos cada, então há um total de $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$ elementos. Então, substituímos n por $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$.

A partição **não ordenada** em **$\boldsymbol{m}$ subconjuntos** de **$\boldsymbol{p}$ elementos** cada (ou seja, o conjunto original possui $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$ elementos, no total), é:

$$\frac{\binom{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{m}!} = \frac{(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p})!}{\boldsymbol{m}!\,(\boldsymbol{p}!)^{\boldsymbol{m}}}$$

(2016 – Prefeitura de São José da Coroa Grande/PE) De quantos modos podemos dividir 10 pessoas em dois grupos de 5 pessoas?

a) 96

b) 108

c) 120

d) 126

e) 132

Comentários:

Considerando que os grupos são equivalentes, temos uma partição não-ordenada de m = 2 subconjuntos de p = 5 elementos cada:

$$\frac{\binom{m \times p}{p, p, \dots, p}}{m!} = \frac{(m \times p)!}{m!\,(p!)^m}$$

$$\frac{\binom{10}{5,5}}{2!} = \frac{10!}{2!\,(5!)^2} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 2 \times 9 \times 7 = 126$$

Gabarito: D

(2006 – TCE/PR) De quantas maneiras diferentes 12 estudantes podem ser divididos em 3 equipes, sendo que cada uma das equipes deve ser composta de quatro estudantes?

a) 8425

b) 3260

c) 12640

d) 5775

e) 34650

Comentários:

Considerando que as equipes são equivalentes, temos uma partição não-ordenada de m = 3 subconjuntos de p = 4 elementos cada:

$$\frac{\binom{12}{4,4,4}}{3!} = \frac{12!}{3!\,(4!)^3} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2} = 11 \times 5 \times 3 \times 7 \times 5 = 5.775$$

Gabarito: D

LEMAS DE KAPLANSKY

Agora, veremos o **primeiro lema** e o **segundo lema de Kaplansky**. Ambos trabalham com a **seleção** de um subconjunto de elementos, a partir de um conjunto de elementos originalmente dispostos em determinada ordem, de modo que elementos **consecutivos** (vizinhos) do conjunto original **não** sejam **selecionados**.

A diferença entre os lemas é que, para o **primeiro lema**, os elementos **extremos** do conjunto original **não** são considerados **consecutivos** (vizinhos), enquanto para o **segundo lema**, tais elementos **são** considerados **consecutivos** (vizinhos), como se os elementos do conjunto original estivessem dispostos em um **círculo**.

Primeiro Lema de Kaplansky

O **primeiro lema de Kaplansky** considera que os elementos estão originalmente dispostos em determinada ordem, como em uma **fila**, e que serão **selecionados** alguns desses elementos, sem que a ordem dessa seleção importe. Porém, dentre os elementos selecionados, **não** pode haver elementos **consecutivos** (vizinhos) da fila original.

Suponha um conjunto de 8 algarismos ordenados {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Quantas são as possibilidades de selecionar 2 elementos que **não** sejam **consecutivos** do conjunto original?

Podemos resolver esse problema, sem conhecer o lema de Kaplansky, calculando o número de maneiras de selecionar 2 elementos no total (combinação de 2 elementos, dentre 8) e subtrair o número de maneiras de selecionar 2 elementos consecutivos. Vejamos:

A combinação de 2 elementos, dentre 8, é dada por:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2} = 4 \times 7 = 28$$

As possibilidades de escolha de 2 elementos consecutivos são: {1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 5}, {5, 6}, {6, 7} e {7, 8}, ou seja, há 7 possibilidades.

Portanto, o número de maneiras de escolher 2 elementos não consecutivos, dentre 8 no total, é:

$$28 - 7 = 21$$

E se quiséssemos escolher 3 elementos não consecutivos? Aí, teríamos um pouco mais de trabalho.

Para facilitar a resolução de problemas desse tipo, podemos utilizar o raciocínio de Kaplansky.

Primeiro, vamos representar cada elemento do conjunto original por um **S**, caso ele pertença ao subconjunto selecionado, ou por um **N**, caso ele não pertença ao subconjunto selecionado. Por exemplo, a seleção do **2º** e do **4º** elemento do conjunto original de 8 elementos é representada por **N S N S N N N N**.

Para formar um subconjunto de 3 elementos, sem elementos consecutivos, vamos começar representando os 8 – 3 = 5 elementos que **não** serão selecionados. Como não sabemos em quais posições esses 5 elementos estarão, vamos prever **possíveis espaços antes e depois** desses elementos.

__ N __ N __ N __ N __ N __

Esses espaços correspondem **aos possíveis lugares dos elementos selecionados**. Como não há espaços consecutivos, não será possível escolher elementos consecutivos. Assim, o número de maneiras de selecionar 3 elementos não consecutivos do conjunto original corresponde ao número de maneiras de **selecionar 3 dentre esses 6 espaços** (combinação de 3 elementos, dentre 6):

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

É mais importante entender o raciocínio do que memorizar a fórmula.

De modo geral, para a seleção de um subconjunto de $\boldsymbol{p}$ elementos, dentre $\boldsymbol{n}$ elementos no total, teremos $\boldsymbol{n - p}$ elementos **não selecionados (N)** e, portanto, $\boldsymbol{n - p + 1}$ **espaços**, antes e depois de cada N.

Desses $\boldsymbol{n - p + 1}$ **espaços**, selecionaremos os lugares dos $\boldsymbol{p}$ elementos (combinação de $\boldsymbol{p}$ elementos dentre $\boldsymbol{n - p + 1}$).

O **1º lema de Kaplansky**, indicado por $\boldsymbol{f(n,p)}$, é:

$$\boldsymbol{f(n,p) = C_{n-p+1,p}}$$

Para o exemplo que calculamos antes de conhecer o primeiro lema de Kaplansky, tivemos n = 8 e p = 2. Assim, haverá 8 – 2 = 6 elementos não selecionados e 6 + 1 = 7 espaços. Dentre esses 7 espaços, devemos escolher a posição de 2 elementos:

$$\boldsymbol{f}(8,2) = C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!\,2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2} = 7 \times 3 = 21$$

Que foi o resultado que obtivemos anteriormente.

(FGV/2019 – MPE/RJ) Valdo é estagiário em um escritório de advocacia e, na semana que vem, deverá escolher para trabalhar três dias de segunda a sábado. O escritório não permite que um estagiário trabalhe dois dias consecutivos. O número de possibilidades que Valdo tem para escolher seus dias de trabalho é:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

Comentários:

Como o conjunto original é formado pelos dias da semana de segunda a sábado, os extremos não são dias consecutivos. Assim, temos o primeiro lema de Kaplansky com n = 6 e p = 3.

Primeiro representamos os 6 – 3 = 3 dias em que Valdo não irá trabalhar, com os espaços antes e depois de cada dia não trabalhado, totalizando n – p + 1 = 4 espaços, os quais representam os **possíveis** dias de trabalho:

_ N _ N _ N _

Desses n – p + 1 = 4 espaços, devem ser escolhidos p = 3 elementos:

$$\boldsymbol{f(n,p) = C_{n-p+1,p}}$$

$$f(6,3) = C_{4,3}$$

Para facilitar as contas, lembre-se que a seleção de n – 1 elementos, dentre n, é um caso particular de combinação: $C_{n,n-1} = n$:

$$C_{4,3} = 4$$

Gabarito: C

(CESPE/2019 – Prefeitura de São Cristóvão/SE) Situação hipotética: As 5 lâmpadas tubulares de uma sala de aula foram instaladas formando uma única fileira. Por motivo de economia, 2 lâmpadas adjacentes nunca poderão ficar acesas ao mesmo tempo.

