Aula 03

BNB (Analista Bancário) Matemática Financeira - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

05 de Abril de 2023

Índice

1) Taxas Real. Aparente e de Inflação 3
2) Conceitos Econômicos 18
3) Inflação Acumulada 22
4) Custo Efetivo de uma Operação 24
5) Capitalização Contínua 33
6) Questões Comentadas - Taxa Aparente, Real e de Inflação - Cesgranrio 39
7) Questões Comentadas - Inflação Acumulada - Cesgranrio 54
8) Lista de Questões - Taxa Aparente, Real e de Inflação - Cesgranrio 57
9) Lista de Questões - Inflação Acumulada - Cesgranrio 62

TAXA APARENTE, REAL E DE INFLAÇÃO

No conceito das operações em matemática financeira, 3 taxas são bastantes cobradas em provas. São elas: a **Taxa aparente**, a **Taxa real** e a **Taxa de inflação**.

Iremos ver o conceito de cada uma e como elas se relacionam.

Taxa Aparente (i_a)

Também chamada de Taxa nominal, é **a taxa de juros total** de uma operação financeira. Nela, **NÃO SÃO descontados** os efeitos inflacionários.

Taxa de Inflação (i_i)

Inflação, resumidamente, é o aumento generalizado de preços. A Taxa de inflação representa a perda do valor do dinheiro no tempo.

Taxa Real (i_r)

Como o próprio nome diz, é o que realmente se ganha (ou se perde) em uma operação. É o **resultado de fato** de um investimento, por exemplo. Na Taxa real, **SÃO descontados** os efeitos inflacionários.

Essas Taxas se correlacionam através da equação de Fisher em que:

$$\boldsymbol{(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)}$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente$

$i_r = Taxa\ real$

$i_i = Taxa\ de\ inflação$

A grande maioria das questões irá cobrar a **aplicação dessa fórmula**. Todavia, quero que você entenda os conceitos relacionados a cada taxa. Então, vamos imaginar uma situação cotidiana para compreender melhor tais conceitos.

Imagine que você tenha passado em um concurso público (e sei que isso acontecerá em breve) e conseguiu juntar, digamos, R$ 100.000,00.

De posse desse valor, você pretende investi-lo em uma aplicação que rende 10% de juros compostos em 1 ano. Então, ao final de um ano você terá:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 100.000 \times (1 + 0{,}1)^1$$

$$M = 100.000 \times 1{,}1 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{M = 110.000}}$$

Perceba que esse será o **valor que você terá na sua conta**. Quando você acessar seu investimento irá constatar o valor de cento e dez mil reais.

Porém, observe que **não foi em momento algum descontada a inflação**. Apenas trabalhamos com a Taxa de 10% sobre o Capital Inicial. Logo, percebemos que a Taxa que utilizamos é uma Taxa aparente ou nominal, pois, como estudamos acima, a Taxa aparente é **a taxa de juros total** de uma operação financeira. Nela, **NÃO SÃO descontados** os efeitos inflacionários.

Então, quando você abre sua conta e constata o valor de R$ 110.000,00, isto quer dizer que "**aparentemente**" você ganhou R$ 10.000,00.

"Certo professor. Entendi. E como eu faço para calcular o quanto realmente ganhei?"

Excelente pergunta. As bancas tentam a todo momento confundir o candidato nesse tipo de cobrança. Para você calcular realmente o quando ganhou, precisará **encontrar a Taxa real de juros desse investimento e para isso deverá descontar os efeitos inflacionários**.

Vamos supor que a **inflação** tenha sido de 2,5% nesse ano em que foi realizada a aplicação. Logo, teremos de descontar a inflação da Taxa aparente para calcular a Taxa real. Iremos utilizar a <u>equação de relação</u> entre elas:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente = 10\% = 0{,}1$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 2{,}5\% = 0{,}025$

Vamos substituir os valores e calcular a Taxa real de juros deste investimento.

$$(1+i_a) = (1+i_r) \times (1+i_i)$$

$$(1+0{,}1) = (1+i_r) \times (1+0{,}025)$$

$$1{,}1 = (1+i_r) \times 1{,}025$$

$$(1+i_r) = \frac{1{,}1}{1{,}025}$$

$$1+i_r = 1{,}073$$

$$i_r = 1{,}073 - 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_r = 0{,}073 \;\; ou \;\; 7{,}3\%}}$$

Perceba que, se você descontasse a inflação fazendo uma simples subtração, você cometeria um grande erro. A **Taxa real é calculada através da equação de Fisher** e **NÃO POR SUBTRAÇÃO**.

Então, esse investimento rendeu **REALMENTE** 7,3% de juros. Logo, o Montante "de fato" ou real será igual a:

$$M_{real} = C \times (1+i_r)$$

$$M_{real} = 100.000 \times (1+0{,}073)$$

$$M_{real} = 100.000 \times 1{,}073 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_{real} = 107.300}}$$

E por fim, calculamos o quanto **realmente** você ganhou com esse investimento.

$$J_{real} = M_{real} - C$$

$$J_{real} = 107.300 - 100.00 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J_{real} = 7.300}$$

Observe que, para calcular o quanto "de fato" foi ganho, você precisa fazer a conta "à parte" em sua contabilidade. Quando você entrar na sua conta, irá constatar o valor de R$ 110.000,00. Porém, como vimos, este valor não é calculado descontando a inflação.

