Estratégia
Concursos

Aula 21

TSE - Concurso Unificado (Analista Judiciário - Área Administrativa) Raciocínio Lógico e Matemática - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

11 de Maio de 2023

Índice

Olá, amigos! Como estão os estudos de Estatística?

Nesta aula, vamos estudar **análise combinatória**, que são ferramentas de **contagem**.

Como assim? Uma aula sobre contagem? 1, 2, 3, ...?

Sim e não! Sim, porque, de fato, você pode *contar* os eventos, simplesmente. Essa é uma boa estratégia quando há **poucos** eventos.

Mas, quando há muitos eventos, essa contagem se torna muito trabalhosa, você se perde no meio do caminho, ... Então, a ideia dessas ferramentas é ajudá-lo a "contar" os eventos com **eficiência**!

Algumas questões de concursos cobram a análise combinatória, puramente; e outras cobram no cálculo de **probabilidades**. Então, esse é um assunto bem importante.

Até já!

Luana Brandão

Posso te contar um pouquinho sobre a minha ***trajetória****? Sou Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense, e Auditora Fiscal da SEFAZ-RJ. Sou professora de Estatística do Estratégia porque quero muito te ajudar na sua trajetória, rumo à aprovação!*

Se tiver alguma dúvida, entre em **contato** comigo!

professoraluanabrandao@gmail.com

@professoraluanabrandao

"Lute e conquiste, supere seus medos. Acredite em seus sonhos."

Aislan Dlano

Análise Combinatória

Introdução

A Análise Combinatória, ou simplesmente combinatória, estuda **técnicas de contagem**, para que você não precise efetivamente *contar* todos os elementos.

Por exemplo, quantos números de 3 algarismos podemos formar com o conjunto {1, 3, 4}, sem repetir os algarismos, em um mesmo número?

Bem, as possibilidades são:

i) 134; ii) 143; iii) 314;

iv) 341; v) 413; vi) 431.

Portanto, são 6 números distintos.

Para resolver esse problema, não precisamos de nenhuma técnica específica. Só precisamos raciocinar e **contar** todas as possibilidades.

Mas, e se o conjunto de algarismos fosse de todos os números de 1 a 9? Perderíamos muito tempo para relacionar todas as possibilidades, e talvez nos perderíamos em algum momento.

A análise combinatória facilita justamente a **contagem** das possibilidades, em conjuntos finitos.

Ela também permite efetuar contagens de **subconjuntos** com determinadas características. Por exemplo, poderíamos estar interessados apenas nos números pares ou nos números primos.

Princípios Fundamentais da Contagem

Nesta seção, veremos os princípios fundamentais de contagem, que você vai utilizar muito. Eles permeiam as ferramentas da análise combinatória e são requisitados em praticamente todas as questões sobre o assunto, desde as mais simples, até as mais complexas.

Princípio Multiplicativo

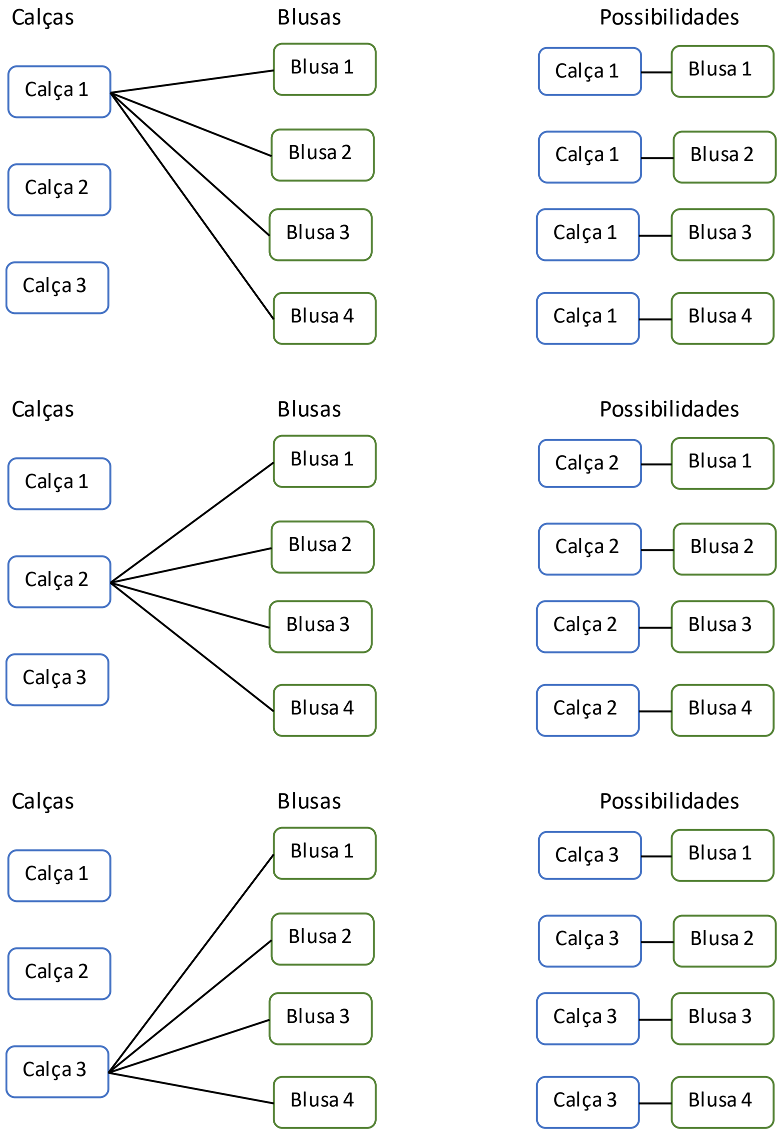
Esse princípio enuncia o seguinte:

> *Se um evento A ocorre de **m** maneiras diferentes **e** se, para cada uma dessas maneiras, um outro evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de **ambos** os eventos (A **e** B) ocorrerem é **m x n**.*

Para ilustrar, vamos considerar que João precisa se vestir com uma calça e uma blusa e que ele tem **3 calças** e **4 blusas**. Nesse caso, o evento A corresponde a vestir uma calça, com ***m* = 3** possibilidades, e o evento B corresponde a vestir uma blusa, com ***n* = 4** possibilidades.

Segundo o princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de João se vestir é:

$$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n} = \mathbf{3} \times \mathbf{4} = 12$$



Observe que, para cada calça, há 4 possibilidades de blusas. Portanto, são 4 blusas possíveis para a calça 1; 4 blusas possíveis para a calça 2; e 4 blusas possíveis para a calça 3. Somando todas essas possibilidades, temos **4 + 4 + 4 = 3 x 4 = 12**.

Obtemos o mesmo resultado se pensarmos que há 3 possibilidades de calça para cada blusa.

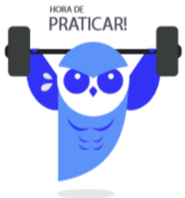
Podemos **extrapolar** esse princípio para **qualquer número de eventos**. Ou seja, se tivermos um terceiro evento **C** que ocorre de **p** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de os eventos A, B e **C** ocorrerem é **m x n x p**.

Utilizando o mesmo exemplo, considerando que João precisa utilizar um cinto e que ele tem **p = 2** cintos distintos, então o número de maneiras distintas de João colocar uma calça, uma blusa e um cinto é:

$$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p} = \mathbf{3} \times \mathbf{4} \times \mathbf{2} = 24$$

Generalizando para n eventos, com $\mathbf{p_1}$ possibilidades para o evento A_1, $\mathbf{p_2}$ possibilidades para o evento A_2, ... e $\mathbf{p_n}$ possibilidades para o evento A_n, então o número de maneiras de **todos** os n eventos ocorrerem é:

$$P(A_1 \textbf{ e } A_2 \textbf{ e } \ldots \textbf{ e } A_n) = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$$



(VUNESP/2019 – Prefeitura de dois Córregos/SP) Em um grupo de pessoas, há 12 homens e 13 mulheres. Com essas pessoas, uma dupla será aleatoriamente formada, com um homem e uma mulher, para participar de um concurso. O número total de possibilidades para a formação dessa dupla é

a) 12.

b) 144.

c) 156.

d) 168.

e) 288.

Comentários:

Havendo 12 homens e 13 mulheres, o número de possibilidades de selecionar um homem **E** uma mulher é, pelo princípio multiplicativo:

$$12 \times 13 = 156$$

Gabarito: C

(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG) Assinale a alternativa que contém a quantidade de vezes que é possível usar de maneiras diferentes duas blusas, três calças e quatro meias:

a) 24 maneiras diferentes.

b) 28 maneiras diferentes.

c) 32 maneiras diferentes.

d) 36 maneiras diferentes.

Comentários:

Há **2** blusas para cada uma das **3** calças.

Além disso, para cada possível combinação de uma blusa e uma calça, há **4** meias diferentes.

Logo, o número de alternativas é, pelo princípio multiplicativo:

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

Gabarito: A

(CESPE/2013 – TRT-ES) Os alunos de uma turma cursam 4 disciplinas que são ministradas por 4 professores diferentes. As avaliações finais dessas disciplinas serão realizadas em uma mesma semana, de segunda a sexta-feira, podendo ou não ocorrerem em um mesmo dia. A respeito dessas avaliações, julgue o item seguinte.

Se cada professor escolher o dia em que aplicará a avaliação final de sua disciplina de modo independente dos demais, haverá mais de 500 maneiras de se organizar o calendário dessas avaliações.

Comentários:

Vamos representar as escolhas dos 4 professores da seguinte forma:

Sabendo que há 5 dias disponíveis, então cada professor terá 5 possibilidades de escolha:

5	5	5	5

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de organizar o calendário para os 4 professores é:

$$\text{Número de maneiras} = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

Ou seja, há mais de 500 maneiras de organizar.

Gabarito: Certo.

(FGV/2022 – PM-PB) Cada vértice de um quadrado ABCD deverá ser pintado com uma cor. Há 5 cores diferentes disponíveis para essa tarefa. A única restrição é que os vértices que estejam em extremidades opostas de qualquer diagonal do quadrado (AC e BD) sejam pintados com cores diferentes. O número de maneiras diferentes de pintar os vértices desse quadrado é:

a) 18

b) 60

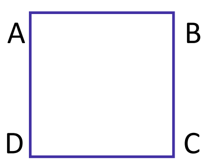
c) 120

d) 240

e) 400

Comentários:

A questão informa que temos **5** cores disponíveis para pintar 4 vértices de um quadrado:



No entanto, a cor do vértice **A** deve ser **diferente** da cor do vértice **C**; e a cor do vértice **B** deve ser **diferente** da cor do vértice **D**.

Assim, há **5** possibilidades para o vértice A e **4** possibilidades para o vértice C.

Similarmente, há **5** possibilidades para o vértice B e **4** possibilidades para o vértice D.

Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades para **todos** os 4 vértices é:

5 **x** 5 **x** 4 **x** 4 = 400

Gabarito: E

Contagem de Divisores

Com base no princípio multiplicativo, é possível calcular a **quantidade de divisores** de um número natural. O primeiro passo é **fatorar** o número natural em números **primos**. Por exemplo, vamos fatorar o número 60:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, podemos representar o número 60, a partir dos seus **divisores primos**, da seguinte forma:

$$60 = 2^{\mathbf{2}} \times 3^{\mathbf{1}} \times 5^{\mathbf{1}}$$

Agora é o *pulo do gato*: **Todos** os divisores de um número são formados pelo **produto** de um **subconjunto** dos seus **divisores primos**. Por exemplo, o número 15 é produto de 3 e 5 e pode ser representado como:

$$15 = 2^{\mathbf{0}} \times 3^{\mathbf{1}} \times 5^{\mathbf{1}}$$

Assim, todos os divisores de 60, que indicamos como d_{60}, podem ser representados da seguinte forma:

$$d_{60} = 2^{\boldsymbol{x}} \times 3^{\boldsymbol{y}} \times 5^{\boldsymbol{z}}, \qquad sendo\ \boldsymbol{x} \leq \mathbf{2}, \boldsymbol{y} \leq \mathbf{1}, \boldsymbol{z} \leq \mathbf{1}$$

Logo, as possibilidades para cada expoente são:

- x: 0, 1 ou 2 (**3** possibilidades);
- y: 0 ou 1 (**2** possibilidades);
- z: 0 ou 1 (**2** possibilidades).

Pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades desses eventos para encontrar o número de possibilidades, no total:

3 x **2** x **2** = 12

Logo, há 12 divisores de 60.

FIQUE ATENTO!

Os **expoentes** dos divisores primos de 60 eram **2**, **1** e **1**, e os valores multiplicados para encontrar o número de divisores foram **3**, **2** e **2**.

Portanto, basta **somar 1** a cada **expoente** e **multiplicá-los**:

$$\text{Número de Divisores} = (2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 \times 2$$

Isso porque o número de possibilidades que cada expoente pode assumir é igual ao **seu valor**, **mais 1**, correspondente ao **zero**.

HORA DE PRATICAR!

(FCC/2016 – Companhia Metropolitana/SP) Uma tabela retangular de 12 linhas por 18 colunas possui 216 campos de preenchimento. Outras tabelas retangulares com combinações diferentes de linhas e colunas também possuem 216 campos de preenchimento. Observando-se que uma tabela de 12 linhas por 18 colunas é diferente de uma tabela de 18 linhas por 12 colunas, o total de tabelas retangulares diferentes com 216 campos de preenchimento é igual a

a) 14

b) 12

c) 10

d) 16

e) 18

Comentários:

O enunciado pede a quantidade de tabelas distintas que podem ser formadas com 216 campos, de modo que uma tabela com A linhas e B colunas é **diferente** de uma tabela B linhas e A colunas.

Essa quantidade corresponde ao número de maneiras de obter 216 pelo produto de 2 números inteiros:

$$1 \times 216;\ 2 \times 108;\ \ldots;\ 108 \times 2;\ 216 \times 1$$

Ou seja, ela corresponde ao número **divisores** de 216.

Para isso, vamos primeiro fatorar 216 em números primos:

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$216 = 2^{3} \times 3^{3}$$

Os divisores de 216 podem ser, portanto, representados da seguinte forma:

$$d_{216} = 2^{x} \times 3^{y}$$

Nesse caso, x pode assumir **3 + 1 = 4** possibilidades (0, 1, 2 ou 3), assim como y., que também pode assumir as mesmas **3 + 1 = 4** possibilidades. Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades é:

4 x 4 = 16

Gabarito: D.

Princípio Aditivo

Agora, veremos outro princípio fundamental de contagem, chamado de **princípio aditivo**:

> *Se o evento A ocorre de **m** maneiras diferentes e o evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, e se A e B são **mutuamente exclusivos*** (ou seja, se um ocorrer o outro **não** ocorre), *então o número de maneiras de ocorrer **um** dos eventos (A **ou** B) é **m + n**.*

Para ilustrar esse princípio, vamos considerar que João precisa se **calçar** e que ele possui **3** opções de tênis e **2** opções de sapatos.

Nesse caso, o evento A corresponde a calçar um tênis, com ***m*** = 3 possibilidades, e o evento B corresponde a calçar um sapato, com ***n*** = 2 possibilidades. Esses eventos são **mutuamente excludentes** (João calçará um tênis **ou** um sapato; ele **não** pode calçar os dois). Assim, o número de maneiras de João se calçar é a soma:

m + n = 3 + 2 = 5

Podemos generalizar esse princípio para qualquer número de eventos.

> Havendo n eventos **mutuamente exclusivos**, com $\mathbf{p_1}$ possibilidades para o evento A_1, $\mathbf{p_2}$ possibilidades para o evento A_2, ... e $\mathbf{p_n}$ possibilidades para o evento A_n, então o número de maneiras **um** dos n eventos ocorrer é:
>
> $$P(A_1 \textbf{ ou } A_2 \textbf{ ou } \dots \textbf{ ou } A_n) = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

RESUMINDO

- Quando **ambos** ocorrem os eventos (A **E** B), **multiplicamos** as possibilidades;
- Quando ocorre **somente um** dos eventos (A **OU** B), **somamos** as possibilidades.

Eventos Concomitantes: A **e** B → Princípio Multiplicativo: n(A) **x** n(B)

Eventos Excludentes: A **ou** B → Princípio Aditivo: n(A) **+** n(B)

EXEMPLIFICANDO

Agora, vejamos um exemplo **combinando** esses dois princípios.

Vamos considerar que Maria precisa se vestir e se calçar, dispondo de:

- **4 vestidos**;
- **2 saias**;
- **3 blusas**; e
- **5 sapatos**.

Nesse caso, Maria irá colocar um **vestido** (evento **A**) **OU** um conjunto de **saia** (evento **B**) **E** **blusa** (evento **C**). De uma forma ou de outra, irá colocar **também** um **sapato** (evento **D**).

Nessa situação, as possibilidades de Maria se vestir e se calçar são:

i) Os eventos **B (saia)** e **C (blusa)** são concomitantes – princípio multiplicativo:

2 x 3 = **6** possibilidades;

ii) Os eventos **A (vestido)** e **(i) (saia e blusa)** são excludentes – princípio aditivo:

4 + 6 = **10** possibilidades;

iii) Os eventos **D (sapato)** e **(iii) (saia e blusa ou vestido)** são concomitantes – princípio multiplicativo:

5 x 10 = 50 possibilidades.

(2017 – Conselho Regional de Educação Física/CE) Numa estante encontram-se 4 dicionários de inglês, 3 de espanhol e 2 de francês.

De quantas maneiras uma pessoa pode escolher dois dicionários dessa estante e que sejam de idiomas diferentes?

a) 22

b) 24

c) 26

d) 28

Comentários:

Selecionando 2 dicionários de idiomas diferentes, podemos encontrar uma das seguintes opções:

i) um livro de inglês **e** um de espanhol; **ou**

ii) um livro de inglês **e** um de francês; **ou**

iii) um livro espanhol **e** um de francês.

Em cada opção, temos eventos concomitantes (ambos ocorrem), aplicando-se o princípio **multiplicativo**; enquanto as opções i, ii e iii se excluem mutuamente (somente uma delas irá ocorrer), aplicando-se o princípio **aditivo** entre elas.

- para i (inglês e espanhol), temos 4 x 3 = 12 possibilidades;
- para ii (inglês e francês), temos 4 x 2 = 8 possibilidades;
- para iii (espanhol e francês), temos 3 x 2 = 6 possibilidades.

E o total de maneiras de pegar dois dicionários de idiomas distintos é (princípio aditivo):

$$12 + 8 + 6 = 26$$

Gabarito: C

(CESPE/2013 – TRT-ES) Considerando que, na fruteira da casa de Pedro, haja 10 uvas, 2 maçãs, 3 laranjas, 4 bananas e 1 abacaxi, julgue o próximo item.

Se Pedro desejar comer apenas um tipo de fruta, a quantidade de maneiras de escolher frutas para comer será superior a 100.

Comentários:

Se Pedro deseja comer apenas **um** tipo de fruta, ele poderá comer uvas **OU** maçãs **OU** laranjas **OU** bananas **OU** abacaxi.

i) Uvas: há 10 uvas, logo Pedro poderá comer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 uvas. Logo, há 10 maneiras de escolher uvas para comer;

ii) Maçãs: há 2 maçãs, logo há 2 maneiras de escolher maçãs para comer;

iii) Laranjas: com 3 laranjas, há 3 maneiras de comer laranjas;

iv) Bananas: com 4 bananas, há 4 maneiras de comer bananas;

v) Abacaxi: há 1 abacaxi, logo há 1 forma de comer abacaxi.

Como Pedro irá escolher apenas **uma** dessas opções, então devemos aplicar o princípio aditivo:

$$\text{Número de maneiras} = 10 + 2 + 3 + 4 + 1 = 20$$

Que é inferior a 100.

Gabarito: Errado.

(CESPE 2016/FUB) Em um intervalo para descanso, a assistente em administração Marta foi a uma lanchonete cujo cardápio oferecia 7 tipos diferentes de salgados, 4 tipos diferentes de bolos, 3 espécies diferentes de tapioca, sucos de 3 sabores diferentes e 5 tipos diferentes de refrigerantes. A partir dessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Se Marta desejar fazer um lanche com apenas uma opção de comida e apenas uma bebida, ela terá mais de 100 maneiras distintas de organizar seu lanche.

Comentários:

Marta deseja escolher uma comida **E** uma bebida.

Para comer, Marta pode escolher uma das 7 opções de salgado **OU** um dos 4 tipos de bolo **OU** uma das 3 espécies de tapioca. Pelo princípio aditivo, as opções de comida são:

$$7 + 4 + 3 = 14$$

Para beber, Marta pode escolher uma das 3 opções de suco **OU** uma das 5 opções de refrigerante. Pelo princípio aditivo, as opções de bebida são:

$$3 + 5 = 8$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de se escolher uma comida **E** uma bebida é:

$$14 \times 8 = 112$$

Logo, há mais de 100 maneiras.

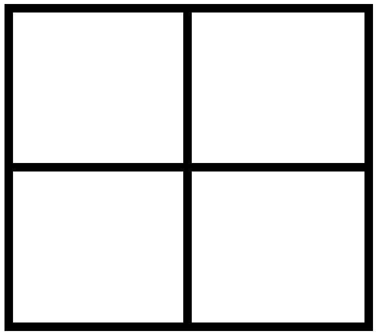
Gabarito: Certo.

Princípio da Casa dos Pombos

O **princípio do pombal** ou **da casa dos pombos** afirma que:

*Se **n** pombos devem se abrigar em **m** casas e se **n > m**, então **pelo menos uma** casa irá conter **mais de um** pombo.*

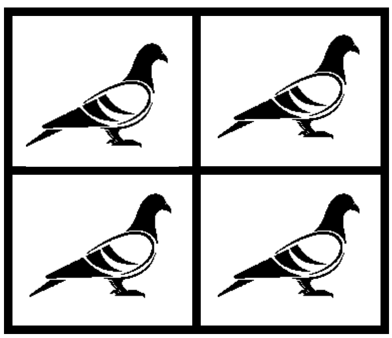
Por exemplo, podemos ter **m** = 4 casas. Nesse caso, se tivermos qualquer número de pombos **maior** do que 4, então pelo menos uma casa conterá **mais de um** pombo.



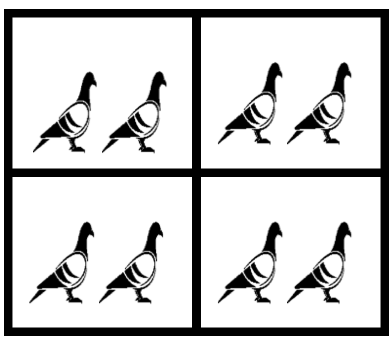
Por que pombos*?* Bem, os pombos são imprevisíveis. Eles podem resolver ficar todos juntos ou todos separados... Nesse sentido, eles representam **eventos aleatórios**, como a seleção de determinados elementos **ao acaso**. Porém, mesmo sendo imprevisíveis, é possível fazer algumas **afirmações** ou **garantias**. Para fazer essas afirmações, precisamos pensar no **pior cenário** possível.

Por exemplo, considerando um total de 4 casas, quantos pombos são necessários para **garantir** que haverá pelo menos 2 pombos em uma casa? Bem, é **possível** que, havendo apenas 2 pombos, ambos escolham a mesma casa. Porém, isso não pode ser **garantido**, pois também é possível que escolham casas distintas. A mesma situação ocorre com 3 e com 4 pombos, pois ainda é possível que todos escolham casas distintas.

Entretanto, com 5 pombos, **necessariamente** haverá **pelo menos** 2 pombos em uma casa. Como há somente 4 casas, ainda que eles tentem se espalhar, o 5º pombo não terá alternativa e terá que ficar com algum outro pombo.



Também podemos encontrar o número de pombos necessários para **garantir** que haja pelo menos **3 pombos em uma mesma casa**. No **pior cenário**, eles ficarão todos espalhados com 2 pombos por casa, antes de termos 3 pombos em uma mesma casa.



Para que haja 2 pombos em cada uma das 4 casas, serão necessários 2 x 4 = 8 pombos. Portanto, são necessários 8 + 1 = 9 pombos, para **garantir** que haverá **pelo menos** 3 pombos em uma casa.

Podemos mencionar outros exemplos, mais próximos à nossa realidade. Por exemplo, qual é o menor número de pessoas necessário para **garantir** que **pelo menos 2 pessoas** façam aniversário no mesmo mês?

Para garantir isso, precisamos pensar no pior cenário: aquele que em que os aniversariantes ficam todos "espalhados".

Assim, em um grupo de 12 pessoas, todas fariam aniversário em meses distintos. Porém, em um grupo de 13 pessoas, como há somente 12 meses, então necessariamente alguém fará aniversário no **mesmo** mês que outra pessoa. Portanto, são necessárias 13 pessoas para **garantir** que **pelo menos 2** façam aniversário no mesmo mês.

*Por que a pergunta é pelo **menor** número de pessoas?*

Note que, se houver mais do que 13 pessoas (ou seja, 14, 15,...), também poderemos garantir que pelo menos 2 pessoas farão aniversário no mesmo mês. Por isso, a questão se interessa pelo **menor** número de pessoas, para o qual temos a garantia desejada.

(FCC/2017 – Analista Executivo da Secretaria de Gestão/MA) No setor administrativo de uma empresa, há quatro tipos de cargos: estagiários, técnicos, gerentes e diretores. Alguns funcionários desse setor comporão um grupo que será transferido para o setor financeiro da empresa. Compondo-se o grupo com funcionários escolhidos ao acaso, o número mínimo de funcionários que deverá compor o grupo para que se tenha certeza de que nele haverá quatro funcionários de um mesmo cargo é igual a

a) 17

b) 15

c) 13

d) 16

e) 14

Comentários:

O pior cenário (ou seja, o cenário que exige o maior número de funcionários para garantir que 4 terão o mesmo cargo) é aquele em que os funcionários são todos de cargos diferentes. Assim, haverá 3 funcionários para cada um dos 4 tipos de cargo, antes de haver 4 funcionários de algum cargo.

Ou seja, haverá 3 x 4 = 12 funcionários distribuídos por todos os cargos, em 3 funcionários por cargo. Com o 13º funcionário, necessariamente haverá 4 funcionários para algum cargo.

Gabarito: C

(CESPE/2013 – TCE-RO) Considerando que, em uma pesquisa de rua, cada entrevistado responda sim ou não a cada uma de dez perguntas feitas pelos entrevistadores, julgue o item seguinte.

Será necessário entrevistar mais de mil pessoas para se garantir que duas pessoas respondam igualmente a todas as perguntas.

Comentários:

Para **garantir** que duas pessoas respondam igualmente a todas as perguntas, é necessário entrevistar um número de pessoas **maior** que o número de maneiras diferentes de responder ao questionário. Ou seja, essa questão combina o princípio dos pombos com o princípio multiplicativo.

Vamos representar as possibilidades de resposta para as 10 perguntas conforme abaixo:

Sabemos que há 2 respostas distintas possíveis para cada pergunta:

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de responder às 10 perguntas é:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024$$

Assim, precisamos entrevistar 1.025 pessoas para **garantir** que haverá pelo menos duas respostas iguais, ou seja, mais de 1.000 pessoas.

Gabarito: Certo.

FATORIAL DE UM NÚMERO NATURAL

Para resolvermos diversas questões de análise combinatória, utilizamos o chamado **fatorial**.

O **fatorial de um número natural** (0, 1, 2, 3, ...) é representado como:

$$\boldsymbol{n}!$$

O fatorial representa o **produto** de **todos** os números inteiros positivos **menores ou iguais àquele número**, conforme indicado a seguir:

$$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) \times (\boldsymbol{n}-\mathbf{2}) \times \ldots \times \mathbf{2} \times \mathbf{1}$$

Por exemplo:

2! = 2 x 1 = 2

3! = 3 x 2 x 1 = 6

4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120

6! = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720

Note que podemos escrever o fatorial de um número natural em função do fatorial de **qualquer** outro número natural **menor**, por exemplo:

$$4! = 4 \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!} = 4 \times 3!$$

$$7! = 7 \times \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!} = 7 \times 6!$$

$$7! = 7 \times 6 \times \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!} = 7 \times 6 \times 5!$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!$$

Esse tipo de mudança facilita o cálculo das divisões entre fatoriais (**muito comuns** em combinatória):

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

$$\frac{15!}{13!} = \frac{15 \times 14 \times 13!}{13!} = \frac{15 \times 14 \times \cancel{13!}}{\cancel{13!}} = 15 \times 14 = 210$$

Nesses casos, aplicamos o fatorial **antes** de efetuar a divisão. Quando for necessário realizar a divisão **antes**, utilizaremos o **parêntesis**. Por exemplo:

$$\frac{6!}{3!} \neq \left(\frac{6}{3}\right)!$$

Em $\frac{6!}{3!}$, calculamos os **fatoriais antes**: $\frac{6!}{3!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$; já em $\left(\frac{6}{3}\right)!$, efetuamos a **divisão** entre parêntesis, **antes** do fatorial:

$$\left(\frac{6}{3}\right)! = 2! = 2 \times 1 = 2$$

Analogamente, em um produto, temos: $2 \times 4! \neq (2 \times 4)!$

Em $2 \times 4!$, calculamos o **fatorial** de 4 **antes** da multiplicação:

$$2 \times 4! = 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$$

Em $(2 \times 4)!$, **multiplicamos** os fatores, **antes** de aplicar o fatorial:

$$(2 \times 4)! = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320$$

O mesmo vale para as demais operações:

$$2 + 4! \neq (2 + 4)!$$

Pois $2 + 4! = 2 + 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 26$; e $(2 + 4)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

$$8 - 3! \neq (8 - 3)!$$

Pois $8 - 3! = 8 - 3 \times 2 \times 1 = 2$; e $(8 - 3)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Agora, vejamos dois **casos especiais** do fatorial. O **fatorial de 1** pode ser entendido pela própria definição de fatorial. Como não há número inteiro positivo menor do que 1, apenas igual, então esse será o único fator:

1! = 1

O segundo caso especial é **0!** Você pode considerar que o seguinte resultado é uma convenção:

0! = 1

Para entender o porquê dos resultados desses casos especiais, devemos observar que o fatorial de um número n pode ser escrito como o **fatorial do número seguinte**, (n + 1)!, **dividido** por esse **número seguinte**, n + 1.

Por exemplo, 4! pode ser representado como 5! dividido por 5.

$$4! = \frac{5!}{5} = \frac{\cancel{5}\times4\times3\times2\times1}{\cancel{5}} = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Similarmente, o fatorial de 1 pode ser representado como:

$$1! = \frac{2!}{2} = \frac{2\times1}{2} = 1$$

E o fatorial de 0 como:

$$0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG) O fatorial de um número é extremamente utilizado na análise combinatória. Dessa forma, analise as proposições a seguir:

I. O fatorial n! de um número n ∈ ℕ é dado por n! = n × (n − 1) × (n − 2) ... 3 × 2 × 1;

II. 0! = 1;

III. 1! = 0.

Está(ão) CORRETA(S) a(s) proposição(ões):

a) II apenas.

b) I e II apenas.

c) II e III apenas.

d) I e III apenas.

Comentários:

A proposição I corresponde exatamente à definição de fatorial: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$

A proposição II também está correta, pois $0! = 1$.

A proposição III está incorreta, pois $1! = 1$.

Ou seja, estão corretas apenas as proposições I e II.

Gabarito: B

(2018 – Prefeitura de Uruçuí/PI) A simplificação da expressão a seguir é: $\frac{200!}{198!}$

a) 200

b) 198!

c) 38.800

d) 39.800

Comentários:

Podemos escrever 200! como 200! = 200 x 199 x 198!. Assim, temos:

$$\frac{200!}{198!} = \frac{200 \times 199 \times 198!}{198!} = 200 \times 199 = 39.800$$

Gabarito: D

Permutação

Informalmente, podemos dizer que **permutar** significa **trocar de lugar**.

Ao trocar elementos de lugar, a **ordem** desses elementos se **modifica**. Por isso, podemos dizer que as técnicas de permutação permitem calcular as **diferentes possibilidades** de se **ordenar** elementos.

Permutação Simples

Na permutação simples, os elementos a serem ordenados são todos **distintos** entre si.

Digamos que 3 alunos (Ana, Beto e Caio), de um grupo de estudo, serão avaliados e, em seguida, ranqueados de acordo com o resultado da sua avaliação. Supondo que não há empates, de quantas formas esses alunos podem ser ranqueados?

Como o exemplo é pequeno poderíamos relacionar e contar todas as possibilidades, mas vamos experimentar uma outra forma de resolver: encontrando o **número de possibilidades** para **cada posição**:

___	___	___
1º	2º	3º

Quais são os alunos que podem ficar em primeiro lugar? Qualquer um deles (Ana, Beto ou Caio) **pode** ficar em primeiro lugar. Portanto, temos 3 possibilidades para o primeiro lugar.

E para o segundo lugar? Bem, sabendo que alguém ficará em primeiro lugar, restarão 2 possibilidades para o segundo colocado.

E para o terceiro lugar, sabendo que alguém ficará em primeiro lugar e outro ficará em segundo lugar, restará apenas uma possibilidade para o terceiro lugar.

3	2	1
1º	2º	3º

Como são eventos concomitantes, pois alguém ficará em primeiro lugar, outra pessoa ficará em segundo **E** outra em terceiro, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento, pelo princípio multiplicativo:

$$3 \times 2 \times 1$$

Poderíamos ter começado o raciocínio por qualquer posição, que o resultado seria o mesmo.

Como assim "sobrarão" 2 possibilidades para o 2º colocado e 1 possibilidade para o 3º colocado?

ESCLARECENDO!

Para a 1ª posição, **todos** os 3 alunos estão disponíveis:

3		
1º	2º	3º

Para cada uma dessas 3 possibilidades, teremos ordenações **diferentes**, dependendo do 2º e 3º lugares. Por exemplo, mantendo Ana em 1º lugar, temos Ana, Beto e Caio ou Ana, Caio e Beto.

Sabendo que não é possível que o mesmo aluno ocupe mais de uma posição, então há **apenas 2 possibilidades** para a 2ª posição, uma vez que um dos alunos terá ocupado a 1ª.

Por isso, dizemos que o aluno da 1ª posição "**já foi escolhido**" e assim sobrarão apenas 2 alunos para a 2ª posição:

3	2	
1º	2º	3º

Da mesma forma, só haverá 1 aluno que não terá ocupado nem a primeira nem a segunda posição, logo ele irá ocupar a terceira posição. Por isso, dizemos que, "**após a escolha**" do 1º e do 2º colocados, sobrará apenas 1 aluno para a 3ª posição:

3	2	1
1º	2º	3º

Por fim, multiplicamos todas essas possibilidades (princípio multiplicativo) para encontrar a quantidade de maneiras de ordenar todos os 3 elementos.

E se houvesse 4 alunos? Quais seriam as possibilidades de ordenação? Nesse caso, teríamos 4 possibilidades para o primeiro lugar; 3 para o segundo lugar; 2 para o terceiro e 1 para o quarto:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

E para 10 alunos? Teríamos 10 possibilidades para o primeiro lugar, 9 para o segundo, depois 8, depois 7... até sobrar 1 possibilidade para o décimo lugar:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Assim, a posição seguinte terá sempre **uma** possibilidade **a menos** do que a posição anterior.

Para n alunos, temos:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Lembrou de algo? Essa é a fórmula do **fatorial**!

Portanto, a **permutação simples** de **n** elementos distintos, que representamos como $\boldsymbol{P_n}$, que corresponde ao número de possibilidades de **ordenar n** elementos **distintos**, é:

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

Reforçando, a **permutação simples** pode ser utilizada para calcular todas as possibilidades de se **reordenar** elementos, sejam letras de uma sigla (formando anagramas distintos), algarismos em um número (formando números distintos), etc., desde que os elementos sejam **todos distintos**.

(FGV/2019 – Prefeitura de Salvador/BA) Trocando-se a ordem das letras da sigla PMS de todas as maneiras possíveis, obtêm-se os anagramas dessa sigla. O número desses anagramas é:

a) 16.

b) 12.

c) 9.

d) 8.

e) 6.

Comentários:

Considerando que todas as 3 letras de PMS são distintas, o número de anagramas, ou seja, de formas de se reordenar essas letras é a permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Gabarito: E

(VUNESP/2018 – PM/SP) Em um armário, há 5 prateleiras e será preciso colocar 5 caixas, de cores distintas, cada uma em uma prateleira desse armário, sem que haja uma ordem específica. O número total de maneiras de colocar essas caixas nesse armário é

a) 25.

b) 60.

c) 95.

d) 120.

e) 165.

Comentários:

Por se tratar de caixas distintas, a serem alocadas em determinada ordem, temos uma permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: D.

(CESPE 2018/EBSERH) Julgue o próximo item, a respeito de contagem.

Se a enfermaria de um hospital possuir cinco leitos desocupados e se cinco pacientes forem ocupar esses leitos, então haverá mais de 100 formas diferentes de fazer essa ocupação.

Comentários:

Considerando que temos 5 leitos para serem ocupados por 5 pacientes, temos uma permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Logo, há mais de 100 formas de fazer essa ocupação.

Gabarito: Certo.

(CESPE 2016/CBM-DF) Para atender uma grave ocorrência, o comando do corpo de bombeiros acionou 15 homens: 3 bombeiros militares condutores de viatura e 12 praças combatentes, que se deslocaram em três viaturas: um caminhão e duas caminhonetes. Cada veículo transporta até 5 pessoas, todas sentadas, incluindo o motorista, e somente os condutores de viatura podem dirigir uma viatura. Com relação a essa situação, julgue o item seguinte.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuir os condutores de viatura para dirigir os veículos é superior a 5.

Comentários:

Considerando que há 3 condutores para 3 veículos, a quantidade de maneiras de organizá-los corresponde a uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Logo, a quantidade de maneiras é superior a 5.

Gabarito: Certo.