Assertiva: Nessa situação, há exatamente 13 configurações distintas, incluindo todas as lâmpadas desligadas, que atendem à exigência de economia.

Comentários:

Essa questão é um pouco mais trabalhosa. Precisamos tratar distintamente das situações (i) em que nenhuma lâmpada está acesa; (ii) em que há 1 lâmpada acesa; (iii) em que há 2 lâmpadas acesas; e (iv) em que há 3 lâmpadas acesas.

Se houvesse 4 lâmpadas acesas, dentre 5, necessariamente teríamos lâmpadas adjacentes acesas. Portanto, as opções de acender 4 lâmpadas ou mais (5) não atendem às restrições do problema.

i) Nenhuma lâmpada acesa: $\mathbf{C_{5,0} = 1}$ (caso especial de combinação $C_{n,0} = 1$). Não há que se falar em lema de Kaplansky, porque quando não selecionamos lâmpada alguma, não é possível selecionar lâmpadas adjacentes.

ii) 1 lâmpada acesa: $\mathbf{C_{5,1} = 5}$ (outro caso especial de combinação $C_{n,1} = n$). Nesse caso, também não há que se falar em lema de Kaplansky, porque quando selecionamos uma única lâmpada, também não é possível selecionar lâmpadas adjacentes.

iii) 2 lâmpadas acesas: agora sim, podemos utilizar o 1º lema de Kaplansky para garantir que as 2 lâmpadas selecionadas não sejam adjacentes. Com p = 2 elementos, dentre n = 5 elementos no total, temos n – p = 5 – 2 = 3 elementos não selecionados e n – p + 1 = 4 espaços. Desses 4 espaços, devemos escolher p = 2:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = \mathbf{6}$$

iv) 3 lâmpadas acesas: conseguimos selecionar 3 lâmpadas não adjacentes de uma **única** forma (SNSNS). De todo modo, vamos utilizar o lema de Kaplansky para chegar a essa conclusão. Com p = 3 elementos, dentre n = 5, temos n – p = 5 – 3 = 2 elementos não selecionados e n – p + 1 = 3 espaços. Desses 3 espaços, devemos escolher p = 3: $C_{3,3} = 1$ (caso especial de combinação $C_{n,n} = 1$).

Como as possibilidades dos eventos de i a iv são excludentes, isto é, temos a possibilidade de i OU as possibilidades de ii OU as possibilidades de iii OU a possibilidade de iv, então, pelo princípio **aditivo**, devemos somar esses resultados: 1 + 5 + 6 + 1 = 13

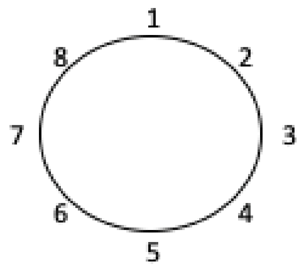
Gabarito: Certo.

Segundo Lema de Kaplansky

O **segundo lema de Kaplansky** também trabalha com a **seleção** de um subconjunto de elementos, de modo que elementos **consecutivos** (**vizinhos**) do conjunto original **não** sejam selecionados.

Porém, neste caso, os elementos **extremos** do conjunto original **são** considerados **consecutivos** (vizinhos). Assim, havendo n elementos, os elementos 1 e n são considerados vizinhos.

Supondo um conjunto de 8 elementos, os elementos 1 e 8 são consecutivos, como se os elementos estivessem dispostos em um círculo:



Exemplos desse tipo de situação são os dias da semana, de segunda a domingo, ou os meses do ano, de janeiro a dezembro, etc.

O **2º lema de Kaplansky**, indicado por $\boldsymbol{g(n,p)}$, é dado por:

$$\boldsymbol{g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}}$$

No caso de $n = 8$, como na figura, se tivermos que selecionar $p = 3$ elementos não consecutivos:

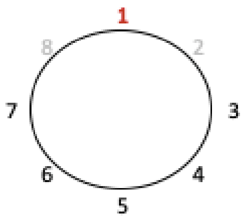
$$g(8,3) = \frac{8}{8-3} C_{8-3,3} = \frac{8}{5} C_{5,3}$$

$$g(8,3) = \frac{8}{5} \times \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = \frac{8}{5} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = \frac{8}{5} \times \frac{5 \times 4}{2} = 16$$

Vamos **entender o raciocínio** por trás do 2º lema.

Com 8 elementos dispostos em um círculo, precisamos **separar** o problema em 2: (i) o elemento 1 é selecionado; e (ii) o elemento 1 não é selecionado (poderíamos substituir o elemento 1 por qualquer outro elemento).

i) Ao **selecionarmos o elemento 1**, **não** podemos selecionar os elementos 2 ou 8, pois ambos são vizinhos.



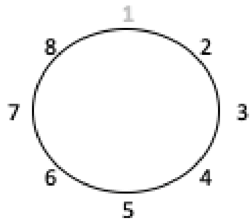
Assim, restam os elementos 3 a 7 (isto é, 5 elementos), dos quais devemos selecionar 2 elementos não consecutivos.

Observe que os extremos 3 e 7 **não são consecutivos**.

Portanto, podemos utilizar o **1º lema de Kaplansky**, com um total de n = 5 elementos, dos quais devemos selecionar p = 2 elementos. Assim, temos n – p = 3 elementos não selecionados e n – p + 1 = 4 espaços, dos quais devemos selecionar p = 2:

$$f(5,2) = C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

ii) **Se não selecionarmos o elemento 1**, então iremos selecionar 3 elementos não consecutivos, dentre os elementos 2 a 8.



Novamente, os extremos 2 e 8 **não são consecutivos**.

Então, utilizamos o **1º lema de Kaplansky**, com n = 7 elementos e p = 3, ou seja, n – p = 4 elementos não selecionados e n – p + 1 = 5 espaços:

$$f(7{,}3) = C_{5,3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times4}{2} = 10$$

Como as possibilidades de i e ii são excludentes, ou seja, temos as 6 possibilidades de i OU as 10 possibilidades de ii, pelo princípio aditivo, temos:

6 + 10 = 16

Esse é o resultado que obtivemos pela fórmula do 2º lema de Kaplansky!