Há um tempo, as bancas apenas apresentavam os valores das taxas e questionavam a incógnita que faltava na equação:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Era uma simples aplicação de fórmula. Todavia, hoje em dia, com o **nível das provas mais avançado**, as bancas estão fugindo deste tipo de cobrança e fazendo o candidato refletir e pensar da forma como vimos acima. Então, **não apenas decore** as fórmulas. Saiba **interpretar o problema e entender** o que está sendo pedido na questão.

Outra equação que iremos utilizar bastante é a equação de Fisher adaptada em função do Montante (nominal) e do Capital que é representada por:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)}}$$

Onde,

$M = Montante$

$C = Capital$

$i_r = Taxa\ real$

$i_i = Taxa\ de\ inflação$

Então, no exemplo acima, poderíamos ter calculado a Taxa real por essa fórmula. Vamos calcular e constatar a veracidade.

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$\frac{110.000}{100.000} = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}025)$$

$$1{,}1 = (1 + i_r) \times 1{,}025$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}1}{1{,}025}$$

$$1 + i_r = 1{,}073$$

$$i_r = 1{,}073 - 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_r = 0{,}073\ \ ou\ \ 7{,}3\%}}$$

"Professor, quando irei utilizar cada uma das fórmulas?"

Isso vai depender das informações fornecidas no enunciado. Por isso a **importância** de se **resolver muitas questões**.

Vamos **esquematizar** essas fórmulas e, posteriormente, iremos resolver agora algumas questões de concursos para você fixar esse conteúdo.

ESQUEMATIZANDO

Taxa aparente: taxa de juros total.

Não são descontados os efeitos inflacionários.

$$(1+i_a) = (1+i_r) \times (1+i_i) \quad ou \quad \frac{M}{C} = (1+i_r) \times (1+i_i)$$

Taxa real: resultado "de fato" de uma operação.

São descontados os efeitos inflacionários.

Obs.: a Taxa real é calculada através dessa equação e NÃO POR SUBTRAÇÃO.

HORA DE PRATICAR!

(Inédita - 2022) Após anos estudando economia para o concurso de Auditor, José sabe que o certo é aplicar seu capital para se proteger da inflação. Suponha que José aplique por um ano seu primeiro salário de auditor em um título cujo rendimento nominal é de 15% e que a taxa de inflação neste ano do investimento tenha sido de 9%.

Sendo assim, qual será, aproximadamente, a taxa real que José irá obter nesse investimento?

a) 6,4%
b) 6,0%

c) 5,5%
d) 5,2%
e) 5,1%

Comentários:

Lembre-se que a **Taxa real é calculada através da equação de Fisher** e **NÃO POR SUBTRAÇÃO**. Estudamos essa passagem exaustivamente na aula.

Logo, você JAMAIS poderia assinalar a alternativa B.

Perceba que a questão nos fornece a taxa nominal e a taxa de inflação e nos questiona a taxa real do investimento.

Vamos aplicar diretamente a equação de relação (equação de Fisher) entre as taxas e calcular a taxa real.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$i_a = Taxa\ aparente = 15\% = 0{,}15$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 9\% = 0{,}09$

Substituindo os valores e calculando a taxa real teremos:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$(1 + 0{,}15) = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}09)$$

$$1{,}15 = (1 + i_r) \times 1{,}09$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}15}{1{,}09}$$

$$1 + i_r = 1{,}055$$

$$i_r = 1{,}055 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = 0,055\ ou\ 5,5\%}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(CR4 – 2018) Julgue o item, relativo à aplicação da matemática financeira e ao funcionamento do sistema bancário.

Os juros reais são os juros resultantes, após a subtração da taxa de crescimento da economia, dos juros nominais.

Comentários:

Os Juros reais, como o próprio nome diz, é o que realmente se ganha (ou se perde) em uma operação. É o **resultado de fato** de um investimento, por exemplo. Na Taxa real, **SÃO descontados** os efeitos inflacionários.

A taxa real é calculada pela relação de Fisher e **NÃO por Subtração**. Fique atento! Nós descontamos os efeitos inflacionários. Descontar é diferente de subtrair.

A frase **correta** do enunciado seria:

"Os juros reais são os juros resultantes, após o ***desconto*** *da* ***taxa de inflação*** *da economia, dos juros nominais."*

Gabarito: **ERRADO**

(Pref. São Paulo – 2018) Um investimento rendeu em um ano 10% de juros. Se a inflação nesse período foi de 6%, a taxa real de juros foi de, aproximadamente,

a) 4,5%
b) 2,8%
c) 3,2%
d) 3,8%
e) 4,2%

Comentários:

Vamos aplicar diretamente a <u>fórmula de relação entre as taxas</u> que acabamos de estudar e calcular a Taxa real de juros.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$i_a = Taxa\ aparente = 10\% = 0{,}1$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 6\% = 0{,}06$