Permutação Simples com Restrição

É possível que algumas questões de permutações imponham determinadas **restrições**. Nesses casos, nem todos os elementos poderão permutar livremente, o que exige mais atenção para resolver a questão.

Por exemplo, vamos considerar que há 8 elementos distintos a serem ordenados, por exemplo, os algarismos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Vamos representar as opções de ordenação com os espaços abaixo.

Suponha que o número 1 esteja **fixo** na primeira posição e o número 8, na oitava posição:

1							8

Sendo assim, restarão os algarismos 2 a 7 (ou seja, um total de **6 algarismos**) para serem ordenados nos **6 espaços** restantes. Dessa forma, teremos uma permutação de 6 elementos em 6 posições:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Poderíamos ter **fixado quaisquer 2 algarismos** em quaisquer 2 posições, que continuaríamos com a **permutação dos 6 algarismos restantes**, nos 6 espaços restantes. Portanto, o número de possibilidades de ordená-los seria o mesmo.

De modo geral, havendo **n elementos**, dos quais **p** estejam **fixos em determinadas posições**, fazemos a **permutação** de **n – p** elementos:

$$\mathbf{P_{n-p} = (n - p)!}$$

Um exemplo sutilmente **diferente** seria se esses dois algarismos fossem posicionados nos **extremos**, mas **sem fixar** qual irá ocupar a primeira posição e qual irá ocupar a última posição.

Assim, poderíamos ter o número 1 na primeira posição e o número 8 na oitava; **ou** o número 8 na primeira posição e o número 1 na oitava:

1							**8**

8							**1**

Nesse caso, para cada uma das 720 possibilidades de permutar os algarismos de 2 a 7 nas posições intermediárias, calculadas anteriormente, há **2 possibilidades distintas** de posicionar os extremos.

Pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar as possibilidades desses dois eventos:

$$2 \times P_6 = 2 \times 720 = 1440$$

Na verdade, essas **2 possibilidades** de alocar esses 2 algarismos, 1 e 8, nas 2 posições extremas correspondem à **permutação** desses 2 elementos.

Assim, podemos representar o número de maneiras de se ordenar os 8 algarismos, nessas condições, como:

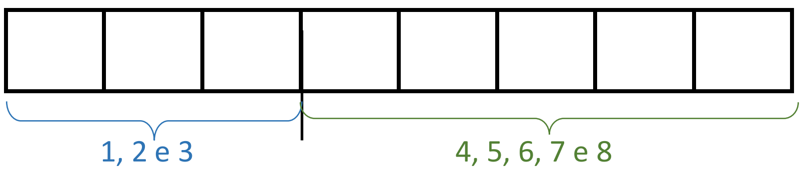
$$P_2 \times P_6$$

Em outras palavras, podemos tratar como **duas permutações em separado**: uma com os 2 elementos que ocuparão as posições extremas; e a outra com os 6 elementos que ocuparão as posições não extremas.

E para ordenar **todos** os 8 elementos, **multiplicamos** esses resultados (princípio multiplicativo).

Com isso, podemos resolver outros problemas que indiquem determinadas posições a certos elementos, **sem fixar** a posição específica de cada um.

Por exemplo, vamos supor que os 3 primeiros algarismos tenham que ocupar as 3 primeiras posições, em **qualquer ordem**; e os demais algarismos, as demais posições, também em qualquer ordem:



Nesse caso, temos a permutação de **3 elementos** nas 3 primeiras posições e de **5 elementos** nas demais posições.

Pelo princípio **multiplicativo**, o número de ordenações possíveis é:

$$P_3 \times P_5 = 3! \times 5! = 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Agora, vamos supor que os algarismos ímpares tenham que ocupar posições ímpares e os algarismos pares, posições pares, como ilustrado abaixo:

I	**P**	**I**	**P**	**I**	**P**	**I**	**P**

Também vamos resolver esse caso com **2 permutações em separado**.

Em relação aos **ímpares**, temos 4 algarismos para 4 posições, logo, temos uma permutação de **4 elementos**:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Em relação aos **pares**, temos 4 algarismos para 4 posições, logo, temos outra permutação de **4 elementos**:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Pelo princípio **multiplicativo**, o número de maneiras de ordenar todos esses 8 algarismos é:

$$24 \times 24 = 576$$

Em geral, havendo **n** elementos, dos quais **p** estejam **designados a determinadas posições**, mas **sem fixar** a posição específica de cada um, fazemos a permutação de **n – p** elementos e **multiplicamos** pela permutação de **p** elementos:

$$P_{n-p} \times P_p = (n-p)! \times p!$$

(FCC/2019 – Analista Judiciário do TRF 3ª Região) Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é

a) 30

b) 4

c) 120

d) 24

e) 6

Comentários:

Essa questão trabalha com a permutação de 5 elementos, com um deles fixo.

Considerando que 1 dos candidatos está **fixo** no município A, restam 4 candidatos para serem alocados em 4 municípios (B, C, D ou E). Portanto:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: D.

(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão. A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 8! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o camelo fique na primeira posição e o elefante fique na sexta posição.

Comentários:

A questão pede para organizarmos uma fila de 10 animais, de forma que o camelo (C) fique na primeira posição e o elefante (E), na sexta:

C						E			

Como esses elementos estão **fixos** em posições específicas, basta reordenarmos os **demais elementos**.

Logo, o número de maneira de organizarmos essa fila corresponde à permutação de 10 – 2 = 8 elementos:

$$P_8 = 8!$$

Gabarito: Certo.

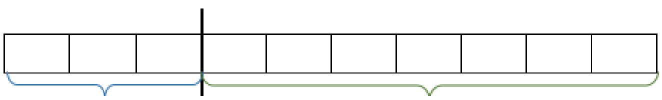
(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 3 × 7! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o elefante, o camelo e o leão fiquem nas três primeiras posições, não necessariamente nessa ordem.

Comentários:

Agora, desejamos organizar a fila de forma que os 3 animais (Elefante, Camelo e Leão) fiquem nas 3 primeiras posições, em **qualquer ordem**. Consequentemente, os outros 10 – 3 = 7 animais ocuparão as outras 7 posições, em qualquer ordem:



Elefante, Camelo, Leão   Outros 7 animais

O número de formas de organizar os 3 animais corresponde a uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3!$$

O número de formas de organizar os outros 7 animais equivale a uma permutação de 7 elementos:

$$P_7 = 7!$$

Pelo princípio multiplicativo, multiplicamos esses resultados para obter o número de maneiras possíveis de organizar toda a fila:

$$\text{Número de possibilidades} = 3! \times 7!$$

Esse resultado é **diferente** do valor informado no item, qual seja, 3 × 7!, logo, o item está errado. Aliás, como 3! = 3 x 2, o nosso resultado é o **dobro** do que consta no item da questão.

Gabarito: Errado.

Vejamos mais uma ferramenta para resolver problemas de **permutação simples com restrição**.

Vamos supor que os algarismos 1 e 2 tenham que ficar **sempre juntos**, **nessa ordem**.

Nesse caso, tratamos esses 2 algarismos como **elemento único**, que podemos chamar de **A**. Assim, em vez de 8 elementos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}, ordenaremos apenas **7 elementos** {A, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

Portanto, a quantidade de maneiras de ordenar 8 elementos, de modo que 2 estejam sempre **juntos** em uma **determinada ordem**, corresponde à **permutação de 7 elementos**.

Se houvesse 3 elementos **juntos** em **determinada ordem**, {1, 2 e 3}, chamaríamos os 3 elementos de A, e calcularíamos a permutação dos **outros 5 elementos acrescido do elemento A**, o que corresponde à permutação de **6 elementos** {A, 4, 5, 6, 7 e 8}.

De modo geral, havendo **n elementos**, dos quais **j** devam ficar **juntos em determinada ordem**, fazemos a **permutação** de **n – j + 1** elementos:

$$\mathbf{P_{n-j+1} = (n - j + 1)!}$$

E se os elementos tivessem que ficar **juntos**, mas em **qualquer ordem**?

Nesse caso, o **início** da solução é similar, isto é, chamamos esses elementos de um **único elemento**, **A**, e fazemos a **permutação** do elemento **A** com os demais elementos.

Por exemplo, se os algarismos {1, 2 e 3} tivessem que ficar juntos, mas em qualquer ordem, dentre os 8 algarismos, faríamos a permutação dos 6 elementos {A, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Porém, para **cada uma** dessas 720 possibilidades de ordenar os elementos {A, 4, 5, 6, 7 e 8}, os algarismos {1, 2 e 3} pode aparecer como:

... 1 2 3 ...	... 1 3 2 ...	... 2 1 3 ...
... 2 3 1 ...	... 3 1 2 ...	... 3 2 1 ...

Em outras palavras, para cada uma das possibilidades que calculamos anteriormente, temos diferentes formas de **ordenar os 3 elementos**.

Como calculamos as diferentes formas de **ordenar 3 elementos**? Pela **permutação** de 3 elementos!

Logo, para calcular o número de maneiras de organizar **todos** os 8 elementos nessas condições, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela permutação de **3 elementos** (princípio multiplicativo):

$$P_6 \times P_3 = 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$$

> De modo geral, havendo **n** elementos, dos quais **j** elementos devem ficar **juntos em qualquer ordem**, fazemos a permutação de **n – j + 1** elementos e **multiplicamos** pela permutação de **j** elementos:
>
> $$P_{n-j+1} \times P_j = (n - j + 1)! \times j!$$

> Na permutação simples com restrição, podemos (i) designar **posições** para determinados elementos ou (ii) determinar elementos a permanecerem **juntos**.
>
> i) Quando designamos **posições**, devemos permutar os demais elementos.
>
> i.a) Havendo p elementos **fixos** em determinadas posições, dentre n elementos no total, devemos permutar **n – p** elementos:
>
> $$P_{n-p} = (n - p)!$$
>
> i.b) Caso os p elementos possam ser **reordenados** dentre as posições designadas, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela permutação de p elementos:
>
> $$P_{n-p} \times P_p = (n - p)! \times p!$$
>
> ii) Quando determinamos elementos devem permanecer **juntos**, devemos considerá-los como **elementos único** e permutar esse novo elemento junto aos demais.
>
> ii.a) Havendo **j** elementos que deverão permanecer **juntos em determinada ordem**, dentre n elementos no total, devemos permutar os demais **n – j** elementos acrescidos de **1** unidade, a qual corresponde ao **conjunto** dos j elementos:
>
> $$P_{n-j+1} = (n - j + 1)!$$
>
> i.b) Se os **j** elementos, que deverão permanecer juntos, puderem ser **reordenados** entre si, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela permutação de **j** elementos:
>
> $$P_{n-j+1} \times P_j = (n - j + 1)! \times j!$$

HORA DE PRATICAR!

(FGV/2017 – Prefeitura de Salvador/BA) Três casais vão ocupar seis cadeiras consecutivas de uma fila do cinema, e os casais não querem sentar separados. Assinale a opção que indica o número de maneiras diferentes em que esses três casais podem ocupar as seis cadeiras.

a) 6.

b) 12.

c) 24.

d) 36.

e) 48.

Comentários:

Primeiro, vamos tratar cada casal como elemento único. Assim, temos a permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Uma vez definida a ordem entre os casais, é necessário que cada casal decida a sua ordem.

Assim, para cada uma dessas 6 possibilidades de ordem entre os casais, há $P_2 = 2$ possibilidades de cada um dos três casais se organizarem:

$$6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

Gabarito: E

(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 7 × 7! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o elefante, o camelo e o leão estejam sempre juntos, mantendo-se a seguinte ordem: leão na frente do camelo e camelo na frente do elefante.

Comentários:

Para organizar uma fila de 10 animais, de modo que o leão, o camelo e o elefante apareçam sempre nessa ordem, podemos tratá-lo como elemento único.

Assim, o número de formas de organizar os outros 10 – 3 = 7 animais e **mais** esse trio corresponde a uma permutação de 8 elementos:

$$P_8 = 8! = 8 \times 7!$$

Esse resultado é diferente de **7** x 7!, descrito no item.

Gabarito: Errado.

(CESPE 2018/BNB) Julgue o próximo item, relativo a análise combinatória e probabilidade.

A quantidade de números naturais distintos, de cinco algarismos, que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, de modo que 1 e 2 fiquem sempre juntos e em qualquer ordem, é inferior a 25.

Comentários:

A quantidade de números que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 corresponde a uma permutação desses elementos. Para que os números 1 e 2 fiquem sempre juntos, podemos considerá-lo com elemento único. Assim, temos uma permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Porém, para cada uma dessas 24 maneiras de organizar os algarismos 3, 4, 5 e o elemento 1-2, podemos ter 1 primeiro e depois 2, ou 2 primeiro e depois 1. Logo, pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar esse resultado pela permutação de 2 elementos $P_2 = 2! = 2$:

Quantidade de números possíveis = 24 x 2 = 48

Essa quantidade é **superior** a 25.

Gabarito: Errado.

Permutação com Repetição

Na permutação **simples**, todos os elementos são **distintos**.

Por exemplo, se houver 3 elementos {A, B, C}, há $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades de ordená-los. São elas:

i) A B C   ii) A C B   iii) B A C   iv) B C A   v) C A B   vi) C B A

Agora, vamos supor que, em vez C, haja um **segundo elemento** A. Vamos escrever novamente as 6 possibilidades descritas acima, porém substituindo C por um segundo A:

I) A B A   II) A A B   III) B A A   IV) B A A   V) A A B   VI) A B A

Agora, a ordem descrita em I é igual à ordem em VI; a ordem em II é igual à ordem em V; e a ordem em III é igual à ordem em IV. Portanto, temos apenas 3 possibilidades **distintas** de ordenar os elementos {A, A, B}:

I) A B A   II) A A B   III) B A A

Ou seja, quando há **elementos repetidos**, o número de possibilidades distintas de ordenação **diminui**.

Mas, por quê? O que aconteceu?

Bem, a redução ocorreu porque na opção i da **primeira** permutação, os elementos A e C estavam **invertidos** em relação à opção vi, enquanto **todo o restante se manteve igual**. Por isso, na **segunda** permutação, essas opções se tornaram uma **única** opção. O mesmo ocorreu com as opções ii e v; e com as opções iii e iv.

Em outras palavras, precisamos **dividir** o resultado da primeira permutação pelo número de vezes em que A e C **trocam de posição**.

E como calculamos a quantidade de maneiras em que elementos trocam de posição? Pela **permutação**!

Portanto, na permutação com repetição, **dividimos** a permutação **simples** pela permutação dos elementos **repetidos**. Indicamos essa permutação de **3** elementos com **repetição de 2** elementos por P_3^2:

$$P_3^2 = \frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = \frac{3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3$$

Assim, se tivéssemos 5 elementos distintos para permutar, teríamos **$P_5 = 5!$**. Havendo **3 elementos iguais**, dentre esses 5, dividimos esse resultado pela **permutação dos 3** elementos **$P_3 = 3!$**:

$$P_5^3 = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \mathbf{3!}}{\mathbf{3!}} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 5 \times 4 = 20$$

E se além de um elemento repetido, tivéssemos **outro elemento repetido**? Por exemplo, {A, A, B, B, B, C, D}.

Vamos pensar em etapas: primeiro calculamos a permutação simples dos 7 elementos, como se fossem distintos: $P_7 = 7!$. Em seguida, consideramos que o elemento A está repetido 2 vezes e dividimos pela permutação de 2 elementos: $P_2 = 2!$. Por fim, consideramos que o elemento B está repetido 3 vezes e dividimos novamente pela permutação de 3 elementos: $P_3 = 3!$:

$$\boldsymbol{P_7^{2,3}} = \frac{P_7}{P_2 \times P_3} = \frac{7!}{2! \times 3!}$$

$$P_7^{2,3} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \mathbf{3!}}{2 \times \mathbf{3!}} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2 \times \cancel{3!}} = 7 \times 3 \times 5 \times 4 = 420$$

Ou seja, na permutação com mais de um elemento repetido, **dividimos** a permutação **simples** pelas permutações dos elementos **repetidos**.

De modo geral, sendo n elementos **totais**, com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos distintos **repetidos**, a permutação desses elementos é dada por:

$$\boldsymbol{P_n^{m_1, m_2, \ldots, m_k}} = \frac{n!}{m_1! \times m_2! \times \ldots \times m_k!}$$

HORA DE PRATICAR!

(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Com as letras, A, B e C, é possível fazer seis agrupamentos diferentes de três letras: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Se as três letras fossem A, A e B, só poderiam ser feitos três desses agrupamentos diferentes: AAB, ABA, BAA. Com as letras F, F, G e G, o número de agrupamentos diferentes de quatro letras é

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 16.

Comentários:

A quantidade de agrupamentos com as letras F, F, G e G corresponde à permutação de 4 elementos, com 2 repetições de F e 2 repetições de G:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Gabarito: A.

(FGV/2018 – ALE-RO) Assinale a opção que indica o número de permutações das letras da palavra SUSSURRO

a) 1680

b) 1560

c) 1440

d) 1320

e) 1260

Comentários:

A palavra SUSSURRO contém 8 letras, sendo o S repetido 3 vezes, o U repetido 2 vezes e o R repetido 2 vezes.

Assim, temos a permutação de 8 elementos com repetição de 2, 2 e 3 elementos:

$$P_8^{2,2,3} = \frac{8!}{2! \times 2! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 2 \times 3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

Gabarito: A

(FCC/2015 – Professor da Secretaria de Educação/ES) O número de anagramas que podem ser obtidos utilizando as letras da palavra VITÓRIA, e que terminam com uma consoante é igual a

a) 2520

b) 1080

c) 840

d) 5040

e) 1980

Comentários:

Na palavra VITÓRIA, há **7 letras**:

____	____	____	____	____	____	____
1	2	3	4	5	6	7

i) Para terminar com uma consoante, há 3 possibilidades para essa posição, todas distintas:

						3
____	____	____	____	____	____	____
1	2	3	4	5	6	7

ii) As outras 6 letras podem permutar livremente pelas 6 posições restantes. Considerando que dessas 6, há 2 elementos repetidos (letra I), temos:

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

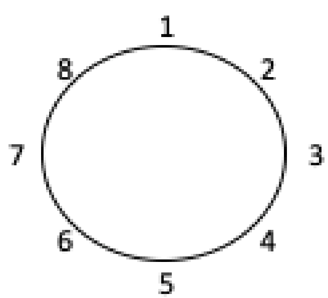
Pelo princípio **multiplicativo**, o número de possibilidades, no total, é:

3 **x** 360 = 1080

Gabarito: B.

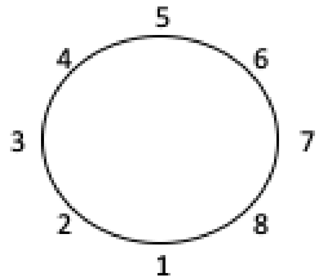
Permutação Circular

Na permutação circular, considera-se que os elementos estão dispostos em um **círculo**.

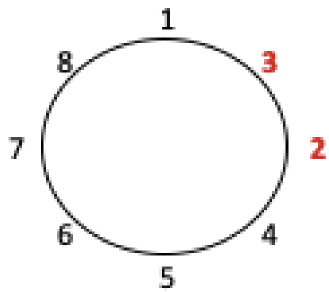


No círculo, considera-se que **não** há posições **fixas** (primeiro lugar, segundo, terceiro, ..., ou tampouco referências como acima, abaixo, à direita ou à esquerda).

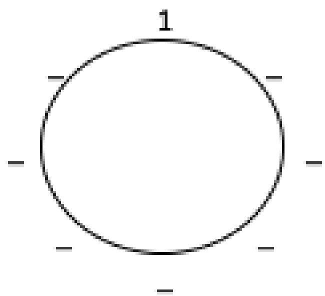
A figura a seguir representa a **mesma** disposição daquela indicada na figura acima, como se tivéssemos **girado** o círculo 180º, mantendo todos os elementos na **mesma posição**:



A disposição varia somente com a mudança da posição de algum elemento em **relação aos demais.** A figura abaixo representa uma disposição **diferente**, haja vista a **troca** dos elementos 2 e 3.



Para calcular a quantidade de disposições distintas, podemos **fixar** (qualquer) **um** dos elementos, por exemplo, o elemento 1, em qualquer posição:



Agora sim, as posições de **todos** os outros elementos irão **importar** porque elas serão **relativas** ao elemento 1 fixado. Portanto, calculamos a **permutação simples** para os **demais** elementos (no caso, os 7):

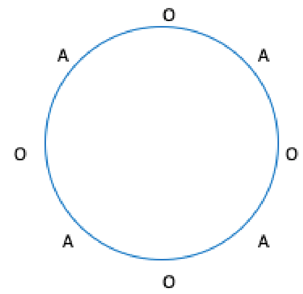
$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

> Em geral, como **fixamos um** dos elementos, a permutação circular de n elementos, indicada por PC_n, é:
>
> $$PC_n = (n-1)!$$

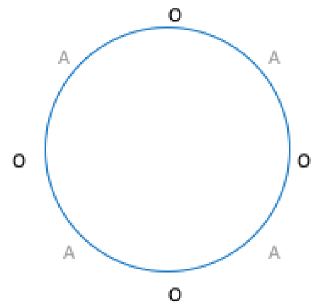
Permutação Circular com Restrições

É possível que uma permutação **circular** apresente **restrições**.

Por exemplo, suponha que haja 4 meninos (O) e 4 meninas (A) para se sentarem a uma mesa circular, de forma que todo menino esteja entre duas meninas (e, portanto, toda menina esteja entre dois meninos), como indicado abaixo.



Nesse tipo de situação, resolvemos o problema em **2 etapas**: primeiro sentamos os meninos e, depois, as meninas (ou vice-versa). Para sentarmos os 4 meninos, há 4 posições possíveis:



Nessa primeira etapa, temos uma **permutação circular**, em que **fixamos** a posição de **um** deles e calculamos a permutação dos demais:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_4 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Na segunda etapa, vamos sentar as 4 meninas. Nesse caso, **todas** as posições são **diferentes**, pois já temos meninos sentados, de modo que a posição de **todas as meninas** importa.

Assim, temos a **permutação simples** de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 24$$

Portanto, para cada uma das 6 possibilidades de se posicionar os meninos, há 24 possibilidades de posicionar as meninas. Pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar as possibilidades desses eventos:

$$6 \text{ x } 24 = 144$$

(2019 – Prefeitura de Ibiaçá/RS) O número máximo de maneiras distintas que um grupo de cinco amigos pode se sentar ao redor de uma mesa circular para realizar um lanche coletivo é:

a) 120

b) 50

c) 24

d) 12

e) 1

Comentários:

A permutação circular de n = 5 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: C

(2016 – Prefeitura de Ouricuri/PE) De quantas maneiras possíveis podemos dispor nove crianças em um círculo em que todas brincam de mãos dadas?

a) 9!

b) 8!

c) 7!

d) 6!

e) 5!

Comentários:

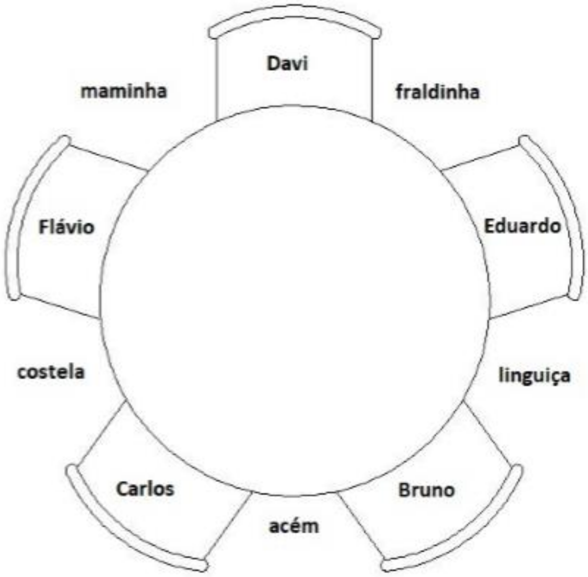
A permutação circular de n = 9 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_9 = 8!$$

Gabarito: B

(2017 – Companhia de Desenvolvimento Habitacional/DF)



Bruno, Carlos, Davi, Eduardo e Flávio são amigos e jantam em uma churrascaria. Na mesa circular em que se encontram, há 5 cadeiras idênticas, equidistantes duas a duas, e 5 espaços entre cada par de cadeiras para os garçons servirem carnes: acém; costela; fraldinha; linguiça; e maminha. A figura acima ilustra uma possível configuração da mesa, com os 5 amigos e as 5 carnes do rodízio. Sabe-se que as carnes preferidas de Bruno são costela e acém e Davi prefere fraldinha.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

O número possível de configurações da mesa, contando que os 5 amigos estejam sentados e as 5 carnes estejam entre cada par de cadeiras, é maior que 3.000.

Comentários:

Vamos resolver essa questão em 2 etapas. Primeiro, sentamos os 5 amigos e, em seguida, colocamos as 5 carnes (ou vice-versa).

Para sentar os 5 amigos em uma mesa redonda, podemos sentar um amigo em qualquer posição e, em seguida, permutar os demais:

$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Ao colocarmos as 5 carnes, a posição de todas elas importam, pois elas estarão entre amigos distintos. Portanto, temos a permutação simples de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Portanto, para cada 24 possibilidades de sentar os amigos, há 120 possibilidades de colocar as carnes. Pelo princípio **multiplicativo**, as possibilidades desses eventos devem ser multiplicadas:

$$24 \times 120 = 2.880$$

Como 2.880 é menor que 3.000, o item está errado.

Gabarito: Errado

OUTROS TIPOS DE PERMUTAÇÃO

Nesta seção, veremos tipos de permutação mais complexos e menos frequentes nas provas de concursos, quais sejam, a permutação com **elementos ordenados** e a permutação **caótica** (ou **desarranjo**).

Permutação com Elementos Ordenados

Na permutação com elementos ordenados, determinados elementos devem **seguir uma ordem** definida, não podendo ser permutados livremente.

Vamos considerar o exemplo do grupo de estudo dos 3 alunos Ana, Beto e Caio. De quantas maneiras, podemos ordená-los, de acordo com as suas notas (sem empates), sabendo que a **nota da Ana foi maior do que a nota do Beto**?

Para responder, vamos primeiro relacionar todas as possibilidades, ignorando essa restrição (sabemos que são $P_3 = 3! = 6$ possibilidades):

i) Ana, Beto, Caio

ii) Ana, Caio, Beto

iii) Beto, Ana, Caio

iv) Beto, Caio, Ana

v) Caio, Ana, Beto

vi) Caio, Beto, Ana

Agora vamos eliminar as possibilidades em que Beto está à frente de Ana (ordem incorreta):

i) Ana, Beto, Caio

ii) Ana, Caio, Beto

~~iii) Beto, Ana, Caio~~

~~iv) Beto, Caio, Ana~~

v) Caio, Ana, Beto

~~vi) Caio, Beto, Ana~~

Claramente, há uma **redução** das ordenações possíveis, em relação à permutação simples. *Mas por quê?*

Na permutação simples, se mantivermos constantes as posições dos **demais** elementos, haverá sempre uma opção em que Ana fica à frente de Beto e outra em que Beto ficará à frente de Ana. Entretanto, apenas uma dessas opções atende à restrição de ordenação.

Por esse motivo, precisamos **dividir** o resultado pelo número de vezes em que os elementos ordenados **trocam de posição**.

Já sabemos como fazer isso! Dividindo a permutação simples pela permutação dos **elementos ordenados**!

Nesse exemplo, dividimos P_3 por P_2:

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3$$

De maneira geral, havendo n elementos, dos quais k elementos devem respeitar uma **ordem específica**, o número de possibilidades de ordená-los é:

$$\frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

Esta fórmula é **igual** à da permutação **com repetição**!

Na permutação com **elementos ordenados**, os elementos **não** devem ser necessariamente **consecutivos**.

No exemplo em que a ordenação foi Ana > Beto, aceitamos a opção ii (Ana, Caio, Beto), sem que Ana e Beto estivessem em posições consecutivas.

Se o problema apontar que dois elementos estejam **em determinada ordem** e que sejam **consecutivos**, então será necessário tratá-lo como elemento **único**.

Em geral, havendo k_1 elementos que devam seguir uma ordem e outros k_2 elementos que devam seguir outra ordem, dividimos a permutação dos n elementos pela permutação de k_1 e de k_2 (o que também é similar à permutação com repetição):

$$\frac{P_n}{P_{k_1} \times P_{k_2}} = \frac{n!}{k_1! \times k_2!}$$

Por exemplo, vamos supor a palavra ORDEM. O número de anagramas que podem ser formados de modo que as letras ORD estejam sempre nesta ordem, assim como as letras EM, corresponde a uma permutação de 5 elementos, de modo que 3 elementos sigam uma ordem e outros 2 elementos sigam uma ordem:

$$\frac{P_5}{P_3 \times P_2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Para ilustrar, vejamos quais são essas 10 possibilidades:

i. ORDEM
ii. OREDM
iii. OERDM
iv. EORDM
v. OREMD
vi. OERMD
vii. EORMD
viii. OEMRD
ix. EOMRD
x. EMORD

Essa fórmula pode ser estendida para qualquer número de ordenações necessárias.

(FCC/2014 – TRF 3ª Região) Álvaro, Benedito, Cléber e outros dois amigos participam de uma corrida. Se apenas os cinco participaram dessa corrida, o número de possibilidades diferentes de maneira que Álvaro chegue antes que Benedito e este, por sua vez, chegue antes de Cléber é igual a:

a) 20

b) 24

c) 18

d) 22

e) 26

Comentários:

Há n = 5 elementos, dos quais k = 3 elementos estão ordenados: Álvaro > Benedito > Cléber. Portanto, temos:

$$\frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

$$\frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Gabarito: A.

Permutação Caótica ou Desarranjo

Na permutação caótica ou desarranjo, considera-se que os elementos estão originalmente ordenados de certa maneira e que **nenhum** deles pode retornar para a sua posição **original.**

Vamos supor que 3 elementos {A, B, C} estejam originalmente posicionados nesta ordem, isto é, A em primeiro lugar, B em segundo lugar e C em terceiro lugar. Agora, vamos reordenar esses elementos, de modo que nenhum deles retorne à sua posição original.

Como o elemento A estava em primeiro lugar, ele poderá ocupar o 2º ou o 3º lugar:

- **A em 2º lugar: __ A __**
  - Como o elemento **C** estava em 3º lugar originalmente, ele terá que ocupar o **1º lugar**
  - Assim, resta a **3ª posição** para o elemento **B**

  Possível ordenação: C A B

- **A em 3º lugar: __ __ A**
    - Como o elemento **B** estava em 2º lugar originalmente, ele terá que ocupar o **1º lugar**
    - Assim, resta a **2ª posição** para o elemento **C**

    Possível ordenação: B C A

Portanto, há **2 possibilidades** de permutação caótica para esse exemplo.

> Para calcular o número de possibilidades em uma permutação caótica (ou desarranjo) de $\boldsymbol{n}$ elementos, utiliza-se a seguinte fórmula:
>
> $$\boldsymbol{D_n} = \boldsymbol{n}! \times \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}!} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}!} + \cdots + \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!}\right]$$

Calma! Vamos juntos tentar digerir essa fórmula.

Observe que os denominadores das frações são **fatoriais** de 0 até $\boldsymbol{n}$ (total de elementos) e que os sinais das frações vão se alternando: quando o denominador é o fatorial de um número **par**, o sinal é **positivo**, quando o denominador é o fatorial de um número **ímpar**, o sinal é **negativo**.

Como não sabemos se $\boldsymbol{n}$ é par ou ímpar, utilizamos a expressão $(-1)^n$. Assim, quando $\boldsymbol{n}$ é par, $(-1)^n = +1$, e o sinal da fração é positivo; quando $\boldsymbol{n}$ é ímpar, $(-1)^n = -1$, e o sinal da fração é negativo. Em outras palavras, não precisamos calcular uma função exponencial, apenas nos atentar para o sinal de n.

Ademais, considerando que 0! = 1 e que 1! = 1, os resultados da primeira e da segunda fração são:

$$\frac{1}{0!} = 1$$

$$\frac{1}{1!} = 1$$

Como o sinal da primeira fração é positivo e o da segunda é negativo, essas frações se **anulam** (1 – 1 = 0). Logo, podemos retirá-las da fórmula:

$$\boldsymbol{D_n} = \boldsymbol{n}! \times \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}!} + \cdots + \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!}\right]$$

No nosso exemplo, tivemos n = 3, portanto:

$$D_3 = 3! \times \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}!}\right] = \frac{3!}{2!} - \frac{3!}{3!} = 3 - 1 = 2$$

Que foi o resultado que obtivemos anteriormente.

(CESPE/2014 – TER-GO – *Adaptada*) As prestações de contas das campanhas dos 3 candidatos a governador de determinado estado foram analisadas por 3 servidores do TRE desse estado. Considerando que um servidor deve analisar exatamente prestação de contas e que, por coincidência, cada um dos 3 candidatos é parente de um dos 3 servidores, julgue o item que se segue.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuírem as prestações de contas entre os 3 servidores de modo que nenhum deles analise as contas de um parente é inferior a 5.

Comentários:

O enunciado informa que há 3 servidores que irão analisar as contas de 3 candidatos e que cada candidato é parente de um servidor:

Candidato	A	B	C
Servidor	a	b	c

Para que nenhum candidato seja avaliado pelo seu parente, devemos reordenar os candidatos de modo que nenhum deles retorne à posição original, indicada acima. Assim, temos uma permutação caótica (ou desarranjo) de 3 elementos.

Como há poucos elementos, podemos contar as possibilidades, como fizemos anteriormente:

- O candidato A pode ser analisado pelo servidor b:

Candidato		A	
Servidor	a	b	c

- Nessa situação, o candidato C terá que ser analisado pelo servidor a;
- E restará o servidor c para o candidato B, resultando na seguinte possibilidade:

Candidato	C	A	B
Servidor	a	b	c

- O candidato A pode ser analisado pelo servidor c:

Candidato			A
Servidor	a	b	c

- Nessa situação, o candidato B terá que ser analisado pelo servidor a;
- E restará o servidor b para o candidato C, resultando na seguinte possibilidade:

Candidato	B	C	A
Servidor	a	b	c

Portanto, há 2 possibilidades.

Alternativamente, podemos aplicar a fórmula de desarranjo que aprendemos:

$$D_n = n! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

$$D_4 = 3! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right] = \frac{3!}{2!} - \frac{3!}{3!} = 3 - 1 = 2$$

Logo, o número de maneiras é inferior a 5.

Resposta: Certo.

(FCC/2019 – Prefeitura de Recife/PE) Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação.

a) de 4 maneiras diferentes.

b) de 24 maneiras diferentes.

c) de 9 maneiras diferentes.

d) de 6 maneiras diferentes.

e) de 12 maneiras diferentes.

Comentários:

Novamente, temos uma permutação caótica (ou desarranjo), mas agora com 4 elementos. Por haver uma maior quantidade de elementos, vamos direto para a fórmula:

$$D_n = n! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

$$D_4 = 4! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 4 \times 3 - 4 + 1 = 9$$

Gabarito: C

Arranjo e Combinação

As técnicas que veremos nesta seção (arranjo e combinação) trabalham com a **seleção** de um subconjunto dos elementos.

A **ordem** dos elementos selecionados será **relevante** para o **arranjo**, mas **não** para a **combinação**. Em outras palavras, selecionar os elementos A e B ou os elementos B e A são possibilidades **distintas** para o **arranjo**, porém **equivalentes** para a **combinação**.

Arranjo Simples

O arranjo de um conjunto finito de elementos é um **subconjunto** desses elementos, de tal maneira que a sua **ordenação** seja **relevante**.

Por exemplo, em um sorteio, em que o primeiro sorteado ganha um carro, e o segundo sorteado ganha uma bicicleta, a ordem, com certeza, será relevante. Em outras palavras, o cenário em que Ana é sorteada primeiro e Beto é sorteado depois será **diferente** daquele em que Beto é sorteado primeiro e Ana é sorteada depois.

Suponha que existam 6 pessoas em um sorteio, em que 3 delas serão sorteadas, **não** sendo possível sortear a mesma pessoa mais de uma vez. Considerando a ordem relevante, de quantas formas as 3 pessoas poderão ser sorteadas?

Como a ordem importa, vamos sortear uma pessoa por vez, preenchendo os seguintes espaços com o número de possibilidades de cada sorteio:

$$\underset{1}{\underline{\qquad}} \quad \underset{2}{\underline{\qquad}} \quad \underset{3}{\underline{\qquad}}$$

Havendo 6 pessoas no total, há 6 possibilidades para sortearmos a primeira pessoa. Assim, restarão 5 pessoas para o segundo sorteio. Em seguida, haverá 4 possibilidades para o terceiro e último sorteio:

$$\underset{1}{\underline{\quad 6 \quad}} \quad \underset{2}{\underline{\quad 5 \quad}} \quad \underset{3}{\underline{\quad 4 \quad}}$$

Como os três sorteios irão ocorrer, pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento. Dessa forma, o resultado desse arranjo é:

$$6 \times 5 \times 4$$

E se houvesse 10 pessoas para 4 sorteios?

Para o primeiro sorteio, haveria 10 possibilidades; para o segundo, 9 possibilidades; para o terceiro, 8 possibilidades; e para o quarto, 7 possibilidades:

10 x 9 x 8 x 7

Parece um pouco a fórmula do fatorial, certo? Na verdade, é o início do fatorial do **total de $\boldsymbol{n}$ elementos**, "estancado" após $\boldsymbol{k}$ fatores, sendo $\boldsymbol{k}$ o número de **elementos sorteados**.

E como fazemos para "estancar" um fatorial? **Dividindo por um fatorial menor**!