(2018 – Câmara de Cambé/PR) Um auxiliar administrativo vai organizar um calendário para a supervisão de uma praça de 2ª feira até domingo. Essa praça tem que ser supervisionada exatamente duas vezes por semana e nos mesmos dias de cada semana. A praça nunca deve ser supervisionada dois dias consecutivos. Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o número de possibilidades diferentes que o auxiliar administrativo tem para organizar esse calendário.

a) 14

b) 16

c) 18

d) 24

e) 28

Comentários:

Temos um exemplo do segundo lema de Kaplansky, pois engloba todos os dias da semana (domingo e segunda-feira são consecutivos). Assim, temos n = 7, p = 2:

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}$$

$$g(7,2) = \frac{7}{5} C_{5,2}$$

$$g(7,2) = \frac{7}{5} \times \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{7}{5} \times \frac{5 \times 4}{2} = 14$$

Caso **não lembre** essa fórmula, podemos dividir a resolução desse problema em duas situações.

i) A segunda-feira é selecionada. Assim, restarão os dias de quarta a sábado (4 dias) para selecionar 1 dia. Usando o 1º lema de Kaplansky, com n = 4 e p = 1, temos n – p = 3 dias não selecionados e n – p + 1 = 4 espaços, dos quais devemos selecionar 1:

$$f(4,1) = C_{4,1} = 4$$

ii) A segunda-feira não é selecionada. Assim, restarão os dias de terça a domingo (6 dias) para selecionar 2 dias. Usando o 1º lema de Kaplansky, com n = 6 e p = 2, temos n – p = 4 dias não selecionados e n – p + 1 = 5 espaços, dos quais devemos selecionar 2:

$$f(6,2) = C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Como são situações excludentes (ou seja, alternativas), pelo princípio da adição devemos somar os resultados:

$$g(7,2) = f(4,1) + f(6,2) = 4 + 10 = 14$$

Gabarito: A

Resumo da Aula

Princípios de Contagem

- **Princípio Multiplicativo** (multiplicação): Eventos concomitantes (ocorre um E outro)
- **Princípio Aditivo** (soma): Eventos mutuamente exclusivos (ocorre um OU outro)
- **Princípio do Pombo**: Considerar o pior cenário para **garantir** a situação desejada

Fatorial: **produto** de um número com todos os números menores que ele:

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Permutação – reordenação de elementos

- **Permutação simples**: Número de maneiras de **reordenar** elementos **distintos**:

$$P_n = n!$$

- **Permutação com repetição**: Número de maneiras de reordenar n elementos, dos quais k elementos são **repetidos**:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!}$$

- **Permutação circular**: Número de maneiras de reordenar elementos dispostos em **círculo**:

$$PC_n = (n-1)!$$

- **Permutação com elementos ordenados**: reordenação de n elementos, dos quais k elementos devem respeitar uma **ordem específica**, não necessariamente consecutivos:

$$\frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

- **Permutação caótica**: número de maneiras de reordenar elementos, de modo **nenhum** deles retorne para a sua **posição original**:

$$D_n = n! \times \left[+\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Arranjo – seleção de elementos **com importância de ordem**

- **Arranjo sem repetição**: Número de maneiras de sortear, sem repetição k elementos, dentre n, de modo que a **ordem** do sorteio **importe**:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Arranjo com repetição**: Número de maneiras de sortear, permitindo-se a **repetição**, k elementos, dentre n, de modo que a **ordem** do sorteio **importe**:

$$A_{n,k} = n^k$$

Combinação – seleção de elementos **sem importância de ordem**

- **Combinação simples**: Número de maneiras de sortear, sem repetição, k elementos, dentre n, de modo que a **ordem** do sorteio **não importe**:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

- **Combinação completa**: Número de maneiras de sortear, **sem importância de ordem**, p objetos (ex: potes de sorvete), quando há n **tipos** diferentes (ex: marcas de sorvete):

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

  Esse também é o **número de soluções inteiras não-negativas** para a equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

Partição – separação de elementos em **subconjuntos**

- **Partição ordenada**: Número de maneiras de separar n elementos em m **subconjuntos distintos** entre si, com $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \dots, \boldsymbol{p_m}$ elementos cada, temos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\,p_2! \dots p_m!}$$

- **Partição não ordenada**: Número de maneiras de separar elementos em m subconjuntos de p elementos cada (total de $m \times p$ elementos):

$$\frac{\binom{m \times p}{p, p, \dots, p}}{m!} = \frac{(m \times p)!}{m!\,(p!)^m}$$

Lemas de Kaplansky – seleção de elementos **não vizinhos**

- **1º Lema**: Número de maneiras de selecionar p elementos **não vizinhos**, dentre n, em que os **extremos** do conjunto original **não** são considerados **vizinhos**: $f(n,p) = C_{n-p+1,p}$

- **2º Lema**: Número de maneiras de selecionar p elementos **não vizinhos**, dentre n, em que os **extremos** do conjunto original **são** considerados **vizinhos**: $g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}$

Questões Comentadas – CESGRANRIO

Princípios de Contagem

1. (CESGRANRIO/2013 – BNDES) Uma empresa de propaganda pretende criar panfletos coloridos para divulgar certo produto. O papel pode ser laranja, azul, preto, amarelo, vermelho ou roxo, enquanto o texto é escrito no panfleto em preto, vermelho ou branco. De quantos modos distintos é possível escolher uma cor para o fundo e uma cor para o texto se, por uma questão de contraste, as cores do fundo e do texto não podem ser iguais?

a) 13

b) 14

c) 16

d) 17

e) 18

Comentários:

O enunciado informa que há 6 cores possíveis para o fundo (laranja, azul, preto, amarelo, vermelho ou roxo) e 3 cores possíveis para o texto (preto, vermelho ou branco).

Se não houvesse restrições, o número de maneiras de escolher ambas as cores seria o produto desses valores (princípio multiplicativo):

$$6 \times 3 = 18$$

Porém, o enunciado informa que o texto e o fundo não podem ser da mesma cor. Assim devemos excluir as possibilidades texto preto / fundo preto e texto vermelho / fundo vermelho (2 possibilidades):

$$18 - 2 = 16$$

Gabarito: C

2. (CESGRANRIO/2012 – BB) Marcelo vai passar quatro dias na praia e leva em sua bagagem sete camisetas (três camisetas brancas diferentes, uma preta, uma amarela, uma vermelha e uma laranja) e quatro bermudas (uma preta, uma cinza, uma branca e uma azul).

De quantos modos distintos Marcelo poderá escolher uma camiseta e uma bermuda para vestir-se, de modo que as peças escolhidas sejam de cores diferentes?

a) 14

b) 17

c) 24

d) 26

e) 28

Comentários:

O enunciado informa que há 7 camisas diferentes e 4 bermudas diferentes. Se não houvesse restrições, o número de maneiras de escolher uma camisa e uma bermuda seria:

$$7 \times 4 = 28$$

Porém, o enunciado informa que as cores das peças devem ser distintas. Então, devem ser excluídas as possibilidades em que as cores são iguais.

Como há 3 camisas brancas e 1 bermuda branca, há 3 possibilidades em que ambas as peças são brancas. Ademais, há 1 camisa preta e 1 bermuda preta, logo, 1 possibilidade em que ambas as peças são pretas. No total, há 4 possibilidades em que ambas as peças são iguais.

Portanto, o número de maneiras de escolher uma camisa e uma bermuda de cores distitntas é:

$$28 - 4 = 24$$

Gabarito: C

3. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Há cinco poços de petróleo a serem perfurados (P1, P2, P3, P4 , P5) e apenas três sondas disponíveis para perfuração (S1, S2, S3). A sonda S1 só pode ser utilizada para a perfuração dos poços P4 e P5. As sondas S2 e S3 podem ser utilizadas para a perfuração de qualquer dos cinco poços. Serão perfurados, inicialmente, apenas três dos cinco poços e, para isso, cada sonda será alocada a um único poço.