Iremos substituir os valores e calcular a taxa requerida pela banca.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$(1 + 0{,}1) = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}06)$$

$$1{,}1 = (1 + i_r) \times 1{,}06$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}1}{1{,}06}$$

$$1 + i_r \cong 1{,}038$$

$$i_r \cong 1{,}038 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r \cong 0,038 \ \ ou \ \ 3,8\%}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(TRT 13 - 2014) A taxa de juros aparente, que corresponde a uma taxa real de 0,60% em um determinado período e a uma inflação de 15,00% neste mesmo período é, em %, de

a) 15,60
b) 21,00
c) 14,40
d) 15,69
e) 9,00

Comentários:

Vamos utilizar a equação de relação entre essas taxas:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente = ?$

$i_r = Taxa\ real = 0{,}6\% = 0{,}006$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 15\% = 0{,}15$

Iremos substituir os valores e calcular a taxa aparente.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$(1 + i_a) = (1 + 0{,}006) \times (1 + 0{,}15)$$

$$(1 + i_a) = 1{,}006 \times 1{,}015$$

$$1 + i_a = 1{,}1569$$

$$i_a = 1{,}1569 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_a = 0,1569 \ \ ou \ \ 15,69\%}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(SEFAZ RS – 2014) Francisco Joaquim contratou uma dívida de R$ 120.000,00 para suportar novos investimentos na sua fazenda. Oito meses após a data da contratação do empréstimo, Francisco Joaquim quitou a dívida por R$ 132.000,00. A inflação do período em que o empréstimo esteve em vigor foi de 6%. Qual a taxa de juros real, ou seja, acima da variação da inflação do período que Francisco Joaquim pagou nessa operação?

a) 1,03% no período
b) 3,77% no período
c) 4,00% no período
d) 4,50% no período
e) 6,00% no período

Comentários:

O enunciado nos fornece o Montante e o Capital. Sendo assim, vamos usar a segunda equação para o cálculo da taxa real de Juros em que:

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$M = Montante = 132.000$

$C = Capital = 120.000$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 6\%\ no\ período = 0{,}06$

Vamos substituir os valores e calcular a taxa real de juros no período.

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$\frac{132.000}{120.000} = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}06)$$

$$1{,}1 = (1 + i_r) \times 1{,}06$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}1}{1{,}06}$$

$$1 + i_r = 1{,}0377$$

$$i_r = 1{,}0377 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = 0{,}0377\ \ ou\ \ 3{,}77\%}$$

Gabarito: Alternativa **B**

(SEFAZ PI – 2015) Um investidor aplicou um capital de R$ 10.000,00 e resgatou o total de R$ 13.600,00 ao fim de 1 semestre. Se, nesse período, a taxa real de juros foi de 32%, então, dos valores seguintes, o que mais se aproxima da taxa de inflação do período é

a) 4,5%
b) 4%
c) 3,5%
d) 3%
e) 2,5%

Comentários:

Questão cobrada na prova de Auditor Fiscal do Estado do Piauí. Iremos ver que a resolução consiste, unicamente, na **aplicação da fórmula** adaptada da equação de relação entre as Taxas que acabamos de estudar.

A banca nos fornece o valor do Montante e do Capital e nos questiona a taxa de inflação do período. Vamos utilizar a equação de Fisher adaptada para as informações que dispomos.

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$M = Montante = 13.600$

$C = Capital = 10.000$

$i_r = Taxa\ real = 32\% = 0{,}32$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = ?$

Vamos substituir os valores e calcular a taxa de inflação.

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$\frac{13.600}{10.000} = (1 + 0{,}32) \times (1 + i_i)$$

$$1{,}36 = 1{,}32 \times (1 + i_i)$$

$$(1 + i_i) = \frac{1{,}36}{1{,}32}$$

$$1 + i_i = 1{,}0303$$

$$i_i = 1{,}0303 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_i = 0{,}0303\ \ ou\ \ 3{,}03\%}$$

Gabarito: Alternativa **D**

Vamos retornar à fórmula de correlação entre as Taxas:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Podemos <u>expandir</u> essa equação para um **período maior que uma unidade** e teremos:

$$\boxed{\boldsymbol{(1 + i_a) = (1 + i_{r1}) \times (1 + i_{r2}) \times \ldots (1 + i_{rn}) \times (1 + i_{i1}) \times (1 + i_{i2}) \times \ldots (1 + i_{in})}}$$

Ou

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{M}{C} = (1 + i_{r1}) \times (1 + i_{r2}) \times \ldots (1 + i_{rn}) \times (1 + i_{i1}) \times (1 + i_{i2}) \times \ldots (1 + i_{in})}}$$

Fique **SEMPRE ATENTO aos períodos** mencionados pela banca no enunciado.

Vamos resolver exercícios de concurso sobre essa passagem para você entender melhor.

(ISS Paulínia - 2021) Uma aplicação de R$ 100.000,00, após dois meses, resultou em um montante de R$ 130.000,00. Considerando a incidência de imposto e taxa sobre o rendimento de 25% e a taxa mensal de inflação de 5%, a taxa de juros real durante o período de aplicação foi de, aproximadamente,

a) -3%
b) -1%
c) 0%
d) 11%
e) 17%

Comentários:

A banca nos informa o valor do Capital aplicado e do Montante resgatado. Sendo assim, vamos aplicar a equação de relação adaptada entre as taxas:

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

FIQUE ATENTO!