No caso de $\boldsymbol{k = 4}$ sorteios para um conjunto de $\boldsymbol{n = 10}$ pessoas, fazemos:

$$\frac{\mathbf{10}!}{(\mathbf{10} - \mathbf{4})!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$$

No caso geral, um **arranjo** sem reposição de $\boldsymbol{k}$ elementos, dentre $\boldsymbol{n}$ elementos distintos é:

$$\boldsymbol{A_{n,k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$$

Outra notação possível para o arranjo é A_n^k.

Por exemplo, o número de maneiras de sortear 5 pessoas, dentre um total de 8, para prêmios **distintos** corresponde ao **arranjo** de 5 elementos, dentre 8:

$$\boldsymbol{A_{8,5}} = \frac{\mathbf{8}!}{(\mathbf{8} - \mathbf{5})!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6.720$$

Nem sempre a **importância da ordem** da seleção será fácil de visualizar. Vamos supor que, dentre um grupo de 10 funcionários de uma empresa, tivermos que selecionar **1 supervisor**, **1 coordenador** e **1 técnico**.

Nesse caso, selecionar um funcionário como supervisor é **diferente** de selecionar esse mesmo funcionário como coordenador ou como técnico.

Imagine que a **seleção** desses cargos ocorre em uma **sequência**, por exemplo, primeiro supervisor, depois coordenador e depois técnico.

Assim, há diferença entre ser chamado primeiro, segundo ou terceiro. Logo, a **ordem da seleção** é, de fato, **importante**, motivo pelo temos um **arranjo**.

FIQUE ATENTO!

A fórmula de arranjo que acabamos de ver serve para casos **sem reposição**, ou seja, quando um mesmo elemento **não** puder ser selecionado **mais de uma vez**.

Caso haja reposição, o **número de elementos disponíveis** para cada sorteio é sempre o **mesmo**. Por exemplo, em uma seleção **com reposição**, cuja ordem importe, de 3 elementos, dentre 6 elementos disponíveis no total, o número de possibilidades é:

$$6 \times 6 \times 6 = 6^3$$

De modo geral, o arranjo **com reposição** (ou **repetição**) de k elementos dentre n elementos no total é dado por:

$$A_{n,k} = \underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{k \text{ vezes}} = n^k$$

HORA DE PRATICAR!

(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Na bilheteria de um teatro há apenas 5 ingressos à venda para a seção de uma peça. Se 4 amigos comprarem ingressos para essa seção, então o número total de posições distintas em que esses amigos poderão se acomodar no teatro é

a) 120.

b) 80.

c) 60.

d) 20.

e) 5.

Comentários:

Temos uma seleção de 4 lugares, dentre 5 disponíveis, com importância de ordem, pois cada lugar é **distinto** do outro. Assim, temos o arranjo de 4 elementos, dentre 5:

$$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: A.

(VUNESP/2018 – PM/SP) Utilizando-se os algarismos 2, 3, 5, 6, 7 e 9, a quantidade de números múltiplos de 5 e que tenham três algarismos distintos que podem ser formados é

a) 25.

b) 20.

c) 15.

d) 10.

Comentários:

Para que o número formado pelos 6 algarismos indicados no enunciado seja múltiplo de 5, é necessário que o algarismo 5 seja o último algarismo. Assim, os diferentes números que podem ser formados com 3 algarismos correspondem a um arranjo de 2 elementos, dentre 5:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Gabarito: B.

(CESPE 2019/COGE-CE) Em determinado órgão, sete servidores foram designados para implantar novo programa de atendimento ao público. Um desses servidores será o coordenador do programa, outro será o subcoordenador, e os demais serão agentes operacionais.

Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de distribuir esses sete servidores nessas funções é igual a

a) 21.

b) 42.

c) 256.

d) 862.

e) 5.040.

Comentários:

Nessa questão, devemos definir o número de maneiras distintas de distribuir 7 servidores em funções distintas: 1 será coordenador, 1 será subcoordenador e os demais serão agentes. Note que, após a definição do coordenador e do subcoordenador, os que **sobrarem** serão **necessariamente** agentes. Por isso, não precisamos nos preocupar com eles, apenas com o **coordenador** o **subcoordenador**.

Para a escolha do coordenador, há 7 servidores, ou seja, 7 possibilidades:

7	

Após a escolha do coordenador, restarão 6 possibilidades para o subcoordenador:

7	6

Como devemos escolher o coordenador E o subcoordenador, devemos multiplicar as possibilidades (princípio multiplicativo):

Número de Possibilidades = 7 x 6 = 42

Alternativamente, poderíamos calcular o arranjo de 2 elementos, dentre 7:

$$A_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

Gabarito: B

(CESPE 2020/TJ-PA) Em um sistema de acesso a uma rede de computadores, os usuários devem cadastrar uma senha de 6 dígitos, que deve ser formada da seguinte maneira:

• os 2 primeiros dígitos devem ser letras minúsculas distintas, escolhidas entre as 26 letras do alfabeto;

• os demais 4 dígitos da senha devem ser números inteiros entre 0 e 9, admitindo-se repetição.

Nessa situação, a quantidade de senhas diferentes que podem ser formadas é igual a

a) 3.674.

b) 5.690.

c) 1.965.600.

d) 3.276.000.

e) 6.500.000.

Comentários:

Nessa questão, temos os dois tipos de arranjo, com e sem reposição. Isso porque as letras devem ser distintas (não podem repetir) e os números podem ser repetir.

Vamos representar a senha de 6 dígitos por 6 espaços:

Os dois primeiros dígitos admitem as 26 letras do alfabeto, sem repetição. Logo, temos 26 possibilidades para o primeiro espaço e 25 possibilidades para o segundo espaço (uma vez que a letra escolhida para o primeiro espaço não pode se repetir):

26	25				

Os demais 4 dígitos admitem os 10 números (de 0 a 9), podendo haver repetição. Logo, há 10 possibilidades para cada espaço:

26	25	10	10	10	10

Como a senha é formada por todos os 6 dígitos, então devemos multiplicar as possibilidades (princípio multiplicativo):

Número de Senhas Possíveis = 26 x 25 x 10 x 10 x 10 x 10 = 6.500.000

Gabarito: E

Combinação Simples

Assim como no caso do arranjo, a combinação é uma **seleção** de elementos de um conjunto finito. Entretanto, para a combinação, a **ordem não importa**.

Por exemplo, em um sorteio de participantes para um **grupo** de estudo, a ordem do sorteio de cada participante é irrelevante.

Nessa situação, algumas possibilidades **distintas** identificadas no **arranjo** são **equivalentes** na **combinação**. Consequentemente, a **combinação** de determinados elementos resulta em um número **menor** do que o **arranjo** dos mesmos elementos.

Menor, quanto?

Bem, todas as possibilidades de sorteio das mesmas pessoas, em que elas apenas **mudam de lugar**, são consideradas o mesmo resultado na combinação. Logo, precisamos **dividir** as possibilidades do arranjo pelo número de possibilidades em que os elementos selecionados **trocam de posição**, isto é, pela **permutação dos elementos selecionados**!

No caso de um sorteio de 3 pessoas, dividimos o número de possibilidades do **arranjo** por $\mathbf{P_3}$:

$$C_{6,3} = \frac{A_{6,3}}{P_3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!}$$

De maneira geral, a combinação sem reposição de $\boldsymbol{k}$ elementos, de um total de $\boldsymbol{n}$ elementos, é dada por:

$$\boldsymbol{C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

Outras notações comuns para a combinação são $\boldsymbol{C_n^k}$ ou $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$.

(FGV/2019 – Pref. Angra dos Reis/RJ) Maria possui em casa quatro tipos de frutas: banana, mamão, abacate e manga. Ela decidiu fazer uma vitamina com duas dessas frutas, batendo-as juntas com leite no liquidificador. O número de vitaminas diferentes que Maria poderá fazer é

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

e) 12.

Comentários:

O número de vitaminas diferentes corresponde ao número de maneiras diferentes de Maria escolher 2, das 4 frutas, sem que a ordem importe, logo, temos uma combinação de 2 elementos, dentre 4:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4!}{2! \times 2} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Gabarito: D

(FGV/2022 – PC-RJ) Do grupo dos 6 novos policiais de uma delegacia, 2 deles serão escolhidos para um treinamento especial. O número de pares diferentes de policiais que podem ser enviados para o treinamento especial é:

a) 10

b) 12.

c) 15.

d) 16.

e) 18.

Comentários:

O número de pares de policiais que podem ser escolhidos, dentre 6, corresponde ao número de maneiras de escolher 2 elementos, dentre 6. Como a ordem dos escolhidos não importa, temos a combinação de 2 elementos dentre 6:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

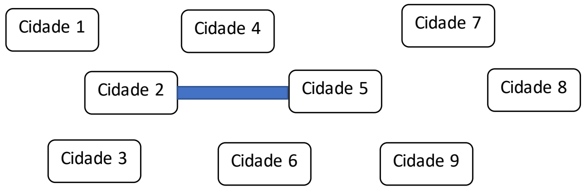
Gabarito: C

(CESPE 2018/BNB) Julgue o próximo item, relativo a análise combinatória e probabilidade.

Se 9 cidades forem interligadas por rodovias, de forma que entre quaisquer duas dessas cidades haja apenas uma rodovia interligando-as e essa rodovia não passe por nenhuma outra cidade, então essa malha viária será composta de 72 rodovias.

Comentários:

A ilustração a seguir representa as 9 cidades e 1 das rodovias possíveis.



Considerando que há exatamente 1 rodovia entre cada 2 cidades, então o número de rodovias é igual ao número de maneiras de selecionar 2 cidades, sem importância de ordem.

Sabendo que há 9 cidades, o número de maneiras de escolher 2 cidades é:

$$C_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)! \times 2!} = \frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Gabarito: Errado.

É comum que a questão imponha restrições à seleção, da forma "**pelo menos um**".

Por exemplo, suponha um conjunto de 5 mulheres e de 4 homens. Quantos grupos distintos de 3 pessoas podem ser formados com **pelo menos uma** mulher?

Você pode resolver esse tipo de questão calculando **todas** as possibilidades de grupos, **desconsiderando-se** a restrição imposta, e, em seguida, **subtrair** o número de possibilidades que **não** atendem à restrição.

Para o nosso exemplo, o número de maneiras possíveis de selecionar 3 pessoas, de um total de 4 + 5 = 9 pessoas, no total, é:

$$C_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!\times 3!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6!}{6!\times 3!} = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

Dentre essas possibilidades, **não** servem aquelas em que **apenas** homens são selecionados. A quantidade de maneiras possíveis de selecionar 3 homens, dentre 4, é:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!\times 3!} = \frac{4\times 3!}{1!\times 3!} = 4$$

Logo, o número de maneiras de formar grupos de 3 pessoas com pelo menos 1 mulher é:

84 – 4 = 80

Casos Particulares de Combinação

Nessa seção, veremos alguns casos particulares da combinação simples. Você **não** precisa decorá-los, mas conhecê-los pode ajudar a resolver alguns problemas com mais **rapidez**.

i) Combinação de n elementos em n elementos ($C_{n,n}$).

De quantas formas é possível selecionar 5 jogadores dentre 5 jogadores? Só **uma**, certo? Selecionando todos os jogadores! De todo modo, vamos às contas:

$$C_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{(0)!\,n!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$$

$$\boxed{C_{n,n} = 1}$$

ii) Combinação de 0 elemento em n elementos ($C_{n,0}$).

De quantas formas é possível selecionar 0 jogador dentre 5? Só **uma** também, certo? Não selecionando jogador algum! Vejamos como ficam as contas:

$$C_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n! \times 1} = 1$$

$$\boxed{C_{n,0} = 1}$$

iii) Combinação de 1 elemento em n elementos ($C_{n,1}$).

Considerando 5 jogadores (A, B, C, D, E), quantas são as possibilidades de selecionar 1 jogador? 5, certo? Podemos selecionar A, ou B, ou C, ou D ou E:

$$C_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n}{1} = n$$

$$\boxed{C_{n,1} = n}$$

iv) Combinação de $n-1$ elementos em n elementos ($C_{n,n-1}$).

Considerando os 5 jogadores (A, B, C, D, E), quantas são as possibilidades de selecionar 4 jogadores? Podemos responder a essa pergunta, pensando em quem fica de fora em cada seleção.

Ou seja, podemos selecionar todos exceto A; ou todos exceto B; ou todos exceto C; ou todos exceto D; ou todos exceto E. Assim, temos 5 possibilidades!

$$C_{n,n-1} = \frac{n!}{[n-(n-1)]!\,(n-1)!} = \frac{n}{[n-n+1]!} = \frac{n}{1} = n$$

$$\boldsymbol{C_{n,n-1} = n}$$

v) A combinação de k elementos em n é igual à combinação de $n-k$ em n ($C_{n,k} = C_{n,n-k}$).

No item anterior, construímos o raciocínio de que **selecionar** 4 jogadores dentre 5 é o mesmo que **deixar** 1 jogador. Além disso, o número de maneiras de **deixar** 1 jogador é o mesmo de **selecionar** 1 jogador.

Em outras palavras, de um total de 5 jogadores, o número de maneiras de selecionar 4 jogadores é o mesmo de selecionar 1 jogador.

Em geral, de um total de n elementos, selecionar k elementos é o mesmo que selecionar $n-k$ elementos:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{n,n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!\,(n-k)!} = \frac{n!}{[n-n+k]!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\boldsymbol{C_{n,k} = C_{n,n-k}}$$

Vamos a mais um “facilitador de contas”:

O **somatório** de **todas** as **combinações possíveis** de n **elementos** é $\mathbf{2^n}$

$$\boldsymbol{C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n-1} + C_{n,n} = 2^n}$$

Ou seja, o somatório de todas as possibilidades de combinações distintas de um total de n elementos, ou seja, a combinação com 0 elemento, as combinações com 1 elemento, combinações com 2 elementos, etc., até a combinação com n elementos, é igual a 2^n.

INDO MAIS FUNDO!

Essa propriedade que acabamos de ver é um dos teoremas associados ao chamado **Triângulo de Pascal**, que pode ser representado da seguinte forma:

$$
\begin{array}{llllll}
C_{0,0} & & & & & \\
C_{1,0} & C_{1,1} & & & & \\
C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & & & \\
C_{3,0} & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & & \\
C_{4,0} & C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & \\
C_{5,0} & C_{5,1} & C_{5,2} & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5} \\
\dots & & & & &
\end{array}
\quad \leftrightarrow \quad
\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\dots & & & & &
\end{array}
$$

O Triângulo de Pascal é formado por combinações $C_{n,k}$, sendo n o número da **linha** e k o número da **coluna**, iniciando-se pela linha e coluna **zero**.

Os números $C_{n,k}$ podem ser chamados **Números Binomiais** ou **Coeficientes Binomiais**.

Para construir o Triângulo, somamos 2 elementos consecutivos (colunas k e $k+1$) de uma mesma linha (n), para obter o elemento da linha abaixo ($n+1$) na coluna $k+1$:

$$
\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & + \; 1 & & & & \\
1 & 2 & + \; 1 & & & \\
1 & 3 & + \; 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & + \; 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\dots & & & & &
\end{array}
$$

Essa propriedade é chamada de **Relação de Stifel** e corresponde ao seguinte:

$$C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}$$

Além disso, a soma dos elementos de uma coluna (k), desde o seu início (linha k) até alguma linha $k+n$, é igual ao elemento da linha seguinte ($k+n+1$) e coluna seguinte ($k+1$), conforme ilustrado abaixo para a coluna 1:

$$
\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & \boxed{1} & & & & \\
1 & \boxed{2} & 1 & & & \\
1 & \boxed{3} & 3 & 1 & & \\
1 & \boxed{4} & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\dots & & & & &
\end{array}
$$

Essa propriedade é chamada de **Teorema das Colunas** e pode ser descrita como:

$$C_{k,k} + C_{k+1,k} + C_{k+2,k} + \cdots + C_{k+n,k} = C_{k+n+1,k+1}$$

A propriedade que vimos antes ($C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n} = 2^n$) é chamada de **Teorema das Linhas**, pois $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n}$ é a soma de todos os elementos de uma linha n.

(2019 – Prefeitura de Colômbia/SP) Em uma pequena escola de música os estudantes são especializados em instrumentos conforme tabela a seguir:

Instrumentos	Número de estudantes
Guitarra	6
Contrabaixo	2
Bateria	4
Teclado	3

O número de bandas diferentes que poderão ser formadas com os estudantes desta escola de música com a seguinte constituição: 2 guitarristas, 1 contrabaixista, 1 baterista e 1 tecladista está compreendido entre:

a) 1 e 300

b) 301 e 400

c) 401 e 600

d) 601 e 800

Comentários:

Para selecionar 2 guitarristas, dentre 6, temos:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!\,2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Para as demais combinações, basta conhecer o caso especial $C_{n,1} = n$.

Para selecionar 1 contrabaixista, temos n = 2: $C_{2,1} = 2$.

Para selecionar 1 baterista, temos n = 4: $C_{4,1} = 4$.

Para selecionar 1 tecladista, temos n = 3: $C_{3,1} = 3$.

Como a banda terá todos esses instrumentistas, pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar todas essas possibilidades:

$$C_{guitarristas} \times C_{contrabaixistas} \times C_{baterirstas} \times C_{tecladistas}$$

15 x 2 x 4 x 3 = 360

Gabarito: B

(CESPE 2018/PF) Para cumprimento de um mandado de busca e apreensão serão designados um delegado, 3 agentes (para a segurança da equipe na operação) e um escrivão. O efetivo do órgão que fará a operação conta com 4 delegados, entre eles o delegado Fonseca; 12 agentes, entre eles o agente Paulo; e 6 escrivães, entre eles o escrivão Estêvão.

Em relação a essa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Considerando todo o efetivo do órgão responsável pela operação, há mais de 5.000 maneiras distintas de se formar uma equipe para dar cumprimento ao mandado.

Comentários:

A questão pede o número de maneiras de escolher 1 delegado (dentre 4), 3 agentes (dentre 12) e 1 escrivão (dentre 6):

- O número de formas de escolher 1 delegado, dentre 4, é igual a 4 – caso especial $C_{4,1} = 4$;

- O número de formas de escolher 3 agentes, dentre 12, é igual a:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{9!\,3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 2 \times 11 \times 10 = 220$$

- O número de formas de escolher 1 escrivão, dentre 6, é igual a 6 – caso especial $C_{6,1} = 6$.

Para formar toda a equipe, multiplicamos esses resultados (princípio multiplicativo):

Número de possibilidades = 4 x 220 x 6 = 5280

Logo, há mais de 5.000 maneiras de formar a equipe.

Gabarito: Certo.

(FCC/2018 – Analista Judiciário do TRT 15ª Região) Dez pastas diferentes devem ser guardadas em duas caixas diferentes. Se a única regra é que cada uma das caixas contenha pelo menos uma pasta, então a quantidade de maneiras distintas como se pode guardar essas pastas nas caixas é

a) 510

b) 1.022

c) 126.

d) 2.048

e) 256

Comentários:

Como a ordem dentro das caixas não importa, utilizaremos combinação. Além disso, é importante notar que ao selecionarmos as pastas para uma das caixas, teremos definido as pastas que serão guardadas na outra caixa. Por isso, podemos pensar na combinação para **uma das caixas** apenas.

Assim, podemos selecionar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 pastas para a primeira caixa. Não podemos selecionar 10 pastas porque não sobraria pastas para a segunda caixa, o que não é permitido (cada caixa deve conter pelo menos 1 pasta). Pelo mesmo motivo, não podemos selecionar 0 pasta para a primeira caixa.

Devemos, portanto, calcular as possibilidades de combinação $C_{10,1}$, $C_{10,2}$, $C_{10,3}$, $C_{10,4}$, $C_{10,5}$, $C_{10,6}$, $C_{10,7}$, $C_{10,8}$ e $C_{10,9}$. Esses eventos são mutuamente exclusivos (selecionamos 1 OU 2 OU 3 OU ... OU 9 pastas para a primeira caixa). Portanto, as possibilidades desses eventos devem ser **somadas** **(princípio aditivo)**.

Para facilitar as contas, utilizaremos a propriedade de combinação que vimos:

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n-1} + C_{n,n} = 2^n$$

$$C_{10,0} + C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} + C_{10,10} = 2^{10}$$

Porém, não é exatamente essa soma que estamos buscando, pois não temos nem $C_{10,0}$ nem $C_{10,10}$. Por isso, devemos subtrair os valores dessas combinações do resultado:

$$C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} = 2^{10} - C_{10,0} - C_{10,10}$$

Sabemos, ainda, que $C_{n,0} = 1$, logo, $C_{10,0} = 1$; e $C_{n,n} = 1$, logo, $C_{10,10} = 1$:

$$C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} = 1024 - 1 - 1 = 1022$$

Gabarito: B

Combinação Completa

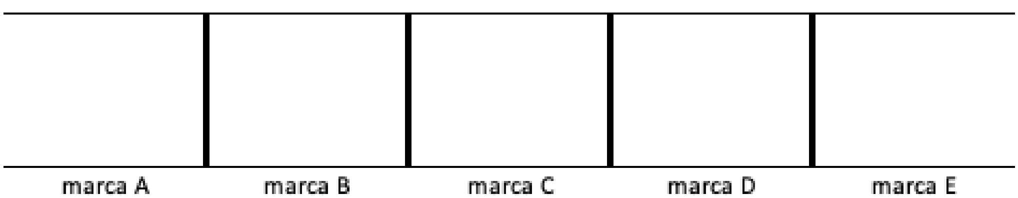
Os problemas de combinação completa (ou **combinação com repetição**) envolvem um conjunto de **n tipos** de elementos **diferentes**, dos quais serão escolhidos **k** elementos **iguais ou diferentes**. Também podemos pensar que será selecionado um número **k** de **objetos**, **iguais ou diferentes**, dentre **n tipos diferentes**.

Por exemplo, escolher **k = 3** potes de sorvete havendo um total de **n = 5 marcas distintas** (os potes podem ser de uma **mesma marca** ou de **marcas distintas**).

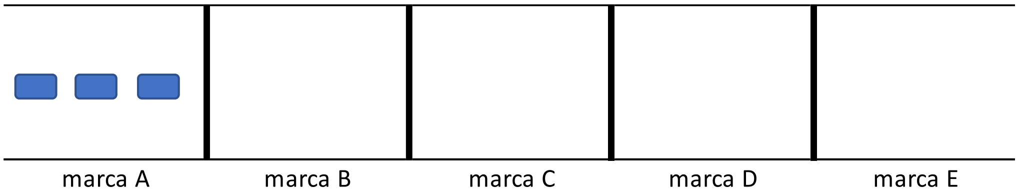
Observe que essa situação é diferente da escolha de 3 potes de sorvete dentre 5 potes, o que seria a combinação simples de 3 elementos, dentre 5 ($C_{5,3} = 10$). Essa também seria a combinação para escolher 3 marcas dentre 5 marcas.

Porém, no nosso exemplo atual, temos que escolher 3 **potes** dentre 5 **marcas**. O número de possibilidades é muito **maior** do que a combinação simples de 3 dentre 5 elementos.

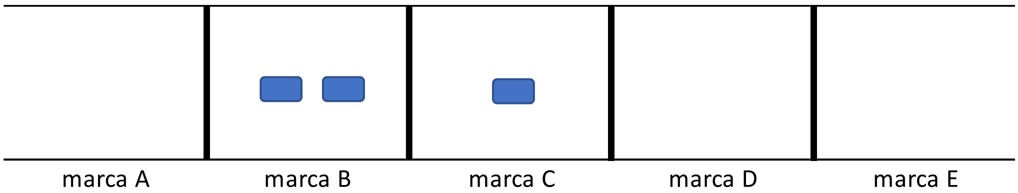
Para calcular todas as possibilidades, vamos imaginar que cada marca de sorvete esteja em uma **seção** separada do congelador:



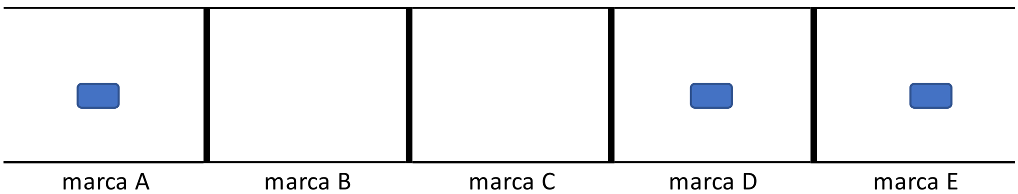
Podemos escolher, por exemplo, 3 potes da marca A.



Ou 2 potes da marca B e 1 da marca C:



Ou, ainda, 1 da marca A, outro da D e outro da E:



Repare que podemos considerar esse problema como a **permutação** dos **objetos** (potes de sorvetes) e das **divisórias** que separam as diferentes **marcas**.

Nesse caso, temos 3 potes de sorvete e 4 divisórias – o número de **divisórias** é sempre o número de **marcas menos 1**. Assim, temos a permutação de 7 elementos, sendo 3 potes e 4 divisórias (elementos repetidos).

Portanto, a **combinação completa** de 3 objetos de 5 marcas, indicada por CR_5^3, é igual à **permutação** de 7 elementos, com repetição de 3 e 4 elementos:

$$CR_5^3 = P_7^{3,4} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$$

De maneira geral, a combinação de p **objetos** de n **tipos** (ou marcas), equivale à permutação de $n-1$ **divisórias** com p **objetos**, ou seja, à permutação de $n-1+p$ elementos, com repetição de $n-1$ e p elementos:

$$\boldsymbol{CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}}$$

Também devemos utilizar a **combinação completa** em problemas de **distribuição** de objetos entre pessoas (ou lugares). Por exemplo, a distribuição de 3 cestas básicas para 5 famílias segue o mesmo raciocínio.

ESCLARECENDO!

A **combinação completa** de p **objetos** de n **tipos** também equivale à **combinação simples** de p **elementos**, dentre $n-1+p$ **elementos disponíveis**:

$$CR_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!} = C_{n-1+p,p}$$

No nosso exemplo, a combinação completa de p = 3 potes de sorvete, havendo um total de n = 5 marcas distintas, corresponde à combinação de 3 elementos, dentre 5 – 1 + 3 = 8 elementos no total.

HORA DE PRATICAR!

(FGV/2018 – ALE-RO) Helena entra em uma sorveteria que oferece sorvetes de 8 sabores diferentes. Helena deseja escolher uma casquinha com duas bolas de sorvete não necessariamente de sabores diferentes. A ordem em que as bolas forem colocadas na casquinha não fará a escolha de Helena ser diferente.

O número de maneiras de Helena escolher sua casquinha é

a) 64.

b) 56.

c) 36.

d) 28.

e) 16.

Comentários:

Nessa questão, temos um exemplo de combinação com reposição (ou combinação completa). Trata-se de uma combinação porque a ordem **não** importa, como a questão informa. E há reposição pelo fato de Helena poder escolher sabores não necessariamente diferentes. A fórmula da combinação completa é:

$$CR_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

Sabendo que há 8 sabores disponíveis (n = 8) e que Helena irá escolher 2 bolas de sorvete (p = 2):

$$CR_8^2 = \frac{(8+2-1)!}{(8-1)! \times 2!} = \frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Gabarito: C

(2019 – Conselho Regional de Medicina/AC) O pai de 3 filhos, com idades diferentes, distribuiu 9 balas idênticas entre eles, de forma que o mais velho recebeu o dobro de balas do caçula e o filho do meio recebeu mais balas que o caçula e menos balas que o mais velho. O filho caçula recebeu X balas e o filho do meio recebeu Y balas.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Se alguém deseja distribuir 9 balas idênticas entre 3 pessoas, sem qualquer critério de distribuição, com cada uma delas recebendo pelo menos uma bala, então existem 28 maneiras de se fazer a distribuição.

Comentários:

Esse também é um caso de combinação completa, em que as balas correspondem aos objetos e as pessoas correspondem às seções.

Porém, o problema apontou para uma restrição: todas as pessoas receberão pelo menos uma bala.

Após distribuir uma bala por pessoa, totalizando 3 balas, sobrarão 9 – 3 = 6 balas a serem distribuídas, sem critério, para as 3 pessoas.

Portanto, temos a combinação completa de k = 6 objetos para n = 3 pessoas, ou seja, n – 1 = 2 divisórias:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

$$CR_3^6 = P_8^{2,6} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

Gabarito: Certo

(CESPE 2018/SEFAZ-RS) Se 7 kg de feijão forem distribuídos para até quatro famílias, de modo que cada uma delas receba um número inteiro de quilos, então, nesse caso, a quantidade de maneiras distintas de se distribuírem esses 7 kg de feijão para essas famílias será igual a

a) 30.

b) 120.

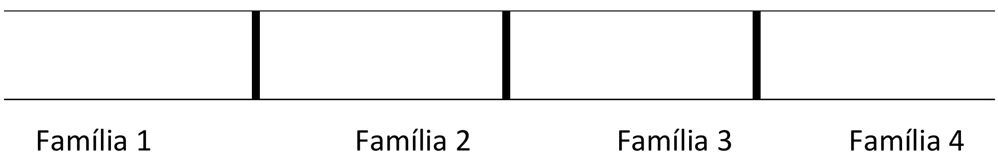
c) 330.

d) 820.

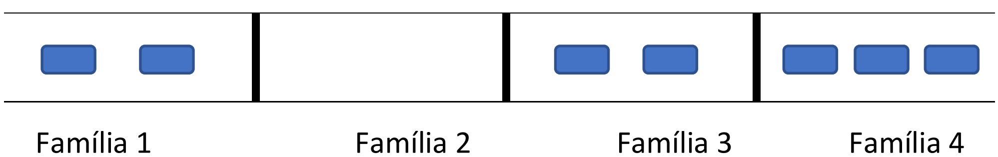
e) 1.320.

Comentários:

Podemos representar os quilos de feijão como  e as 4 famílias como seções separadas por uma barra:



Podemos distribuir os 7 quilos de feijão da seguinte forma, por exemplo:



O enunciado permite que alguma(s) família(s) fique sem quilos de feijão porque menciona que a distribuição será para "até" 4 famílias. Assim, há 7 quilos de feijão (p = 7) a serem distribuídos livremente para 4 famílias (n = 4).

Essa distribuição pode ser vista como a permutação dos 7  e das 3 barras que separam as famílias, isto é, uma permutação de 10 elementos, com repetição de 7 e de 3 elementos:

$$CR_4^7 = P_{10}^{3,7} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

Gabarito: B.

(FGV/2021 – Pref. Paulínia) Eva tem 9 maçãs indistinguíveis e deseja distribuí-las a 3 amigos de forma que cada um deles fique com, ao menos, 2 maçãs. O número de maneiras distintas de Eva distribuir as maçãs é

a) 12

b) 10

c) 9

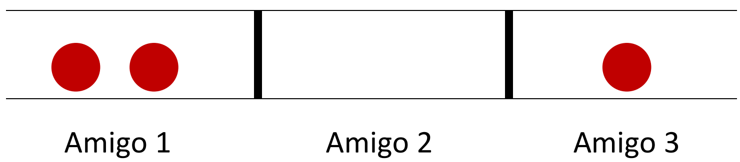
d) 8

e) 6

Comentários:

Essa questão trabalha com combinação completa, em que precisamos distribuir 9 maçãs para 3 amigos. Primeiro, distribuímos as maçãs obrigatórias, quais sejam, 2 para cada amigo. Após a distribuição das 6 maçãs, restarão 3 a serem distribuídas livremente.

A figura a seguir ilustra uma forma de distribuir as 3 maçãs:



A combinação completa, entre $n = 3$ amigos e $p = 3$ objetos, pode ser vista como a permutação dos 3 objetos e das 2 barras que separam os amigos, que corresponde a permutação de 5 elementos no total, com repetição de 3 e de 2 elementos:

$$CR_3^3 = P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Gabarito: B

Número de Soluções Inteiras de Equações

Os problemas de combinação completa, que acabamos de ver, podem ser analisados de **outra perspectiva**.

Vamos considerar o mesmo exemplo da compra de 3 potes de sorvete, dentre 5 marcas distintas.

Podemos representá-lo por uma **equação**, em que x_A representa a quantidade de potes de sorvete adquiridos da marca A; x_B representa a quantidade de potes de sorvete da marca B; x_C, a quantidade de potes da marca C; x_D, a quantidade de potes da marca D; e x_E, a quantidade de potes da marca E.

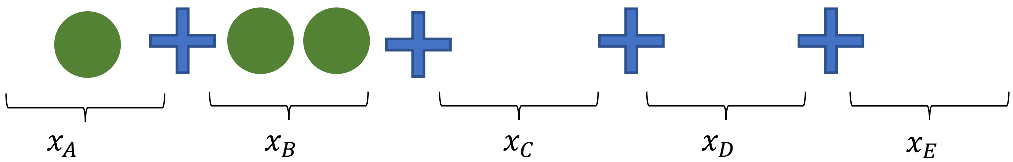
Sabendo que o total de potes de sorvete adquiridos é igual a 3, então a soma dos potes adquiridos de todas as marcas é igual a 3:

$$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 3$$

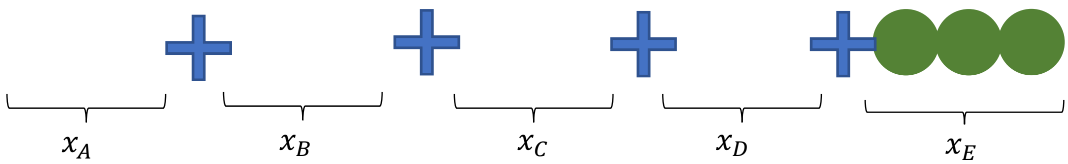
Como os valores de x representam as quantidades de **potes** adquiridos de cada uma das 5 marcas, de modo que o **total** de potes seja igual a 3, o número de maneiras de escolher os 3 potes de sorvete corresponde ao número de maneiras de encontrar os valores de $\boldsymbol{x}$ que **resolvem** essa **equação**.

Ou seja, o problema de **combinação completa**, que vimos antes, corresponde ao **número de soluções possíveis** para essa equação.

Afinal, podemos representar os diferentes x_i por espaços entre os símbolos de e os valores que eles assumem por , de forma que o total seja igual a 3. Um exemplo dessa representação é:



Aqui, temos $x_A = 1$, $x_B = 2$, $x_C = 0$, $x_D = 0$, $x_E = 0$. Outra opção seria:



Nesse exemplo, temos $x_A = 0$, $x_B = 0$, $x_C = 0$, $x_D = 0$ e $x_E = 3$.

Ou seja, o número de maneiras de encontrar os possíveis valores de $\boldsymbol{x}$, isto é, o **número de soluções possíveis** para a equação, corresponde a uma permutação de p = 3 com n – 1 = 4 símbolos de

$$CR_5^3 = P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \times 3!}$$

Em outras palavras, a combinação completa CR_5^3 também indica o **número de soluções possíveis** para a equação $x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 3$.

> De modo geral, o **número de soluções possíveis** para a equação $\boldsymbol{x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p}$ é:
>
> $$\boldsymbol{CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p}}$$

O **resultado** da equação corresponde ao número de objetos: $\boldsymbol{p}$

O **número de variáveis** corresponde ao número de seções: $\boldsymbol{n}$

Mais precisamente, a combinação completa CR_n^p indica o **número de soluções inteiras e não-negativas possíveis** para a referida equação.

Por que somente soluções **inteiras** e **não-negativas**?

Se pudéssemos escolher números **negativos**, poderíamos sempre diminuir uma unidade de uma variável e aumentar uma unidade de outra para manter a soma constante (no nosso exemplo, igual a 3).

Ou seja, poderíamos ter $x_A = 4$ e $x_B = -1$ (e as demais variáveis nulas), $x_A = 5$ e $x_B = -2$, $x_A = 6$ e $x_B = -3$, etc. O número de soluções seria **infinita**!

O mesmo vale para números **decimais**. Há **infinitos** números decimais entre quaisquer números inteiros. Por exemplo, entre 2 e 3, há 2,1; 2,11; 2,111; 2,1111;...

Portanto, se as incógnitas pudessem assumir quaisquer valores reais, sempre poderíamos aumentar uma incógnita um “pouquinho” e diminuir outra esse mesmo “pouquinho” e manter a soma constante.

Portanto, somente o conjunto das soluções **inteiras** e **não-negativas** da equação é um conjunto **finito**.

FIQUE ATENTO!

Como vimos, a princípio, são **permitidas** soluções **nulas** para algumas incógnitas.

Caso o problema traga alguma situação especial diferente dessa, como exigir que as soluções sejam **positivas** (ou seja, **não** permitir soluções **nulas**), precisamos fazer as adaptações necessárias.

Por exemplo, considere a seguinte equação, em que os valores de x precisam ser **positivos**:

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 6, com\ x > 0$$

Nesse caso, precisamos primeiro distribuir 1 unidade para cada x.

Assim, sobrarão 6 – 4 = 2 unidades a serem **livremente** distribuídas, o que pode ser representado pela seguinte equação (em que x **pode** assumir valores **nulos**):

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 2, com\ x \geq 0$$

Sabemos que o número de soluções possíveis para essa equação é:

$$CR_4^2 = P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \times 2!}$$

HORA DE PRATICAR!

(CESPE/2011 – SEDUC/AM) A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 18$ possui mais de 200 soluções inteiras e não negativas.

Comentários:

O número de soluções inteiras e não-negativas para essa equação é o número de combinações completas com p = 18 objetos em n = 3 seções, ou seja:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p}$$

$$CR_3^{18} = P_{20}^{2,18} = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$$

O resultado (190) é inferior a 200.

Gabarito: Errado.

(2015 – Prefeitura de Mangaratiba/RJ) Considerando o conjunto universo dos números inteiros não negativos, podemos afirmar que a equação x + y + z – 5 = 0:

a) possui uma única solução.

b) possui infinitas soluções.

c) possui 21 soluções.

d) possui 35 soluções.

e) possui 42 soluções.

Comentários:

Primeiro fazemos o seguinte ajuste na equação:

$$x + y + z = 5$$

O número de soluções inteiras e não-negativas para essa equação é o número de combinações completas com p = 5 objetos em n = 3 seções, ou seja:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p}$$

$$CR_3^5 = P_7^{2,5} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

Gabarito: C.