Quantas maneiras distintas há para se alocarem as três sondas?

a) 8

b) 10

c) 15

d) 24

e) 40

Comentários:

O enunciado informa que há 5 plataformas e 3 sondas e pede o número de maneiras de alocar as 3 sondas em 3 plataformas das 5 plataformas.

O enunciado informa, ainda, que a sonda S1 só pode ser usada nas plataformas P4 e P5. Logo, há 2 plataformas possíveis para S1.

2		
S1	S2	S3

Não há restrições para as outras sondas. Então, restarão 4 plataformas para S2 e 3 plataformas para S3:

2	4	3
S1	S2	S3

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de alocar as 3 sondas é:

$$\text{Resposta} = 2 \times 4 \times 3 = 24$$

Gabarito: D

4. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Quantos números naturais de 5 algarismos apresentam dígitos repetidos?

a) 27.216

b) 59.760

c) 62.784

d) 69.760

e) 72.784

Comentários:

Os números naturais são compostos dos algarismos de 0 a 9, isto é, há 10 possibilidades para cada dígito, exceto o primeiro dígito, que não pode ser 0.

Assim, pelo princípio multiplicativo, a quantidade total de números que podem ser formados com 5 algarismos (sem considerar a restrição do enunciado) é:

9	10	10	10	10

Total = 9 x 10 x 10 x 10 x 10 = 90.000

Agora, vejamos o número de possibilidades que não atendem à restrição, isto é, que não apresentam algarismos repetidos.

O primeiro dígito pode ser qualquer um dos 9 algarismos possíveis:

9				

Para o segundo dígito, há 10 possibilidades, exceto o algarismo utilizado como primeiro dígito, logo, há 9 possibilidades:

9	9			

Para o terceiro dígito, há 10 possibilidades, exceto os 2 algarismos utilizados como primeiro e segundo dígitos, logo, há 8 possibilidades:

9	9	8		

Aplicando o mesmo raciocínio para os últimos dígitos, temos 7 e 6 possibilidades, respectivamente:

9	9	8	7	6

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades que não atendem à restrição:

Não atendem = 9 x 9 x 8 x 7 x 6 = 27.216

Então, a quantidade de possibilidade que atendem ao enunciado é a diferença entre o total e essa quantidade que acabamos de calcular:

Resposta = 90.000 – 27.216 = 62.784

Gabarito: C

5. (CESGRANRIO/2012 – BB) Para cadastrar-se em um site de compras coletivas, Guilherme precisará criar uma senha numérica com, no mínimo, 4 e, no máximo, 6 dígitos. Ele utilizará apenas algarismos de sua data de nascimento: 26/03/1980.

Quantas senhas diferentes Guilherme poderá criar se optar por uma senha sem algarismos repetidos?

a) 5.040

b) 8.400

c) 16.870

d) 20.160

e) 28.560

Comentários:

Guilherme irá criar uma senha com 4 ou 6 algarismos **não repetidos**, utilizando os **7** algarismos da sua data de nascimento.

Se Guilherme optar por uma senha de 4 algarismos, as possibilidades são:

7	6	5	4

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

Se Guilherme optar por uma senha de 5 algarismos, as possibilidades são:

7	6	5	4	3

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

Se Guilherme optar por uma senha de 6 algarismos, as possibilidades são:

7	6	5	4	3	2

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5040$$

Como essas possibilidades são mutuamente excludentes (a senha terá 4 dígitos OU 5 dígitos OU 6 dígitos), devemos somar essas possibilidades (princípio aditivo):

840 + 2520 + 5040 = 8400[1]

Gabarito: B

[1] Para facilitar as contas, a soma poderia ter sido feita da seguinte forma:

$$840 + 840 \times 3 + 840 \times 6 = 840 \times (1 + 3 + 6) = 840 \times 10 = 8.400$$

6. (CESGRANRIO/2012 – Petrobras) Os números de telefones celulares de certa região possuem oito dígitos, repetidos ou não, começando por 5, 6, 7, 8 ou 9. Com a expansão do mercado de telefonia, será necessário acrescentar um dígito aos números atuais. Nessa nova configuração, os números seguirão o mesmo padrão anterior (primeiro dígito maior ou igual a 5, podendo haver algarismos repetidos) e, assim, será possível habilitar n celulares a mais do que no sistema atual. Conclui-se que n é igual a

a) $0{,}1 \times 10^8$

b) $1{,}5 \times 10^8$

c) $4{,}5 \times 10^8$

d) $5{,}0 \times 10^8$

e) $9{,}0 \times 10^8$

Comentários:

Os números de telefones, antes do acréscimo de 1 dígito, apresentavam 8 dígitos, sendo que o primeiro precisava ser 5, 6, 7, 8 ou 9 (5 possibilidades) e os demais poderiam se repetir, como ilustrado a seguir:

5	10	10	10	10	10	10	10

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades que existiam era:

$$5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 5 \times 10^7 = 0{,}5 \times 10^8$$

Com o acréscimo de 1 dígito, o número de possibilidades passou a ser:

5	10	10	10	10	10	10	10	10

$$5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 5 \times 10^8$$

E a diferença é:

$$n = 5 \times 10^8 - 0{,}5 \times 10^8 = 4{,}5 \times 10^8$$

Gabarito: C

Questões Comentadas – CESGRANRIO

Permutação

1. (CESGRANRIO/2011 – Petrobrás) A vitrine de uma determinada loja possui 5 lugares para colocação de manequins. Considerando que a loja possui 5 manequins, em quantas formas diferentes eles podem ser arrumados?

a) 120

b) 100

c) 50

d) 25

e) 15

Comentários:

Para organizar 5 elementos em 5 posições, utilizamos a permutação:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: A

2. (CESGRANRIO/2005 – INSS) Para ter acesso a um arquivo, um operador de computador precisa digitar uma sequência de 5 símbolos distintos, formada de duas letras e três algarismos. Ele se lembra dos símbolos, mas não da sequência em que aparecem. O maior número de tentativas diferentes que o operador pode fazer para acessar o arquivo é

a) 115

b) 120

c) 150

d) 200

e) 249

Comentários:

Para organizar os 5 símbolos da senha em 5 posições, utilizamos a permutação:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: B

3. (CESGRANRIO/2013 – BNDES) Cinco pessoas devem ficar em fila, sendo que duas delas (João e Maria) precisam ficar sempre juntos. De quantas formas diferentes essas pessoas podem-se enfileirar?

a) 48

b) 50

c) 52

d) 54

e) 56

Comentários:

O enunciado informa que 5 pessoas serão enfileiradas, mas 2 delas (João e Maria) precisam ficar sempre juntos.

O primeiro passo é considerar João e Maria um único elemento e calcular o número de maneiras de reordenar 4 elementos (João/Maria e as outras 3 pessoas):

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Sabendo que João pode ficar na frente de Maria ou o contrário, então para cada uma dessas 24 possibilidades, há 2 formas de organizar João e Maria. Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$\text{Resultado} = 24 \times 2 = 48$$

Gabarito: A

4. (CESGRANRIO/2012 – BB) Se todos os anagramas da palavra BRASIL forem dispostos em ordem alfabética, o primeiro anagrama cuja última letra é "B" ocupará que posição?

a) 5ª

b) 25ª

c) 34ª

d) 49ª

e) 121ª

Comentários:

Se os anagramas estão dispostos em ordem alfabético, os primeiros anagramas serão da forma:

A	B	X	X	X	X

Há $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagramas dessa forma.