Observe, porém, que ele nos fornece a taxa de inflação **MENSAL** e nos questiona a taxa real **durante o período, isto é, nos dois meses**. Ou seja, vamos (sim) utilizar esta fórmula. Todavia, como aprendemos no tópico "indo mais fundo", nós iremos capitalizar a taxa de inflação por 2 meses.

Então, nossa equação será:

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)^2$$

Cuidado com mais um ponto. Observe que o Montante da aplicação **NÃO** é $R\$ \, 130.000{,}00$. Há uma incidência de de imposto de 25% sobre o rendimento, isto é, sobre $R\$ \, 30.000{,}00 \; (130.000 - 10.000)$.

$$\text{imposto} = \frac{25}{100} \times 30.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\textbf{imposto} = \mathbf{7.500}}$$

Logo, o **Montante** a ser recebido será:

$$M = 130.000 - 7.500 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 122.500}}$$

Agora sim podemos aplicar a fórmula acima.

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)^2$$

$$\frac{122.500}{100.000} = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}05)^2$$

$$1{,}225 = (1 + i_r) \times 1{,}1025$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}225}{1{,}1025}$$

$$1 + i_r = 1{,}11$$

$$i_r = 1{,}11 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = 0{,}11 \; ou \; 11\% \; no \; período}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(Metrô SP – 2019) Ivone fez um empréstimo a juros compostos no valor de R$ 20.000,00 em setembro de 2018, para pagamento após 2 anos da data de aquisição do empréstimo. A taxa de inflação acumulada durante o primeiro ano foi de 4% ao ano e, durante o segundo ano de, 5% ao ano. A taxa real de juros

contratada foi mantida constante em 2% ao ano. O valor dos juros pagos por Ivone nessa operação foi, em reais,

a) 2.685,12
b) 2.636,00
c) 2.690,37
d) 2.722,34
e) 2.600,00

Comentários:

Observe que a questão aborda mais de um período em seu enunciado. Há uma taxa de inflação para o primeiro ano e outra para o segundo.

Iremos, então, utilizar a fórmula expandida de relação entre as taxas.

$$\frac{M}{C} = (1 + i_{r1}) \times (1 + i_{r2}) \times \ldots (1 + i_{rn}) \times (1 + i_{i1}) \times (1 + i_{i2}) \times \ldots (1 + i_{in})$$

Como o enunciado nos informa que o **período** do Empréstimo foi de **2 anos**, nossa equação será reduzida a dois termos e ficaremos com:

$$\frac{M}{C} = \left(1 + i_{r_1}\right) \times \left(1 + i_{r_2}\right) \times \left(1 + i_{i_1}\right) \times \left(1 + i_{i_2}\right)$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 20.000$

$i_{r_1} = Taxa\ real\ do\ primeiro\ ano = 2\% = 0{,}02$

$i_{r_2} = Taxa\ real\ do\ segundo\ ano = 2\% = 0{,}02$

$i_{i_1} = Taxa\ de\ inflação\ do\ primeiro\ ano = 4\% = 0{,}04$

$i_{i_2} = Taxa\ de\ inflação\ do\ segundo\ ano = 5\% = 0{,}05$

Observe que, pelo comando da questão, a Taxa real de juros foi igual tanto para o primeiro quanto para o segundo ano (mas nada impede que, em uma outra questão, sejam diferentes).

Vamos substituir os valores e calcular o Montante devido pelo empréstimo após 2 anos.

$$\frac{M}{C} = \left(1 + i_{r_1}\right) \times \left(1 + i_{r_2}\right) \times \left(1 + i_{i_1}\right) \times \left(1 + i_{i_2}\right)$$

$$\frac{M}{20.000} = (1 + 0{,}02) \times (1 + 0{,}02) \times (1 + 0{,}04) \times (1 + 0{,}05)$$

$$\frac{M}{20.000} = 1{,}02 \times 1{,}02 \times 1{,}04 \times 1{,}05$$

$$\frac{M}{20.000} = 1{,}1361$$

$$M = 20.000 \times 1{,}1361 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 22.722}$$

De posse do Montante e do Capital, calculamos os Juros pagos por Ivone.

$$J = M - C$$

$$J = 22.722 - 20.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J = 2.722}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(SEFAZ RS – 2014) Um título acumulou um rendimento de 30% nominal nos últimos quatros anos. Calcule a taxa de juros real, ou seja, a taxa acima da variação da inflação do período, sabendo que a variação da inflação foi de 5,5% para o ano 1; 4,5% para o ano 2; de 4,0% para o ano 3; e de 6% para o ano 4.

a) 9,66% no período
b) 6,69% no período
c) 6,96% no período
d) 10,0% no período
e) 8,33% no período

Comentários:

Vamos utilizar a fórmula de Fisher expandida para n termos:

$$(1 + i_a) = (1 + i_{r1}) \times (1 + i_{r2}) \times \ldots (1 + i_{rn}) \times (1 + i_{i1}) \times (1 + i_{i2}) \times \ldots (1 + i_{in})$$

Observe que o enunciado já nos fornece a Taxa nominal para todo o período, isto é, para os últimos 4 anos. Não foi fornecida a Taxa ano a ano, mas sim uma taxa "completa" para todo o período.

A mesma situação ocorre para a Taxa real questionada pelo enunciado. A banca pergunta qual a taxa "completa" para todo o período de 4 anos.