PARTIÇÕES

O conceito de partição em matemática é bastante similar ao que utilizamos no dia a dia. Se vamos partir uma pizza, iremos dividi-la em algumas fatias (não necessariamente iguais). Seja qual for o número ou tamanho das fatias, se juntarmos todas elas (antes de comê-las, é claro!), teremos a pizza completa.

Com a partição em matemática, temos uma situação muito semelhante. A pizza inteira corresponderia a um conjunto de elementos, que seria particionado (fatiado) em alguma quantidade de subconjuntos (fatias), que podem **ser ou não iguais**.

Por exemplo, podemos particionar um grupo de 9 trabalhadores em 3 grupos (um com 5 trabalhadores, outro com 2 trabalhadores e outro com 1). Atente-se que a **soma** dos trabalhadores de todos os grupos equivale ao **total** de trabalhadores.

O fato de a soma dos elementos nos grupos ser equivalente ao total de elementos é a característica que **diferencia** as **partições** dos problemas de **combinação**.

Em outras palavras, é possível resolver problemas de partição com as técnicas de **combinação**. Porém, conhecer o cálculo específico para a partição é importante, tanto para acelerar a resolução do problema quanto para reduzir as chances de erros.

Há dois tipos de partição: a partição ordenada e a partição não-ordenada. Na partição **ordenada**, os grupos são **diferentes**. Por exemplo, há um grupo dos coordenadores, outro dos supervisores e outro dos trabalhadores de uma linha de montagem. Assim, participar do primeiro grupo é **diferente** de participar do segundo ou do terceiro, ou seja, a ordem **entre** os grupos **importa**.

Na partição **não-ordenada**, os grupos são **iguais**. Por exemplo, as equipes formadas terão que fazer um mesmo trabalho. Assim, se um mesmo grupo de pessoas é selecionado entes ou depois, não haverá diferença. Portanto, a ordem **entre** os grupos **não importa**.

Partição Ordenada

A partição ordenada representa a separação de um conjunto de elementos em **subconjuntos distintos** entre si, de modo que a soma dos elementos dos subconjuntos seja equivalente ao total de elementos do conjunto original.

Por exemplo, podemos particionar um conjunto de 10 profissionais entre os subconjuntos de 1 gerente, 2 coordenadores, e 7 trabalhadores de linha de frente. Como os subconjuntos são **distintos**, ser chamado para o primeiro grupo é diferente de ser chamado para o segundo, terceiro ou quarto grupos. Nesse caso, temos uma partição ordenada, em que a **ordem** dos subconjuntos **importa**.

Atenção! Dentro de um mesmo subconjunto, a ordem dos participantes não importa. O que **importa** é a ordem **entre os subconjuntos**.

Vamos resolver esse exemplo com as técnicas de combinação que conhecemos. Podemos começar calculando as possibilidades de se escolher o único gerente (k = 1, n = 10). Esse é um caso especial de combinação $C_{n,1} = n$:

$$C_{10,1} = 10$$

Agora, escolhemos k = 2 coordenadores, dentre as n = 9 opções que restaram após a escolha do gerente:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{9,2} = \frac{9!}{7!\,2!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Por fim, temos uma única opção para escolher k = 7 trabalhadores, dentre as n = 7 opções que restaram (outro caso especial $C_{n,n} = 1$).

Pelo princípio multiplicativo, temos 10 x 36 x 1 = 360 possibilidades de formar esses três subconjuntos. O resultado seria o mesmo se começássemos por qualquer outro subconjunto.

Alternativamente, esse problema poderia ser resolvido com a seguinte fórmula de **partição**:

$$\binom{10}{1,2,7} = \frac{10!}{1!\,2!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{2 \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{2} = 10 \times 9 \times 4 = 360$$

Bem mais simples, certo?

Por que esses resultados são iguais? Vamos entender essa "coincidência"!

Para a escolha de k = 1 gerente, dentre todas as n = 10 opções, temos:

$$C_{10,1} = \frac{10!}{(10-1)!1!}$$

Para a escolha de k = 2 coordenadores, dentre as n = 10 – 1 opções que sobraram após a escolha do gerente, temos:

$$C_{10-1,2} = \frac{(10-1)!}{(10-1-2)!2!}$$

Para a escolha de k = 7 trabalhadores, dentre as n = 10 – 1 – 2 opções que sobraram após a escolha do gerente e dos coordenadores, temos:

$$C_{10-1-2,7} = \frac{(10-1-2)!}{(10-1-2-7)!7!}$$

Agora, precisamos multiplicar todos esses resultados:

$$C_{10,1} \times C_{10-1,2} \times C_{10-1-2,7}$$

$$= \frac{10!}{(10-1)!1!} \times \frac{(10-1)!}{(10-1-2)!2!} \times \frac{(10-1-2)!}{(10-1-2-7)!7!}$$

Nessa expressão, podemos simplificar $\frac{(10-1)!}{(10-1)!}$ e também $\frac{(10-1-2)!}{(10-1-2)!}$:

$$= \frac{10!}{\cancel{(10-1)!}1!} \times \frac{\cancel{(10-1)!}}{\cancel{(10-1-2)!}2!} \times \frac{\cancel{(10-1-2)!}}{(10-1-2-7)!7!}$$

Além disso, $(10-1-2-7)! = 0! = 1$. Portanto, conforme vimos antes, temos:

$$= \frac{10!}{1!2!7!}$$

Em geral, uma partição ordenada de n elementos no total, em m subconjuntos com $p_1, p_2, \dots, p_m$ elementos cada, temos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_m!}$$

(CESPE/2011 – STF) O colegiado do Supremo Tribunal Federal (STF) é composto por 11 ministros, responsáveis por decisões que repercutem em toda a sociedade brasileira. No julgamento de determinados processos, os ministros votam pela absolvição ou pela condenação dos réus de forma independente uns dos outros. A partir dessas informações e considerando que, em determinado julgamento, a probabilidade de qualquer um dos ministros decidir pela condenação ou pela absolvição do réu seja a mesma, julgue o item seguinte.

Se, no julgamento de determinado réu, 8 ministros votarem pela absolvição e 3 ministros votarem pela condenação, a quantidade de maneiras distintas de se atribuir os votos aos diferentes ministros será inferior a 170.

Comentários:

Temos uma partição de 11 elementos em dois subconjuntos com 8 e 3 elementos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\, p_2! \dots p_m!}$$

$$\binom{11}{8,3} = \frac{11!}{8!\, 3!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 3 \times 2} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = 11 \times 5 \times 3 = 165$$

Como 165 é menor do que 170, portanto o item está certo.

Gabarito: Certo

(FCC/2015 – Julgador Administrativo Tributário da SEFAZ/PE) A tabela a seguir mostra a pontuação obtida pelas cinco empresas que participaram da concorrência pública para a construção das dez estações de uma linha de metrô.

Empresa	Pontuação
I	500
II	300
III	200
IV	120
V	80

De acordo com as regras do edital da concorrência, somente as empresas com mais de 150 pontos seriam consideradas aprovadas.

Além disso, o edital determinava que as dez estações seriam distribuídas entre as empresas aprovadas proporcionalmente ao número de pontos que cada uma delas obteve.

Sabendo que as dez estações são iguais, o número de maneiras diferentes de distribuí-las entre as empresas aprovadas, de acordo com as regras do edital, é igual a

a) 3780.

b) 2520.

c) 7560.

d) 1260.

e) 5040.

Comentários:

Pela regra da pontuação mínima, apenas as empresas I, II e III são aprovadas. As 10 estações serão divididas entre elas proporcionalmente ao número de pontos.

Podemos chamar de x a quantidade de estações por ponto, que é constante para todas as empresas. Assim, temos:

$$500x + 300x + 200x = 10$$

$$1000x = 10$$

$$x = 1/100$$

Portanto, cada empresa irá receber 1/100 estação por ponto:

I) A empresa I irá receber: 500 x 1/100 = 5

II) A empresa II irá receber 300 x 1/100 = 3

III) A empresa III irá receber 200 x 1/100 = 2

Agora, vamos calcular o número de possibilidades de distribuição. Podemos calcular as combinações para cada empresa e, em seguida, multiplicar os resultados, tendo em vista o princípio multiplicativo.

Porém, a solução será muito mais rápida se considerarmos que as 10 estações serão particionadas entre as 3 empresas (não sobrará nenhuma estação), com n = 10, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$ e $p_3 = 2$.

$$\binom{n}{p_1, p_2, \ldots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_m!}$$

$$\binom{10}{5,3,2} = \frac{10!}{5!\,3!\,2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 2} = 10 \times 9 \times 4 \times 7 = 2520$$

Gabarito: B

Partição Não-Ordenada

A partição não-ordenada representa a separação de um conjunto de elementos em subconjuntos **equivalentes** entre si. Por exemplo, podemos particionar um conjunto de 6 profissionais em 3 duplas, que deverão realizar um **mesmo trabalho**.

Como os subconjuntos são equivalentes, se uma mesma dupla é chamada primeiro ou depois, a situação será a **mesma**. Ou seja, a **ordem entre** os subconjuntos **não importa.**

Repare que a ordem **dentro** do subconjunto **não importa**, como também não importava para a partição ordenada. A diferença é que, na partição não-ordenada, a ordem **entre** os subconjuntos **também não importa**.

Se esse exemplo de 3 duplas de profissionais, dentre 6, fosse uma partição **ordenada**, teríamos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \ldots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_m!}$$

$$\binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 6 \times 5 \times 3 = 90$$

Nessa situação, as **mesmas duplas**, selecionadas em **ordens diferentes**, correspondem a possibilidades **distintas**. Por exemplo, suponha que os 6 profissionais sejam Ana, Beto, Caio, Dedé, Eduardo e Fátima e que as duplas formadas sejam Ana e Beto, Caio e Dedé, Eduardo e Fátima.

Em uma **partição ordenada**, teríamos as seguintes possibilidades **distintas**, com exatamente essas duplas:

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
1.	Ana e Beto	Caio e Dedé	Eduardo e Fátima
2.	Ana e Beto	Eduardo e Fátima	Caio e Dedé
3.	Caio e Dedé	Ana e Beto	Eduardo e Fátima
4.	Caio e Dedé	Eduardo e Fátima	Ana e Beto
5.	Eduardo e Fátima	Ana e Beto	Caio e Dedé
6.	Eduardo e Fátima	Caio e Dedé	Ana e Beto

Porém, em uma partição **não ordenada**, todas essas 6 possibilidades representam o **mesmo resultado**, uma vez que as duplas são as mesmas.

Assim, para calcular a permutação **não ordenada**, precisamos **dividir** as 90 possibilidades da permutação ordenada pelo número de maneiras de **reordenar** as 3 duplas, ou seja, pela **permutação** dos 3 elementos:

$$\frac{\binom{6}{2,2,2}}{P_3} = \frac{\binom{6}{2,2,2}}{3!} = \frac{90}{3 \times 2 \times 1} = 15$$

De maneira geral, na **partição não ordenada**, precisamos dividir o resultado da partição ordenada pelo número de maneiras de **permutar os m grupos**, como indicado abaixo.

$$\frac{\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m}}{P_m} = \frac{\frac{n!}{p_1!\,p_2!\dots p_m!}}{m!}$$

A fórmula da partição não ordenada é praticamente essa, porém com alguns ajustes. Para que sejam iguais, os grupos devem possuir o **mesmo tamanho**, então chamamos $p_1, p_2, \dots, p_m$ de $\boldsymbol{p}$. Logo, substituímos $p_1!\,p_2!\dots p_m!$ por:

$$\underbrace{\boldsymbol{p}!\,\boldsymbol{p}!\dots\boldsymbol{p}!}_{\boldsymbol{m}\text{ vezes}} = (\boldsymbol{p}!)^{\boldsymbol{m}}$$

Além disso, sabendo que há $\boldsymbol{m}$ subconjuntos com p elementos cada, então há um total de $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$ elementos. Então, substituímos n por $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$.

A partição **não ordenada** em $\boldsymbol{m}$ **subconjuntos** de $\boldsymbol{p}$ **elementos** cada (ou seja, o conjunto original possui $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$ elementos, no total), é:

$$\frac{\binom{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p},\dots,\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{m}!} = \frac{(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{p})!}{\boldsymbol{m}!(\boldsymbol{p}!)^{\boldsymbol{m}}}$$

(2016 – Prefeitura de São José da Coroa Grande/PE) De quantos modos podemos dividir 10 pessoas em dois grupos de 5 pessoas?

a) 96

b) 108

c) 120

d) 126

e) 132

Comentários:

Considerando que os grupos são equivalentes, temos uma partição não-ordenada de m = 2 subconjuntos de p = 5 elementos cada:

$$\frac{\binom{m \times p}{p, p, \ldots, p}}{m!} = \frac{(m \times p)!}{m!\,(p!)^m}$$

$$\frac{\binom{10}{5,5}}{2!} = \frac{10!}{2!\,(5!)^2} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 2 \times 9 \times 7 = 126$$

Gabarito: D

(2006 – TCE/PR) De quantas maneiras diferentes 12 estudantes podem ser divididos em 3 equipes, sendo que cada uma das equipes deve ser composta de quatro estudantes?

a) 8425

b) 3260

c) 12640

d) 5775

e) 34650

Comentários:

Considerando que as equipes são equivalentes, temos uma partição não-ordenada de m = 3 subconjuntos de p = 4 elementos cada:

$$\frac{\binom{12}{4,4,4}}{3!} = \frac{12!}{3!\,(4!)^3} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2} = 11 \times 5 \times 3 \times 7 \times 5 = 5.775$$

Gabarito: D

Lemas de Kaplansky

Agora, veremos o **primeiro lema** e o **segundo lema de Kaplansky**. Ambos trabalham com a **seleção** de um subconjunto de elementos, a partir de um conjunto de elementos originalmente dispostos em determinada ordem, de modo que elementos **consecutivos** (vizinhos) do conjunto original **não** sejam **selecionados**.

A diferença entre os lemas é que, para o **primeiro lema**, os elementos **extremos** do conjunto original **não** são considerados **consecutivos** (vizinhos), enquanto para o **segundo lema**, tais elementos **são** considerados **consecutivos** (vizinhos), como se os elementos do conjunto original estivessem dispostos em um **círculo**.

Primeiro Lema de Kaplansky

O **primeiro lema de Kaplansky** considera que os elementos estão originalmente dispostos em determinada ordem, como em uma **fila**, e que serão **selecionados** alguns desses elementos, sem que a ordem dessa seleção importe. Porém, dentre os elementos selecionados, **não** pode haver elementos **consecutivos** (vizinhos) da fila original.

Suponha um conjunto de 8 algarismos ordenados {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Quantas são as possibilidades de selecionar 2 elementos que **não** sejam **consecutivos** do conjunto original?

Podemos resolver esse problema, sem conhecer o lema de Kaplansky, calculando o número de maneiras de selecionar 2 elementos no total (combinação de 2 elementos, dentre 8) e subtrair o número de maneiras de selecionar 2 elementos consecutivos. Vejamos:

A combinação de 2 elementos, dentre 8, é dada por:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2} = 4 \times 7 = 28$$

As possibilidades de escolha de 2 elementos consecutivos são: {1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 5}, {5, 6}, {6, 7} e {7, 8}, ou seja, há 7 possibilidades.

Portanto, o número de maneiras de escolher 2 elementos não consecutivos, dentre 8 no total, é:

$$28 - 7 = 21$$

E se quiséssemos escolher 3 elementos não consecutivos? Aí, teríamos um pouco mais de trabalho.

Para facilitar a resolução de problemas desse tipo, podemos utilizar o raciocínio de Kaplansky.

Primeiro, vamos representar cada elemento do conjunto original por um **S**, caso ele pertença ao subconjunto selecionado, ou por um **N**, caso ele não pertença ao subconjunto selecionado. Por exemplo, a seleção do **2º** e do **4º** elemento do conjunto original de 8 elementos é representada por **N S N S N N N N**.

Para formar um subconjunto de 3 elementos, sem elementos consecutivos, vamos começar representando os 8 – 3 = 5 elementos que **não** serão selecionados. Como não sabemos em quais posições esses 5 elementos estarão, vamos prever **possíveis espaços antes e depois** desses elementos.

__ N __ N __ N __ N __ N __

Esses espaços correspondem **aos possíveis lugares dos elementos selecionados**. Como não há espaços consecutivos, não será possível escolher elementos consecutivos. Assim, o número de maneiras de selecionar 3 elementos não consecutivos do conjunto original corresponde ao número de maneiras de **selecionar 3 dentre esses 6 espaços** (combinação de 3 elementos, dentre 6):

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

É mais importante entender o raciocínio do que memorizar a fórmula.

De modo geral, para a seleção de um subconjunto de $\boldsymbol{p}$ elementos, dentre $\boldsymbol{n}$ elementos no total, teremos $\boldsymbol{n-p}$ elementos **não selecionados (N)** e, portanto, $\boldsymbol{n-p+1}$ **espaços**, antes e depois de cada N.

Desses $\boldsymbol{n-p+1}$ **espaços**, selecionaremos os lugares dos $\boldsymbol{p}$ elementos (combinação de $\boldsymbol{p}$ elementos dentre $\boldsymbol{n-p+1}$).

O **1º lema de Kaplansky**, indicado por $\boldsymbol{f(n,p)}$, é:

$$\boldsymbol{f(n,p) = C_{n-p+1,p}}$$

Para o exemplo que calculamos antes de conhecer o primeiro lema de Kaplansky, tivemos n = 8 e p = 2. Assim, haverá 8 – 2 = 6 elementos não selecionados e 6 + 1 = 7 espaços. Dentre esses 7 espaços, devemos escolher a posição de 2 elementos:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{8},\boldsymbol{2}) = C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!\,2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2} = 7 \times 3 = 21$$

Que foi o resultado que obtivemos anteriormente.

(FGV/2019 – MPE/RJ) Valdo é estagiário em um escritório de advocacia e, na semana que vem, deverá escolher para trabalhar três dias de segunda a sábado. O escritório não permite que um estagiário trabalhe dois dias consecutivos. O número de possibilidades que Valdo tem para escolher seus dias de trabalho é:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

Comentários:

Como o conjunto original é formado pelos dias da semana de segunda a sábado, os extremos não são dias consecutivos. Assim, temos o primeiro lema de Kaplansky com n = 6 e p = 3.

Primeiro representamos os 6 – 3 = 3 dias em que Valdo não irá trabalhar, com os espaços antes e depois de cada dia não trabalhado, totalizando n – p + 1 = 4 espaços, os quais representam os **possíveis** dias de trabalho:

_ N _ N _ N _

Desses n – p + 1 = 4 espaços, devem ser escolhidos p = 3 elementos:

$$\boldsymbol{f(n,p) = C_{n-p+1,p}}$$

$$f(6,3) = C_{4,3}$$

Para facilitar as contas, lembre-se que a seleção de n – 1 elementos, dentre n, é um caso particular de combinação: $C_{n,n-1} = n$:

$$C_{4,3} = 4$$

Gabarito: C

(CESPE/2019 – Prefeitura de São Cristóvão/SE) Situação hipotética: As 5 lâmpadas tubulares de uma sala de aula foram instaladas formando uma única fileira. Por motivo de economia, 2 lâmpadas adjacentes nunca poderão ficar acesas ao mesmo tempo.

Assertiva: Nessa situação, há exatamente 13 configurações distintas, incluindo todas as lâmpadas desligadas, que atendem à exigência de economia.

Comentários:

Essa questão é um pouco mais trabalhosa. Precisamos tratar distintamente das situações (i) em que nenhuma lâmpada está acesa; (ii) em que há 1 lâmpada acesa; (iii) em que há 2 lâmpadas acesas; e (iv) em que há 3 lâmpadas acesas.

Se houvesse 4 lâmpadas acesas, dentre 5, necessariamente teríamos lâmpadas adjacentes acesas. Portanto, as opções de acender 4 lâmpadas ou mais (5) não atendem às restrições do problema.

i) Nenhuma lâmpada acesa: $\mathbf{C_{5,0} = 1}$ (caso especial de combinação $C_{n,0} = 1$). Não há que se falar em lema de Kaplansky, porque quando não selecionamos lâmpada alguma, não é possível selecionar lâmpadas adjacentes.

ii) 1 lâmpada acesa: $\mathbf{C_{5,1} = 5}$ (outro caso especial de combinação $C_{n,1} = n$). Nesse caso, também não há que se falar em lema de Kaplansky, porque quando selecionamos uma única lâmpada, também não é possível selecionar lâmpadas adjacentes.

iii) 2 lâmpadas acesas: agora sim, podemos utilizar o 1º lema de Kaplansky para garantir que as 2 lâmpadas selecionadas não sejam adjacentes. Com p = 2 elementos, dentre n = 5 elementos no total, temos n – p = 5 – 2 = 3 elementos não selecionados e n – p + 1 = 4 espaços. Desses 4 espaços, devemos escolher p = 2:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = \mathbf{6}$$

iv) 3 lâmpadas acesas: conseguimos selecionar 3 lâmpadas não adjacentes de uma **única** forma (SNSNS). De todo modo, vamos utilizar o lema de Kaplansky para chegar a essa conclusão. Com p = 3 elementos, dentre n = 5, temos n – p = 5 – 3 = 2 elementos não selecionados e n – p + 1 = 3 espaços. Desses 3 espaços, devemos escolher p = 3: $C_{3,3} = 1$ (caso especial de combinação $C_{n,n} = 1$).

Como as possibilidades dos eventos de i a iv são excludentes, isto é, temos a possibilidade de i OU as possibilidades de ii OU as possibilidades de iii OU a possibilidade de iv, então, pelo princípio **aditivo**, devemos somar esses resultados: 1 + 5 + 6 + 1 = 13

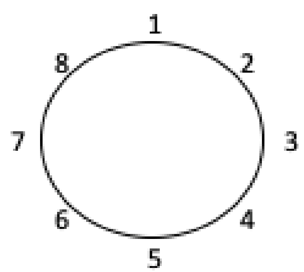
Gabarito: Certo.

Segundo Lema de Kaplansky

O **segundo lema de Kaplansky** também trabalha com a **seleção** de um subconjunto de elementos, de modo que elementos **consecutivos** (**vizinhos**) do conjunto original **não** sejam selecionados.

Porém, neste caso, os elementos **extremos** do conjunto original **são** considerados **consecutivos** (vizinhos). Assim, havendo n elementos, os elementos 1 e n são considerados vizinhos.

Supondo um conjunto de 8 elementos, os elementos 1 e 8 são consecutivos, como se os elementos estivessem dispostos em um círculo:



Exemplos desse tipo de situação são os dias da semana, de segunda a domingo, ou os meses do ano, de janeiro a dezembro, etc.

O **2º lema de Kaplansky**, indicado por $g(n,p)$, é dado por:

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}$$

No caso de $n = 8$, como na figura, se tivermos que selecionar $p = 3$ elementos não consecutivos:

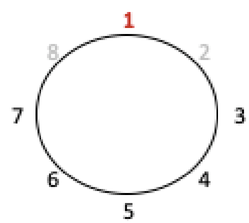
$$g(8,3) = \frac{8}{8-3} C_{8-3,3} = \frac{8}{5} C_{5,3}$$

$$g(8,3) = \frac{8}{5} \times \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = \frac{8}{5} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = \frac{8}{5} \times \frac{5 \times 4}{2} = 16$$

Vamos **entender o raciocínio** por trás do 2º lema.

Com 8 elementos dispostos em um círculo, precisamos **separar** o problema em 2: (i) o elemento 1 é selecionado; e (ii) o elemento 1 não é selecionado (poderíamos substituir o elemento 1 por qualquer outro elemento).

i) Ao **selecionarmos o elemento 1**, **não** podemos selecionar os elementos 2 ou 8, pois ambos são vizinhos.



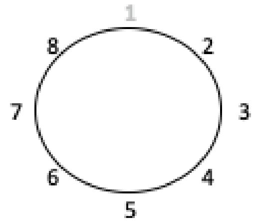
Assim, restam os elementos 3 a 7 (isto é, 5 elementos), dos quais devemos selecionar 2 elementos não consecutivos.

Observe que os extremos 3 e 7 **não são consecutivos**.

Portanto, podemos utilizar o **1º lema de Kaplansky**, com um total de n = 5 elementos, dos quais devemos selecionar p = 2 elementos. Assim, temos n – p = 3 elementos não selecionados e n – p + 1 = 4 espaços, dos quais devemos selecionar p = 2:

$$f(5,2) = C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

ii) **Se não selecionarmos o elemento 1**, então iremos selecionar 3 elementos não consecutivos, dentre os elementos 2 a 8.



Novamente, os extremos 2 e 8 **não são consecutivos**.

Então, utilizamos o **1º lema de Kaplansky**, com n = 7 elementos e p = 3, ou seja, n – p = 4 elementos não selecionados e n – p + 1 = 5 espaços:

$$f(7,3) = C_{5,3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Como as possibilidades de i e ii são excludentes, ou seja, temos as 6 possibilidades de i OU as 10 possibilidades de ii, pelo princípio aditivo, temos:

$$6 + 10 = 16$$

Esse é o resultado que obtivemos pela fórmula do 2º lema de Kaplansky!

(2018 – Câmara de Cambé/PR) Um auxiliar administrativo vai organizar um calendário para a supervisão de uma praça de 2ª feira até domingo. Essa praça tem que ser supervisionada exatamente duas vezes por semana e nos mesmos dias de cada semana. A praça nunca deve ser supervisionada dois dias consecutivos. Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o número de possibilidades diferentes que o auxiliar administrativo tem para organizar esse calendário.

a) 14

b) 16

c) 18

d) 24

e) 28

Comentários:

Temos um exemplo do segundo lema de Kaplansky, pois engloba todos os dias da semana (domingo e segunda-feira são consecutivos). Assim, temos n = 7, p = 2:

$$g(n, p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}$$

$$g(7,2) = \frac{7}{5} C_{5,2}$$

$$g(7,2) = \frac{7}{5} \times \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{7}{5} \times \frac{5 \times 4}{2} = 14$$

Caso **não lembre** essa fórmula, podemos dividir a resolução desse problema em duas situações.

i) A segunda-feira é selecionada. Assim, restarão os dias de quarta a sábado (4 dias) para selecionar 1 dia. Usando o 1º lema de Kaplansky, com n = 4 e p = 1, temos n – p = 3 dias não selecionados e n – p + 1 = 4 espaços, dos quais devemos selecionar 1:

$$f(4,1) = C_{4,1} = 4$$

ii) A segunda-feira não é selecionada. Assim, restarão os dias de terça a domingo (6 dias) para selecionar 2 dias. Usando o 1º lema de Kaplansky, com n = 6 e p = 2, temos n – p = 4 dias não selecionados e n – p + 1 = 5 espaços, dos quais devemos selecionar 2:

$$f(6,2) = C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Como são situações excludentes (ou seja, alternativas), pelo princípio da adição devemos somar os resultados:

$$g(7,2) = f(4,1) + f(6,2) = 4 + 10 = 14$$

Gabarito: A

Resumo da Aula

Princípios de Contagem

- **Princípio Multiplicativo** (multiplicação): Eventos concomitantes (ocorre um E outro)
- **Princípio Aditivo** (soma): Eventos mutuamente exclusivos (ocorre um OU outro)
- **Princípio do Pombo**: Considerar o pior cenário para **garantir** a situação desejada

Fatorial: **produto** de um número com todos os números menores que ele:

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Permutação – reordenação de elementos

- **Permutação simples**: Número de maneiras de **reordenar** elementos **distintos**:

$$P_n = n!$$

- **Permutação com repetição**: Número de maneiras de reordenar n elementos, dos quais k elementos são **repetidos**:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!}$$

- **Permutação circular**: Número de maneiras de reordenar elementos dispostos em **círculo**:

$$PC_n = (n-1)!$$

- **Permutação com elementos ordenados**: reordenação de n elementos, dos quais k elementos devem respeitar uma **ordem específica**, não necessariamente consecutivos:

$$\frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

- **Permutação caótica**: número de maneiras de reordenar elementos, de modo **nenhum** deles retorne para a sua **posição original**:

$$D_n = n! \times \left[+\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Arranjo – seleção de elementos **com importância de ordem**

- **Arranjo sem repetição**: Número de maneiras de sortear, sem repetição k elementos, dentre n, de modo que a **ordem** do sorteio **importe**:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Arranjo com repetição**: Número de maneiras de sortear, permitindo-se a **repetição**, k elementos, dentre n, de modo que a **ordem** do sorteio **importe**:

$$A_{n,k} = n^k$$

Combinação – seleção de elementos **sem importância de ordem**

- **Combinação simples**: Número de maneiras de sortear, sem repetição, k elementos, dentre n, de modo que a **ordem** do sorteio **não importe**:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

- **Combinação completa**: Número de maneiras de sortear, **sem importância de ordem**, p objetos (ex: potes de sorvete), quando há n **tipos** diferentes (ex: marcas de sorvete):

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

Esse também é o **número de soluções inteiras não-negativas** para a equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

Partição – separação de elementos em **subconjuntos**

- **Partição ordenada**: Número de maneiras de separar n elementos em m **subconjuntos distintos** entre si, com $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \dots, \boldsymbol{p_m}$ elementos cada, temos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\,p_2! \dots p_m!}$$

- **Partição não ordenada**: Número de maneiras de separar elementos em m subconjuntos de p elementos cada (total de $m \times p$ elementos):

$$\frac{\binom{m \times p}{p, p, \dots, p}}{m!} = \frac{(m \times p)!}{m!\,(p!)^m}$$

Lemas de Kaplansky – seleção de elementos **não vizinhos**

- **1º Lema**: Número de maneiras de selecionar p elementos **não vizinhos**, dentre n, em que os **extremos** do conjunto original **não** são considerados **vizinhos**: $f(n, p) = C_{n-p+1,p}$

- **2º Lema**: Número de maneiras de selecionar p elementos **não vizinhos**, dentre n, em que os **extremos** do conjunto original **são** considerados **vizinhos**: $g(n, p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}$

Questões Comentadas – Multibancas

Princípios de Contagem

CEBRASPE

1. (CEBRASPE 2019/Pref. São Cristóvão) Com relação a sistemas lineares e análise combinatória, julgue o item.

Situação hipotética: No jogo de basquete, cada um dos cinco jogadores de um time pode ocupar as seguintes posições: armador, ala armador, ala, líbero e pivô. O elenco do time Alfa é formado por 2 armadores, 2 alas armadores, 3 alas, 2 líberos e 3 pivôs. **Assertiva**: Nessa situação, sabendo-se que em quadra jogam apenas 5 jogadores por time e que os demais ficam no banco, é correto afirmar que existem 216 formas distintas de montar o time Alfa para iniciar a partida com exatamente um pivô, um armador e um ala.

Comentários:

A questão indaga sobre o número de possibilidades de formar um time **exatamente** com 1 pivô, 1 armador e 1 ala. A palavra exatamente indica que não haverá outro pivô, armador ou ala. Assim, os outros 2 jogadores (uma vez que há um total de 5 jogadores) podem ser líberos ou alas armadores.

Outro ponto importante é que todas as posições são distintas. Ou seja, ainda que sejam selecionados 2 líberos, por exemplo, o fato de escolhermos um para a 4ª posição e outro para a 5ª posição será **diferente** de escolher os mesmos líberos com as posições trocadas.

Nesse caso, podemos representar as diferentes posições desse time da seguinte forma:

Pivô	Armad	Ala	Líbero/Ala Armad	Líbero/Ala Armad

Há 3 pivôs no time, logo, há 3 possibilidades para pivô:

Pivô	Armad	Ala	Líbero/Ala Armad	Líbero/Ala Armad
3				

Há 2 armadores e 3 alas, logo, há 2 possibilidades para armador e 3 possibilidades para ala:

Pivô	Armad	Ala	Líbero/Ala Armad	Líbero/Ala Armad
3	2	3		

Por fim, há 2 líberos e 2 alas armadores. Assim, há 4 possibilidades para uma das posições de líbero/ala armador e 3 possibilidades para a outra posição:

Pivô	Armad	Ala	Líbero/Ala Armad	Líbero/Ala Armad
3	2	3	4	3

Como devemos escolher os jogadores para todas essas vagas no time, aplicamos o princípio multiplicativo:

Número de formas: 3 x 2 x 3 x 4 x 3 = 216

Gabarito: Certo.

2. (CEBRASPE/2014 – TER-GO) As prestações de contas das campanhas dos 3 candidatos a governador de determinado estado foram analisadas por 3 servidores do TRE desse estado. Considerando que um servidor pode analisar nenhuma, uma ou mais de uma prestação de contas e que, por coincidência, cada um dos 3 candidatos é parente de um dos 3 servidores, julgue o item que se segue.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuírem as prestações de contas entre os 3 servidores de modo que nenhum deles analise as contas de um parente é superior a 5.

Comentários:

Sabendo que cada candidato **não** poderá ser analisado por um servidor, então há 2 servidores possíveis para a análise de cada candidato. Note que não há restrição para a quantidade de contas analisadas por servidor, ou seja, o fato de um servidor analisar determinada conta não impede que ele analise outra conta.

Assim, considerando que há 2 servidores possíveis para cada um dos 3 candidatos, então, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras distintas de se distribuírem essas análises é:

2 x 2 x 2 = 8

Logo, o número de maneiras é superior a 5.

Gabarito: Certo.

3. (CEBRASPE/2014 – FUB) Uma parte considerável do jogo de pôquer está relacionada às estratégias dos jogadores, seja para não mostrar nenhuma emoção, seja para mostrar reações que levem o seu adversário a cometer algum erro. Assim, considere que Pedro, João e José estejam jogando em uma mesa de pôquer fechado e que cada um deles tenha na mão um jogo de cinco cartas da seguinte forma: um deles possui uma quadra, outro possui um par e o outro não tem nenhum tipo de sequência significativa. Por meio das reações dos jogadores, percebe-se que: um deles tem a intenção de desistir da jogada, outro tem a intenção de continuar a jogada e o outro tem a intenção de blefar. Sabe-se, ainda, que:

- **João não blefa e não tem o pior jogo;**
- **O jogador que tem a intenção de continuar tem na mão um jogo que forma um par;**

- **Pedro não tem a intenção de desistir;**
- **O jogador que blefa tem o jogo formado pela quadra.**

Com base nessa situação hipotética, julgue o item subsequente.

Se um jogador for escolhido ao acaso, sem que haja qualquer tipo de informação sobre a sua intenção ou sobre seu jogo, então a quantidade de possíveis combinações dos jogos e intenções que poderiam ser formados para ele é superior a 20.

Comentários:

Para um jogador qualquer, há 3 jogos possíveis (quadra, par ou nenhuma sequência) e 3 intenções possíveis (desistir, continuar ou blefar). Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de combinações possíveis de jogos E intenções é:

$$3 \times 3 = 9$$

Logo, a quantidade é inferior a 20.

Gabarito: Errado.

4. (CEBRASPE/2014 – INPI)

continentes	Américas	Ásia e Oceania	África	Europa
n.º de países	10	4	5	13

A tabela acima mostra a distribuição continental dos 32 países que participarão, com suas seleções de futebol, da próxima Copa do Mundo. Considerando que essas seleções serão divididas em 8 grupos de 4 seleções cada, e que a Ásia e a Oceania constituem, nesse caso, um único continente, julgue o item subsequente.

A quantidade de maneiras distintas de se formar um grupo que contenha seleções de países de todos os continentes é superior a 2.500.

Comentários:

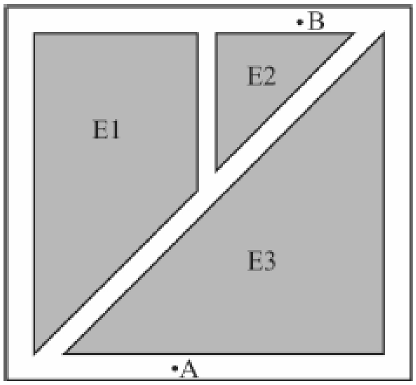
Deseja-se formar um grupo de 4 seleções, cada uma de um continente distinto. Sabendo que há 10 seleções das Américas, 4 seleções da Ásia e Oceania, 5 seleções da África e 13 seleções da Europa, então, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras de se formar esse grupo é:

$$10 \times 4 \times 5 \times 13 = 2600$$

Logo, a quantidade é superior a 2500.

Gabarito: Certo.

5. (CEBRASPE 2018/PM-AL) A figura seguinte mostra a planta baixa de um condomínio. O terreno ocupado pelo condomínio é um quadrado de lados que mede 60 m. Nesse condomínio, as áreas indicadas por E1, E2 e E3 correspondem aos locais onde estão construídos os prédios residenciais, e as regiões em branco correspondem às vias de livre circulação para pedestres e veículos.

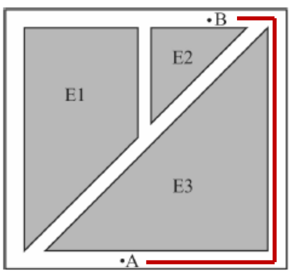


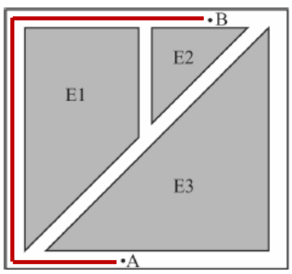
A partir da figura e das informações precedentes, julgue o item a seguir, considerando que a área de E2 seja igual a 200 m2.

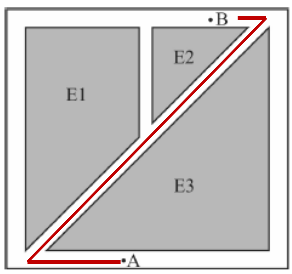
Situação hipotética: Dois policiais devem ir do ponto A ao B, pelas vias de livre circulação, cada um deles fazendo um caminho diferente, sem passar duas vezes pelo mesmo local. Toda vez que os dois policiais chegarem ao ponto B, conta-se como realizado um trajeto. **Assertiva:** Nessa situação, a quantidade de trajetos distintos que os policiais poderão percorrer é inferior a 40.