Em seguida, teremos os anagramas da forma:

A	I	B	X	X	X

Há $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ anagramas dessa forma.

Em seguida, teremos os anagramas da forma:

A	I	L	B	X	X

Há $P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$ anagramas dessa forma.

Depois, teremos o anagrama:

A	I	L	R	B	S

Então, antes de termos B como última letra, teremos 24 + 6 + 2 + 1 = 33.

Logo, o anagrama cuja última letra é B é o 34º anagrama.

Gabarito: C

5. (CESGRANRIO/2021 – BB) De quantas formas diferentes, em relação à ordem entre as pessoas, dois homens e quatro mulheres poderão ser dispostos em fila indiana, de modo que entre os dois homens haja, pelo menos, uma mulher?

a) 10

b) 20

c) 48

d) 480

e) 720

Comentários:

A questão deseja organizar 6 pessoas (2 homens e 4 mulheres) em uma fila, de modo que os 2 homens não fiquem juntos. Para resolvê-la podemos calcular o número de maneiras de organizar a fila, sem a restrição, e subtrair os casos em que os homens ficam juntos.

O número de maneiras de organizar 6 pessoas em uma fila é:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Para calcularmos o número de maneiras em que 2 homens ficam juntos, vamos inicialmente considerá-los como um único elemento. Assim, temos 5 elementos a permutar (as 4 mulheres e os 2 homens como elemento único):

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Para cada uma dessas opções, há 2 maneiras de organizarmos os 2 homens na dupla (primeiro um e depois o outro, ou o contrário). Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de organizar a fila com os dois homens juntos é:

120 x 2 = 240

Logo, o número de maneiras de organizar a fila de modo que os homens **não** fiquem juntos é a diferença:

720 - 240 = 480

Gabarito: D

6. (CESGRANRIO/2011 – Petrobrás) Quantos são os anagramas da palavra PETROBRAS que começam com as letras PE, nesta ordem?

a) 720

b) 2.520

c) 5.040

d) 362.880

e) 3.628.800

Comentários:

Os anagramas da palavra PETROBRAS que começam com PE correspondem a uma permutação das letras TROBRAS, isto é, uma permutação de 7 elementos, com repetição de 2 elementos (R):

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 2.520$$

Gabarito: B

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Arranjo e Combinação

1. (CESGRANRIO/2004 – Secretaria da Administração/TO) Sebastiana faz doces de cupuaçu, de açaí, de tucumã, de cajá e de banana. Ela quer preparar embalagens especiais, cada uma com dois potes de doce de sabores diferentes, para vender na feira. Quantas embalagens diferentes Sebastiana poderá preparar?

a) 7

b) 9

c) 10

d) 14

e) 20

Comentários:

O enunciado informa que Sebastiana faz doces de 5 sabores distintas e que ela deseja preparar embalagens com 2 potes de sabores distintos. Para isso, ela precisará escolher 2 sabores, dentre 5, sabendo que a ordem não importa (pois ambos vão para a mesma embalagem):

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 5 \times 2 = 10$$

Gabarito: C

2. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Em uma loja, trabalham 8 funcionárias, dentre as quais Diana e Sandra. O gerente da loja precisa escolher duas funcionárias para trabalharem no próximo feriado. Sandra e Diana trabalharam no último feriado e, por isso, não podem ser escolhidas. Sendo assim, de quantos modos distintos esse gerente poderá fazer a escolha?

a) 15

b) 28

c) 43

d) 45

e) 56

Comentários:

O enunciado informa que há 8 funcionárias, mas 2 (Diana e Sandra) não podem ser escolhidas, logo, restam 6 funcionárias, das quais 2 serão selecionadas. Como a ordem da escolha não importa, temos a combinação de 2 elementos, dentre 6:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 3 \times 5 = 15$$

Gabarito: A

3. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Certa pizzaria oferece aos clientes cinco tipos de cobertura (presunto, calabresa, frango, cebola e azeitona) para serem acrescentadas ao queijo. Os clientes podem escolher uma, duas ou três coberturas. João quer cebola em sua pizza, mas ainda não decidiu se colocará, ou não, outras coberturas. Considerando-se essas informações, de quantos modos distintos João poderá "montar" sua pizza?

a) 10

b) 11

c) 15

d) 16

e) 24

Comentários:

O enunciado informa que há 5 opções de cobertura, das quais podem ser escolhidas até três. Sabendo que João já escolheu uma delas, ele poderá (i) não escolher mais cobertura alguma, (ii) escolher mais 1 cobertura **ou** (iii) escolher mais 2 coberturas (essas opções são mutuamente excludentes).

(i) Não escolher mais cobertura alguma corresponde a 1 possibilidade.
(ii) Se João optar por mais 1 cobertura, ele terá 4 possibilidades de escolha (diferentes daquela que João já escolheu)
(iii) Se João optar por mais 2 coberturas, dentre 4 opções, o número de possibilidades de escolha será:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 2 \times 3 = 6$$

Por serem possibilidades mutuamente excludentes, o número de maneiras de montar a pizza é a soma desses valores (princípio aditivo):

Resposta = 1 + 4 + 6 = 11

Gabarito: B

4. (CESGRANRIO/2007 – Comando da Aeronáutica) Uma empresa tem um quadro de funcionários formado por 3 supervisores e 10 técnicos. Todo dia, é escalada para o trabalho uma equipe com 1 supervisor e 4 técnicos. Quantas equipes diferentes podem ser escaladas?

a) 15210

b) 3780

c) 840

d) 630

e) 510

Comentários:

Deseja-se formar uma equipe com 1 supervisor, dentre 3 disponíveis, e 4 técnicos, dentre 10 disponíveis.

Para escolher o supervisor, há 3 possibilidades.

Para escolher 4 técnicos, dentre 10, considerando que a ordem entre eles não importa, temos:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$

Então, o número de maneiras de formar toda a equipe é (princípio multiplicativo):

Resposta = 3 x 210 = 630

Gabarito: D

5. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Em um setor de uma empresa, trabalham 3 geólogos e 4 engenheiros. Quantas comissões diferentes de 3 pessoas podem ser formadas com, pelo menos, 1 geólogo?

a) 28

b) 31

c) 36

d) 45

e) 60

Comentários:

O enunciado informa que há 3 geólogos e 4 engenheiros (logo, 7 profissionais, no total), dos quais 3 serão selecionados para formar uma comissão.

Considerando que a ordem não importa, o número total de maneiras de escolher 3 profissionais, dentre 7, sem considerar (por ora) a restrição imposta pelo enunciado é:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35$$

Dessas possibilidades, precisamos subtrair aquelas que não contêm geólogos, ou seja, são formadas apenas por engenheiros. Sabendo que há 4 engenheiros, o número de maneiras de formar uma comissão com 3 engenheiros é:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 4$$

Logo, o número de comissões que podem ser formadas com 3 profissionais, com pelo menos 1 geólogo é a diferença:

Resposta = 35 – 4 = 31

Gabarito: B

6. (CESGRANRIO/2018 – TRANSPETRO) De um quadro de profissionais com quatro engenheiros e cinco técnicos pretende-se formar um grupo de cinco profissionais com, pelo menos, um engenheiro e um técnico. Nessas condições, quantas possibilidades diferentes existem de formação desse grupo de cinco profissionais?

a) 19

b) 20

c) 120

d) 125

e) 126

Comentários:

O enunciado informa que há 4 engenheiros e 5 técnicos (logo, 9 profissionais, no total), dos quais 5 serão selecionados para formar um grupo.