Já a taxa de inflação é fornecida ano a ano durante os 4 anos. Então, nossa equação expandida terá o seguinte aspecto:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_{i1}) \times (1 + i_{i2}) \times (1 + i_{i3}) \times (1 + i_{i4})$$

Vamos substituir os valores e proceder com as contas para calcular a taxa real do período.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_{i1}) \times (1 + i_{i2}) \times (1 + i_{i3}) \times (1 + i_{i4})$$

$$(1 + 0{,}3) = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}055) \times (1 + 0{,}045) \times (1 + 0{,}04) \times (1 + 0{,}06)$$

$$1{,}3 = (1 + i_r) \times 1{,}055 \times 1{,}045 \times 1{,}04 \times 1{,}06$$

$$1{,}3 = (1 + i_r) \times 1{,}2153$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}3}{1{,}2153}$$

$$1 + i_r = 1{,}0696$$

$$i_r = 1{,}0696 - 1 \quad \rightarrow \boldsymbol{i_r = 0{,}0696 \ \ ou \ \ 6{,}96\%}$$

Gabarito: Alternativa **C**

CONCEITOS ECONÔMICOS

Algumas questões de provas buscam saber do candidato a **relação conceitual** acerca da Taxa real e da Taxa aparente, a depender do comportamento da inflação na economia.

- Em uma **economia inflacionária**, isto é, inflação positiva (> 0), a Taxa real de Juros é sempre **MENOR** que a Taxa aparente.

Vamos entender essa passagem tanto conceitual quanto numericamente.

Vimos que a **Taxa real é a taxa de juros descontada da inflação**. Ou seja, para calcular a Taxa real, pegamos a Taxa Nominal e descontamos a inflação. Ora, se a taxa de inflação for positiva e descontarmos esse valor da Taxa Nominal, certamente iremos encontrar um valor menor que esta última. Este valor menor é a Taxa real.

Ainda ficou confuso? Tenho certeza que numericamente tudo irá se esclarecer.

Imagina que a Taxa Aparente seja de 20% no período e a Taxa de inflação seja de 10%. Qual será o valor da Taxa real?

Estamos diante de um exemplo de uma **economia inflacionária**, uma vez que, a taxa de inflação é positiva. Vamos utilizar a equação que correlaciona as taxas e **calcular a taxa real**.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$(1 + 0{,}2) = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}1)$$

$$1{,}2 = (1 + i_r) \times 1{,}1$$

$$\frac{1{,}2}{1{,}1} = (1 + i_r)$$

$$1 + i_r = 1{,}091$$

$$i_r = 1{,}091 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = 0{,}091 \;\; ou \;\; 9{,}1\% \; no \; período}$$

Constatamos, então, que a Taxa real (9,1%), em uma **economia inflacionária**, é **MENOR** que a Taxa aparente (20%).

Percebeu? Tínhamos uma Taxa Aparente de 20% e descontamos um valor positivo sobre ela (10%). Resultando, assim, em uma Taxa menor que ela (que é a Taxa real).

- Em uma **economia deflacionária**, isto é, inflação negativa (< 0), a Taxa real de Juros é sempre **MAIOR** que a Taxa aparente.

Vamos analisar com base no mesmo exemplo. Temos uma Taxa aparente de 20% no período. Porém, agora, a inflação é igual a -5%. Iremos **calcular a Taxa real**.

$$(1+i_a) = (1+i_r) \times (1+i_i)$$

$$(1+0{,}2) = (1+i_r) \times (1-0{,}05)$$

$$1{,}2 = (1+i_r) \times 0{,}95$$

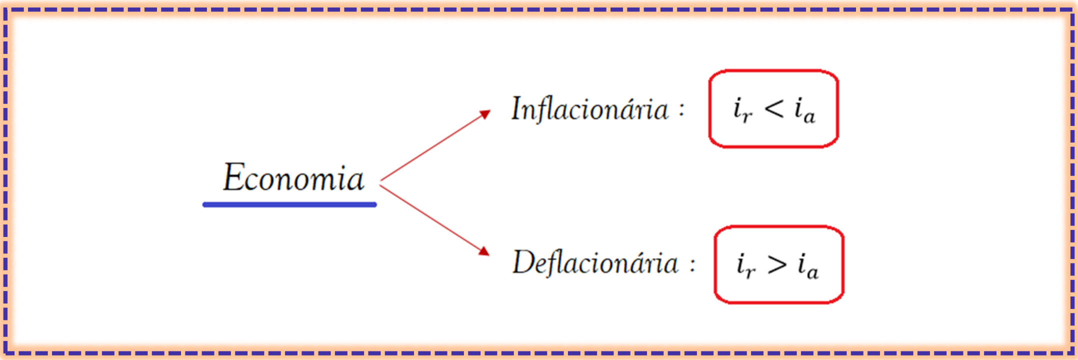
$$(1+i_r) = \frac{1{,}2}{0{,}95}$$

$$1+i_r = 1{,}263$$

$$i_r = 1{,}263 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = 0,263 \ \ ou \ \ 26,3\% \ no \ período}$$

Ou seja, em uma **economia deflacionária**, a Taxa real de juros é **MAIOR** que a Taxa aparente.