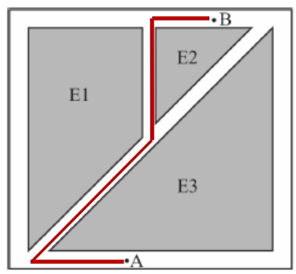
Comentários:

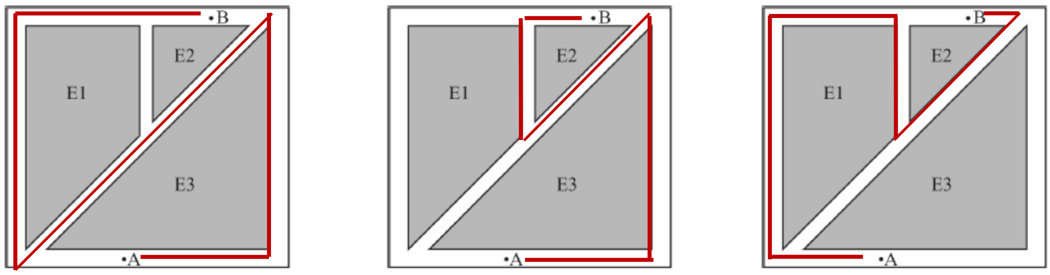
Vejamos quantas são as possibilidades de ir de A até B:











Assim, há 7 possibilidades de caminhos de A até B. Vamos representar a escolha dos 2 policiais conforme abaixo, uma vez que eles deverão escolher caminhos distintos:

1º	2º

Sabemos que há 7 caminhos para o primeiro policial escolher:

7	
1º	2º

Após a escolha do primeiro, restarão 6 caminhos possíveis para o segundo policial escolher:

7	6
1º	2º

Pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar essas possibilidades:

$$\text{Número de possibilidades} = 7 \times 6 = 42$$

Logo, o número de possibilidades de escolha dos dois policiais é **superior** a 40.

Gabarito: Errado.

FGV

6. (FGV/2018 – SASDH/RJ) Uma urna D contém 6 bolas numeradas de 3 a 8 e uma urna U contém 7 bolas numeradas de 2 a 8. Um número de dois algarismos será formado retirando uma bola da urna D e uma bola da urna U, cujos números serão, respectivamente, o algarismo das dezenas e o algarismo das unidades. A quantidade de números pares que poderão ser formados dessa maneira é

a) 42.

b) 36.

c) 24.

d) 20.

e) 16.

Comentários:

O enunciado informa que da urna D serão obtidos os algarismos das dezenas e da urna U serão obtidos os algarismos das unidades, conforme representado a seguir:

D	U

Para formar números pares, é necessário que o algarismo da unidade seja par. Sabendo que as bolas da urna U são numeradas de 2 a 8, há 4 algarismos pares (2, 4, 6 e 8), logo, 4 possibilidades:

	4
D	U

As bolas da urna D são numeradas de 3 a 8, logo há 6 possibilidades:

6	4
D	U

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números pares possíveis é:

$$6 \times 4 = 24$$

Gabarito: C

7. (FGV/2018 – ALE/RO) Em um circuito elétrico há 4 disjuntores que podem ficar, cada um deles, independente dos demais, nas posições “ligado” ou “desligado”. O número de maneiras diferentes de se posicionar (“ligado” ou “desligado”) esses 4 disjuntores é

a) 4.

b) 6.

c) 8.

d) 12.

e) 16.

Comentários:

Há 4 disjuntores e duas posições para cada um. Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras diferentes de posicionar o conjunto desses 4 disjuntores é:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

Gabarito: E

8. (FGV/2018 – ALE-RO) O presidente e o vice-presidente de uma comissão serão escolhidos entre os 10 deputados do Partido X e os 6 deputados do Partido Y. Os Partidos acordaram que os dois cargos não poderão ser ocupados por deputados de um mesmo Partido.

O número de maneiras diferentes de se escolher o presidente e o vice-presidente dessa comissão, é

a) 16

b) 32

c) 60

d) 64

e) 120

Comentários:

Se o presidente for do Partido X, haverá 10 possibilidades para o presidente, e 6 possibilidades para escolher o vice-presidente, dentre os membros do Partido Y.

Analogamente, se o presidente for do Partido Y, haverá 6 possibilidades para o presidente, e 10 possibilidades para o vice-presidente, dentre os membros do Partido X.

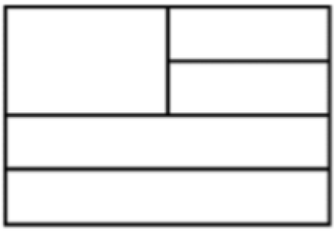
Por serem opções alternativas, pelo princípio aditivo, o número de possibilidades no total é:

$$60 + 60 = 120$$

Gabarito: E

9. (FGV/2018 – ALE-RO) Manoel possui tintas de 5 cores diferentes e deve pintar a bandeira abaixo de forma que:

- **cada região será pintada com uma única cor.**
- **duas regiões vizinhas não podem ter a mesma cor.**



O número de maneiras diferentes que Manoel pode pintar essa bandeira é

a) 120.

b) 180.

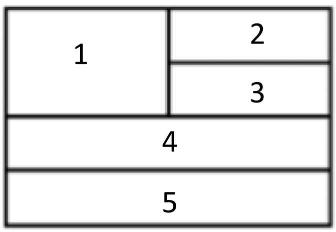
c) 240.

d) 360.

e) 720.

Comentários:

Vamos representar as regiões da bandeira por números para facilitar a referência.



É importante que a ordem da escolha das cores importa.

Para a primeira região, Manuel pode escolher qualquer das 5 cores: 5 possibilidades;

Para a segunda região, Manuel pode escolher qualquer cor, exceto a cor escolhida para a 1ª região (pois são regiões vizinhas): 4 possibilidades;

Para a terceira região, Manuel pode escolher qualquer cor, exceto as cores escolhidas para a 1ª e 2ª regiões (pois são todas vizinhas): 3 possibilidades;

Para a quarta região, Manuel pode escolher qualquer cor, exceto as cores escolhidas para a 1ª e 3ª regiões (pois as três regiões são vizinhas): 3 possibilidades;

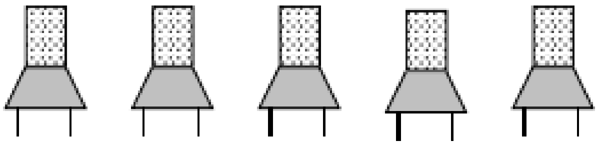
Para a quinta região, Manuel pode escolher qualquer cor, exceto a cor escolhida para a 4ª região: 4 possibilidades.

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de pintar todas as regiões é:

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 4 = 720$$

Gabarito: E

10. (FGV/2017 – Prefeitura de Salvador/BA) Cinco pessoas de diferentes alturas devem ocupar as cinco cadeiras abaixo para uma fotografia.



O fotógrafo pediu que nem o mais baixo nem o mais alto ocupassem as cadeiras das extremidades. Respeitando essa condição, o número de maneiras como as pessoas podem se posicionar para a fotografia é:

a) 12.

b) 18.

c) 24.

d) 36.

e) 72.

Comentários:

Sabendo que, de 5 pessoas, nem o mais baixo nem o mais alto podem se sentar nos extremos, há apenas 3 possibilidades uma das extremidades (por exemplo, a da esquerda) e 2 possibilidades para a outra, conforme representado abaixo:

3				2

Selecionados as 2 pessoas dos extremos, restarão 3 pessoas para a primeira das três posições centrais, 2 para a segunda e 1 para a última:

3	3	2	1	2

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de sentar as 5 pessoas nessas condições é:

$$3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 36$$

Gabarito: D.

FCC

11. (FCC/2018 – Técnico Legislativo da Assembleia Legislativa/SE) Quatro parlamentares, sendo dois do partido X e dois do partido Y, inscreveram-se para discursar na tribuna em determinada sessão. A ordem dos discursos deverá ser definida de modo que as falas de dois parlamentares do mesmo partido não ocorram uma em seguida da outra. O número de maneiras diferentes de estabelecer a ordem dos discursos respeitando essa condição é igual a

a) 2

b) 4

c) 8

d) 12

e) 16

Comentários:

Uma forma de resolver essa questão é aplicando-se o princípio multiplicativo na escolha de cada parlamentar para discursar.

i) 1º parlamentar: 4 opções (2 do partido X e 2 do partido Y);
ii) 2º parlamentar: após a escolha do 1º parlamentar, o 2º parlamentar terá que ser do outro partido. Assim, há 2 opções para a escolha do 2º parlamentar.
iii) 3º parlamentar: após a escolha do 2º parlamentar, o 3º parlamentar terá que ser do mesmo partido do 1º parlamentar. Assim, há somente 1 opção para o 3º parlamentar.
iv) 4º parlamentar: após a escolha do 3º parlamentar, haverá somente 1 parlamentar a discursar, portanto, 1 opção.

Como os eventos i a iv são concomitantes (serão escolhidos o 1º, o 2º, o 3º e o 4º parlamentar), pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar as possibilidades de cada evento:

$$4 \times 2 \times 1 \times 1 = 8$$

Gabarito: C

12. (FCC/2018 – Escriturário do Banrisul/RS) Considere, em ordem crescente, todos os números de 3 algarismos formados, apenas, pelos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. O número 343 ocupa a posição de número

a) 45.

b) 60.

c) 29.

d) 70.

e) 68.

Comentários:

Pelo número fornecido (343), podemos confirmar que é possível escolher um mesmo algarismo mais de uma vez. Assim, o número 343 é posterior aos números:

i) que começam com 1 (1XX) **ou** 2 (2XX): para cada um desses casos, há 5 possibilidades para o segundo algarismo **e** 5 possibilidades para o terceiro algarismo. Pelo princípio multiplicativo, temos 5 x 5 = 25 possibilidades para preencher o segundo **E** o terceiro algarismos.
Pelo princípio aditivo, há 25 + 25 = 50 possibilidades para o número ser 1XX **OU** 2XX.

ii) que começam com 31 (31X) ou 32 (32X) ou 33 (33X): Há 5 possibilidades de preencher o terceiro algarismo em cada caso.
Pelo princípio aditivo, há 5 + 5 + 5 = 15 possibilidades para o número ser 31X **OU** 32X **OU** 33X.

iii) 341 e 342, totalizando 2 números.

Assim, o número 343 é posterior a 50 + 15 + 2 = 67 números, ocupando, portanto, a 68ª posição.

Gabarito: E.

13. (FCC/2018 – Técnico Judiciário do TRT 6ª Região) Na prateleira de uma estante estão dispostos 10 livros de direito, 12 livros de economia e 15 livros de administração. O menor número de livros que se devem retirar ao acaso dessa prateleira para que se tenha certeza de que dentre os livros retirados haja um de direito, um de economia e um de administração é igual a

a) 26

b) 23

c) 27

d) 28

e) 29

Comentários:

A questão exige conhecimentos do Princípio do Pombal. Para esse tipo de questão, precisamos pensar no pior cenário possível, ou seja, aquele em que retiramos todos os livros de uma matéria antes de retirar um livro da segunda matéria e todos os livros da segunda matéria antes de retirar um livro da terceira matéria. Como as quantidades de livros das matérias são diferentes, o pior cenário é aquele em que começamos pelas matérias com maior quantidade de livros e, em seguida, passamos para a matéria com a segunda maior quantidade de livros.

Portanto, começamos pelos 15 livros de administração, depois seguimos para os 12 livros de economia. Somente então retiraremos um livro de direito. Portanto, o número de retiradas será:

$$15 + 12 + 1 = 28$$

Gabarito: D.

14. (FCC/2019 –Secretaria Municipal de Finanças, Tecnologia da Informação e Controle Interno de Manaus/AM) As peças de um jogo estão todas dentro de um saco opaco. Elas vêm em 4 formatos diferentes e cada peça está numerada com um número dentre os seguintes: 1, 2, 3, 4 ou 5. A menor quantidade de peças que devem ser retiradas aleatoriamente do saco para garantir que se tenha, após a retirada, pelo menos 4 peças de um mesmo formato e 3 peças com a mesma numeração é

a) 15

b) 10

c) 24

d) 18

e) 13

Comentários:

Primeiro, calculamos o número de peças a serem retiradas para garantir que 4 peças sejam do mesmo tamanho e depois calculamos o número de peças a serem retiradas para garantir que 3 peças tenham a mesma numeração.

Para garantir que, dentre as peças retiradas, 4 peças terão o mesmo tamanho, vamos supor que as 4 primeiras peças tenham tamanhos diferentes. Fazemos o mesmo para as demais seleções. Assim, após 3 x 4 = 12 retiradas, teremos 3 peças de cada tamanho. Portanto, na 13ª seleção, para algum tamanho, haverá necessariamente 4 peças de mesmo tamanho.

Para garantir que haja 3 peças de mesmo número, vamos supor que as 5 primeiras peças sejam de números diferentes. Assim, após 2 x 5 = 10 retiradas, teremos 2 peças de cada número. Portanto, na 11ª seleção, haverá 3 peças de mesmo número, para algum número.

Como precisamos retirar 13 peças para garantir 4 peças de mesmo tamanho e 11 peças para garantir 3 peças de mesmo número, garantimos ambas as situações com 13 retiradas.

Gabarito: E.

15. (FCC/2014 – Câmara Municipal de São Paulo) São lançados dois dados e multiplicados os números de pontos obtidos em cada um deles. A quantidade de produtos distintos que se pode obter nesse processo é

a) 36.

b) 27.

c) 30.

d) 21.

e) 18.

Comentários:

O enunciado pergunta pela quantidade de produtos distintos que podem ser formados com 2 dados. Uma forma de visualizar isso é por uma matriz em que cada valor corresponde ao resultado da multiplicação da respectiva linha e coluna:

	1	2	3	4	5	6
1	1x1	1x2	1x3	1x4	1x5	1x6
2	2x1	2x2	2x3	2x4	2x5	2x6
3	3x1	3x2	3x3	3x4	3x5	3x6
4	4x1	4x2	4x3	4x4	4x5	4x6
5	5x1	5x2	5x3	5x4	5x5	5x6
6	6x1	6x2	6x3	6x4	6x5	6x6

Quando invertemos a ordem dos fatores, o produto permanece o mesmo (por exemplo, 1x2 = 2x1), logo, os resultados acima da diagonal principal são iguais aos resultados abaixo dela. Então, desconsideramos os resultados em cinza:

	1	2	3	4	5	6
1	1x1	1x2	1x3	1x4	1x5	1x6
2	2x1	2x2	2x3	2x4	2x5	2x6
3	3x1	3x2	3x3	3x4	3x5	3x6
4	4x1	4x2	4x3	4x4	4x5	4x6
5	5x1	5x2	5x3	5x4	5x5	5x6
6	6x1	6x2	6x3	6x4	6x5	6x6

Se todos os números fossem primos, já teríamos o nosso resultado. Porém, o número 4 e o número 6 são produtos de outros números presentes na tabela (4 = 2x2 e 6 = 2x3). Logo, alguns produtos são repetidos e devem ser eliminados, quais sejam:

- 2x2 = 1x4
- 2x3 = 1x6
- 3x4 = 2x6

Logo, temos os seguintes produtos distintos:

	1	2	3	4	5	6	núm. Produtos
1	1x1	1x2	1x3	1x4	1x5	1x6	6
2	2x1	2x2	2x3	2x4	2x5	2x6	3
3	3x1	3x2	3x3	3x4	3x5	3x6	3
4	4x1	4x2	4x3	4x4	4x5	4x6	3
5	5x1	5x2	5x3	5x4	5x5	5x6	2
6	6x1	6x2	6x3	6x4	6x5	6x6	1
Total							**18**

Gabarito: E

VUNESP

16. (VUNESP/2020 – PM/SP) Uma pessoa comprou 2 pares de sapatos, um preto e um marrom, e 5 pares de meias nas cores: preto, branco, marrom, bege e cinza. Sabendo que essa pessoa nunca usa sapatos pretos com meias brancas, nem sapatos marrons com meias pretas, então o número de maneiras diferentes de essa pessoa escolher o par de sapatos com o par de meias é

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

Comentários:

Se não houvesse restrições para a combinação de cores do sapato e da meia, então o número de maneiras de escolher um sapato, dentre 2 opções, e uma meia, dentre 5 opções, seria, pelo princípio multiplicativo:

$$2 \times 5 = 10$$

Porém, a opção do sapato preto com meia branca e a opção do sapato marrom com meia preta não são possíveis. Logo, o número de opções possíveis é:

$$10 - 2 = 8$$

Gabarito: D

17. (VUNESP/2019 – CMDCA Sorocaba/SP) Um conselheiro tutelar irá atender 5 famílias, A, B, C, D e E, em uma mesma semana, começando na segunda-feira e terminando na sexta-feira, de modo que apenas uma família será atendida por dia. As famílias A e B só podem ser atendidas, ou na terça-feira, ou na quarta-feira, e a família C não pode ser atendida na sexta-feira.

Nessas condições, o número de maneiras diferentes de esse conselheiro agendar os dias em que essas famílias poderão ser atendidas é

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

Comentários:

Considerando que as famílias A e B só podem ser atendidas na 3ª ou na 4ª e que apenas uma família é atendida por dia, então a 3ª e a 4ª serão ocupadas por A e B, de alguma forma. Sabendo que a família C não pode ser atendida na 6ª, então restam as opções 2ª e 5ª para ela. Vamos representar as possibilidades de agendamento das 5 famílias da seguinte forma:

A	B	C	D	E

3ª e 4ª   2ª ou 5ª

Assim, temos 2 opções para A, 1 opção para B e 2 opções para C:

A	B	C	D	E
2	1	2		

Após a definição dos dias de atendimentos para essas famílias, restarão 2 opções para D e 1 para E:

A	B	C	D	E
2	1	2	2	1

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de organizar os dias de atendimento é:

$$2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 = 8$$

Gabarito: D

18. (VUNESP/2019 – Prefeitura de Campinas/SP) A quantidade de números naturais de quatro algarismos menores que 8 000 e divisíveis por 5 que podem se formados com os algarismos 0, 2, 5 e 8 é igual a

a) 36.

b) 48.

c) 72.

d) 64.

e) 96.

Comentários:

Vamos representar as possibilidades de formar números com os 4 algarismos da seguinte forma:

Note que a questão não proibiu a repetição dos números. Para que o número seja menor que 8.000, o primeiro algarismo pode ser 2 ou 5 (uma vez que os números não são iniciados pelo algarismo 0), logo, há 2 possibilidades:

2			

Para que o número seja múltiplo de 5, o último algarismo pode ser 0 ou 5, logo, há 2 possibilidades:

2			2

Para as demais posições, há todas as 4 opções de algarismos disponível:

2	4	4	2

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de formar um número nessas condições é:

$$2 \times 4 \times 4 \times 2 = 64$$

Gabarito: D

19. (VUNESP/2019 – Prefeitura de Peruíbe/SP) Um painel é formado por 6 listras verticais, que serão coloridas usando apenas as cores azul, amarela e verde. Cada listra deverá ter apenas uma cor e não se pode utilizar a mesma cor em listras adjacentes. Assim, o número de modos que esse painel poderá ser colorido é

a) 3.2^6

b) 3.2^5

c) 3.3^6

d) 3.3^5

e) 2.3^6

Comentários:

Há 3 possibilidades de cores para colorir 6 listras, de modo que listras adjacentes tenham cores distintas, conforme representado a seguir:

Para a primeira listra, podemos escolher qualquer uma das 3 cores: 3 possibilidades:

3					

Para a segunda listra, podemos escolher qualquer cor, exceto a cor escolhida para a listra anterior: 2 possibilidades. O mesmo vale para a terceira, quarta, quinta e sexta listras.

3	2	2	2	2	2

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras de colorir as 6 listras é:

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^5$$

Gabarito: B

20. (VUNESP/2019 – Prefeitura de Peruíbe/SP) Paulo vai criar uma senha para um site que será formada por seis elementos todos distintos: letras, dentre as 26 letras do nosso alfabeto, ou números de 1 a 9. Entretanto, o sistema faz distinção entre letras maiúsculas e letras minúsculas. Paulo determinou que o primeiro elemento da senha será a letra P (maiúscula), o segundo será a letra A (maiúscula), o terceiro será o número 5 ou o número 8, o quarto elemento será uma vogal, o quinto, um número ímpar, e o sexto (e último) elemento, uma letra qualquer. O número total de possibilidades diferentes para Paulo elaborar a senha é

a) 1764.

b) 2205.

c) 2578.

d) 3969.

e) 4783.

Comentários:

Será formada uma senha com 6 elementos todos distintos, os quais podem ser as 26 letras do alfabeto, maiúsculas ou minúsculas, ou os números de 1 a 9. Para cada um dos 6 elementos da senha, Paulo determinou o seguinte:

- 1º elemento será P: 1 possibilidade
- 2º elementos será A: 1 possibilidade
- 3º elemento será 5 ou 8: 2 possibilidades
- 4º elemento será vogal: considerando que há 5 vogais, as quais podem ser minúsculas ou maiúsculas, exceto a vogal A maiúscula, já utilizada. Logo, temos 2 x 5 – 1 = **9** possibilidades;
- 5º elemento será ímpar: dos números 1 a 9, há **4** possibilidades se o número 5 tiver sido usado como 3º elemento ou **5** possibilidades, se o número utilizado tiver sido o 8;
- 6º elementos será uma letra qualquer: Das 2 x 26 = 52 letras maiúsculas e minúsculas, foram utilizadas 3 (1º, 2º e 4º elemento), logo, há 52 – 3 = **49** possibilidades.

Assim, caso o 3º elemento seja o número 5, a quantidade de maneiras de formar a senha de 6 elementos, tendo em vista o princípio multiplicativo, é:

$$1 \times 1 \times 1 \times 9 \times 4 \times 49 = 1764$$

Caso o 3º elemento seja o número 8, a quantidade de maneiras de formar a senha é:

$$1 \times 1 \times 1 \times 9 \times 5 \times 49 = 2205$$

Considerando que são possibilidades alternativas, então, pelo princípio aditivo, temos:

$$1764 + 2205 = 3969$$

Gabarito: D

CESGRANRIO

21. (CESGRANRIO/2013 – BNDES) Uma empresa de propaganda pretende criar panfletos coloridos para divulgar certo produto. O papel pode ser laranja, azul, preto, amarelo, vermelho ou roxo, enquanto o texto é escrito no panfleto em preto, vermelho ou branco. De quantos modos distintos é possível escolher uma cor para o fundo e uma cor para o texto se, por uma questão de contraste, as cores do fundo e do texto não podem ser iguais?

a) 13

b) 14

c) 16

d) 17

e) 18

Comentários:

O enunciado informa que há 6 cores possíveis para o fundo (laranja, azul, preto, amarelo, vermelho ou roxo) e 3 cores possíveis para o texto (preto, vermelho ou branco).

Se não houvesse restrições, o número de maneiras de escolher ambas as cores seria o produto desses valores (princípio multiplicativo):

$$6 \times 3 = 18$$

Porém, o enunciado informa que o texto e o fundo não podem ser da mesma cor. Assim devemos excluir as possibilidades texto preto / fundo preto e texto vermelho / fundo vermelho (2 possibilidades):

$$18 - 2 = 16$$

Gabarito: C

22. (CESGRANRIO/2012 – BB) Marcelo vai passar quatro dias na praia e leva em sua bagagem sete camisetas (três camisetas brancas diferentes, uma preta, uma amarela, uma vermelha e uma laranja) e quatro bermudas (uma preta, uma cinza, uma branca e uma azul).

De quantos modos distintos Marcelo poderá escolher uma camiseta e uma bermuda para vestir-se, de modo que as peças escolhidas sejam de cores diferentes?

a) 14

b) 17

c) 24

d) 26

e) 28

Comentários:

O enunciado informa que há 7 camisas diferentes e 4 bermudas diferentes. Se não houvesse restrições, o número de maneiras de escolher uma camisa e uma bermuda seria:

$$7 \times 4 = 28$$

Porém, o enunciado informa que as cores das peças devem ser distintas. Então, devem ser excluídas as possibilidades em que as cores são iguais.

Como há 3 camisas brancas e 1 bermuda branca, há 3 possibilidades em que ambas as peças são brancas. Ademais, há 1 camisa preta e 1 bermuda preta, logo, 1 possibilidade em que ambas as peças são pretas. No total, há 4 possibilidades em que ambas as peças são iguais.

Portanto, o número de maneiras de escolher uma camisa e uma bermuda de cores distitntas é:

$$28 - 4 = 24$$

Gabarito: C

23. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Quantos números naturais de 5 algarismos apresentam dígitos repetidos?

a) 27.216

b) 59.760

c) 62.784

d) 69.760

e) 72.784

Comentários:

Os números naturais são compostos dos algarismos de 0 a 9, isto é, há 10 possibilidades para cada dígito, exceto o primeiro dígito, que não pode ser 0.

Assim, pelo princípio multiplicativo, a quantidade total de números que podem ser formados com 5 algarismos (sem considerar a restrição do enunciado) é:

9	10	10	10	10

Total = 9 x 10 x 10 x 10 x 10 = 90.000

Agora, vejamos o número de possibilidades que não atendem à restrição, isto é, que não apresentam algarismos repetidos.

O primeiro dígito pode ser qualquer um dos 9 algarismos possíveis:

9				

Para o segundo dígito, há 10 possibilidades, exceto o algarismo utilizado como primeiro dígito, logo, há 9 possibilidades:

9	9			

Para o terceiro dígito, há 10 possibilidades, exceto os 2 algarismos utilizados como primeiro e segundo dígitos, logo, há 8 possibilidades:

9	9	8		

Aplicando o mesmo raciocínio para os últimos dígitos, temos 7 e 6 possibilidades, respectivamente:

9	9	8	7	6

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades que não atendem à restrição:

Não atendem = 9 x 9 x 8 x 7 x 6 = 27.216

Então, a quantidade de possibilidade que atendem ao enunciado é a diferença entre o total e essa quantidade que acabamos de calcular:

Resposta = 90.000 – 27.216 = 62.784

Gabarito: C

24. (CESGRANRIO/2012 – BB) Para cadastrar-se em um site de compras coletivas, Guilherme precisará criar uma senha numérica com, no mínimo, 4 e, no máximo, 6 dígitos. Ele utilizará apenas algarismos de sua data de nascimento: 26/03/1980.

Quantas senhas diferentes Guilherme poderá criar se optar por uma senha sem algarismos repetidos?

a) 5.040

b) 8.400

c) 16.870

d) 20.160

e) 28.560

Comentários:

Guilherme irá criar uma senha com 4 ou 6 algarismos **não repetidos**, utilizando os **7** algarismos da sua data de nascimento.

Se Guilherme optar por uma senha de 4 algarismos, as possibilidades são:

7	6	5	4

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

Se Guilherme optar por uma senha de 5 algarismos, as possibilidades são:

7	6	5	4	3

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

Se Guilherme optar por uma senha de 6 algarismos, as possibilidades são:

7	6	5	4	3	2

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5040$$

Como essas possibilidades são mutuamente excludentes (a senha terá 4 dígitos OU 5 dígitos OU 6 dígitos), devemos somar essas possibilidades (princípio aditivo):

$$840 + 2520 + 5040 = 8400$$

Gabarito: B

25. (CESGRANRIO/2012 – Petrobras) Os números de telefones celulares de certa região possuem oito dígitos, repetidos ou não, começando por 5, 6, 7, 8 ou 9. Com a expansão do mercado de telefonia, será necessário acrescentar um dígito aos números atuais. Nessa nova configuração, os números seguirão o mesmo padrão anterior (primeiro dígito maior ou igual a 5, podendo haver algarismos repetidos) e, assim, será possível habilitar n celulares a mais do que no sistema atual. Conclui-se que n é igual a

a) $0,1 \times 10^8$

b) $1,5 \times 10^8$

c) $4,5 \times 10^8$

d) $5,0 \times 10^8$

e) $9,0 \times 10^8$

Comentários:

Os números de telefones, antes do acréscimo de 1 dígito, apresentavam 8 dígitos, sendo que o primeiro precisava ser 5, 6, 7, 8 ou 9 (5 possibilidades) e os demais poderiam se repetir, como ilustrado a seguir:

5	10	10	10	10	10	10	10

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades que existiam era:

$$5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 5 \times 10^7 = 0,5 \times 10^8$$

Com o acréscimo de 1 dígito, o número de possibilidades passou a ser:

5	10	10	10	10	10	10	10	10

$$5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 5 \times 10^8$$

E a diferença é:

$$n = 5 \times 10^8 - 0,5 \times 10^8 = 4,5 \times 10^8$$

Gabarito: C

Questões Comentadas – Multibancas

Permutação

CEBRASPE

1. (CEBRASPE 2022/UNB) Em uma viagem de turismo, um grupo com 18 passageiros, acompanhados de um guia turístico, serão transportados do aeroporto até o hotel em um micro-ônibus. Desses passageiros, 12 são membros da mesma família, constituída por 5 crianças e 7 adultos, sendo Paulo um dos adultos. Durante o trajeto, o guia turístico escolherá, por meio de sorteio aleatório, quatro passageiros do grupo e, a cada um deles, entregará um brinde. Considerando essa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Caso os quatro sorteados façam o trajeto entre o aeroporto e o hotel nos quatro primeiros assentos do micro-ônibus, então a quantidade de formas diferentes de eles se sentarem, nesses assentos, é igual a 24.

Comentários:

A quantidade de maneiras de 4 pessoas se sentarem em 4 assentos corresponde à permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Que é igual a 24.

Gabarito: Certo.

2. (CEBRASPE 2018/BNB) Julgue o próximo item, relativo à análise combinatória e probabilidade.

A quantidade de maneiras distintas de 5 meninos e 4 meninas serem organizados em fila única de forma que meninos e meninas sejam intercalados e 2 meninos ou 2 meninas nunca fiquem juntos é inferior a 3.000.

Comentários:

Deseja-se formar uma fila com 5 meninos e 4 meninas, de modo que meninos (O) e meninas (A) fiquem intercalados:

O A O A O A O A O

Observe que necessariamente o primeiro da fila será um menino (O), pois há um menino a mais, de modo que, se começássemos com uma menina, teríamos meninos juntos (não intercalados) no final da fila.

O número de maneiras distintas de organizar os 5 meninos nessas posições corresponde à permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

O número de maneiras distintas de organizar as 4 meninas nessa posição, corresponde à permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar essas possibilidades:

Número de maneiras = 120 x 24 = 2.880

Esse número é inferior a 3.000.

Gabarito: Certo.

3. (CEBRASPE 2018/SEFAZ-RS) Sete pessoas se dirigem para formar uma fila em frente ao único caixa de atendimento individual em uma agência bancária. Dessas sete pessoas, quatro são idosos. Um servidor da agência deverá organizar a fila de modo que os idosos sejam atendidos antes dos demais.

Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de se organizar a fila é igual a

a) 5.040.

b) 720.

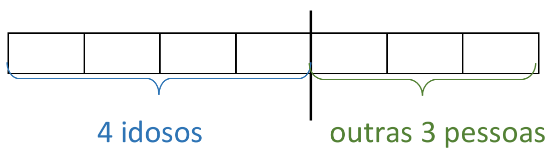
c) 576.

d) 288.

e) 144.

Comentários:

Podemos representar a fila de 7 pessoas, sabendo que todos os 4 idosos deverão ser atendidos antes dos demais, da seguinte forma:



Para organizar os 4 idosos, temos uma permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Para organizar as outras 3 pessoas, temos uma permutação de 3 elementos:

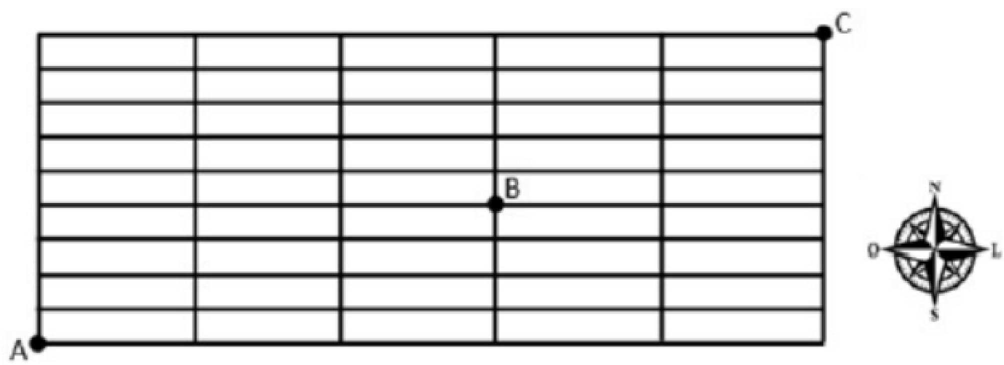
$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Considerando que temos que organizar toda a fila, devemos multiplicar esses resultados (princípio multiplicativo):

Número de maneiras de organizar a fila = 24 x 6 = 144

Gabarito: E.

4. (CEBRASPE 2021/IBGE) Considere que a figura a seguir — que consiste de um retângulo maior subdividido em 45 retângulos menores, no qual estão destacados os pontos A, B e C; ao lado do retângulo maior estão indicadas as direções norte (N), sul (S), leste (L) e oeste (O) — representa um mapa, fora de escala, de parte de uma cidade onde será realizada uma pesquisa domiciliar.



As linhas retas representam as ruas, e os quarteirões são os retângulos menores, que medem 300 metros na direção oeste-leste e 60 metros na direção sul-norte. Durante os trabalhos, cada agente de pesquisas e mapeamento (APM), que sairá necessariamente do ponto A, somente pode caminhar nos sentidos oeste-leste ou sul-norte.

Tendo como referência o texto acima e observando-se a regra de que os deslocamentos apenas podem ser executados nos sentidos oeste-leste ou sul-norte, verifica-se que o número de caminhos distintos que podem ser percorridos por um APM para se deslocar do ponto A ao ponto C, passando pelo ponto B, é igual a

a) 14

b) 49

c) 56

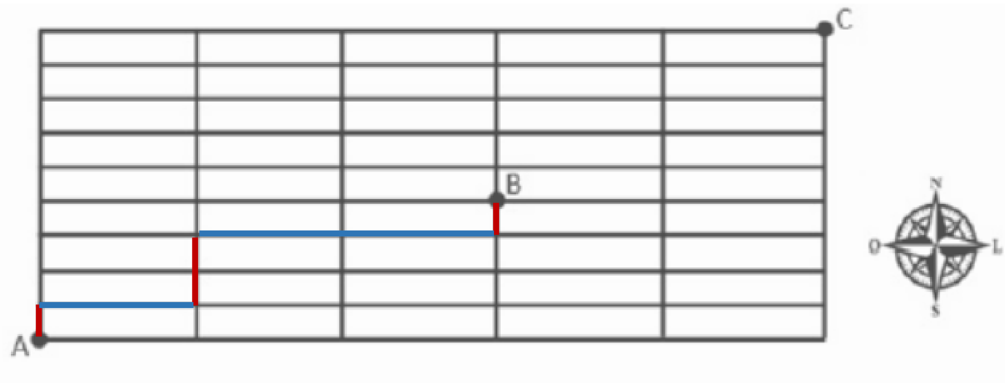
d) 735

e) 2.002

Comentários:

A questão informa que precisamos ir do ponto A ao ponto B e em seguida do ponto B ao ponto C, utilizando as linhas verticais e horizontais.

Entre o ponto A e o ponto B, há 4 segmentos de reta verticais e 3 segmentos de reta horizontais. Isso significa que para irmos de um ponto a outro, precisamos efetuar 4 movimentos para cima e 3 movimentos para a direita. Para ilustrar, vamos representar por N (Norte) o movimento para cima e por L (Leste) o movimento para a direita. Assim, a sequência N L N N L L N corresponde ao seguinte caminho:



Em outras palavras, os diferentes caminhos podem ser representados por sequências com 4 Ns e 3 Ls em alguma ordem. Logo, a quantidade de caminhos diferentes entre A e B corresponde ao número de maneiras de **reordenar** 4 Ns e 3 Ls, que por sua vez corresponde à **permutação** de 7 elementos, com repetição de 4 e de 3elementos:

$$P_7^{4,3} = \frac{P_7}{P_4 \times P_3} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35$$

Com relação ao caminho entre B e C, há 5 segmentos de reta verticais e 2 segmentos de reta horizontais. Ou seja, esse caminho pode ser representado por sequências com 5 Ns e 2 Ls, de modo que a quantidade de caminhos diferentes corresponde a uma permutação de 7 elementos, com repetição de 5 e de 2 elementos:

$$P_7^{5,2} = \frac{P_7}{P_5 \times P_2} = \frac{7!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 7 \times 3 = 21$$

Considerando que precisamos percorrer ambos os caminhos (de A até B **E** de B até C), pelo princípio multiplicativo, precisamos multiplicar as possibilidades:

35 x 21 = 735

Gabarito: D

5. (CEBRASPE 2022/UNB) Julgue o item que se segue, a respeito de contagem, probabilidade e estatística.

Considere que três amigos farão uma dinâmica de grupos e precisarão se sentar em uma roda com outras 5 pessoas. Considere ainda que os três amigos fazem questão de ficarem juntos. Nessa situação, a roda poderá ser formada de 720 maneiras distintas, sem haver repetição das posições.

Comentários:

Essa questão trabalha com uma permutação circular, com restrições. A permutação circular de n elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

Isso porque consideramos que as posições em um círculo se modificam apenas quando a posição das pessoas em relação às outras se modificam. Em outras palavras, um simples giro da mesa não é considerado uma nova maneira de se organizar as pessoas. Assim, podemos imaginar em posicionar uma pessoa em qualquer lugar do círculo e permutar as outras $n-1$.