Considerando que a ordem não importa, o número total de maneiras de escolher 5 profissionais, dentre 9, sem considerar (por ora) a restrição imposta pelo enunciado é:

$$C_{9,5} = \frac{9!}{(9-5)! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 2 \times 7 = 126$$

Dessas possibilidades, precisamos subtrair aquelas que não contêm pelo menos 1 engenheiro e 1 técnico, ou seja, aquelas possibilidades que contêm apenas engenheiros e aquelas que contêm apenas técnicos.

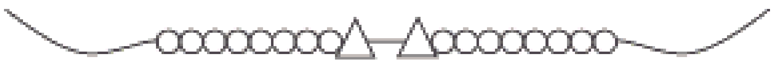
Como há um total de 4 engenheiros disponíveis, não é possível selecionar somente engenheiros para o grupo de 5 profissionais. Logo, não há possibilidades que contêm apenas engenheiros.

Como há um total de 5 técnicos, é possível selecionar somente técnicos para o grupo de 5 profissionais: há 1 única possibilidade de isso acontecer. Logo, devemos subtrair 1 possibilidade das 126 possibilidades calculadas anteriormente:

Resposta = 126 – 1 = 125

Gabarito: D

7. (CESGRANRIO/2010 – BB) Uma artesã de bijuterias fabrica um colar de contas no qual utiliza 16 contas pequenas e duas contas grandes, cujo modelo é apresentado abaixo.



Os critérios que ela utiliza para montar cada colar são os seguintes:

- **as contas pequenas são todas da mesma cor;**
- **contas grandes devem ter cores diferentes;**
- **se as contas pequenas forem da cor "x", nenhuma conta grande pode ser da cor "x".**

Sabendo-se que a artesã dispõe de contas pequenas brancas, pretas, azuis e laranjas e de contas grandes brancas, vermelhas, verdes, azuis e rosas, de quantos modos distintos ela pode escolher as cores das contas que irão compor um colar?

a) 28

b) 30

c) 32

d) 40

e) 42

Comentários:

O enunciado informa que deve ser escolhida 1 cor para as contas pequenas e 2 cores para as contas grandes, uma para cada conta, mas todas as cores precisam ser distintas.

A artesã possui 4 cores para as contas pequenas e 5 cores para as contas grandes. As cores pretas e laranjas, disponíveis para as contas pequenas, não estão disponíveis para as contas grandes. Então, caso a artesã escolha uma dessas 2 cores para as pequenas, poderá escolher quaisquer das 5 cores para as contas grandes. Nessa situação, o número de maneiras de a artesã escolher as cores das contas grandes é:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 5 \times 2 = 10$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de formas de a artesã escolher as cores de suas contas, caso escolha preto ou laranja para as contas pequenas é:

2 x 10 = 20

Caso a artesã escolha as cores branca ou azul para as contas pequenas, haverá somente 4 possibilidades para as contas grandes, pois não pode haver repetição. Então, o número de maneiras de escolher as cores das contas grandes nessa situação é:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 2 \times 3 = 6$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de formas de a artesã escolher as cores de suas contas, caso escolha branco ou azul para as contas pequenas é:

2 x 6 = 12

Como são situações mutuamente excludentes, devemos somar essas possibilidades (princípio aditivo):

Resultado = 20 + 12 = 32

Gabarito: C

8. (CESGRANRIO/2018 – TRANSPETRO) Seis empresas (Grupo 1), denominadas L1, L2, L3, L4, L5 e L6, prestam serviço de limpeza interna em grandes embarcações, e outras cinco empresas (Grupo 2),

denominadas E1, E2, E3, E4 e E5, realizam manutenção elétrica nas mesmas embarcações. Um analista precisa contratar três empresas diferentes do Grupo 1 e duas empresas diferentes do Grupo 2, para realizarem, respectivamente, a limpeza e a manutenção elétrica de embarcações.

Nessas condições, o número de possibilidades diferentes de contratação das cinco empresas é igual a

a) 120

b) 200

c) 400

d) 1.200

e) 2.400

Comentários:

O número de maneiras de selecionar as 3 empresas do Grupo 1, de um total de 6 empresas, sabendo que a ordem não é importa, é:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 = 20$$

E o número de maneiras de selecionar as 2 empresas do Grupo 2, de um total de 5 empresas, sabendo que a ordem não é importa, é:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 5 \times 2 = 10$$

O número de maneiras de selecionar tanto as empresas do Grupo 1 quanto as empresas do Grupo 2 (Grupo 1 E Grupo 2) corresponde ao produto desses resultados (princípio multiplicativo);

Resultado = 20 x 10 = 200

Gabarito: B

9. (CESGRANRIO/2018 – TRANSPETRO) Considere um conjunto de 10 empresas, denominadas A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Um analista precisa escolher quatro dessas empresas para distribuir quatro serviços diferentes, um para cada uma escolhida. Após uma análise técnica, decidiu que exatamente duas das três primeiras empresas — A, B e C — deveriam fazer quaisquer dois serviços dentre os quatro disponíveis. Os outros dois serviços que sobrassem seriam distribuídos entre duas das sete outras empresas restantes.

Nessas condições, o número de possibilidades diferentes para essa distribuição de serviços é igual a

a) 1724

b) 1692

c) 1584

d) 1512

e) 1294

Comentários:

O enunciado informa que há 4 serviços **distintos** a serem distribuídos dentre 10 empresas, sendo que 2 serão distribuídos dentre 3 empresas e os outros 2 serão distribuídos dentre as outras 7 empresas.

Para encontrar o número de possibilidades distintas de escolher os serviços para cada empresa nessas condições, podemos primeiro escolher as empresas que irão executar os serviços e depois escolher quais serão os serviços executados por cada uma.

Sabendo que das 3 empresas (A, B e C), 2 serão escolhidas para executar serviços, o número de possibilidades de selecioná-las é:

$$C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = \frac{3}{1} = 3$$

Sabendo que das outras 7 empresas, 2 serão escolhidas para executar serviços, o número de possibilidades de selecioná-las é:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 7 \times 3 = 21$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher as 4 empresas que irão executar serviços é o produto desses resultados:

Maneiras de escolher as 4 empresas = 3 x 21 = 63

Por fim, precisamos distribuir os 4 serviços diferentes para as 4 empresas selecionadas. Logo, temos uma permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de distribuir os serviços dentre 4 empresas, seguindo as restrições do enunciado é:

Número de maneiras = 24 x 63 = 1512

Gabarito: D

10. (CESGRANRIO/2012 – Transpetro) De quantas maneiras é possível colorir 5 objetos iguais, usando quatro cores diferentes?

a) 20

b) 24

c) 56

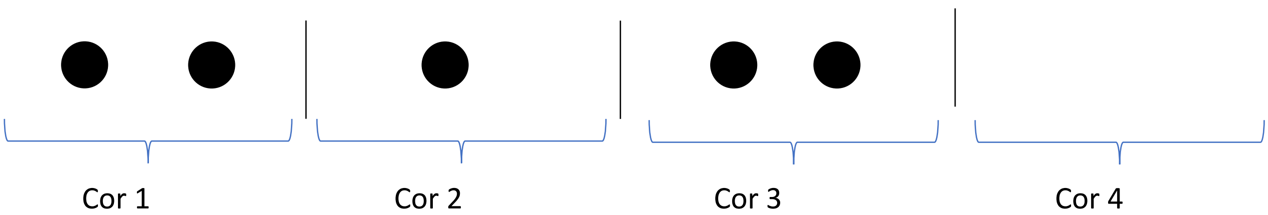
d) 120

e) 1024

Comentários:

O enunciado informa que há 5 objetos iguais e 4 cores diferentes. Assim, podemos pensar em distribuir 5 objetos pelas 4 cores, de forma que podemos utilizar apenas 1 ou até todas as cores. Logo, temos uma combinação completa de p = 5 objetos em n = 4 seções.