ESQUEMATIZANDO



Vejamos como esse tópico já foi cobrado.

HORA DE PRATICAR!

(BNB – 2018) No que se refere a matemática financeira, julgue o seguinte item.

Se em determinado ano a taxa de juros aparente for de 10% ao ano e se a taxa real de juros nesse período for de 12%, então, nesse ano, a taxa de inflação será negativa, ou seja, haverá deflação.

Comentários:

Observe que a Taxa real de juros (12%) é maior que a Taxa aparente (10%). Estudamos que essa situação ocorre quando estamos diante de uma **economia deflacionária**, ou seja, quando a inflação é negativa.

Logo, a assertiva está correta.

Vamos comprovar algebricamente. Iremos utilizar a equação que relaciona essas taxas e calcular o valor da Taxa de inflação no ano.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente = 10\% = 0{,}1$

$i_r = Taxa\ real = 12\% = 0{,}12$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = ?$

Iremos substituir os valores e calcular a Taxa de inflação.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$(1 + 0{,}1) = (1 + 0{,}12) \times (1 + i_i)$$

$$1{,}1 = 1{,}12 \times (1 + i_i)$$

$$(1 + i_i) = \frac{1{,}1}{1{,}12}$$

$$1 + i_i \cong 0{,}98$$

$$i_i \cong 0{,}982 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_i \cong -0{,}018\ \ ou\ \ -1{,}8\%\ ao\ ano}$$

Isto é, a taxa de inflação será **NEGATIVA** (deflação) como queríamos demonstrar.

Relembrando:

- Em uma **economia deflacionária**, isto é, inflação negativa (< 0), a Taxa real de Juros é sempre **MAIOR** que a Taxa aparente.

Gabarito: **CERTO**

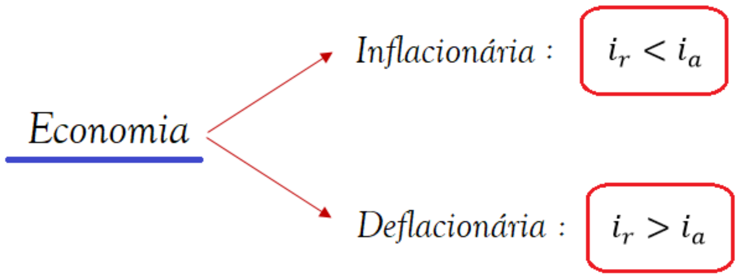
(FUB - 2018) A respeito de sistemas de amortização e de taxas de juros de empréstimos bancários, julgue o item a seguir.

Em uma economia inflacionária, a taxa real de juros para um empréstimo bancário será sempre maior que a correspondente taxa nominal.

Comentários:

Estudamos que, em uma **economia inflacionária**, isto é, inflação positiva (> 0), a Taxa real de Juros é sempre **MENOR** que a Taxa aparente.

Vamos relembrar o esquema da aula.



Logo, a assertiva está errada.

Gabarito: **ERRADO**

Inflação Acumulada

Imagine, por exemplo, que a Taxa de inflação em um mês seja de 5% e no mês seguinte de 7%. Qual seria a Inflação acumulada nesses dois meses?

Já adianto que **NÃO DEVEMOS somar** as taxas de inflação individualmente para calcular a Taxa acumulada de inflação no período.

Ou seja, se você respondeu 12%, está incorreto. Porém, não há problema algum em errar. Iremos aprender agora a calcular a Taxa de inflação acumulada e você, com certeza, acertará na sua prova se cair uma questão sobre esse tópico.

Sejam, i_{i1} , i_{i2} , $i_{i3}, \dots , i_{in}$ as taxas de inflação de períodos sucessivos, define-se **Taxa acumulada de inflação** i_{iac} nesses períodos por:

$$\boxed{\boldsymbol{(1 + i_{iac}) = (1 + i_{i1}) \times (1 + i_{i2}) \times (1 + i_{i3}) \times \dots \times (1 + i_{in})}}$$

Vamos calcular, então, qual seria a Taxa acumulada no exemplo dado. A taxa de inflação no primeiro mês foi de 5% e, no segundo mês, 7%.

$$(1 + i_{iac}) = (1 + i_{i1}) \times (1 + i_{i2})$$

$$(1 + i_{iac}) = (1 + 0{,}05) \times (1 + 0{,}07)$$

$$(1 + i_{iac}) = 1{,}05 \times 1{,}07$$

$$1 + i_{iac} = 1{,}1235$$

$$i_{iac} = 1{,}1235 - 1 \quad \rightarrow \boldsymbol{i_{iac} = 0{,}1235 \ ou \ 12{,}35\%}$$

Ou seja, a Taxa de inflação acumulada nos dois meses foi igual a 12,35%.