A questão informa que 3 amigos irão se sentar com outras 5 pessoas em uma roda. Como os amigos precisam ficar juntos, vamos considerá-los como um único elemento, por ora. Assim, temos a permutação circular de 6 elementos (5 pessoas + amigos como elemento único):

$$PC_6 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Como os 3 amigos ficarão juntos, mas em qualquer ordem, a forma de reordená-los corresponde à permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar essas possibilidades: 6 x 120 = 720

Gabarito: Certo.

FGV

6. (FGV/2021 – BANESTES) Considere a sequência dos 120 anagramas da palavra BANCO escritos em ordem alfabética. O anagrama CANBO ocupa a posição de número:

a) 50

b) 51

c) 52

d) 53

e) 54

Comentários:

Os anagramas que começam com C são depois de todos os anagramas que começam com A e com B. O número de anagramas que começam com A é igual à permutação das outras 4 letras:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

E o número de anagramas que começam com B também é igual a 24. Ou seja, há 48 anagramas que começam com A ou B e o primeiro anagrama que começa com a letra C ocupa a posição 49. Assim, os primeiros anagramas que começam com C e as posições correspondentes são:

- 49) CABNO
- 50) CABON
- 51) CANBO

Logo, o anagrama CANBO ocupa a posição 51.

Gabarito: B

7. (FGV/2022 – SEFAZ-ES) Dois casais irão se sentar em 4 cadeiras consecutivas de uma fila de um cinema. O número de maneiras de eles sentarem nas 4 cadeiras, de modo que cada casal se sente junto, é igual a

a) 4

b) 6

c) 8

d) 12

e) 16

Comentários:

Inicialmente, vamos imaginar que os 2 casais são um elemento único. Assim, temos 2 elementos para serem permutados:

$$P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$$

Agora, vamos organizar os casais. Primeiro, permutamos as pessoas do primeiro casal:

$$P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$$

Em seguida, permutamos as pessoas do segundo casal:

$$P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de organizar os casais é: 2 x 2 x 2 = 8.

Gabarito: C

8. (FGV/2022 – SEFAZ-AM) Um grupo formado por 2 homens e 3 mulheres formará uma fila. Essa fila deverá começar por um homem ou terminar por um homem. O número de filas distintas possíveis é:

a) 36

b) 48

c) 84

d) 96

e) 120

Comentários:

A questão pede o número de possibilidades de ordenar 2 homens e 3 mulheres em uma fila começando por um homem **OU** terminando por um homem.

Para começar com um homem, há 2 possibilidades para escolher o homem inicial. Em relação às demais posições, temos uma permutação de 4 pessoas:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de organizar a fila começando por um homem é:

2 x 24 = 48

Similarmente, em relação às filas que terminam com um homem, há 2 possibilidades para escolher o homem final, enquanto as outras 4 pessoas devem ser permutadas entre as demais posições. Sabendo que a permutação de 4 elementos é igual a 24, o número de maneiras de organizar a fila terminando por um homem é, pelo princípio multiplicativo:

2 x 24 = 48

Agora, devemos subtrair os casos em comum, contados em dobro, quais sejam, as filas que se iniciam e terminam por homens. Há 2 possibilidades de organizar os 2 homens nessas 2 posições (inicial e final). Ademais, temos uma permutação das 3 mulheres nas posições intermediárias:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de filas que se iniciam e terminam por homens é:

2 x 6 = 12

Logo, o número de maneiras de organizar uma fila que se inicia OU termina por um homem é:

48 + 48 - 12 = 84

Gabarito: C

9. (FGV/2022 – SSP-AM) Os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, devem formar um número de cinco algarismos de forma que cada um desses algarismos apareça uma vez e que os algarismos pares não fiquem juntos. Por exemplo, o número 34152 é um desses números. A quantidade de números que cumprem essas condições é

a) 12

b) 24

c) 36

d) 60

e) 72

Comentários:

A questão pede para organizarmos os algarismos de 1 a 5, de modo que os algarismos pares não fiquem juntos. Uma forma de fazer esse cálculo é obtendo o número total de possibilidades e subtraindo os casos que não atendem à restrição.

O número total de maneiras de organizar 5 algarismos corresponde à permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Agora, calculamos o número de possibilidades em que os algarismos pares ficam juntos. Para isso, vamos considerá-los inicialmente como elemento único. Nessa situação, temos 4 elementos (1, 3, 5 e 2-4) a serem permutados:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Para cada uma dessas possibilidades, podemos reorganizar os números pares de **2** maneiras (2-4 e 4-2). Pelo princípio multiplicativo, o número de senhas em que os números pares ficam juntos em qualquer ordem é:

24 x 2 = 48

E o número de senhas em que os algarismos pares não estão juntos é a diferença:

120 - 48 = 72

Gabarito: E

10. (FGV/2021 – PM-SP) Considere todos os anagramas da palavra BRASIL. O número de anagramas que não têm as vogais juntas é

a) 720

b) 600

c) 480

d) 240

e) 120

Comentários:

Essa questão pede os anagramas de BRASIL que **não** apresentam as vogais (A e I) juntas. Para fazermos esse cálculo, devemos obter o número total de possibilidades e subtrair os casos em que as vogais estão juntas.

O número total de anagramas de BRASIL corresponde à permutação de 6 elementos:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Em relação aos anagramas em que as vogais ficam juntas, vamos primeiro considerá-las como elemento único. Assim, temos a permutação de 5 elementos (B, R, S, L e A-I):

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Para cada uma dessas possibilidades, podemos reorganizar as vogais de **2** maneiras (A-I e I-A). Pelo princípio multiplicativo, o número de anagramas em que as vogais ficam juntas em qualquer ordem é:

120 x 2 = 240

E o número de anagramas em que as vogais não estão juntas é a diferença:

720 - 240 = 480

Gabarito: C

11. (FGV/2022 – CGU) O número de anagramas da palavra CONCURSO que começam por C ou terminam por O é:

a) 1.260

b) 1.440

c) 4.320

d) 5.040

e) 10.080

Comentários:

A questão pede o número de anagramas de CONCURSO, que começam com C **OU** terminam por O. Os anagramas que começam com C correspondem à permutação das letras ONCURSO nas demais posições. Logo, temos uma permutação de 7 elementos, com repetição 2 O's:

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

E os anagramas que terminam por O correspondem à permutação das letras CONCURS nas demais posições. Logo, temos uma permutação de 7 elementos, com repetição de 2 C´s:

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

Agora, precisamos subtrair os casos contados em dobro, quais sejam os casos que começam com C e terminam com O. Nessa situação, temos a permutação das letras ONCURS nas demais posições. Assim, temos a permutação de 6 elementos, sem repetição:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

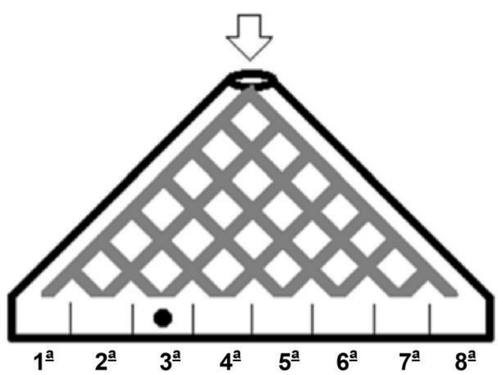
Portanto, o número de anagramas que começam com C ou terminam por O é:

2520 + 2520 - 720 = 4.320

Gabarito: C

FCC

12. (FCC/2018 – Analista Judiciário do TRT 14ª Região) Um brinquedo consiste em um dispositivo vertical, de formato aproximadamente triangular, tal como se vê na ilustração abaixo. Uma bolinha é colocada na entrada superior do dispositivo (no local indicado pela seta) e pode percorrer qualquer caminho descendente, por meio das canaletas diagonais representadas em cinza, até chegar a uma das oito caçapas inferiores.



Nesse brinquedo, a quantidade de caminhos que podem conduzir a bolinha da entrada até a 3ª caçapa é

a) 21

b) 6

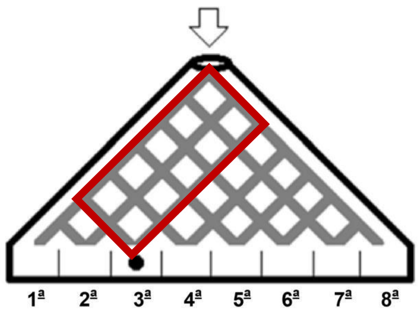
c) 35

d) 10

e) 15

Comentários:

Considerando que a bola percorre as canaletas marcadas em cinza, os caminhos que levam à 3ª caçapa estão identificados no retângulo abaixo:



Cada caminho possível é alguma combinação de D e E, sendo D o percurso de uma unidade à direita e E o percurso de uma unidade à esquerda. Nesse caso, são 2Ds e 5Es, em alguma ordem. Trata-se, portanto, de uma permutação com 7 elementos, com repetição de 2 e de 5 elementos:

$$P_7^{2,5} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

Gabarito: A.

13. (FCC/2015 – SEFAZ/PE) A prova de raciocínio lógico de um concurso foi elaborada com 10 questões, sendo 4 fáceis, 3 médias e 3 difíceis. Para criar diferentes versões dessa prova, a organização do concurso pretende trocar a ordem das questões, mantendo sempre as fáceis no início, as médias no meio e as difíceis no final e respeitando as seguintes restrições colocadas pelo elaborador:

- há duas questões fáceis que, por se referirem a uma mesma figura, devem ser mantidas uma após a outra, em qualquer ordem;

- há ainda uma questão média e uma difícil que se referem a um mesmo texto, devendo também ser mantidas uma após a outra, com a média aparecendo primeiro.

Nessas condições, o número de diferentes versões que a organização do concurso poderá criar para essa prova é igual a

a) 54

b) 40

c) 24

d) 36

e) 48

Comentários:

O enunciado informa que há 4 questões fáceis, 3 médias e 3 difíceis a serem ordenadas (permutação), sendo que deve ser obedecida a sequência: fáceis, médias e difíceis.

Vejamos primeiro o número de maneiras de organizar as 4 questões fáceis, de modo que 2 delas estejam necessariamente juntas, em qualquer ordem. Para isso, primeiro calculamos o número de maneiras de ordenar 3 elementos (considerando as questões que devem permanecer juntas como elemento único):

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Considerando que as duas questões podem aparecer em qualquer ordem, precisamos multiplicar esse resultado pelo número de maneiras de reordenar essas duas questões:

$$P_2 \times 6 = 2 \times 6 = 12$$

Agora, vejamos o número de maneiras de organizar as 3 questões médias. Considerando que uma deve ficar por último (para que fique imediatamente antes da questão difícil referente ao mesmo texto), temos a permutação de 2 elementos:

$$P_2 = 2$$

E o número de maneiras de organizar as 3 questões difíceis. Considerando que uma deve ser a primeira (para que fique imediatamente após a questão média referente ao mesmo texto), temos a permutação de 2 elementos:

$$P_2 = 2$$

Para ordenar todas as questões, devemos multiplicar esses resultados (princípio multiplicativo):

$$12 \times 2 \times 2 = 48$$

Gabarito: E

14. (FCC/2015 – SEFAZ/PI) A senha requerida para ligar um computador é formada pelas mesmas 8 letras da palavra TERESINA, com as vogais ocupando as 4 primeiras posições e, as consoantes, as 4 últimas. Conhecendo apenas essas informações, uma pessoa que deseja usar o computador vai digitando todas as possíveis senhas, até acertar a correta. Se essa pessoa nunca digitar a mesma senha mais de uma vez, conseguirá descobrir a senha correta em, no máximo,

a) 240 tentativas

b) 144 tentativas

c) 576 tentativas

d) 196 tentativas

e) 288 tentativas

Comentários:

O enunciado pede pelo número de maneiras de reordenar as letras de TERESINA, de modo que as vogais ocupem as 4 primeiras posições e as consoantes ocupem as 4 últimas.

O número de maneiras de reordenar as 4 vogais, considerando que há 2 letras E, temos a permutação de 4 elementos, com repetição de 2:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{2} = 12$$

O número de maneiras de reordenar as 4 consoantes, sabendo que não há repetições é:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

O número de maneiras de reordenar os dois grupos é, pelo princípio multiplicativo:

$$12 \times 24 = 288$$

Gabarito: E

QUADRIX

15. (Quadrix 2021/CREFONO - 3ª Reg.) Julgue o item.

Exatamente 36 anagramas da palavra JÚNIOR possuem as vogais e as consoantes juntas.

Comentários:

A palavra JUNIOR possui 3 vogais distintas (U, I e O) e 3 consoantes distintas (J, N e R). Com vogais e consoantes juntas, podemos ter as 3 vogais, seguidas das 3 consoantes ou o contrário, isto é, as 3 consoantes seguidas das 3 vogais. Há, portanto, **2** possibilidades de posicionar vogais e consoantes juntas.

Em cada caso, o número de maneiras de reordenar as 3 vogais distintas corresponde a uma permutação simples de **3** elementos, assim como o número de maneiras de reordenar as **3** consoantes distintas.

Pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar todas essas possibilidades para encontrar o número total de maneiras de reordenar as 6 letras (vogais E consoantes - princípio multiplicativo):

$$2 \times P_3 \times P_3 = 2 \times 3! \times 3! = 2 \times 6 \times 6 = 72$$

Que é diferente de 36. Aqui, o aluno que visualiza as duas permutações de 3 elementos cada, mas esquece das duas maneiras de ordenar o conjunto das vogais com o conjunto das consoantes erra a questão.

Gabarito: Errado.

16. (Quadrix 2021/CREFONO - 3ª Reg.) Julgue o item.

O número de anagramas da palavra FISCAL que começam com F ou terminam com L é igual a 240.

Comentários:

A palavra FISCAL possui 6 letras distintas. O número de anagramas que começam com F corresponde ao número de maneiras de reordenar as outras 5 letras, logo, temos uma permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

O número de anagramas que terminam com L também corresponde ao número de maneiras de reordenar as outras 5 letras:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

O número de possibilidades associado à união desses eventos (começar com F OU terminar com L) corresponde à soma dessas possibilidades, **subtraindo**-se as possibilidades da interseção (para que ela não seja somada em dobro).

O número de anagramas que começam com F e terminam com L corresponde ao número de maneiras de reordenar as 4 letras nas posições centrais:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Logo, o número de anagramas buscado é:

$$120 + 120 - 24 = 216$$

Que é diferente de 240. Aqui, o aluno que esquece de subtrair as possibilidades da interseção erra a questão.

Gabarito: Errado.

17. (Quadrix 2021/CRTR - 12ª Reg.) Assinale a alternativa que apresenta o número de anagramas da palavra QUADRIX que possuem as vogais e as consoantes alternadas.

a) 36

b) 144

c) 576

d) 720x

e) 840

Comentários:

A palavra QUADRIX possui 3 vogais distintas (U, A e I) e 4 consoantes distintas (Q, D, R e X). Para que as vogais (V) e consoantes (C) estejam alternadas, precisamos da seguinte disposição:

C V C V C V C

Considerando que temos 4 consoantes, o número de maneiras de ordená-las nos espaços correspondentes equivale à permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

E o número de maneiras de ordenar as 3 vogais nos respectivos espaços corresponde à permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

E o número de anagramas (com as consoantes E as vogais) corresponde ao produto dessas possibilidades (princípio multiplicativo):

$$6 \times 24 = 144$$

Gabarito: B

18. (Quadrix 2021/CRP - 22ª Reg.) Acerca dos anagramas da palavra SATURNO, julgue o item.

O número de anagramas que começam com S é igual ao número de anagramas da palavra NETUNO.

Comentários:

O número de anagramas da palavra SATURNO que começam com S corresponde à permutação das outras 6 letras (todas distintas):

$$P_6 = 6!$$

E a palavra NETUNO também possui 6 letras, mas 2 são iguais. Logo, temos uma permutação de 6 elementos com repetição de 2:

$$P_6^2 = \frac{P_6}{P_2} = \frac{6!}{2!}$$

Logo, os números de anagramas são diferentes.

Gabarito: Errado

19. (Quadrix 2021/CRP - 22ª Reg.) A respeito dos anagramas da palavra TOPÁZIO, julgue o item.

O número de anagramas que têm as vogais e as consoantes alternadas é igual a 144.

Comentários:

A palavra TOPAZIO possui 4 vogais, das quais 2 são a mesma (O, A, I e O); e 3 consoantes distintas (T, P e Z). Para que as vogais (V) e consoantes (C) estejam alternadas, precisamos da seguinte disposição:

V C V C V C V

Considerando que temos 4 vogais, das quais 2 são iguais, o número de maneiras de ordená-las nos espaços correspondentes equivale à permutação de 4 elementos, com 2 elementos repetidos (que consiste na permutação de todos os 4 elementos, dividida pela permutação dos elementos repetidos):

$$P_4^2 = \frac{P_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

E o número de maneiras de ordenar as 3 consoantes, todas distintas, nos respectivos espaços corresponde à permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

E o número de anagramas (com as vogais E as consoantes) corresponde ao produto dessas possibilidades (princípio multiplicativo):

$$6 \times 12 = 72$$

Que é diferente de 144. Mais uma vez, o concurseiro que não percebe que há 2 vogais repetidas erra a questão.

Gabarito: Errado

Questões Comentadas – Multibancas

Outros Tipos de Permutação

1. (FGV/2021 – FUNSAÚDE/CE) Eduardo deseja escrever as 4 letras da palavra RATO de modo que a letra A esteja à esquerda da letra O. Por exemplo, uma das maneiras de escrevê-las respeitando a restrição dada é ARTO. O número de maneiras distintas que Eduardo tem para satisfazer o seu desejo é:

a) 24

b) 18

c) 16

d) 12

e) 8

Comentários:

Essa questão trata de permutação com elementos **ordenados**, em que determinados elementos devem seguir uma ordem específica, no caso, a letra A deve estar sempre à esquerda da letra O. Nessa situação, precisamos dividir a permutação de todos os elementos pela permutação dos elementos que devem seguir uma ordem específica. Como há 4 letras no total, sendo que 2 devem seguir uma ordem específica, temos:

$$\frac{P_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

Gabarito: D

2. (FGV/2021 – IMBEL) Considere as cinco letras da sigla IMBEL. Deseja-se arrumar essas cinco letras em sequência, de modo que tanto as vogais quanto as consoantes apareçam na ordem alfabética, isto é, as vogais na ordem E, I e as consoantes na ordem B, L, M. Por exemplo, uma dessas arrumações é BELMI. O número de arrumações diferentes é

a) 18

b) 12

c) 10

d) 8

e) 6

Comentários:

Essa questão também trabalha com elementos **ordenados**, mas dessa vez, duas vogais devem seguir determinada ordem e 3 consoantes devem seguir uma ordem também. Assim, dividimos a permutação de todos os 5 elementos pela permutação das 2 vogais e das 3 consoantes que devem estar em ordem:

$$\frac{P_5}{P_2 \times P_3} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 5 \times 2 = 10$$

Gabarito: C

3. (FGV/2021 – IMBEL) Artur, Breno, Caio e Diogo fizeram uma fila nessa ordem para uma fotografia. Em seguida, o fotógrafo pediu que fizessem uma fila diferente para outra fotografia, de forma que apenas uma das quatro pessoas ficasse no seu lugar original. Indique o número de maneiras diferentes que a nova fila pode ser feita.

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

Comentários:

Essa questão trabalha com a **permutação caótica** ou **desarranjo**, em que os elementos não podem retornar para a sua posição original. O número de possibilidades nessa situação é dado pela seguinte fórmula, em que os denominadores são os fatoriais de 0 até n e os sinais das frações se alternam, sendo positivo para números pares e positivos para números ímpares:

$$D_n = n! \times \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Das 4 pessoas, 3 não podem voltar ao seu lugar original, logo temos uma permutação caótica de 3 elementos:

$$D_3 = 3! \times \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right] = 6 \times \left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right] = 3 - 1 = 2$$

Esse resultado deve ser multiplicado pelo número de possibilidades de escolher a pessoa que vai continuar no mesmo lugar (princípio multiplicativo). Como há 4 pessoas, temos:

2 x 4 = 8

Gabarito: D

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Arranjo e Combinação

CEBRASPE

1. (CEBRASPE 2021/PF) Para realizar uma operação de busca e apreensão, em duas localidades diferentes, devem ser deslocadas duas equipes, cada uma delas composta por 1 delegado, 1 escrivão e 2 agentes. Tendo como base essas informações, julgue o item seguinte.

Se estiverem disponíveis, no momento de formação das equipes, exatamente, 2 delegados, 2 escrivães e 4 agentes, o número de maneiras distintas de se montar as duas equipes seria igual ao número de maneiras de se montar, escolhendo-se entre esses mesmos profissionais, uma única equipe para a realização de uma busca em uma única localidade.

Comentários:

O item informa que há 2 delegados, 2 escrivães e 4 agentes a serem selecionados para formar duas equipes, cada uma com 1 delegado, 1 escrivão e 2 agentes.

Note que, uma vez selecionados os membros para a primeira equipe, restarão 1 delegado, 1 escrivão e 2 agentes, os quais necessariamente farão parte da segunda equipe. Assim, o número de maneiras de se montar as duas equipes é igual ao número de maneiras de formar uma única equipe, neste caso.

Gabarito: Certo

2. (CEBRASPE 2021/PF) Para realizar uma operação de busca e apreensão, em duas localidades diferentes, devem ser deslocadas duas equipes, cada uma delas composta por 1 delegado, 1 escrivão e 2 agentes. Tendo como base essas informações, julgue o item seguinte.

Se estiverem disponíveis, no momento de formação das equipes, exatamente, 2 delegados, 2 escrivães e 4 agentes, o número de maneiras distintas de se montar as duas equipes é igual a 4!.

Comentários:

Vamos calcular o número de maneiras de montar uma única equipe, já que a segunda equipe será formada com os profissionais não escolhidos para a primeira.

Sabendo que há 2 delegados, há **2** possibilidades para a escolha do delegado da primeira equipe. Similarmente, há **2** possibilidades para a escolha do escrivão da equipe. Considerando que há 4 agentes, o número de maneiras de selecionar 2 agentes (sem importância de ordem) é dado pela combinação:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = \mathbf{6}$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher todos os membros da primeira equipe é:

2 x 2 x 6 = 24

Que é igual a 4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24.

Gabarito: Certo

3. (CEBRASPE 2021/PF) Para realizar uma operação de busca e apreensão, em duas localidades diferentes, devem ser deslocadas duas equipes, cada uma delas composta por 1 delegado, 1 escrivão e 2 agentes. Tendo como base essas informações, julgue o item seguinte.

Se estiverem disponíveis, no momento de formação das equipes, 3 delegados, 4 escrivães e 6 agentes, o número de maneiras distintas de se montar as duas equipes é superior a 6.500.

Comentários:

Agora, o número de profissionais disponíveis é maior do que nos itens anteriores e, por isso, precisamos pensar na escolha das 2 equipes.

Sabendo que há 3 delegados, há **3** possibilidades para a escolha do delegado da primeira equipe. Similarmente, há **4** possibilidades para a escolha do escrivão da primeira equipe. Considerando que há 6 agentes, o número de maneiras de selecionar 2 agentes (sem importância de ordem) é dado pela combinação:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = \mathbf{15}$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher todos os membros da primeira equipe é:

3 x 4 x 15 = **180**

Após a escolha da primeira equipe, restarão 2 delegados, 3 escrivães e 4 agentes. Assim, há **2** possibilidades para a escolha do delegado da segunda equipe; **3** possibilidades para a escolha do escrivão da segunda equipe; e para a escolha dos 2 agentes, temos a combinação:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = \mathbf{6}$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher todos os membros da segunda equipe é:

$$2 \times 3 \times 6 = \mathbf{36}$$

E o número de maneiras de escolher os membros para ambas as equipes (uma E outra) é dada pelo produto das possibilidades (princípio multiplicativo):

$$180 \times 36 = 6.480$$

Gabarito: Errado

4. (CEBRASPE 2022/Petrobrás) Uma empresa distribuidora de combustíveis atendia, ao término do ano de 2020, apenas 30 clientes. Após a implementação de medidas administrativas, a quantidade de novos clientes dessa empresa, no primeiro semestre de 2021 (contada sempre em relação ao mês anterior), aumentou em progressão geométrica. Na tabela a seguir, está registrada a quantidade total de clientes da empresa no final dos 4 primeiros meses de 2021.

Total de Clientes da Empresa				
Meses	**Janeiro 2021**	**Fevereiro 2021**	**Março 2021**	**Abril 2021**
Total de Clientes	**32**	**36**	**44**	**60**

Com base nessa situação hipotética e nos dados apresentados na tabela, julgue o item a seguir.

Supondo-se que, no final de março de 2021, três clientes devessem ter sido aleatoriamente escolhidos para responder a um questionário de avaliação da empresa, então a quantidade de formas diferentes de fazer essa escolha, de modo que, no grupo escolhido, houvesse pelo menos 2 clientes que tivessem ingressado na empresa antes de 2021, é inferior a 4.000.

Comentários:

O item pede o número de maneiras de selecionar 3 clientes ao final de março de 2021, de modo que pelo menos 2 clientes tenham ingressado antes de 2021, ou seja, de modo que 2 ou 3 clientes tenham ingressado antes.

A tabela informa que há 44 clientes ao final de março de 2021 e o enunciado informa que havia 30 clientes ao final de 2020. Logo, o número de maneiras de selecionar 3 clientes, todos os quais tenham ingressado antes de 2021, corresponde à combinação de 3 elementos, dentre 30:

$$n(3) = C_{30,3} = \frac{30!}{(30-3)! \times 3!} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27!}{27! \times 3!} = \frac{30 \times 29 \times 28}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 29 \times 28 = 4060$$

Ademais, para selecionarmos exatamente 2 clientes que tenham ingressado antes de 2021, multiplicamos o número de possibilidades de selecionar 2 clientes, dentre os 30 que ingressaram antes, pelo número de possibilidades de selecionar 1 cliente, dentre os 44 - 30 = 14 clientes que ingressaram ao longo de 2021. Portanto, primeiro temos a combinação de 2 elementos dentre 30:

$$C_{30,2} = \frac{30!}{(30-2)! \times 2!} = \frac{30 \times 29 \times 28!}{28! \times 2!} = \frac{30 \times 29}{2} = 15 \times 29 = 435$$

E multiplicamos esse resultado pelas 14 maneiras de selecionar um cliente dentre os 14 novos:

$$n(2) = 14 \times 435 = 6090$$

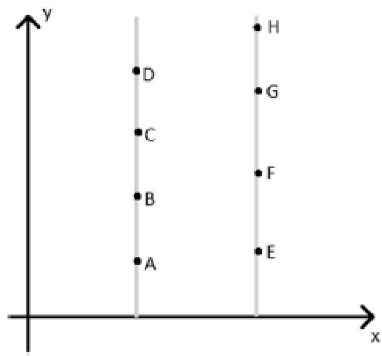
E o número de possibilidades associada a uma situação OU outra corresponde à soma das possibilidades:

$$n(2\ ou\ 3) = 6090 + 4060 = 10150$$

Que é superior a 4.000.

Gabarito: Errado

5. (CEBRASPE 2022/Petrobrás)



No plano cartesiano Oxy da figura precedente, estão marcados 8 pontos distintos no primeiro quadrante, cujas coordenadas são:

A = (1, a); B = (1, b); C = (1, c); D = (1, d)

E = (2, e); F = (2, f); G = (2, g); H = (2, h)

A partir dos dados apresentados, julgue o item subsequente.

O número de triângulos que se pode formar com vértices nos pontos dados é maior que 50.

Comentários:

Para formar um triângulo, precisamos de 3 vértices, sendo um dos vértices em uma das linhas e outros dois vértices na outra linha. Vamos primeiro selecionar 1 vértice na primeira linha e 2 vértices na segunda linha. Considerando que há 4 vértices na primeira linha, há 4 possibilidades de selecionarmos um vértice na primeira linha. Para selecionarmos 2 vértices da segunda linha, de um total de 4 vértices também, temos a combinação de 2 elementos, dentre 4:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de selecionarmos 1 vértice na primeira linha E 2 vértices na segunda linha é o produto dessas possibilidades:

$$4 \times 6 = 24$$

Agora, devemos calcular o número de maneiras de selecionar 2 vértices na primeira linha e 1 vértice na segunda. Como ambas as linhas apresentam o mesmo número de vértices possíveis, também teremos 24 possibilidades de selecionar o triângulo dessa forma.

Como são eventos mutuamente exclusivos, o número de possibilidades de selecionar o triângulo uma forma **OU** de outra é a soma dessas possibilidades (princípio aditivo):

$$24 + 24 = 48$$

Que é menor que 50.

Gabarito: Errado

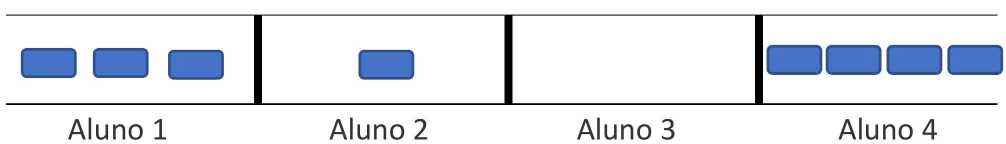
6. (CEBRASPE 2021/SEDUC-AL) O próximo item apresenta uma situação hipotética a ser julgada, acerca de problemas matemáticos envolvendo situação de uma escola.

Um professor de matemática precisa distribuir 20 exercícios para 4 alunos, de tal forma que cada aluno receba no mínimo 3 exercícios. Nessa situação hipotética, há 165 maneiras distintas de o professor distribuir os exercícios.

Comentários:

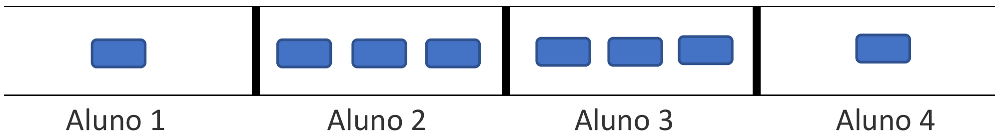
O enunciado informa que há 20 exercícios a serem distribuídas para 4 alunos, de modo que cada aluno receba no mínimo 3 exercícios. Após a distribuição do número mínimo de exercícios para cada aluno (3 x 4 = 12), restarão 8 exercícios a serem distribuídos livremente pelos 4 alunos. Em outras palavras, o primeiro aluno pode ficar com todos os 8 extras; ou o segundo aluno fica com 1 exercício extra e o quarto com 7 exercícios extras; etc. Aqui, os exercícios são considerados equivalentes, importando saber qual aluno vai ficar que quantidade de questões.

Essa é uma questão de combinação completa (ou combinação com repetição). Para resolvê-la, vamos representar os 4 alunos por seções e os 8 exercícios por objetos:



Na ilustração acima, o primeiro aluno ficou com 3 exercícios extras (além dos 3 obrigatórios), o segundo aluno ficou com 1 exercício extra e o quarto aluno ficou 4 exercícios extras.

Alternativamente, poderíamos ter:



Neste exemplo, o primeiro aluno ficou com 1 exercício extra, o segundo aluno ficou com 3 exercícios extras, o terceiro também ficou com 3 extras e o quarto ficou com 1 extra.

Assim, o número de maneiras de distribuir os 8 exercícios extras pelos 4 alunos (combinação completa de n = 4 elementos e p = 8 objetos) equivale ao número de maneiras de permutar os 8 exercícios com as 3 divisórias entre os alunos. Ou seja, temos uma permutação de 11 elementos no total, dos quais 8 se repetem e 3 se repetem:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

$$CR_4^8 = P_{11}^{3,8} = \frac{11!}{3! \times 8!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{3! \times 8!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 11 \times 5 \times 3 = 165$$

Gabarito: Certo

FGV

7. (FGV/2022 – PC-RJ) Do grupo dos 6 novos policiais de uma delegacia, 2 deles serão escolhidos para um treinamento especial. O número de pares diferentes de policiais que podem ser enviados para o treinamento especial é:

a) 10

b) 12.

c) 15.

d) 16.

e) 18.

Comentários:

O número de pares de policiais que podem ser escolhidos, dentre 6, corresponde ao número de maneiras de escolher 2 elementos, dentre 6. Como a ordem dos escolhidos não importa, temos a combinação de 2 elementos dentre 6:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Gabarito: C

8. (FGV/2022 – PC-AM) Os times X (Nacional) e Y (São Raimundo) jogaram pelo campeonato amazonense e 5 gols foram marcados. Sílvio viu o jogo e fez uma lista da ocorrência dos gols como mostra o quadro abaixo.

	Gol de
1º tempo - 23 min	X
1º tempo - 44 min	
2º tempo - 55 min	
2º tempo - 70 min	
2º tempo - 91 min	

Por algum motivo, só a primeira anotação permaneceu, mas Sílvio lembra-se que o time X ganhou a partida. A coluna dos gols pode ter sido preenchida por Sílvio do seguinte número de maneiras:

a) 5

b) 7

c) 9

d) 11

e) 13

Comentários:

Precisamos preencher os 4 campos da tabela de gols com X e/ou Y, de modo que X ganhe a partida, ou seja, de modo que haja mais X do que Y.

Pode ser que apenas o time X tenha marcado gols. Nessa situação, há **1** possibilidade.

Pode ser que o time Y tenha marcado um único gol. Assim, há **4** possibilidades para preencher o gol de Y na tabela.

Pode ser que o time Y tenha feito 2 gols. Nessa situação, devemos escolher 2 campos dentre os 4 para preenchermos com os gols de Y. Assim, temos a combinação de 2 elementos dentre 4:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = \mathbf{6}$$

O time Y não pode fazer 3 ou mais gols, senão ganharia a partida.

Como são possibilidades excludentes, devemos somar essas possibilidades:

$$1 + 4 + 6 = 11$$

Gabarito: D

9. (FGV/2022 – SSP-AM) Para o novo cartão de crédito, Renato precisa cadastrar uma senha de 4 dígitos de 0 a 9. Como nasceu em 1998 decidiu que sua senha terá dois "noves" em qualquer posição, mais dois dígitos diferentes de 9 e diferentes entre si. Por exemplo, 0959 e 2399 são senhas que Renato pode escolher. O número total de senhas que Renato poderá escolher

a) é menor que 300

b) está entre 300 e 350

c) está entre 351 e 400

d) está entre 401 e 450

e) é maior que 451

Comentários:

Para encontrar o número de possibilidades de senha nessa situação, vamos primeiro escolher os 2 dígitos diferentes de 9 que farão parte da senha, dentre os 9 algarismos disponíveis (de 0 a 8). Como neste primeiro momento estamos apenas selecionando os números, temos a combinação de 2 elementos, dentre 9:

$$C_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8}{2} = \mathbf{36}$$

Agora, vamos organizar os números selecionados. Temos 4 números, sendo 2 deles iguais. Logo, temos a permutação de 4 elementos com 2 repetições:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = \mathbf{12}$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de formar a senha é:

$$36 \times 12 = 432$$

Gabarito: D

10. (FGV/2022 – CBM-AM) A senha bancária de João possui quatro dígitos. Ele esqueceu a senha, mas lembra-se que ela possui dois dígitos iguais e ímpares e mais dois dígitos pares e diferentes entre si. Lembrando que 0 (zero) é par, o número de senhas diferentes que cumprem essas condições é

a) 540

b) 600

c) 720

d) 960

e) 1200

Comentários:

Para encontrar o número de senhas com 2 algarismos ímpares iguais e 2 algarismos pares diferentes, devemos primeiro selecionar os números utilizados. Como há 5 algarismos ímpares, há **5** possibilidades para a escolha do número ímpar que estará repetido na senha.

Em relação aos números pares, há 5 possibilidades, das quais 2 serão selecionadas para a senha. Como neste primeiro momento estamos apenas selecionando os números, temos a combinação de 2 elementos, dentre 5:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = \mathbf{10}$$

Agora, vamos organizar os números selecionados. Para isso, temos 4 números, sendo 2 deles iguais. Logo, temos a permutação de 4 elementos com 2 repetições:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = \mathbf{12}$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de formar a senha é:

5 x 10 x 12 = 600

Gabarito: B

11. (FGV/2021 – Pref. Paulínia) Eva tem 9 maçãs indistinguíveis e deseja distribuí-las a 3 amigos de forma que cada um deles fique com, ao menos, 2 maçãs. O número de maneiras distintas de Eva distribuir as maçãs é

a) 12

b) 10

c) 9

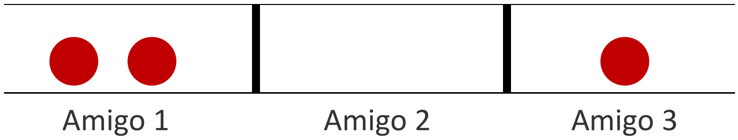
d) 8

e) 6

Comentários:

Essa questão trabalha com combinação completa, em que precisamos distribuir 9 maçãs para 3 amigos. Primeiro, distribuímos as maçãs obrigatórias, quais sejam, 2 para cada amigo. Após a distribuição das 6 maçãs, restarão 3 a serem distribuídas livremente.