O desenho abaixo ilustra uma possível situação para pintarmos os 5 objetos.



O número de maneiras de organizar os 5 objetos dentre as 4 seções pode ser considerada uma permutação dos 5 objetos com os 3 separadores das seções, isto é, uma permutação de 8 elementos, com repetição de 5 e de 3 elementos:

$$CR_{4,5} = P_8^{5,3} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

Gabarito: C

11. (CESGRANRIO/2010 – BB) Uma loja vende barras de chocolate de diversos sabores. Em uma promoção, era possível comprar três barras de chocolate com desconto, desde que estas fossem dos sabores ao leite, amargo, branco ou com amêndoas, repetidos ou não. Assim, um cliente que comprar as três barras na promoção poderá escolher os sabores de n modos distintos, sendo n igual a

a) 4

b) 10

c) 12

d) 16

e) 20

Comentários:

O enunciado informa que serão compradas 3 barras, de 4 sabores possíveis (iguais ou diferentes). Essa situação equivale à combinação completa de p = 3 objetos em n = 4 seções. O número de maneiras de organizar os 3 objetos dentre as 4 seções pode ser considerada uma permutação dos 3 objetos com os 3 separadores das seções, isto é, uma permutação de 6 elementos, com repetição de 3 e de 3 elementos:

$$CR_{4,3} = P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 = 20$$

Gabarito: E

12. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Um posto de combustível comprou 6 bombas (idênticas) de abastecimento, que serão pintadas, antes de sua instalação, com uma única cor, de acordo com o combustível a ser vendido em cada uma. O posto poderá vender etanol (cor verde), gasolina (cor amarela) e diesel (cor preta). De quantas maneiras as bombas podem ser pintadas, considerando a não obrigatoriedade de venda de qualquer tipo de combustível?

▪

a) 20

b) 28

c) 56

d) 216

e) 729

Comentários:

O enunciado informa que há 6 bombas idênticas que podem ser pintadas de 3 cores distintas, sem restrições, ou seja, todas as bombas podem ser pintadas de uma única cor ou pode haver 3 cores diferentes. Assim, temos a combinação completa de p = 6 objetos (bombas) em n = 3 seções (cores). O número de maneiras de organizar 6 objetos em 3 seções corresponde a uma permutação de 6 objetos e 2 separadores de seções, isto é, uma permutação 8 elementos, com repetição de 6 e de 2 elementos:

$$CR_{3,6} = P_8^{6,2} = \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 4 \times 7 = 28$$

Gabarito: B

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Princípios de Contagem

1. (CESGRANRIO/2013 – BNDES) Uma empresa de propaganda pretende criar panfletos coloridos para divulgar certo produto. O papel pode ser laranja, azul, preto, amarelo, vermelho ou roxo, enquanto o texto é escrito no panfleto em preto, vermelho ou branco. De quantos modos distintos é possível escolher uma cor para o fundo e uma cor para o texto se, por uma questão de contraste, as cores do fundo e do texto não podem ser iguais?

a) 13

b) 14

c) 16

d) 17

e) 18

2. (CESGRANRIO/2012 – BB) Marcelo vai passar quatro dias na praia e leva em sua bagagem sete camisetas (três camisetas brancas diferentes, uma preta, uma amarela, uma vermelha e uma laranja) e quatro bermudas (uma preta, uma cinza, uma branca e uma azul).

De quantos modos distintos Marcelo poderá escolher uma camiseta e uma bermuda para vestir-se, de modo que as peças escolhidas sejam de cores diferentes?

a) 14

b) 17

c) 24

d) 26

e) 28

3. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Há cinco poços de petróleo a serem perfurados (P1, P2, P3, P4 , P5) e apenas três sondas disponíveis para perfuração (S1, S2, S3). A sonda S1 só pode ser utilizada para a perfuração dos poços P4 e P5. As sondas S2 e S3 podem ser utilizadas para a perfuração de qualquer dos

cinco poços. Serão perfurados, inicialmente, apenas três dos cinco poços e, para isso, cada sonda será alocada a um único poço.

Quantas maneiras distintas há para se alocarem as três sondas?

a) 8

b) 10

c) 15

d) 24

e) 40

4. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Quantos números naturais de 5 algarismos apresentam dígitos repetidos?

a) 27.216

b) 59.760

c) 62.784

d) 69.760

e) 72.784

5. (CESGRANRIO/2012 – BB) Para cadastrar-se em um site de compras coletivas, Guilherme precisará criar uma senha numérica com, no mínimo, 4 e, no máximo, 6 dígitos. Ele utilizará apenas algarismos de sua data de nascimento: 26/03/1980.

Quantas senhas diferentes Guilherme poderá criar se optar por uma senha sem algarismos repetidos?

a) 5.040

b) 8.400

c) 16.870

d) 20.160

e) 28.560

6. (CESGRANRIO/2012 – Petrobras) Os números de telefones celulares de certa região possuem oito dígitos, repetidos ou não, começando por 5, 6, 7, 8 ou 9. Com a expansão do mercado de telefonia, será necessário acrescentar um dígito aos números atuais. Nessa nova configuração, os números seguirão o mesmo padrão anterior (primeiro dígito maior ou igual a 5, podendo haver algarismos repetidos) e, assim, será possível habilitar n celulares a mais do que no sistema atual. Conclui-se que n é igual a

a) $0{,}1 \times 10^8$

b) $1{,}5 \times 10^8$

c) $4{,}5 \times 10^8$

d) $5{,}0 \times 10^8$

e) $9{,}0 \times 10^8$

GABARITO

1. LETRA C
2. LETRA C
3. LETRA D
4. LETRA C
5. LETRA B
6. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Permutação

1. (CESGRANRIO/2011 – Petrobrás) A vitrine de uma determinada loja possui 5 lugares para colocação de manequins. Considerando que a loja possui 5 manequins, em quantas formas diferentes eles podem ser arrumados?

a) 120

b) 100

c) 50

d) 25

e) 15

2. (CESGRANRIO/2005 – INSS) Para ter acesso a um arquivo, um operador de computador precisa digitar uma sequência de 5 símbolos distintos, formada de duas letras e três algarismos. Ele se lembra dos símbolos, mas não da sequência em que aparecem. O maior número de tentativas diferentes que o operador pode fazer para acessar o arquivo é

a) 115

b) 120

c) 150

d) 200

e) 249

3. (CESGRANRIO/2013 – BNDES) Cinco pessoas devem ficar em fila, sendo que duas delas (João e Maria) precisam ficar sempre juntos. De quantas formas diferentes essas pessoas podem-se enfileirar?