(Emdec – 2019) Em determinada época a inflação de um país (mês 1) foi de 1,20%; no mês seguinte (mês 2), a inflação foi de 2% e, no outro mês (mês 3) foi de 1,8%. Quanto a inflação acumulada do período, assinale a alternativa correta.

a) 3,05%

b) 4,32%
c) 5%
d) 5,08%

Comentários:

Vamos aplicar diretamente a fórmula da Taxa acumulada de inflação e calcular seu valor.

$$(1 + i_{iac}) = (1 + i_{i1}) \times (1 + i_{i2}) \times (1 + i_{i3})$$

$$(1 + i_{iac}) = (1 + 0{,}012) \times (1 + 0{,}02) \times (1 + 0{,}018)$$

$$(1 + i_{iac}) = 1{,}012 \times 1{,}02 \times 1{,}018$$

$$1 + i_{iac} = 1{,}0508$$

$$i_{iac} = 1{,}0508 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{iac} = 0,0508 \ ou \ 5,08\%}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(MSGás – 2015) Em um país, as taxas de inflação nos 2 primeiros meses do ano são 4% e 5% e no terceiro mês acontece uma deflação de 4%. Portanto, a inflação acumulada nos três primeiros meses deste ano é igual a:

a) 4,832%
b) 4,882%
c) 4,922%
d) 5%

Comentários:

Iremos aplicar a fórmula da **Taxa acumulada de inflação** e calcular seu valor para o período de 3 meses. Observe que no terceiro mês houve uma deflação, isto é, a inflação foi negativa. Em nada muda a aplicabilidade da fórmula. A única atenção que devemos ter é que, nesse caso, a inflação entrará com sinal negativo.

$$(1 + i_{iac}) = (1 + i_{i1}) \times (1 + i_{i2}) \times (1 + i_{i3})$$

$$(1 + i_{iac}) = (1 + 0{,}04) \times (1 + 0{,}05) \times (1 - 0{,}04)$$

$$(1 + i_{iac}) = 1{,}04 \times 1{,}05 \times 0{,}96$$

$$1 + i_{iac} = 1{,}04832$$

$$i_{iac} = 1{,}04832 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{iac} = 0,04832 \ ou \ 4,832\%}$$

Gabarito: Alternativa **A**

CUSTO EFETIVO DE UMA OPERAÇÃO

Suponha que você obtenha um Empréstimo de R$ 100.000,00 a uma taxa de juros de 10% ao mês em regime de Juros Compostos para ser pago ao final de 3 meses. Porém, na hora da liberação do recurso, o banco te cobre uma taxa de abertura de crédito de R$ 2.000,00 mais um valor de R$ 500,00 referente a outras taxas.

Apesar de você ter obtido 100 mil reais de empréstimo, efetivamente você terá recebido esse valor subtraído das taxas cobradas pelo banco, certo?

Ora, o Capital efetivamente recebido será **o valor que foi emprestado menos os custos** que o banco cobra.

Nesse caso, o **Capital efetivo recebido** teria sido igual a:

$$C_{ef} = 100.000 - 2.000 - 500 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{C_{ef} = 97.500}}$$

Então, efetivamente, você recebeu R$ 97.500,00.

E qual o Montante que você deverá pagar pela obtenção desse recurso?

O banco vai te cobrar juros compostos de 10% ao mês.

"Mas em cima de qual valor, professor? Do valor do Empréstimo ou em cima do valor que efetivamente recebi?"

Em cima do valor do Empréstimo. **Os Juros são calculados em cima do valor Nominal do Empréstimo**. Então, você teria que pagar ao final de 3 meses um Montante igual a:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 100.000 \times (1 + 0{,}1)^3$$

$$M = 100.000 \times 1{,}331 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 133.100}}$$

E, por fim, qual seria a taxa efetiva (custo efetivo) no período desta operação?

Perceba que a taxa de 10% ao mês é a taxa nominal do empréstimo. Para calcularmos a taxa efetiva, devemos ter como base o que efetivamente foi recebido, isto é, R$ 97.500,00.

Sendo assim, vamos aplicar a fórmula do Montante e calcular o custo efetivo da operação. Acompanhe.

$$M = C_{ef} \times \left(1 + i_{ef}\right)$$

$$133.100 = 97.500 \times \left(1 + i_{ef}\right)$$

Observe que, na equação acima, para o cálculo da taxa efetiva, entramos com o valor do Capital efetivamente recebido, isto é, o valor do Empréstimo menos os custos cobrados pelo banco.

Atente-se também para a pergunta que foi feita. Estamos em busca da taxa efetiva no período do empréstimo. Logo, a taxa efetiva vai ser no período de 3 meses. Se a banca, porventura, perguntar a taxa efetiva mensal, teríamos que utilizar a fórmula $M = C_{ef} \times \left(1 + i_{ef}\right)^3$. Todavia, a grande maioria das questões cobra o **custo efetivo em todo o período da operação**.

Vamos continuar com as contas.

$$133.100 = 97.500 \times \left(1 + i_{ef}\right)$$

$$\left(1 + i_{ef}\right) = \frac{133.100}{97.500}$$

$$1 + i_{ef} = 1{,}365$$

$$i_{ef} = 1{,}365 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{ef} = 0{,}365 \ \ ou \ \ 36{,}5\%}$$

Ou seja, a taxa efetiva (custo efetivo) da obtenção deste empréstimo foi de 36,5% no período da operação.

TOME NOTA!

O **custo efetivo** (taxa efetiva) do período é aquele que incide sobre o Capital efetivamente obtido e produz o Montante final que é pago.

Vejamos como esse assunto é cobrado nas provas.

HORA DE PRATICAR!