A figura a seguir ilustra uma forma de distribuir as 3 maçãs:



A combinação completa entre $n = 3$ amigos e $p = 3$ objetos pode ser vista como a permutação dos 3 objetos e das 2 barras que separam os amigos, que corresponde a permutação de 5 elementos no total, com repetição de 3 e de 2 elementos:

$$CR_3^3 = P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Gabarito: B

FCC

12. (FCC/2018 – Escriturário do Banrisul/RS) Ana e Beatriz são as únicas mulheres que fazem parte de um grupo de 7 pessoas. O número de comissões de 3 pessoas que poderão ser formadas com essas 7 pessoas, de maneira que Ana e Beatriz não estejam juntas em qualquer comissão formada, é igual a

a) 20

b) 15

c) 30

d) 18

e) 25

Comentários:

Podemos calcular o número total de comissões possíveis de 3 pessoas, sem qualquer restrição, e subtrair o número de possibilidades em que Ana e Beatriz estão juntas. O total de combinações possíveis para formar comissões de 3 pessoas, com um total de 7 pessoas, é:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35$$

Dessas possibilidades, o número de combinações em que Ana e Beatriz estão juntas corresponde às formas de escolher mais uma pessoa para a comissão, dentre as 5 pessoas que restaram:

$$C_{n,1} = n$$

$$C_{5,1} = 5$$

Assim, o número de maneiras de formar a comissão, sem que Ana e Beatriz estejam juntas é: 35 – 5 = 30

Gabarito: C

13. (FCC/2018 – Secretaria de Administração/AP) Em um restaurante, para compor um prato, um cliente deve selecionar quatro ingredientes, sendo que, necessariamente, pelo menos, um deles deve ser um legume e, pelo menos, um deles deve ser uma carne. Há três opções de legumes e quatro opões de carnes. O número de combinações possíveis de pratos é

a) 7

b) 12

c) 64

d) 34

e) 14

Comentários:

Podemos calcular todas as possibilidades de escolher 4 ingredientes, sem restrições, e subtrair as possibilidades que não atendem ao enunciado, ou seja, não apresentam pelo menos 1 legume ou 1 carne. O total de possibilidades para a escolha de 4 ingredientes, dentre 7 opções (3 de legumes e 4 de carne) é:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35$$

Dentre esses pratos, os pratos só com legumes ou só com carne não atendem ao enunciado. Como são 4 opções de carne, há somente **1 possibilidade** de escolher 4 ingredientes de carne ($C_{4,4} = 1$). Além disso, não é possível escolher pratos somente com legumes, pois há somente 3 opções de legumes. Portanto, do resultado calculado, devemos subtrair 1, para excluir o prato só com carne:

$$35 - 1 = 34$$

Gabarito: D

14. (FCC/2018 – Assistente de Gestão Pública – SEPLAG de Recife/PE) Uma determinada secretaria municipal conta com dois assessores (A1 e A2) e cinco supervisores (S1, S2, S3, S4 e S5). Deseja-se formar uma comissão formada por quatro membros, pelo menos um dos quais deve ser um assessor e os demais, supervisores. Ainda, se A1 for membro da comissão, S1 não deve ser. Nessas condições, podem ser formadas

a) 15 comissões diferentes.

b) 30 comissões diferentes.

c) 20 comissões diferentes.

d) 44 comissões diferentes.

e) 60 comissões diferentes.

Comentários:

Vamos separar essa questão em 3 situações: (i) comissão com 2 assessores; (ii) comissão com o assessor A1; e (iii) comissão com o assessor A2.

i) Comissão com 2 assessores:

Sendo a comissão formada por 4 membros, os outros 2 membros devem ser selecionados dentre os supervisores. Como A1 é membro da comissão, S1 não é uma opção viável. Portanto, temos 4 supervisores, dos quais devemos escolher 2:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

ii) Comissão com A1:

Nesse caso, os outros 3 membros devem ser selecionados dentre os supervisores. Como A1 é membro, S1 não é opção. Portanto, temos 4 supervisores, dos quais devemos escolher 3:

$$C_{n,n-1} = n$$

$$C_{4,3} = 4$$

iii) Comissão com A2:

Nesse caso, os outros 3 membros devem ser selecionados dentre todos os 5 supervisores:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Como os eventos (i), (ii) e (iii) são exclusivos (ocorrerá i OU ii OU iii), pelo princípio aditivo, devemos somar as possibilidades de cada um:

$$6 + 4 + 10 = 20$$

Gabarito: C

15. (FCC/2019 – Analista Judiciário do TRF 3ª Região) Dez times estão inscritos em um campeonato de basquete. Cada time deve jogar exatamente uma vez com cada um dos outros times. A cada jogo o vencedor ganha 3 pontos e, se houver empate, cada um dos times ganha 1 ponto. Se, ao final do campeonato, o total de pontos distribuídos para todos os times for 125, o número de empates terá sido.

a) 8.

b) 12.

c) 10.

d) 11.

e) 9.

Comentários:

Conhecendo o número de times e sabendo que cada time joga uma vez com cada um dos outros, é possível calcular o número de jogos, qual seja, o número de combinações dos 10 times, 2 a 2:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{10,2} = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

O número total de jogos é igual à soma das vitórias (v) e dos empates (e):

$$v + e = 45$$

Além disso, o total de pontos distribuídos para todos os times é a soma do total de pontos distribuídos aos vencedores com o total de pontos distribuídos aos times que empataram (perdedores não recebem pontos). O total de pontos distribuídos aos vencedores é igual a 3 vezes o número total de vitórias; enquanto o total de pontos distribuídos aos times que empataram é 1 ponto para cada time que empatou, resultando em 2 pontos por empate:

$$3v + 2e = 125$$

Assim, temos 2 equações e 2 incógnitas (v e e). Para resolver esse sistema de equações, podemos isolar uma variável em uma das equações e substituí-la em outra.

Alternativamente, podemos resolvê-lo subtraindo as equações. Primeiro, multiplicamos ambos os lados da primeira equação ($v + e = 45$) por 3:

$$3v + 3e = 135$$

Agora, fazemos a seguinte subtração:

$$3v + 3e = 135$$

$$\underline{-(3v + 2e = 125)}$$

$$3v + 3e - 3v - 2e = 135 - 125$$

$$\boldsymbol{e = 10}$$

Já temos a resposta, mas podemos calcular também o número de vitórias, substituindo esse valor em uma das equações:

$$v + e = 45$$

$$v + 10 = 45$$

$$v = 35$$

Gabarito: C

16. (FCC/2018 – Analista Judiciário TRT de São Paulo – 15ª Região) Um condomínio residencial com 12 apartamentos, cada um ocupado com apenas uma pessoa, pretende formar uma comissão para fazer uma auditoria de suas contas. Ficou decidido que essa comissão deve ter 2, 3, 4 ou 5 pessoas. Além disso, há exatamente 6 apartamentos cujos moradores declararam que não desejam participar da comissão; os demais não se opõem à participação. Dessa forma, a quantidade de possibilidades para a composição dessa comissão é

a) 56

b) 120

c) 15

d) 84

e) 67

Comentários:

Havendo 6 apartamentos/moradores que não desejam participar, restam 12 – 6 = 6 que poderão participar da comissão, dos quais serão selecionadas 2, 3, 4 ou 5 pessoas.

Devemos, portanto, calcular as possibilidades de combinação $C_{6,2}$, $C_{6,3}$, $C_{6,4}$ e $C_{6,5}$. Esses eventos são mutuamente exclusivos (selecionamos 2 OU 3 OU 4 OU 5 pessoas). Portanto, as possibilidades desses eventos devem ser somadas.

Podemos efetuar os cálculos pela fórmula de combinação:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Alternativamente, podemos utilizar a seguinte propriedade de combinação:

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n-1} + C_{n,n} = 2^n$$

$$C_{6,0} + C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} = 2^6$$

Entretanto, não é exatamente dessa soma que precisamos. Não temos $C_{6,0}$, $C_{6,6}$ ou tampouco $C_{6,1}$. Por isso, precisamos subtrair esses valores do resultado.

Pelos casos particulares de combinação, sabemos que $C_{n,0} = 1$, $C_{n,0} = 6$, $C_{n,n} = 1$. Assim, $C_{6,0} = 1$, $C_{6,1} = 6$ e $C_{6,6} = 1$. Portanto:

$$C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} = 2^6 - C_{6,0} - C_{6,1} - C_{6,6}$$

$$C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} = 64 - 1 - 6 - 1 = 56$$

Gabarito: A

VUNESP

17. (VUNESP/2018 – Prefeitura de Serrana/SP) No dia de uma avaliação individual, três alunos chegaram atrasados na sala de aula, e os demais alunos já estavam devidamente acomodados nas carteiras. Se restavam apenas 4 carteiras vagas, o número total de posições distintas em que esses três alunos poderiam se acomodar é

a) 4.

b) 6.

c) 12.

d) 18.

e) 24.

Comentários:

Temos uma seleção de 3 lugares, dentre 4 disponíveis, com importância de ordem, pois cada lugar é distinto do outro. Assim, temos o arranjo de 3 elementos, dentre 4:

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: E

18. (VUNESP/2018 – PM/SP) Um coronel tem à sua disposição m oficiais para assumirem o comando e o vice-comando dos batalhões A e B. Supondo-se serem aleatórias essas escolhas, o número total de possibilidades para se escolher quatro nomes, sendo um nome para cada um dos comandos e vice-comandos desses batalhões, é igual a

a) $2.\left(\frac{m}{m-4}\right)!$

b) $2.\frac{m!}{(m-4)!}$

c) $\frac{(2.m)!}{(m-4)!}$

d) $\left(\frac{m}{m-4}\right)!$

e) $\frac{m!}{(m-4)!}$

Comentários:

Tem-se m oficiais à disposição para a escolha de 4 cargos, todos distintos. Logo, temos o arranjo de 4 elementos, dentre m, dado por:

$$A_{m,4} = \frac{m!}{(m-4)!}$$

Gabarito: E

19. (VUNESP/2018 – PM/SP) Em uma turma com 30 alunos, sendo 13 homens e 17 mulheres, deseja-se escolher, aleatoriamente, um representante, um vice-representante e um suplente, de modo que esse grupo não seja composto somente por homens e não seja composto somente por mulheres. O número total de possibilidades para fazer essa escolha é igual a

a) 3.094.

b) 7.050.

c) 10.919.

d) 14.786.

e) 18.564.

Comentários:

Considerando que vamos selecionar 3 alunos para funções distintas, temos um arranjo. Para que as pessoas selecionadas não sejam somente homens ou somente mulheres, podemos calcular o número de maneiras de escolher as pessoas, sem qualquer restrição, e depois subtrair o número de possibilidades que não atendem às condições impostas.

Seleção sem restrição: Para selecionar 3 elementos, dentre **30**, temos:

$$A_{30,3} = \frac{30!}{(30-3)!} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27!}{27!} = 30 \times 29 \times 28 = \mathbf{24.360}$$

Agora, vamos calcular o número de possibilidades que não atendem às condições do enunciado:

Seleção somente de homens. Para selecionar 3 homens, dentre 13, temos:

$$A_{13,3} = \frac{13!}{(13-3)!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10!}{10!} = 13 \times 12 \times 11 = \mathbf{1716}$$

Seleção somente de mulheres. Para selecionar 3 mulheres, dentre 17, temos:

$$A_{17,3} = \frac{17!}{(17-3)!} = \frac{17 \times 16 \times 15 \times 14!}{14!} = 17 \times 16 \times 15 = \mathbf{4080}$$

Assim, o número de maneiras de selecionar 3 alunos, de modo que não hajam somente mulheres ou somente homens é:

24.360 – 1.716 – 4.080 = 18.564

Gabarito: E

20. (VUNESP/2019 – Prefeitura de Campinas/SP) Em uma escola, serão escolhidos 5 jogadores de xadrez para compor a equipe que participará de um campeonato entre colégios. No período da manhã, há 6 jogadores e, no período da noite, há 8 jogadores. Todos esses jogadores desejam e têm condições para participar desse campeonato. Do período da manhã, serão selecionados 2 jogadores, enquanto o período da noite cederá 3 para a equipe.

O número de equipes diferentes que podem ser formadas é igual a

a) 360.

b) 840.

c) 450.

d) 760.

e) 240.

Comentários:

No período da manhã, há 6 jogadores disponíveis para a escolha de 2. Considerando que a ordem não importa, temos a combinação de 2 elementos, dentre 6:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

No período da noite, há 8 jogadores disponíveis para a escolha de 3, logo:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56$$

A quantidade de maneiras distintas de formar toda a equipe, com 5 jogadores, é, pelo princípio multiplicativo:

15 x 56 = 840

Gabarito: B

21. (VUNESP/2018 – PM/SP) Um total de 22 policiais, sendo metade cabos e a outra metade sargentos, precisam ser divididos em grupos de 4 policiais cada, de forma aleatória, de modo a não existir grupo com somente cabos e grupo com somente sargentos. O número total de possibilidades para formar os grupos é:

a) 33880.

b) 15843.

c) 12100.

d) 6655.

e) 1210.

Comentários:

Para formar grupos de 4 policiais, sem restrições, de um total de 22 policiais no total, teríamos:

$$C_{22,4} = \frac{22!}{(22-18)! \times 18!} = \frac{22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18!}{4! \times 18!} = \frac{22 \times 21 \times 20 \times 19}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7315$$

Dessas possibilidades, será necessário subtrair as possibilidades de grupos formados apenas com cabos (combinação de 4 elementos, dentre 11) e apenas com sargentos (que também corresponde à combinação de 4 elementos, dentre 11):

$$2 \times C_{11,4} = 2 \times \frac{11!}{(11-4)! \times 4!} = 2 \times \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 4!} = 2 \times \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 11 \times 10 \times 3 \times 2$$

$$2 \times C_{11,4} = 660$$

Logo, o número de grupos possíveis, nessas condições é:

$$7315 - 660 = 6655$$

Gabarito: D

CESGRANRIO

22. (CESGRANRIO/2018 – TRANSPETRO) De um quadro de profissionais com quatro engenheiros e cinco técnicos pretende-se formar um grupo de cinco profissionais com, pelo menos, um engenheiro e um técnico. Nessas condições, quantas possibilidades diferentes existem de formação desse grupo de cinco profissionais?

a) 19

b) 20

c) 120

d) 125

e) 126

Comentários:

O enunciado informa que há 4 engenheiros e 5 técnicos (logo, 9 profissionais, no total), dos quais 5 serão selecionados para formar um grupo.

Considerando que a ordem não importa, o número total de maneiras de escolher 5 profissionais, dentre 9, sem considerar (por ora) a restrição imposta pelo enunciado é:

$$C_{9,5} = \frac{9!}{(9-5)! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 2 \times 7 = 126$$

Dessas possibilidades, precisamos subtrair aquelas que não contêm pelo menos 1 engenheiro e 1 técnico, ou seja, aquelas possibilidades que contêm apenas engenheiros e aquelas que contêm apenas técnicos.

Como há um total de 4 engenheiros disponíveis, não é possível selecionar somente engenheiros para o grupo de 5 profissionais. Logo, não há possibilidades que contêm apenas engenheiros.

Como há um total de 5 técnicos, é possível selecionar somente técnicos para o grupo de 5 profissionais: há 1 única possibilidade de isso acontecer. Logo, devemos subtrair 1 possibilidade das 126 possibilidades calculadas anteriormente:

$$\text{Resposta} = 126 - 1 = 125$$

Gabarito: D

23. (CESGRANRIO/2018 – TRANSPETRO) Seis empresas (Grupo 1), denominadas L1, L2, L3, L4, L5 e L6, prestam serviço de limpeza interna em grandes embarcações, e outras cinco empresas (Grupo 2), denominadas E1, E2, E3, E4 e E5, realizam manutenção elétrica nas mesmas embarcações. Um analista precisa contratar três empresas diferentes do Grupo 1 e duas empresas diferentes do Grupo 2, para realizarem, respectivamente, a limpeza e a manutenção elétrica de embarcações.

Nessas condições, o número de possibilidades diferentes de contratação das cinco empresas é igual a

a) 120

b) 200

c) 400

d) 1.200

e) 2.400

Comentários:

O número de maneiras de selecionar as 3 empresas do Grupo 1, de um total de 6 empresas, sabendo que a ordem não é importa, é:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 = 20$$

E o número de maneiras de selecionar as 2 empresas do Grupo 2, de um total de 5 empresas, sabendo que a ordem não é importa, é:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 5 \times 2 = 10$$

O número de maneiras de selecionar tanto as empresas do Grupo 1 quanto as empresas do Grupo 2 (Grupo 1 E Grupo 2) corresponde ao produto desses resultados (princípio multiplicativo);

Resultado = 20 x 10 = 200

Gabarito: B

24. (CESGRANRIO/2018 – TRANSPETRO) Considere um conjunto de 10 empresas, denominadas A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Um analista precisa escolher quatro dessas empresas para distribuir quatro serviços diferentes, um para cada uma escolhida. Após uma análise técnica, decidiu que exatamente duas das três primeiras empresas — A, B e C — deveriam fazer quaisquer dois serviços dentre os quatro disponíveis. Os outros dois serviços que sobrassem seriam distribuídos entre duas das sete outras empresas restantes.

Nessas condições, o número de possibilidades diferentes para essa distribuição de serviços é igual a

a) 1724

b) 1692

c) 1584

d) 1512

e) 1294

Comentários:

O enunciado informa que há 4 serviços **distintos** a serem distribuídos dentre 10 empresas, sendo que 2 serão distribuídos dentre 3 empresas e os outros 2 serão distribuídos dentre as outras 7 empresas.

Para encontrar o número de possibilidades distintas de escolher os serviços para cada empresa nessas condições, podemos primeiro escolher as empresas que irão executar os serviços e depois escolher quais serão os serviços executados por cada uma.

Sabendo que das 3 empresas (A, B e C), 2 serão escolhidas para executar serviços, o número de possibilidades de selecioná-las é:

$$C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = \frac{3}{1} = 3$$

Sabendo que das outras 7 empresas, 2 serão escolhidas para executar serviços, o número de possibilidades de selecioná-las é:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 7 \times 3 = 21$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher as 4 empresas que irão executar serviços é o produto desses resultados:

Maneiras de escolher as 4 empresas = 3 x 21 = 63

Por fim, precisamos distribuir os 4 serviços diferentes para as 4 empresas selecionadas. Logo, temos uma permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de distribuir os serviços dentre 4 empresas, seguindo as restrições do enunciado é:

Número de maneiras = 24 x 63 = 1512

Gabarito: D

Outras Bancas

25. (IBFC 2021/MGS) Para formar uma senha de um aplicativo são necessários 4 dígitos, sendo os dois primeiros vogais e os dois últimos números pares. Se cada senha é formada por dígitos diferentes, ou seja, não pode haver duas vogais ou dois números pares iguais, então o total de senhas distintas que poderão ser formadas é igual a:

a) 360

b) 625

c) 400

d) 480

Comentários:

O enunciado informa que uma senha é formada por 2 vogais distintas e 2 números pares distintos. Sabendo que há 5 vogais, o número de maneiras de selecionar 2 vogais, com importância de ordem (já que estamos trabalhando com senhas) corresponde ao arranjo de 2 elementos, dentre 5:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Sabendo que há 5 números pares, a quantidade de maneiras de selecionar 2 números, com importância de ordem, também corresponde ao arranjo de 2 elementos, dentre 5, que sabemos ser igual a 20.

E a quantidade de possibilidades de formar a senha inteira (com 2 vogais **E** 2 números pares) corresponde ao produto dessas possibilidades (princípio multiplicativo):

20 x 20 = 400

Gabarito: C.

26. (UERJ 2021) Em um setor onde trabalham quatro professores e cinco pedagogos, quatro pessoas serão escolhidas para compor uma equipe, sendo pelo menos uma delas professor. Levando em conta apenas as pessoas que podem ser escolhidas, o número máximo de equipes distintas que podem ser formadas é igual a:

a) 84

b) 91

c) 104

d) 121

Comentários:

O enunciado informa que há 4 professores e 5 pedagogos e que 4 pessoas serão escolhidas, de modo que pelo menos uma delas seja professor. Nesses casos de "pelo menos um", o mais simples é calcular o número total de possibilidades e subtrair o número de casos que não atendem à restrição. Ou seja, aqui calculamos o número de formas de selecionar 4 dentre todos as pessoas disponíveis e subtraímos o número de casos que não apresentam professor algum.

O número de maneiras de selecionar 4 pessoas, dentre todas as 9 pessoas disponíveis, corresponde à combinação:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$C_{9,4} = \frac{9 \times \overset{2}{\cancel{8}} \times 7 \times \cancel{6}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 9 \times 2 \times 7 = 126$$

E os casos que não apresentam professor algum são aqueles em que as 4 pessoas escolhidas são pedagogas. Sabendo que há 5 pedagogos, o número de possibilidades de selecionar 4 delas é:

$$C_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)! \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{1! \times 4!} = 5$$

Logo, o número de equipes que podem ser formadas com pelo menos um professor é a diferença:

126 - 5 = 121

Gabarito: D

27. (Quadrix 2021/CRP-MG) Em uma determinada competição futebolística, em que cada um dos times enfrentou todos os demais duas vezes, foram realizadas trezentas e oitenta partidas. Com base nessa situação hipotética, assinale a alternativa que apresenta o número de times que participaram da competição.

a) 19

b) 20

c) 22

d) 24

e) 25

Comentários:

O número de partidas entre 2 times quando todos os n times se enfrentam uma vez corresponde ao número de possibilidades de selecionar 2 times dentre n, ou seja, à combinação de 2 elementos dentre n:

$$C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)! \times 2} = \frac{n \times (n-1)}{2}$$

O enunciado informa que todos os times se enfrentaram 2 vezes e que foram realizadas 380 partidas. Portanto, o dobro do resultado da combinação deve ser igual a 380:

$$2 \times \frac{n \times (n-1)}{2} = 380$$

$$n \times (n-1) = 380$$

Pelas alternativas, podemos observar que $n = 20$ atende a essa equação, pois 20 x 19 = 380. Alternativamente, podemos resolver essa questão utilizando Bháskara:

$$n^2 - n - 380 = 0$$

Aqui, temos $a = 1, b = -1, c = -380$:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-380) = 1 + 1520 = 1521$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1521}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm 39}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+39}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{1-39}{2} = \frac{-38}{2} = -19$$

Como o número de times é necessariamente positivo, temos $n = 20$.

Gabarito: B

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Partições

1. (Cebraspe 2019/Pref. São Cristóvão) Com relação a sistemas lineares e análise combinatória, julgue o item.

Se um professor desejar formar 3 grupos com seus 16 alunos, de modo que dois grupos tenham 5 alunos e o terceiro grupo tenha 6 alunos, então haverá $\binom{16}{5} + \binom{11}{5} + \binom{6}{6}$ formas distintas de se formarem esses grupos.

Comentários

A questão trata da separação de 16 alunos em 3 grupos (dois com 5 alunos e um com 6):

- Para o primeiro grupo, há 16 possibilidades para a escolha de 5 alunos: $C_{16,5} = \binom{16}{5}$
- Para o segundo grupo, restam 11 possibilidades (após a escolha do primeiro grupo), para a escolha de 5 alunos: $C_{11,5} = \binom{11}{5}$
- Para o terceiro grupo, há 6 possibilidades para a escolha de 6 alunos: $C_{6,6} = \binom{6}{6}$

Considerando que todos esses grupos devem ser escolhidos, devemos **multiplicar** as possibilidades (princípio multiplicativo):

$$\text{Número de possibilidades: } \binom{16}{5} \times \binom{11}{5} \times \binom{6}{6}$$

Logo, o item está **errado**.

Nota: O que fizemos nessa questão foi uma **partição ordenada**, de n = 16 elementos, em m = 3 subconjuntos, com $p_1 = 5$, $p_2 = 5$ e $p_3 = 6$ elementos em cada subconjunto, cuja fórmula é:

$$\binom{16}{5,5,6} = \frac{16!}{5!\,5!\,6!}$$

O produto que obtemos anteriormente pode ser simplificado como na fórmula acima.

Gabarito: Errado

2. (Cebraspe 2021/SEED-PR) Como medida de redução de riscos associados à pandemia de covid-19, a direção de determinado jornal diminuiu o número de funcionários presentes ao mesmo tempo em cada sala, tendo distribuído, aleatoriamente, um departamento de 13 pessoas em três grupos menores: um com 5 pessoas e dois com 4 pessoas. Considerando essa situação hipotética e os princípios de contagem, bem como admitindo n! = n·(n – 1)·(n – 2)· ... ·3·2·1, assinale a opção que indica a quantidade de formas diferentes em que as pessoas do citado departamento podem ser distribuídas pela direção do jornal.

a) $13!$

b) $\frac{13!}{5!}+\frac{8!}{4!.4!}+1$

c) $\frac{13!.3}{8!.5!}$

d) $\frac{13!}{5!.4!.4!}$

e) $\frac{13!}{8!}+\frac{8!}{4!}+1$

Comentários

Essa questão trabalha com a partição ordenada, em que devemos separar as 13 pessoas em grupos distintos, sendo um de 5 e dois de 4 pessoas. Utilizando a fórmula da partição ordenada, temos:

$$\binom{13}{5,4,4}=\frac{13!}{5!\,4!\,4!}$$

Porém, esse mesmo resultado pode ser obtido utilizando-se a fórmula da combinação para cada grupo:

- Para o primeiro grupo, há 13 alunos para a escolha de 5:

$$C_{13,5}=\frac{13!}{(13-5)!\,.5!}=\frac{13!}{8!\,.5!}$$

- Para o segundo grupo, restam 13 - 5 = 8 alunos, para a escolha de 4:

$$C_{8,4}=\frac{8!}{(8-4)!\,.4!}=\frac{8!}{4!\,.4!}$$

- Para o terceiro grupo, restam 8 - 4 = 4 alunos para a escolha de 4, ou seja, uma única possibilidade.

Considerando que todos esses grupos devem ser escolhidos, devemos **multiplicar** as possibilidades (princípio multiplicativo):

$$\frac{13!}{8!\,.5!}\times\frac{8!}{4!\,.4!}=\frac{13!}{5!\,.4!\,.4!}$$

Que é justamente o resultado que obtivemos aplicando a fórmula da partição ordenada.

Gabarito: D

3. (FGV/2015 – SMF-Niterói/RJ) João coordena as 5 pessoas da equipe de manutenção de uma empresa e deve designar, para cada dia, as pessoas para as seguintes funções:

- **uma pessoa da equipe para abrir o prédio da empresa e fiscalizar o trabalho geral;**
- **duas pessoas da equipe para o trabalho no turno da manhã, deixando as outras duas para o turno da tarde.**

O número de maneiras diferentes pelas quais João poderá organizar essa escala de trabalho é:

a) 10

b) 15

c) 20

d) 30

e) 60

Comentários:

Considerando que as 5 pessoas serão distribuídas em grupos distintos, podemos resolver essa questão, utilizando a partição ordenada.

Considerando que $p_1 = 1$ pessoa irá fiscalizar o trabalho, $p_2 = 2$ pessoas ficarão no turno da manhã e $p_2 = 2$ pessoas ficarão no turno da tarde, então, o número de possibilidades de organizar esses grupos é:

$$\frac{n!}{p_1! \times p_2! \times p_3!} = \frac{5!}{1! \times 2! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 2} = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

Gabarito: D

4. (FCC/2014 – SEFAZ-PE) Um concurso público disponibilizará sete vagas para o cargo de auditor, distribuídas entre quatro cidades conforme descrito na tabela, a seguir:

Cidade	Número de Vagas Disponíveis
Recife	3
Caruaru	2
Petrolina	1
Salgueiro	1

Depois que os sete aprovados forem definidos, o número de diferentes maneiras que eles poderão ser distribuídos entre as quatro cidades é igual a

a) 420.

b) 5040.

c) 35.

d) 56.

e) 210.

Comentários:

Para resolver essa questão, podemos utilizar a fórmula da partição ordenada de 7 elementos nos respectivos grupos (de 3, 2, 1 e 1 elementos cada):

$$\frac{7!}{3! \times 2! \times 1! \times 1!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 7 \times 6 \times 5 \times 2 = 420$$

Gabarito: A

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Lemas de Kaplansky

1. (CEBRASPE 2021/SEDUC-AL) O próximo item apresenta uma situação hipotética a ser julgada, acerca de problemas matemáticos envolvendo situação de uma escola.

Em 5 cadeiras de um auditório, só podem sentar professores e alunos, de tal forma que 2 alunos não podem sentar-se juntos, para se evitar conversa. Nessa situação hipotética, há exatamente 9 possibilidades diferentes de 5 pessoas, entre professores e alunos, sentarem-se nas 5 cadeiras.

Comentários:

Precisamos encontrar o número de possibilidades de sentar 5 pessoas, dentre professores e alunos, em 5 cadeiras, de modo que 2 alunos não estejam juntos. Essa questão não distingue os alunos entre si ou os professores entre si. A ideia aqui é encontrar o número de maneiras de organizar "plaquinhas" de "professor" e de "aluno" nos 5 assentos, considerando essa restrição.

Para resolver essa questão, precisamos separar o problema em cenários. O primeiro cenário é aquele em que as 5 pessoas são professores. Nessa situação, há **1** possibilidade para as "plaquinhas", qual seja, todas elas sendo de "professor".

Como segundo cenário, podemos ter 1 aluno e 4 professores. Nessa situação, há 5 assentos possíveis para o aluno, logo **5** possibilidades de organizar as planilhas.

É no terceiro cenário, com 2 alunos e 3 professores que podemos aplicar o primeiro lema de Kaplansky. Para isso, vamos colocar os 3 professores entre possíveis espaços:

___ P ___ P ___ P ___

E os alunos vão se sentar em 2 desses possíveis espaços. Por exemplo, escolhendo os dois primeiros espaços, teremos A P A P P. Desse modo, garantimos que os alunos não se sentarão juntos. Sabendo que há 4 espaços, dos quais 2 serão escolhidos, temos a combinação de 2 dentre 4:

$$f(n,p) = C_{n-p+1,p}$$

$$f(5,2) = C_{5-2+1,2} = C_{4,2}$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = 2 \times 3 = \mathbf{6}$$

E o último cenário é aquele com 3 alunos e 2 professores. Podemos utilizar novamente o lema de Kaplansky, ou entender que há apenas **1** maneira de sentar essas 5 pessoas, qual seja A P A P A. Este é o último cenário, pois não há como sentar 4 alunos e 1 professor, de modo que aluno algum fique ao lado de outro.

Como esses cenários são alternativos, isto é, ocorrerá um **OU** outro, o número total de possibilidades corresponde à soma dessas possibilidades (princípio aditivo):

$$1 + 5 + 6 + 1 = 13$$

Que é diferente de 9.

Gabarito: Errado

2. (FGV/2015 – SSP-AM) Sete pessoas formam uma fila e duas delas serão escolhidas para receber um brinde. O número de maneiras diferentes de escolher duas pessoas da fila que não sejam vizinhas é:

a) 15

b) 18

c) 20

d) 24

e) 30

Comentários:

Considerando que duas pessoas vizinhas não podem ser escolhidas, podemos utilizar o 1º lema de Kaplansky para resolver essa questão.

Sabendo que há 7 pessoas na fila e que 2 serão escolhidas, então 5 pessoas não serão escolhidas (N). Assim, as pessoas escolhidas ocuparão 2 posições dentre as seguintes possibilidades (_):

_ N _ N _ N _ N _ N _

Logo, há 6 posições possíveis para a escolha de 2 (combinação):

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6!}{4! \times 2} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Gabarito: A

3. (FGV/2021 - Pref. Paulínia) O número de anagramas da palavra PAULINIA que não têm duas consoantes juntas é

a) 3600

b) 4800

c) 6400

d) 10800

e) 14400

Comentários:

Podemos utilizar o primeiro lema de Kaplansky para garantir que não teremos duas consoantes juntas. Nesse sentido, vamos primeiro escolher os **lugares** das 3 consoantes entre as 5 vogais, sem nos preocuparmos, neste primeiro momento, com qual letra ocupará cada posição:

__ V __ V __ V __ V __ V __

As consoantes ocuparão 3 desses 6 espaços, pois assim garantimos que não haverá consoantes juntas. O número de maneiras de escolher 3 desses 6 lugares é a combinação de 3 elementos, dentre 6:

$$f(n,p) = C_{n-p+1,p}$$

$$f(8,3) = C_{8-3+1,3} = C_{6,3}$$

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 = 20$$

Agora que encontramos o número de maneiras de organizar as posições das consoantes e das vogais, precisamos encontrar o número de maneiras de reorganizar as diferentes consoantes e as vogais em cada posição. Por exemplo, supondo uma posição fixa V C V V C V C V, de quantas maneiras podemos organizar as 3 consoantes e as 5 vogais nessas posições.

Como há 3 consoantes diferentes, o número de maneiras de reorganizá-las corresponde à permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Como há 5 vogais, sendo 2 As e 2 Is, o número de maneiras de reorganizá-las corresponde à permutação de 5 elementos com repetição de 2 elementos e de 2 elementos:

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{2} = 5 \times 2 \times 3 = 30$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de anagramas que não apresentam duas vogais juntas é:

$$20 \times 6 \times 30 = 3600$$

Gabarito: A

Lista de Questões – Multibancas

Princípios de Contagem

CEBRASPE

1. (CEBRASPE 2019/Pref. São Cristóvão) Com relação a sistemas lineares e análise combinatória, julgue o item.

Situação hipotética: No jogo de basquete, cada um dos cinco jogadores de um time pode ocupar as seguintes posições: armador, ala armador, ala, líbero e pivô. O elenco do time Alfa é formado por 2 armadores, 2 alas armadores, 3 alas, 2 líberos e 3 pivôs. **Assertiva**: Nessa situação, sabendo-se que em quadra jogam apenas 5 jogadores por time e que os demais ficam no banco, é correto afirmar que existem 216 formas distintas de montar o time Alfa para iniciar a partida com exatamente um pivô, um armador e um ala.

2. (CEBRASPE/2014 – TER-GO) As prestações de contas das campanhas dos 3 candidatos a governador de determinado estado foram analisadas por 3 servidores do TRE desse estado. Considerando que um servidor pode analisar nenhuma, uma ou mais de uma prestação de contas e que, por coincidência, cada um dos 3 candidatos é parente de um dos 3 servidores, julgue o item que se segue.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuírem as prestações de contas entre os 3 servidores de modo que nenhum deles analise as contas de um parente é superior a 5.

3. (CEBRASPE/2014 – FUB) Uma parte considerável do jogo de pôquer está relacionada às estratégias dos jogadores, seja para não mostrar nenhuma emoção, seja para mostrar reações que levem o seu adversário a cometer algum erro. Assim, considere que Pedro, João e José estejam jogando em uma mesa de pôquer fechado e que cada um deles tenha na mão um jogo de cinco cartas da seguinte forma: um deles possui uma quadra, outro possui um par e o outro não tem nenhum tipo de sequência significativa. Por meio das reações dos jogadores, percebe-se que: um deles tem a intenção de desistir da jogada, outro tem a intenção de continuar a jogada e o outro tem a intenção de blefar. Sabe-se, ainda, que:

- **João não blefa e não tem o pior jogo;**
- **O jogador que tem a intenção de continuar tem na mão um jogo que forma um par;**
- **Pedro não tem a intenção de desistir;**
- **O jogador que blefa tem o jogo formado pela quadra.**

Com base nessa situação hipotética, julgue o item subsequente.

Se um jogador for escolhido ao acaso, sem que haja qualquer tipo de informação sobre a sua intenção ou sobre seu jogo, então a quantidade de possíveis combinações dos jogos e intenções que poderiam ser formados para ele é superior a 20.

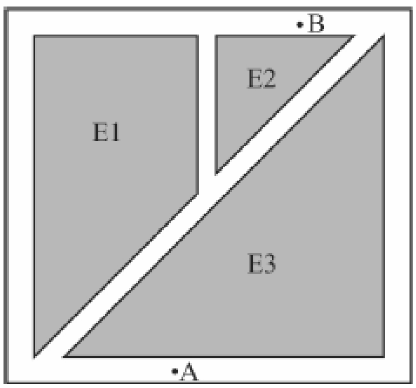
4. (CEBRASPE/2014 – INPI)

continentes	Américas	Ásia e Oceania	África	Europa
n.º de países	10	4	5	13

A tabela acima mostra a distribuição continental dos 32 países que participarão, com suas seleções de futebol, da próxima Copa do Mundo. Considerando que essas seleções serão divididas em 8 grupos de 4 seleções cada, e que a Ásia e a Oceania constituem, nesse caso, um único continente, julgue o item subsequente.

A quantidade de maneiras distintas de se formar um grupo que contenha seleções de países de todos os continentes é superior a 2.500.

5. (CEBRASPE 2018/PM-AL) A figura seguinte mostra a planta baixa de um condomínio. O terreno ocupado pelo condomínio é um quadrado de lados que mede 60 m. Nesse condomínio, as áreas indicadas por E1, E2 e E3 correspondem aos locais onde estão construídos os prédios residenciais, e as regiões em branco correspondem às vias de livre circulação para pedestres e veículos.



A partir da figura e das informações precedentes, julgue o item a seguir, considerando que a área de E2 seja igual a 200 m2.

Situação hipotética: Dois policiais devem ir do ponto A ao B, pelas vias de livre circulação, cada um deles fazendo um caminho diferente, sem passar duas vezes pelo mesmo local. Toda vez que os dois policiais chegarem ao ponto B, conta-se como realizado um trajeto. **Assertiva:** Nessa situação, a quantidade de trajetos distintos que os policiais poderão percorrer é inferior a 40.

FGV

6. (FGV/2018 – SASDH/RJ) Uma urna D contém 6 bolas numeradas de 3 a 8 e uma urna U contém 7 bolas numeradas de 2 a 8. Um número de dois algarismos será formado retirando uma bola da urna D e uma bola da urna U, cujos números serão, respectivamente, o algarismo das dezenas e o algarismo das unidades. A quantidade de números pares que poderão ser formados dessa maneira é

a) 42.

b) 36.

c) 24.

d) 20.

e) 16.

7. (FGV/2018 – ALE/RO) Em um circuito elétrico há 4 disjuntores que podem ficar, cada um deles, independente dos demais, nas posições "ligado" ou "desligado". O número de maneiras diferentes de se posicionar ("ligado" ou "desligado") esses 4 disjuntores é

a) 4.

b) 6.

c) 8.

d) 12.

e) 16.

8. (FGV/2018 – ALE-RO) O presidente e o vice-presidente de uma comissão serão escolhidos entre os 10 deputados do Partido X e os 6 deputados do Partido Y. Os Partidos acordaram que os dois cargos não poderão ser ocupados por deputados de um mesmo Partido.

