09

O que aprendemos?

Esta aula foi central na teoria e desenvolvimento deste curso. O que vimos até agora?

1) Vimos que as derivadas parciais são taxas relacionadas à variação de uma função, com relação a uma de suas variáveis, escolhida. Elas são muito semelhantes à derivada total e envolvem a definição de limite. A derivada parcial da função ![f(x,y)] com relação a ![x] é dada por:

![\frac{\partial{f}}{\partial{x}}(x,y)=\lim_{\Delta{x}\to 0}\frac{\Delta{f}}{\Delta{x}}]

Onde:

![\Delta{f}(x,y)=f(x+\Delta{x},y)-f(x,y)]

2) No Maxima, como calculamos uma derivada parcial? Vamos a um exemplo. Vamos supor que eu tenho uma função de produção de duas variáveis: ![L] e ![K], então:

![P(K,L)=CL^{0.75}K^{0.25}]

é a função de produção. Para defini-la no Maxima, escrevemos:

![P(K,L):=CL^{0.75}K^{0.25};] e pressionamos ENTER, em seguida (configure o Maxima para ele aceitar o pressionamento do ENTER (Editar -> Configurações -> marque a caixa: Enter calcula células).

Para calcular a derivada parcial com relação à variável K, escreva:

![diff(P(K,L),K);]

e para calcular com relação a L:

![diff(P(K,L),L);]

3) Em seguida, estudamos a interpretação geométrica das derivadas parciais:

Seja ![z=f(x,y)] uma função de duas variáveis. A derivada parcial desta função indica o valor da inclinação do plano tangente à função dada em um ponto escolhido de coordenadas ![x_{0},y_{0}].

A equação do plano que tangencia esta função, neste ponto, é dada por;

![z-z_{0}=\frac{\partial{f}}{\partial{x}}(x-x_{0})+\frac{\partial{f}}{\partial{y}}(y-y_{0})]

onde: ![z=f(x_{0},y_{0}].

Em outras palavras, a interpretação geométrica é a mesma que ocorre para uma função de uma variável, mas trocamos uma reta por um plano.

4) Em seguida, aprendemos como calcular a derivada de uma função ![z=f(x,y)] com relação a um parâmetro ![t]. supondo-se que ambas ![x] e ![y] dependam de ![t]. de modo independente.

Para calcular

![\frac{dz}{dt}] usamos a express]ao:

![\frac{dz}{dt}=\frac{\partial{f}}{\partial{x}}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial{f}}{\partial{y}}\frac{dy}{dt}

Em seguida, vimos que, se não determinarmos a variável de derivação, no Maxima, ele calcula a diferencial total da função, isto é, ele calcula a variação da função quando ambas as variáveis variam (e este resultado vale para qualquer que seja o número de variáveis).

No Maxima, se escrevermos:

![diff(P(T,V))] ele irá calcular a taxa total de variação de ![P] com relação a ambas as variáveis.

5) Em seguida, estudamos a derivada implícita de ![y(x)] com relação a ![x] quando não sabemos explicitamente qual é a relação de dependência de ![y(x)] em termos de ![x].

Por exemplo, fica muito difícil calcular a derivada de ![y] com relação a ![x], ou seja:

![\frac{dy}{dx}]

sendo que ![y(x)] e ![x] se relacionam por uma expressão como essa:

![x^{3}+cos(xy^{2})-y^{2}+1=0]

é impossível resolver esta expressão de ![y(x)] em termos de ![x]. Então, como procedemos?

No Maxima, bastam 3 passos:

5.1): defina a expressão implícita e dê um nome para ela, por exemplo: eq. 5.2): calcule: eq2:diff(eq,x); (no Maxima e press ENTER) 5.3): solve(eq2,('diff(y(x),x,1)));

se toda a sitanxe acima estiver correta e correr tudo bem, ele irá devolver para você o resultado:

![\frac{dy}{dx}] como uma expressão em termos de x, geralmente bem extensa, dependendo da relação que foi inserida no primeiro passo.

6) Finalmente, aprendemos derivada direcional e gradiente.

A derivada direcional mede a taxa de variação de uma função ![f(x,y)] na direção de um vetor ![U], desde que ele seja normalizado (seu tamanho seja igual a 1).

A derivada direcional é igual ao produto escalar do gradiente de uma função escalar pelo vetor unitário ![U] que define a direção da derivada direcional.

Em seguida, vimos que a derivada direcional aponta na direção da máxima variação da função, e esta ocorre na direção do gradiente desta função.

O gradiente de uma função é um vetor que aponta na direção que é sempre perpendicular às curvas de nível ou superfícies de nível da função dada.

Também vimos nesta aula como desenhar as curvas de nível de funções de duas variáveis no Maxima.