a) 48

b) 50

c) 52

d) 54

e) 56

4. (CESGRANRIO/2012 – BB) Se todos os anagramas da palavra BRASIL forem dispostos em ordem alfabética, o primeiro anagrama cuja última letra é “B” ocupará que posição?

a) 5ª

b) 25ª

c) 34ª

d) 49ª

e) 121ª

5. (CESGRANRIO/2021 – BB) De quantas formas diferentes, em relação à ordem entre as pessoas, dois homens e quatro mulheres poderão ser dispostos em fila indiana, de modo que entre os dois homens haja, pelo menos, uma mulher?

a) 10

b) 20

c) 48

d) 480

e) 720

6. (CESGRANRIO/2011 – Petrobrás) Quantos são os anagramas da palavra PETROBRAS que começam com as letras PE, nesta ordem?

a) 720

b) 2.520

c) 5.040

d) 362.880

e) 3.628.800

Gabarito

1. LETRA A
2. LETRA B
3. LETRA A
4. LETRA C
5. LETRA D
6. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Arranjo e Combinação

1. (CESGRANRIO/2004 – Secretaria da Administração/TO) Sebastiana faz doces de cupuaçu, de açaí, de tucumã, de cajá e de banana. Ela quer preparar embalagens especiais, cada uma com dois potes de doce de sabores diferentes, para vender na feira. Quantas embalagens diferentes Sebastiana poderá preparar?

a) 7

b) 9

c) 10

d) 14

e) 20

2. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Em uma loja, trabalham 8 funcionárias, dentre as quais Diana e Sandra. O gerente da loja precisa escolher duas funcionárias para trabalharem no próximo feriado. Sandra e Diana trabalharam no último feriado e, por isso, não podem ser escolhidas. Sendo assim, de quantos modos distintos esse gerente poderá fazer a escolha?

a) 15

b) 28

c) 43

d) 45

e) 56

3. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Certa pizzaria oferece aos clientes cinco tipos de cobertura (presunto, calabresa, frango, cebola e azeitona) para serem acrescentadas ao queijo. Os clientes podem escolher uma, duas ou três coberturas. João quer cebola em sua pizza, mas ainda não decidiu se colocará, ou não, outras coberturas. Considerando-se essas informações, de quantos modos distintos João poderá "montar" sua pizza?

a) 10

b) 11

c) 15

d) 16

e) 24

4. (CESGRANRIO/2007 – Comando da Aeronáutica) Uma empresa tem um quadro de funcionários formado por 3 supervisores e 10 técnicos. Todo dia, é escalada para o trabalho uma equipe com 1 supervisor e 4 técnicos. Quantas equipes diferentes podem ser escaladas?

a) 15210

b) 3780

c) 840

d) 630

e) 510

5. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Em um setor de uma empresa, trabalham 3 geólogos e 4 engenheiros. Quantas comissões diferentes de 3 pessoas podem ser formadas com, pelo menos, 1 geólogo?

a) 28

b) 31

c) 36

d) 45

e) 60

6. (CESGRANRIO/2018 – TRANSPETRO) De um quadro de profissionais com quatro engenheiros e cinco técnicos pretende-se formar um grupo de cinco profissionais com, pelo menos, um engenheiro e um técnico. Nessas condições, quantas possibilidades diferentes existem de formação desse grupo de cinco profissionais?

a) 19

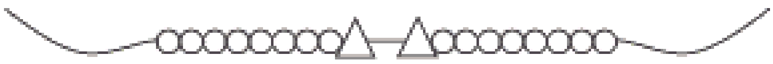
b) 20

c) 120

d) 125

e) 126

7. (CESGRANRIO/2010 – BB) Uma artesã de bijuterias fabrica um colar de contas no qual utiliza 16 contas pequenas e duas contas grandes, cujo modelo é apresentado abaixo.



Os critérios que ela utiliza para montar cada colar são os seguintes:

- **as contas pequenas são todas da mesma cor;**
- **contas grandes devem ter cores diferentes;**
- **se as contas pequenas forem da cor "x", nenhuma conta grande pode ser da cor "x".**

Sabendo-se que a artesã dispõe de contas pequenas brancas, pretas, azuis e laranjas e de contas grandes brancas, vermelhas, verdes, azuis e rosas, de quantos modos distintos ela pode escolher as cores das contas que irão compor um colar?

a) 28

b) 30

c) 32

d) 40

e) 42

8. (CESGRANRIO/2018 – TRANSPETRO) Seis empresas (Grupo 1), denominadas L1, L2, L3, L4, L5 e L6, prestam serviço de limpeza interna em grandes embarcações, e outras cinco empresas (Grupo 2), denominadas E1, E2, E3, E4 e E5, realizam manutenção elétrica nas mesmas embarcações. Um analista precisa contratar três empresas diferentes do Grupo 1 e duas empresas diferentes do Grupo 2, para realizarem, respectivamente, a limpeza e a manutenção elétrica de embarcações.

Nessas condições, o número de possibilidades diferentes de contratação das cinco empresas é igual a

a) 120

b) 200

c) 400

d) 1.200

e) 2.400

9. (CESGRANRIO/2018 – TRANSPETRO) Considere um conjunto de 10 empresas, denominadas A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Um analista precisa escolher quatro dessas empresas para distribuir quatro serviços diferentes, um para cada uma escolhida. Após uma análise técnica, decidiu que exatamente duas das três primeiras empresas — A, B e C — deveriam fazer quaisquer dois serviços dentre os quatro disponíveis. Os outros dois serviços que sobrassem seriam distribuídos entre duas das sete outras empresas restantes.

Nessas condições, o número de possibilidades diferentes para essa distribuição de serviços é igual a

a) 1724

b) 1692

c) 1584

d) 1512

e) 1294

10. (CESGRANRIO/2012 – Transpetro) De quantas maneiras é possível colorir 5 objetos iguais, usando quatro cores diferentes?

a) 20

b) 24

c) 56

d) 120

e) 1024

11. (CESGRANRIO/2010 – BB) Uma loja vende barras de chocolate de diversos sabores. Em uma promoção, era possível comprar três barras de chocolate com desconto, desde que estas fossem dos sabores ao leite, amargo, branco ou com amêndoas, repetidos ou não. Assim, um cliente que comprar as três barras na promoção poderá escolher os sabores de n modos distintos, sendo n igual a

a) 4

b) 10

c) 12

d) 16

e) 20

12. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Um posto de combustível comprou 6 bombas (idênticas) de abastecimento, que serão pintadas, antes de sua instalação, com uma única cor, de acordo com o combustível a ser vendido em cada uma. O posto poderá vender etanol (cor verde), gasolina (cor amarela) e diesel (cor preta). De quantas maneiras as bombas podem ser pintadas, considerando a não obrigatoriedade de venda de qualquer tipo de combustível?

a) 20

b) 28

c) 56

d) 216

e) 729

Gabarito

1. LETRA C
2. LETRA A
3. LETRA B
4. LETRA D
5. LETRA B
6. LETRA D
7. LETRA C
8. LETRA B
9. LETRA D
10. LETRA C
11. LETRA E
12. LETRA B

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.