O número de maneiras diferentes de se escolher o presidente e o vice-presidente dessa comissão, é

a) 16

b) 32

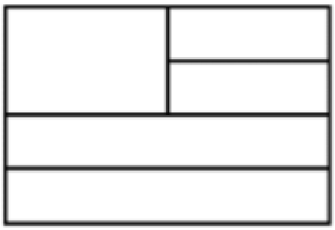
c) 60

d) 64

e) 120

9. (FGV/2018 – ALE-RO) Manoel possui tintas de 5 cores diferentes e deve pintar a bandeira abaixo de forma que:

- **cada região será pintada com uma única cor.**
- **duas regiões vizinhas não podem ter a mesma cor.**



O número de maneiras diferentes que Manoel pode pintar essa bandeira é

a) 120.

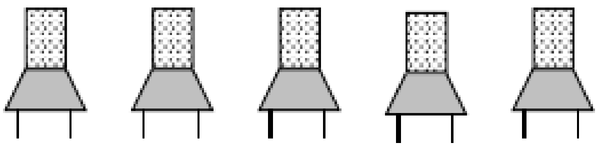
b) 180.

c) 240.

d) 360.

e) 720.

10. (FGV/2017 – Prefeitura de Salvador/BA) Cinco pessoas de diferentes alturas devem ocupar as cinco cadeiras abaixo para uma fotografia.



O fotógrafo pediu que nem o mais baixo nem o mais alto ocupassem as cadeiras das extremidades. Respeitando essa condição, o número de maneiras como as pessoas podem se posicionar para a fotografia é:

a) 12.

b) 18.

c) 24.

d) 36.

e) 72.

FCC

11. (FCC/2018 – Técnico Legislativo da Assembleia Legislativa/SE) Quatro parlamentares, sendo dois do partido X e dois do partido Y, inscreveram-se para discursar na tribuna em determinada sessão. A ordem dos discursos deverá ser definida de modo que as falas de dois parlamentares do mesmo partido não ocorram uma em seguida da outra. O número de maneiras diferentes de estabelecer a ordem dos discursos respeitando essa condição é igual a

a) 2

b) 4

c) 8

d) 12

e) 16

12. (FCC/2018 – Escriturário do Banrisul/RS) Considere, em ordem crescente, todos os números de 3 algarismos formados, apenas, pelos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. O número 343 ocupa a posição de número

a) 45.

b) 60.

c) 29.

d) 70.

e) 68.

13. (FCC/2018 – Técnico Judiciário do TRT 6ª Região) Na prateleira de uma estante estão dispostos 10 livros de direito, 12 livros de economia e 15 livros de administração. O menor número de livros que se devem retirar ao acaso dessa prateleira para que se tenha certeza de que dentre os livros retirados haja um de direito, um de economia e um de administração é igual a

a) 26

b) 23

c) 27

d) 28

e) 29

14. (FCC/2019 –Secretaria Municipal de Finanças, Tecnologia da Informação e Controle Interno de Manaus/AM) As peças de um jogo estão todas dentro de um saco opaco. Elas vêm em 4 formatos diferentes e cada peça está numerada com um número dentre os seguintes: 1, 2, 3, 4 ou 5. A menor quantidade de peças que devem ser retiradas aleatoriamente do saco para garantir que se tenha, após a retirada, pelo menos 4 peças de um mesmo formato e 3 peças com a mesma numeração é

a) 15

b) 10

c) 24

d) 18

e) 13

15. (FCC/2014 – Câmara Municipal de São Paulo) São lançados dois dados e multiplicados os números de pontos obtidos em cada um deles. A quantidade de produtos distintos que se pode obter nesse processo é

a) 36.

b) 27.

c) 30.

d) 21.

e) 18.

VUNESP

16. (VUNESP/2020 – PM/SP) Uma pessoa comprou 2 pares de sapatos, um preto e um marrom, e 5 pares de meias nas cores: preto, branco, marrom, bege e cinza. Sabendo que essa pessoa nunca usa sapatos pretos com meias brancas, nem sapatos marrons com meias pretas, então o número de maneiras diferentes de essa pessoa escolher o par de sapatos com o par de meias é

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

17. (VUNESP/2019 – CMDCA Sorocaba/SP) Um conselheiro tutelar irá atender 5 famílias, A, B, C, D e E, em uma mesma semana, começando na segunda-feira e terminando na sexta-feira, de modo que apenas uma família será atendida por dia. As famílias A e B só podem ser atendidas, ou na terça-feira, ou na quarta-feira, e a família C não pode ser atendida na sexta-feira.

Nessas condições, o número de maneiras diferentes de esse conselheiro agendar os dias em que essas famílias poderão ser atendidas é

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

18. (VUNESP/2019 – Prefeitura de Campinas/SP) A quantidade de números naturais de quatro algarismos menores que 8 000 e divisíveis por 5 que podem se formados com os algarismos 0, 2, 5 e 8 é igual a

a) 36.

b) 48.

c) 72.

d) 64.

e) 96.

19. (VUNESP/2019 – Prefeitura de Peruíbe/SP) Um painel é formado por 6 listras verticais, que serão coloridas usando apenas as cores azul, amarela e verde. Cada listra deverá ter apenas uma cor e não se pode utilizar a mesma cor em listras adjacentes. Assim, o número de modos que esse painel poderá ser colorido é

a) 3.2^6

b) 3.2^5

c) 3.3^6

d) 3.3^5

e) 2.3^6

20. (VUNESP/2019 – Prefeitura de Peruíbe/SP) Paulo vai criar uma senha para um site que será formada por seis elementos todos distintos: letras, dentre as 26 letras do nosso alfabeto, ou números de 1 a 9. Entretanto, o sistema faz distinção entre letras maiúsculas e letras minúsculas. Paulo determinou que o primeiro elemento da senha será a letra P (maiúscula), o segundo será a letra A (maiúscula), o terceiro será o número 5 ou o número 8, o quarto elemento será uma vogal, o quinto, um número ímpar, e o sexto (e último) elemento, uma letra qualquer. O número total de possibilidades diferentes para Paulo elaborar a senha é

a) 1764.

b) 2205.

c) 2578.

d) 3969.

e) 4783.

CESGRANRIO

21. (CESGRANRIO/2013 – BNDES) Uma empresa de propaganda pretende criar panfletos coloridos para divulgar certo produto. O papel pode ser laranja, azul, preto, amarelo, vermelho ou roxo, enquanto o texto é escrito no panfleto em preto, vermelho ou branco. De quantos modos distintos é possível escolher uma cor para o fundo e uma cor para o texto se, por uma questão de contraste, as cores do fundo e do texto não podem ser iguais?

a) 13

b) 14

c) 16

d) 17

e) 18

22. (CESGRANRIO/2012 – BB) Marcelo vai passar quatro dias na praia e leva em sua bagagem sete camisetas (três camisetas brancas diferentes, uma preta, uma amarela, uma vermelha e uma laranja) e quatro bermudas (uma preta, uma cinza, uma branca e uma azul).

De quantos modos distintos Marcelo poderá escolher uma camiseta e uma bermuda para vestir-se, de modo que as peças escolhidas sejam de cores diferentes?

a) 14

b) 17

c) 24

d) 26

e) 28

23. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Quantos números naturais de 5 algarismos apresentam dígitos repetidos?

a) 27.216

b) 59.760

c) 62.784

d) 69.760

e) 72.784

24. (CESGRANRIO/2012 – BB) Para cadastrar-se em um site de compras coletivas, Guilherme precisará criar uma senha numérica com, no mínimo, 4 e, no máximo, 6 dígitos. Ele utilizará apenas algarismos de sua data de nascimento: 26/03/1980.

Quantas senhas diferentes Guilherme poderá criar se optar por uma senha sem algarismos repetidos?

a) 5.040

b) 8.400

c) 16.870

d) 20.160

e) 28.560

25. (CESGRANRIO/2012 – Petrobras) Os números de telefones celulares de certa região possuem oito dígitos, repetidos ou não, começando por 5, 6, 7, 8 ou 9. Com a expansão do mercado de telefonia, será necessário acrescentar um dígito aos números atuais. Nessa nova configuração, os números seguirão o mesmo padrão anterior (primeiro dígito maior ou igual a 5, podendo haver algarismos repetidos) e, assim, será possível habilitar n celulares a mais do que no sistema atual. Conclui-se que n é igual a

a) $0,1 \times 10^8$

b) $1,5 \times 10^8$

c) $4,5 \times 10^8$

d) $5,0 \times 10^8$

e) $9,0 \times 10^8$

Gabarito

1. CERTO
2. CERTO
3. ERRADO
4. CERTO
5. ERRADO
6. LETRA C
7. LETRA E
8. LETRA E
9. LETRA E
10. LETRA D
11. LETRA C
12. LETRA E
13. LETRA D
14. LETRA E
15. LETRA E
16. LETRA D
17. LETRA D
18. LETRA D
19. LETRA B
20. LETRA D
21. LETRA C
22. LETRA C
23. LETRA C
24. LETRA B
25. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Permutação

CEBRASPE

1. (CEBRASPE 2022/UNB) Em uma viagem de turismo, um grupo com 18 passageiros, acompanhados de um guia turístico, serão transportados do aeroporto até o hotel em um micro-ônibus. Desses passageiros, 12 são membros da mesma família, constituída por 5 crianças e 7 adultos, sendo Paulo um dos adultos. Durante o trajeto, o guia turístico escolherá, por meio de sorteio aleatório, quatro passageiros do grupo e, a cada um deles, entregará um brinde.

Considerando essa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Caso os quatro sorteados façam o trajeto entre o aeroporto e o hotel nos quatro primeiros assentos do micro-ônibus, então a quantidade de formas diferentes de eles se sentarem, nesses assentos, é igual a 24.

2. (CEBRASPE 2018/BNB) Julgue o próximo item, relativo à análise combinatória e probabilidade.

A quantidade de maneiras distintas de 5 meninos e 4 meninas serem organizados em fila única de forma que meninos e meninas sejam intercalados e 2 meninos ou 2 meninas nunca fiquem juntos é inferior a 3.000.

3. (CEBRASPE 2018/SEFAZ-RS) Sete pessoas se dirigem para formar uma fila em frente ao único caixa de atendimento individual em uma agência bancária. Dessas sete pessoas, quatro são idosos. Um servidor da agência deverá organizar a fila de modo que os idosos sejam atendidos antes dos demais.

Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de se organizar a fila é igual a

a) 5.040.

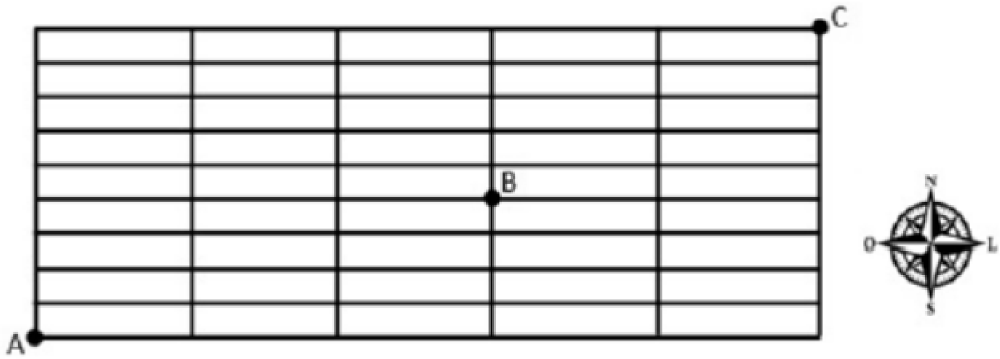
b) 720.

c) 576.

d) 288.

e) 144.

4. (CEBRASPE 2021/IBGE) Considere que a figura a seguir — que consiste de um retângulo maior subdividido em 45 retângulos menores, no qual estão destacados os pontos A, B e C; ao lado do retângulo maior estão indicadas as direções norte (N), sul (S), leste (L) e oeste (O) — representa um mapa, fora de escala, de parte de uma cidade onde será realizada uma pesquisa domiciliar.



As linhas retas representam as ruas, e os quarteirões são os retângulos menores, que medem 300 metros na direção oeste-leste e 60 metros na direção sul-norte. Durante os trabalhos, cada agente de pesquisas e mapeamento (APM), que sairá necessariamente do ponto A, somente pode caminhar nos sentidos oeste-leste ou sul-norte.

Tendo como referência o texto acima e observando-se a regra de que os deslocamentos apenas podem ser executados nos sentidos oeste-leste ou sul-norte, verifica-se que o número de caminhos distintos que podem ser percorridos por um APM para se deslocar do ponto A ao ponto C, passando pelo ponto B, é igual a

a) 14

b) 49

c) 56

d) 735

e) 2.002

5. (CEBRASPE 2022/UNB) Julgue o item que se segue, a respeito de contagem, probabilidade e estatística.

Considere que três amigos farão uma dinâmica de grupos e precisarão se sentar em uma roda com outras 5 pessoas. Considere ainda que os três amigos fazem questão de ficarem juntos. Nessa situação, a roda poderá ser formada de 720 maneiras distintas, sem haver repetição das posições.

FGV

6. (FGV/2021 – BANESTES) Considere a sequência dos 120 anagramas da palavra BANCO escritos em ordem alfabética. O anagrama CANBO ocupa a posição de número:

a) 50

b) 51

c) 52

d) 53

e) 54

7. (FGV/2022 – SEFAZ-ES) Dois casais irão se sentar em 4 cadeiras consecutivas de uma fila de um cinema. O número de maneiras de eles sentarem nas 4 cadeiras, de modo que cada casal se sente junto, é igual a

a) 4

b) 6

c) 8

d) 12

e) 16

8. (FGV/2022 – SEFAZ-AM) Um grupo formado por 2 homens e 3 mulheres formará uma fila. Essa fila deverá começar por um homem ou terminar por um homem. O número de filas distintas possíveis é:

a) 36

b) 48

c) 84

d) 96

e) 120

9. (FGV/2022 – SSP-AM) Os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, devem formar um número de cinco algarismos de forma que cada um desses algarismos apareça uma vez e que os algarismos pares não fiquem juntos. Por exemplo, o número 34152 é um desses números. A quantidade de números que cumprem essas condições é

a) 12

b) 24

c) 36

d) 60

e) 72

10. (FGV/2021 – PM-SP) Considere todos os anagramas da palavra BRASIL. O número de anagramas que não têm as vogais juntas é

a) 720

b) 600

c) 480

d) 240

e) 120

11. (FGV/2022 – CGU) O número de anagramas da palavra CONCURSO que começam por C ou terminam por O é:

a) 1.260

b) 1.440

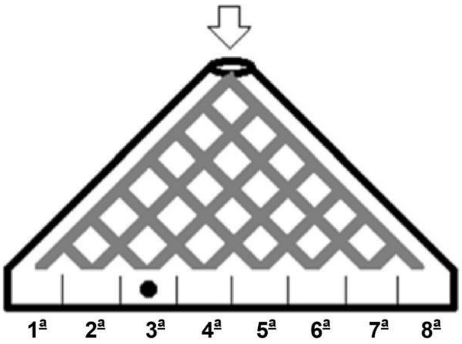
c) 4.320

d) 5.040

e) 10.080

FCC

12. (FCC/2018 – Analista Judiciário do TRT 14ª Região) Um brinquedo consiste em um dispositivo vertical, de formato aproximadamente triangular, tal como se vê na ilustração abaixo. Uma bolinha é colocada na entrada superior do dispositivo (no local indicado pela seta) e pode percorrer qualquer caminho descendente, por meio das canaletas diagonais representadas em cinza, até chegar a uma das oito caçapas inferiores.



Nesse brinquedo, a quantidade de caminhos que podem conduzir a bolinha da entrada até a 3ª caçapa é

a) 21

b) 6

c) 35

d) 10

e) 15

13. (FCC/2015 – SEFAZ/PE) A prova de raciocínio lógico de um concurso foi elaborada com 10 questões, sendo 4 fáceis, 3 médias e 3 difíceis. Para criar diferentes versões dessa prova, a organização do concurso pretende trocar a ordem das questões, mantendo sempre as fáceis no início, as médias no meio e as difíceis no final e respeitando as seguintes restrições colocadas pelo elaborador:

- há duas questões fáceis que, por se referirem a uma mesma figura, devem ser mantidas uma após a outra, em qualquer ordem;

- há ainda uma questão média e uma difícil que se referem a um mesmo texto, devendo também ser mantidas uma após a outra, com a média aparecendo primeiro.

Nessas condições, o número de diferentes versões que a organização do concurso poderá criar para essa prova é igual a

a) 54

b) 40

c) 24

d) 36

e) 48

14. (FCC/2015 – SEFAZ/PI) A senha requerida para ligar um computador é formada pelas mesmas 8 letras da palavra TERESINA, com as vogais ocupando as 4 primeiras posições e, as consoantes, as 4 últimas. Conhecendo apenas essas informações, uma pessoa que deseja usar o computador vai digitando todas as possíveis senhas, até acertar a correta.

Se essa pessoa nunca digitar a mesma senha mais de uma vez, conseguirá descobrir a senha correta em, no máximo,

a) 240 tentativas

b) 144 tentativas

c) 576 tentativas

d) 196 tentativas

e) 288 tentativas

QUADRIX

15. (Quadrix 2021/CREFONO - 3ª Reg.) Julgue o item.

Exatamente 36 anagramas da palavra JÚNIOR possuem as vogais e as consoantes juntas.

16. (Quadrix 2021/CREFONO - 3ª Reg.) Julgue o item.

O número de anagramas da palavra FISCAL que começam com F ou terminam com L é igual a 240.

17. (Quadrix 2021/CRTR - 12ª Reg.) Assinale a alternativa que apresenta o número de anagramas da palavra QUADRIX que possuem as vogais e as consoantes alternadas.

a) 36

b) 144

c) 576

d) 720x

e) 840

18. (Quadrix 2021/CRP - 22ª Reg.) Acerca dos anagramas da palavra SATURNO, julgue o item.

O número de anagramas que começam com S é igual ao número de anagramas da palavra NETUNO.

19. (Quadrix 2021/CRP - 22ª Reg.) A respeito dos anagramas da palavra TOPÁZIO, julgue o item.

O número de anagramas que têm as vogais e as consoantes alternadas é igual a 144.

GABARITO

1. CERTO
2. CERTO
3. LETRA E
4. LETRA D
5. CERTO
6. LETRA B
7. LETRA C
8. LETRA C
9. LETRA E
10. LETRA C
11. LETRA C
12. LETRA A
13. LETRA E
14. LETRA E
15. ERRADO
16. ERRADO
17. LETRA B
18. ERRADO
19. ERRADO

Lista de Questões – Multibancas

Outros Tipos de Permutação

1. (FGV/2021 – FUNSAÚDE/CE) Eduardo deseja escrever as 4 letras da palavra RATO de modo que a letra A esteja à esquerda da letra O. Por exemplo, uma das maneiras de escrevê-las respeitando a restrição dada é ARTO. O número de maneiras distintas que Eduardo tem para satisfazer o seu desejo é:

a) 24

b) 18

c) 16

d) 12

e) 8

2. (FGV/2021 – IMBEL) Considere as cinco letras da sigla IMBEL. Deseja-se arrumar essas cinco letras em sequência, de modo que tanto as vogais quanto as consoantes apareçam na ordem alfabética, isto é, as vogais na ordem E, I e as consoantes na ordem B, L, M. Por exemplo, uma dessas arrumações é BELMI. O número de arrumações diferentes é

a) 18

b) 12

c) 10

d) 8

e) 6

3. (FGV/2021 – IMBEL) Artur, Breno, Caio e Diogo fizeram uma fila nessa ordem para uma fotografia. Em seguida, o fotógrafo pediu que fizessem uma fila diferente para outra fotografia, de forma que apenas uma das quatro pessoas ficasse no seu lugar original. Indique o número de maneiras diferentes que a nova fila pode ser feita.

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

GABARITO

1. LETRA D
2. LETRA C
3. LETRA D

Lista de Questões – Multibancas

Arranjo e Combinação

CEBRASPE

1. (CEBRASPE 2021/PF) Para realizar uma operação de busca e apreensão, em duas localidades diferentes, devem ser deslocadas duas equipes, cada uma delas composta por 1 delegado, 1 escrivão e 2 agentes. Tendo como base essas informações, julgue o item seguinte.

Se estiverem disponíveis, no momento de formação das equipes, exatamente, 2 delegados, 2 escrivães e 4 agentes, o número de maneiras distintas de se montar as duas equipes seria igual ao número de maneiras de se montar, escolhendo-se entre esses mesmos profissionais, uma única equipe para a realização de uma busca em uma única localidade.

2. (CEBRASPE 2021/PF) Para realizar uma operação de busca e apreensão, em duas localidades diferentes, devem ser deslocadas duas equipes, cada uma delas composta por 1 delegado, 1 escrivão e 2 agentes. Tendo como base essas informações, julgue o item seguinte.

Se estiverem disponíveis, no momento de formação das equipes, exatamente, 2 delegados, 2 escrivães e 4 agentes, o número de maneiras distintas de se montar as duas equipes é igual a 4!.

3. (CEBRASPE 2021/PF) Para realizar uma operação de busca e apreensão, em duas localidades diferentes, devem ser deslocadas duas equipes, cada uma delas composta por 1 delegado, 1 escrivão e 2 agentes. Tendo como base essas informações, julgue o item seguinte.

Se estiverem disponíveis, no momento de formação das equipes, 3 delegados, 4 escrivães e 6 agentes, o número de maneiras distintas de se montar as duas equipes é superior a 6.500.

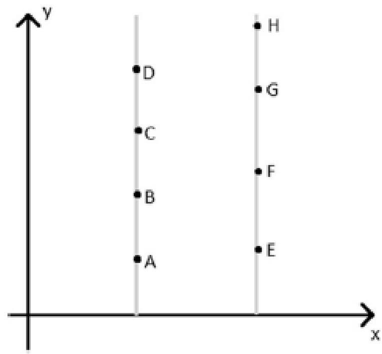
4. (CEBRASPE 2022/Petrobrás) Uma empresa distribuidora de combustíveis atendia, ao término do ano de 2020, apenas 30 clientes. Após a implementação de medidas administrativas, a quantidade de novos clientes dessa empresa, no primeiro semestre de 2021 (contada sempre em relação ao mês anterior), aumentou em progressão geométrica. Na tabela a seguir, está registrada a quantidade total de clientes da empresa no final dos 4 primeiros meses de 2021.

Total de Clientes da Empresa				
Meses	Janeiro 2021	Fevereiro 2021	Março 2021	Abril 2021
Total de Clientes	32	36	44	60

Com base nessa situação hipotética e nos dados apresentados na tabela, julgue o item a seguir.

Supondo-se que, no final de março de 2021, três clientes devessem ter sido aleatoriamente escolhidos para responder a um questionário de avaliação da empresa, então a quantidade de formas diferentes de fazer essa escolha, de modo que, no grupo escolhido, houvesse pelo menos 2 clientes que tivessem ingressado na empresa antes de 2021, é inferior a 4.000.

5. (CEBRASPE 2022/Petrobrás)



No plano cartesiano Oxy da figura precedente, estão marcados 8 pontos distintos no primeiro quadrante, cujas coordenadas são:

A = (1, a); B = (1, b); C = (1, c); D = (1, d)

E = (2, e); F = (2, f); G = (2, g); H = (2, h)

A partir dos dados apresentados, julgue o item subsequente.

O número de triângulos que se pode formar com vértices nos pontos dados é maior que 50.

6. (CEBRASPE 2021/SEDUC-AL) O próximo item apresenta uma situação hipotética a ser julgada, acerca de problemas matemáticos envolvendo situação de uma escola.

Um professor de matemática precisa distribuir 20 exercícios para 4 alunos, de tal forma que cada aluno receba no mínimo 3 exercícios. Nessa situação hipotética, há 165 maneiras distintas de o professor distribuir os exercícios.

FGV

7. (FGV/2022 – PC-RJ) Do grupo dos 6 novos policiais de uma delegacia, 2 deles serão escolhidos para um treinamento especial. O número de pares diferentes de policiais que podem ser enviados para o treinamento especial é:

a) 10

b) 12.

c) 15.

d) 16.

e) 18.

8. (FGV/2022 – PC-AM) Os times X (Nacional) e Y (São Raimundo) jogaram pelo campeonato amazonense e 5 gols foram marcados. Sílvio viu o jogo e fez uma lista da ocorrência dos gols como mostra o quadro abaixo.

	Gol de
1º tempo - 23 min	**X**
1º tempo - 44 min	
2º tempo - 55 min	
2º tempo - 70 min	
2º tempo - 91 min	

Por algum motivo, só a primeira anotação permaneceu, mas Sílvio lembra-se que o time X ganhou a partida. A coluna dos gols pode ter sido preenchida por Sílvio do seguinte número de maneiras:

a) 5

b) 7

c) 9

d) 11

e) 13

9. (FGV/2022 – SSP-AM) Para o novo cartão de crédito, Renato precisa cadastrar uma senha de 4 dígitos de 0 a 9. Como nasceu em 1998 decidiu que sua senha terá dois "noves" em qualquer posição, mais dois dígitos diferentes de 9 e diferentes entre si. Por exemplo, 0959 e 2399 são senhas que Renato pode escolher. O número total de senhas que Renato poderá escolher

a) é menor que 300

b) está entre 300 e 350

c) está entre 351 e 400

d) está entre 401 e 450

e) é maior que 451

10. (FGV/2022 – CBM-AM) A senha bancária de João possui quatro dígitos. Ele esqueceu a senha, mas lembra-se que ela possui dois dígitos iguais e ímpares e mais dois dígitos pares e diferentes entre si. Lembrando que 0 (zero) é par, o número de senhas diferentes que cumprem essas condições é

a) 540

b) 600

c) 720

d) 960

e) 1200

11. (FGV/2021 – Pref. Paulínia) Eva tem 9 maçãs indistinguíveis e deseja distribuí-las a 3 amigos de forma que cada um deles fique com, ao menos, 2 maçãs. O número de maneiras distintas de Eva distribuir as maçãs é

a) 12

b) 10

c) 9

d) 8

e) 6

FCC

12. (FCC/2018 – Escriturário do Banrisul/RS) Ana e Beatriz são as únicas mulheres que fazem parte de um grupo de 7 pessoas. O número de comissões de 3 pessoas que poderão ser formadas com essas 7 pessoas, de maneira que Ana e Beatriz não estejam juntas em qualquer comissão formada, é igual a

a) 20

b) 15

c) 30

d) 18

e) 25

13. (FCC/2018 – Secretaria de Administração/AP) Em um restaurante, para compor um prato, um cliente deve selecionar quatro ingredientes, sendo que, necessariamente, pelo menos, um deles deve ser um legume e, pelo menos, um deles deve ser uma carne. Há três opções de legumes e quatro opões de carnes. O número de combinações possíveis de pratos é

a) 7

b) 12

c) 64

d) 34

e) 14

14. (FCC/2018 – Assistente de Gestão Pública – SEPLAG de Recife/PE) Uma determinada secretaria municipal conta com dois assessores (A1 e A2) e cinco supervisores (S1, S2, S3, S4 e S5). Deseja-se formar uma comissão formada por quatro membros, pelo menos um dos quais deve ser um assessor e os demais, supervisores. Ainda, se A1 for membro da comissão, S1 não deve ser. Nessas condições, podem ser formadas

a) 15 comissões diferentes.

b) 30 comissões diferentes.

c) 20 comissões diferentes.

d) 44 comissões diferentes.

e) 60 comissões diferentes.

15. (FCC/2019 – Analista Judiciário do TRF 3ª Região) Dez times estão inscritos em um campeonato de basquete. Cada time deve jogar exatamente uma vez com cada um dos outros times. A cada jogo o vencedor ganha 3 pontos e, se houver empate, cada um dos times ganha 1 ponto. Se, ao final do campeonato, o total de pontos distribuídos para todos os times for 125, o número de empates terá sido.

a) 8.

b) 12.

c) 10.

d) 11.

e) 9.

16. (FCC/2018 – Analista Judiciário TRT de São Paulo – 15ª Região) Um condomínio residencial com 12 apartamentos, cada um ocupado com apenas uma pessoa, pretende formar uma comissão para fazer uma auditoria de suas contas. Ficou decidido que essa comissão deve ter 2, 3, 4 ou 5 pessoas. Além disso, há exatamente 6 apartamentos cujos moradores declararam que não desejam participar da comissão; os demais não se opõem à participação. Dessa forma, a quantidade de possibilidades para a composição dessa comissão é

a) 56

b) 120

c) 15

d) 84

e) 67

VUNESP

17. (VUNESP/2018 – Prefeitura de Serrana/SP) No dia de uma avaliação individual, três alunos chegaram atrasados na sala de aula, e os demais alunos já estavam devidamente acomodados nas carteiras. Se restavam apenas 4 carteiras vagas, o número total de posições distintas em que esses três alunos poderiam se acomodar é

a) 4.

b) 6.

c) 12.

d) 18.

e) 24.

18. (VUNESP/2018 – PM/SP) Um coronel tem à sua disposição m oficiais para assumirem o comando e o vice-comando dos batalhões A e B. Supondo-se serem aleatórias essas escolhas, o número total de possibilidades para se escolher quatro nomes, sendo um nome para cada um dos comandos e vice-comandos desses batalhões, é igual a

a) $2.\left(\frac{m}{m-4}\right)!$

b) $2.\frac{m!}{(m-4)!}$

c) $\frac{(2.m)!}{(m-4)!}$

d) $\left(\frac{m}{m-4}\right)!$

e) $\frac{m!}{(m-4)!}$

19. (VUNESP/2018 – PM/SP) Em uma turma com 30 alunos, sendo 13 homens e 17 mulheres, deseja-se escolher, aleatoriamente, um representante, um vice-representante e um suplente, de modo que esse grupo não seja composto somente por homens e não seja composto somente por mulheres. O número total de possibilidades para fazer essa escolha é igual a

a) 3.094.

b) 7.050.

c) 10.919.

d) 14.786.

e) 18.564.

20. (VUNESP/2019 – Prefeitura de Campinas/SP) Em uma escola, serão escolhidos 5 jogadores de xadrez para compor a equipe que participará de um campeonato entre colégios. No período da manhã, há 6 jogadores e, no período da noite, há 8 jogadores. Todos esses jogadores desejam e têm condições para participar desse campeonato. Do período da manhã, serão selecionados 2 jogadores, enquanto o período da noite cederá 3 para a equipe.

O número de equipes diferentes que podem ser formadas é igual a

a) 360.

b) 840.

c) 450.

d) 760.

e) 240.

21. (VUNESP/2018 – PM/SP) Um total de 22 policiais, sendo metade cabos e a outra metade sargentos, precisam ser divididos em grupos de 4 policiais cada, de forma aleatória, de modo a não existir grupo com somente cabos e grupo com somente sargentos. O número total de possibilidades para formar os grupos é:

a) 33880.

b) 15843.

c) 12100.

d) 6655.

e) 1210.

CESGRANRIO

22. (CESGRANRIO/2018 – TRANSPETRO) De um quadro de profissionais com quatro engenheiros e cinco técnicos pretende-se formar um grupo de cinco profissionais com, pelo menos, um engenheiro e um técnico. Nessas condições, quantas possibilidades diferentes existem de formação desse grupo de cinco profissionais?

a) 19

b) 20

c) 120

d) 125

e) 126

23. (CESGRANRIO/2018 – TRANSPETRO) Seis empresas (Grupo 1), denominadas L1, L2, L3, L4, L5 e L6, prestam serviço de limpeza interna em grandes embarcações, e outras cinco empresas (Grupo 2), denominadas E1, E2, E3, E4 e E5, realizam manutenção elétrica nas mesmas embarcações. Um analista precisa contratar três empresas diferentes do Grupo 1 e duas empresas diferentes do Grupo 2, para realizarem, respectivamente, a limpeza e a manutenção elétrica de embarcações.

Nessas condições, o número de possibilidades diferentes de contratação das cinco empresas é igual a

a) 120

b) 200

c) 400

d) 1.200

e) 2.400

24. (CESGRANRIO/2018 – TRANSPETRO) Considere um conjunto de 10 empresas, denominadas A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Um analista precisa escolher quatro dessas empresas para distribuir quatro serviços diferentes, um para cada uma escolhida. Após uma análise técnica, decidiu que exatamente duas das três primeiras empresas — A, B e C — deveriam fazer quaisquer dois serviços dentre os quatro disponíveis. Os outros dois serviços que sobrassem seriam distribuídos entre duas das sete outras empresas restantes.

Nessas condições, o número de possibilidades diferentes para essa distribuição de serviços é igual a

a) 1724

b) 1692

c) 1584

d) 1512

e) 1294

Outras Bancas

25. (IBFC 2021/MGS) Para formar uma senha de um aplicativo são necessários 4 dígitos, sendo os dois primeiros vogais e os dois últimos números pares. Se cada senha é formada por dígitos diferentes, ou seja, não pode haver duas vogais ou dois números pares iguais, então o total de senhas distintas que poderão ser formadas é igual a:

a) 360

b) 625

c) 400

d) 480

26. (UERJ 2021) Em um setor onde trabalham quatro professores e cinco pedagogos, quatro pessoas serão escolhidas para compor uma equipe, sendo pelo menos uma delas professor. Levando em conta apenas as pessoas que podem ser escolhidas, o número máximo de equipes distintas que podem ser formadas é igual a:

a) 84

b) 91

c) 104

d) 121

27. (Quadrix 2021/CRP-MG) Em uma determinada competição futebolística, em que cada um dos times enfrentou todos os demais duas vezes, foram realizadas trezentas e oitenta partidas. Com base nessa situação hipotética, assinale a alternativa que apresenta o número de times que participaram da competição.

a) 19

b) 20

c) 22

d) 24

e) 25

GABARITO

1. CERTO
2. CERTO
3. ERRADO
4. ERRADO
5. ERRADO
6. CERTO
7. LETRA C
8. LETRA D
9. LETRA D
10. LETRA B
11. LETRA B
12. LETRA C
13. LETRA D
14. LETRA C
15. LETRA C
16. LETRA A
17. LETRA E
18. LETRA E
19. LETRA E
20. LETRA B
21. LETRA D
22. LETRA D
23. LETRA B
24. LETRA D
25. LETRA C
26. LETRA D
27. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Partições

1. (Cebraspe 2019/Pref. São Cristóvão) Com relação a sistemas lineares e análise combinatória, julgue o item.

Se um professor desejar formar 3 grupos com seus 16 alunos, de modo que dois grupos tenham 5 alunos e o terceiro grupo tenha 6 alunos, então haverá $\binom{16}{5}+\binom{11}{5}+\binom{6}{6}$ formas distintas de se formarem esses grupos.

2. (Cebraspe 2021/SEED-PR) Como medida de redução de riscos associados à pandemia de covid-19, a direção de determinado jornal diminuiu o número de funcionários presentes ao mesmo tempo em cada sala, tendo distribuído, aleatoriamente, um departamento de 13 pessoas em três grupos menores: um com 5 pessoas e dois com 4 pessoas. Considerando essa situação hipotética e os princípios de contagem, bem como admitindo n! = n·(n – 1)·(n – 2)· ... ·3·2·1, assinale a opção que indica a quantidade de formas diferentes em que as pessoas do citado departamento podem ser distribuídas pela direção do jornal.

a) $13!$

b) $\frac{13!}{5!}+\frac{8!}{4!.4!}+1$

c) $\frac{13!.3}{8!.5!}$

d) $\frac{13!}{5!.4!.4!}$

e) $\frac{13!}{8!}+\frac{8!}{4!}+1$

3. (FGV/2015 – SMF-Niterói/RJ) João coordena as 5 pessoas da equipe de manutenção de uma empresa e deve designar, para cada dia, as pessoas para as seguintes funções:

- **uma pessoa da equipe para abrir o prédio da empresa e fiscalizar o trabalho geral;**
- **duas pessoas da equipe para o trabalho no turno da manhã, deixando as outras duas para o turno da tarde.**

O número de maneiras diferentes pelas quais João poderá organizar essa escala de trabalho é:

a) 10

b) 15

c) 20

d) 30

e) 60

4. (FCC/2014 – SEFAZ-PE) Um concurso público disponibilizará sete vagas para o cargo de auditor, distribuídas entre quatro cidades conforme descrito na tabela, a seguir:

Cidade	Número de Vagas Disponíveis
Recife	3
Caruaru	2
Petrolina	1
Salgueiro	1

Depois que os sete aprovados forem definidos, o número de diferentes maneiras que eles poderão ser distribuídos entre as quatro cidades é igual a

a) 420.

b) 5040.

c) 35.

d) 56.

e) 210.

GABARITO

1. ERRADO
2. LETRA D
3. LETRA D
4. LETRA A

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Lemas de Kaplansky

1. (CEBRASPE 2021/SEDUC-AL) O próximo item apresenta uma situação hipotética a ser julgada, acerca de problemas matemáticos envolvendo situação de uma escola.

Em 5 cadeiras de um auditório, só podem sentar professores e alunos, de tal forma que 2 alunos não podem sentar-se juntos, para se evitar conversa. Nessa situação hipotética, há exatamente 9 possibilidades diferentes de 5 pessoas, entre professores e alunos, sentarem-se nas 5 cadeiras.

2. (FGV/2015 – SSP-AM) Sete pessoas formam uma fila e duas delas serão escolhidas para receber um brinde. O número de maneiras diferentes de escolher duas pessoas da fila que não sejam vizinhas é:

a) 15

b) 18

c) 20

d) 24

e) 30

3. (FGV/2021 - Pref. Paulínia) O número de anagramas da palavra PAULINIA que não têm duas consoantes juntas é

a) 3600

b) 4800

c) 6400

d) 10800

e) 14400

Gabarito

1. ERRADO **2.** LETRA A **3.** LETRA A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.