Sumário

RAZÃO E PROPORÇÃO

Razão

Inicialmente, é de grande importância conhecermos o conceito de **Razão**:

A razão entre dois números é o quociente do primeiro pelo segundo.

A razão de **a** para **b** é representada como:

$$\frac{a}{b} \; ou \; a : b \; (com \; b \neq 0)$$

Em que **a** é chamado **antecedente** e **b** é chamado **consequente** da razão, de modo que ela é também representada por uma **fração**.

1.1. Razões Especiais

RAZÕES ESPECIAIS

Velocidade Média	É a *razão* entre o espaço percorrido e o tempo gasto para percorrê-lo.
Densidade Demográfica	É a *razão* entre o número de habitantes de uma região e a área dessa região.
Escalas	É a razão constante entre qualquer medida de comprimento em um desenho e a medida correspondente no objeto real.

2. Proporção

Proporção é a relação de igualdade entre duas ou mais ***razões***.

Proporção		
	Simples	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
	Múltipla	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

2.1. Propriedades das Proporções

- **Propriedade Fundamental:**

O produto dos meios é igual ao produto dos *extremos*.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow b \,.\, c = a \,.\, d$$

- **Propriedade da soma ou da diferença:**

A soma ou a diferença entre os dois primeiros termos de uma proporção está para o primeiro termo, assim como a soma ou a diferença entre os dois últimos está para o terceiro termo.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$
$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

A soma ou a diferença entre os dois primeiros termos de uma proporção está para o segundo termo, assim como a soma ou a diferença entre os dois últimos está para o quarto termo.

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$
$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

- **Propriedade da soma ou diferença dos antecedentes e consequentes:**

A soma ou a diferença dos antecedentes está para a soma ou a diferença dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$$
$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

3. Grandezas Diretamente Proporcionais

São grandezas que **crescem juntas e diminuem juntas**.

Do conceito acima, podemos chegar na conclusão de que **a razão entre elas é constante**.

$$\frac{a}{b} = k$$

Os números **a** e **b** são chamados **termos da proporção**. O resultado constante das razões entre dois termos correspondentes, **k**, é chamado de **constante de proporcionalidade**.

4. Grandezas Inversamente Proporcionais

Aqui a proporcionalidade de crescimento ou de decréscimo é inversa. Resumindo, **AUMENTANDO** uma delas, a outra **DIMINUI** na mesma proporção, ou, **DIMINUINDO** uma delas, a outra **AUMENTA** na mesma proporção.

Do conceito acima, podemos chegar a conclusão de que o **produto entre duas grandezas dessa natureza é constante**.

$$\boldsymbol{a \,.\, b = k}$$

5. Divisão Proporcional

5.1. Divisão em Números Diretamente Proporcionais

Dividir um número **T** em **n** partes **diretamente** proporcionais a um grupo de números dados, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, ... $\mathbf{a_n}$, significa encontrar um outro grupo, $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, ..., $\mathbf{X_n}$, que satisfaz duas propriedades, ou seja, vamos dividir algo que cumpra as duas condições abaixo:

1º) As **razões** entre cada uma das partes procuradas e os respectivos membros do grupo proporcional devem ser **todas iguais**:

$$\mathbf{\frac{X_1}{a_1} = \frac{X_2}{a_2} = \frac{X_3}{a_3} = \cdots = \frac{X_n}{a_n} = k}$$

2º) A **soma das partes** procuradas seve ser **igual ao valor original**:

$$\mathbf{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = T}$$

O quadro abaixo monstra dois métodos de resolução de questões dessa natureza:

DIVSIÃO DIRETAMENTE PROPORCIONAL

- **Método da constante de proporcionalidade (k)**
  - 1º) Montar a proporção
  - 2º) Determinar o valor de k
  - 3º) Substituir k na proporção para calcular o valor de cada parte
- **Método simplificado**
  - 1º) Dividir o valor total pela soma das partes
  - 2º) Comparar o resultado obtido no passo anterior com cada incógnita dividida pela sua parte

5.2. Divisão em Números Inversamente Proporcionais

Dividir um número **T** em **n** partes **inversamente** proporcionais a um grupo de números dados, a_1, a_2, a_3, ... a_n, significa encontrar um outro grupo, X_1, X_2, X_3, ..., X_n, que satisfaz as seguintes propriedades:

1º) As **razões** de cada uma das partes procuradas pelos respectivos **inversos** dos membros do grupo proporcional devem ser **todos iguais**:

$$\frac{X_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{X_2}{\frac{1}{a_2}} = \frac{X_3}{\frac{1}{a_3}} = \cdots = \frac{X_n}{\frac{1}{a_n}} = k$$

Repare que isso equivale a afirmar que os **produtos** de cada uma das partes procuradas pelos respectivos membros do grupo proporcional devem ser **todos iguais**:

$$a_1 \,.\, X_1 = a_2 \,.\, X_2 = a_3 \,.\, X_3 = \cdots = a_n \,.\, X_n = k$$

2º) A **soma das partes** procuradas deve ser **igual ao valor original**:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = T$$

O quadro abaixo monstra dois métodos de resolução de questões dessa natureza:

DIVISÃO INVERSAMENTE PROPORCIONAL

- **Método da constante de proporcionalidade (k)**
  - 1º) Montar a proporção
  - 2º) Determinar o valor de k
  - 3º) Substituir k na proporção para calcular o valor de cada parte
- **Método simplificado**
  - 1º) Dividir o valor total pelo inverso da soma das partes
  - 2º) Comparar o resultado obtido no passo anterior com cada incógnita dividida pelo inverso da sua parte

5.3. Conceito Misto – Divisão Direta e Inversamente Proporcional

O **conceito misto** implica a divisão de um número em certa quantidade de partes, de tal forma que cada uma dessas partes seja, **ao mesmo tempo**, diretamente proporcional a pelo menos uma sucessão de números dados e inversamente proporcional a pelo menos uma outra.

Portanto, a fim de dividirmos um número **T** em **n** partes que sejam **diretamente** proporcionais à sucessão (a_1, a_2, ..., a_n) e, ao mesmo tempo, **inversamente** proporcional à sucessão (b_1, b_2, ..., b_n), devemos encontrar a sucessão de números (x_1, x_2, ..., x_n), de tal forma que:

$$\frac{x_1}{a_1/b_1} = \frac{x_2}{a_2/b_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n/b_n} = k$$

Dessa maneira, fica claro que dividir um número, **ao mesmo tempo**, de forma direta e inversamente proporcional a outros significa dividi-lo de forma **diretamente** proporcional ao produto entre as parcelas diretas e as parcelas inversas de cada uma das partes.

Em outras palavras, no numerador de cada igualdade da proporção ficarão as partes procuradas, e no denominador teremos uma fração, em que a parte dividida diretamente proporcional (DP) de cada um fica “em cima” e a inversamente proporcional (IP) fica “embaixo”:

$$\frac{\textit{Parte procurada}}{\frac{\textit{Parte DP}}{\textit{Parte IP}}}$$

6. Regra de Sociedade

REGRA DE SOCIEDADE
- **Simples**
  - Capitais **iguais** e tempos **iguais**
  - Capitais **iguais** e tempos **diferentes**
  - Capitais **diferentes** e tempos **iguais**
- **Composta**
  - Capitais **diferentes** e tempos **diferentes**

Dessa maneira, **quatro casos** podem ocorrer:

1° CASO
Os capitais investidos são iguais e os tempos de permanência dos sócios na empresa são iguais.

Nessa situação, o lucro/prejuízo será dividido pelo **número de sócios da empresa**. Na verdade, trata-se do caso mais óbvio e fácil, de forma que não costuma ser cobrado em provas.

2° CASO
Os capitais dos sócios são iguais e os tempos de permanência de cada um na empresa são diferentes.

Nessa situação, a divisão do lucro/prejuízo será **diretamente proporcional aos tempos de cada um**.

3° CASO

Os capitais investidos são diferentes e os tempos de permanência
dos sócios na empresa são iguais.

Nessa situação, a divisão do lucro/prejuízo será **diretamente proporcional aos valores dos capitais**.

4° CASO
Os capitais e os tempos de permanência são diferentes.

Nessa situação, estamos diante da **Regra de Sociedade Composta**, em que a divisão do lucro/prejuízo será **diretamente proporcional ao produto dos capitais pelos tempos**.

Resumindo os **quatro casos** que estudamos:

CAPITAIS (C)	TEMPOS (T)	A divisão é diretamente proporcional a:
=	=	Nº de sócios
=	≠	T
≠	=	C
≠	≠	C . T