(Inédita - 2022) Um ex-concurseiro, após passar no seu concurso para Auditor Fiscal, obtém um financiamento de R$ 100.000,00 no dia 01 de fevereiro. Nesta mesma data, na hora da obtenção do empréstimo, o banco cobrou R$ 1.500,00 de taxa de abertura de crédito e R$ 750,00 corresponde a outras despesas bancárias.

O financiamento vence integralmente (principal e juros) em 30 de junho. A taxa de juros composta cobrada pelo banco foi de 4% ao mês. Sendo assim, o custo efetivo do período da operação é, aproximadamente, igual a:

Adote $1{,}04^5 = 1{,}217$

a) 20,00
b) 22,50
c) 23,50
d) 24,50
e) 25,00

Comentários:

Primeiramente, vamos calcular o valor do **Capital efetivamente recebido** pelo tomador do financiamento na data da obtenção do empréstimo.

O ex-concurseiro obteve um empréstimo de R$ 100.000,00, no dia 01/02, e pagou à instituição financeira, na mesma data, R$ 1.500,00 de taxa de abertura de crédito e R$ 750 referentes a outras taxas. Logo, o Capital efetivamente recebido foi igual a:

$$C_{ef} = 100.000 - 1.500 - 750 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{C_{ef} = 97.750}}$$

Observe que este é o valor "líquido" recebido, isto é, é o Capital Efetivamente recebido.

Posteriormente, calculamos o Montante pago. O financiamento venceu integralmente (principal e juros) em 30/06, ou seja, 5 meses após a obtenção deste (fevereiro, março, abril, maio e junho).

Sabendo que a taxa de juros composta cobrada pelo banco foi de 4% ao mês, o Montante final pago será de:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 100.000 \times (1 + 0{,}04)^5$$

$$M = 100.000 \times 1{,}04^5$$

$$M = 100.000 \times 1{,}217 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 121.700}}$$

E, por fim, calculamos a taxa efetiva de juros (custo efetivo) no período da operação.

O **custo efetivo** (taxa efetiva) do período é aquele que incide sobre o Capital efetivamente obtido e produz o Montante final que é pago.

$$M = C_{ef} \times (1 + i_{ef})$$

$$121.700 = 97.750 \times (1 + i_{ef})$$

$$(1 + i_{ef}) = \frac{121.700}{97.750}$$

$$1 + i_{ef} = 1{,}245$$

$$i_{ef} = 1{,}245 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{ef} = 0,245 \text{ ou } 24,5\% \text{ no período}}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(Inédita - 2022) Um ex-concurseiro, após passar no seu concurso para Auditor Fiscal, obtém um financiamento de R$ 100.000,00 a ser pago em dois anos. A taxa de juros compostos é de 10% ao ano capitalizado semestralmente.

No momento da obtenção do financiamento é cobrado uma taxa de crédito de 5% sobre o total (principal mais juros). Logo, o valor liberado é menor que o valor solicitado.

Sendo assim, o custo real efetivo desse financiamento é igual a:

Adote $1{,}05^4 = 1{,}215$

a) 27,48%
b) 28,09%
c) 29,06%
d) 29,36%
e) 30,57%

Comentários:

Perceba que, nessa questão, para calcularmos o valor do Capital efetivamente recebido pela empresa, teremos que, primeiro, calcular o Montante, uma vez que na hora da obtenção do empréstimo há um pagamento de 5% sobre o total (principal mais juros) a título de taxa.

Comece a observar que cada questão de "custo efetivo" tem sua *historinha* e suas peculiaridades.

Então, vamos calcular o Montante pago pelo ex concurseiro ao final dos 2 anos.

Primeiro passo é converter a taxa nominal em taxa efetiva.

$$i = 10\%\ ao\ ano\ capitalizados\ semestralmente$$

$$i = 5\%\ ao\ semestre\ capitalizados\ semestralmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i = 5\%\ ao\ semestre}}$$

Trabalhamos exaustivamente essa conversão na última aula. Se você não entendeu essa passagem, é uma boa hora para voltar na aula de Juros Compostos e **revisar** o assunto.

Continuando com o cálculo do Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 100.000 \times (1 + 0{,}05)^4$$

Atente-se para a conversão da unidade do tempo de aplicação (ano) para a unidade da taxa de juros (semestre). Em 2 anos há 4 semestres.

$$M = 100.000 \times (1{,}05)^4$$

$$M = 100.000 \times 1{,}215 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 121.500}}$$

Neste ponto, iremos calcular o valor do Capital efetivamente recebido pelo tomador do financiamento. No momento da obtenção do financiamento, é cobrado uma taxa de crédito de 5% sobre o total (principal mais juros).

Logo, o Capital Efetivamente recebido é igual a:

$$C_{ef} = 100.000 - \frac{5}{100} \times 121.500$$

$$C_{ef} = 100.000 - 6.075 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{C_{ef} = 93.925}}$$

E, por fim, calculamos a taxa efetiva de juros (custo efetivo) no período da operação.

$$M = C_{ef} \times \left(1 + i_{ef}\right)$$

$$121.500 = 93.925 \times \left(1 + i_{ef}\right)$$

$$\left(1 + i_{ef}\right) = \frac{121.500}{93.925}$$

$$1 + i_{ef} = 1{,}2936$$

$$i_{ef} = 1{,}2936 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{ef} = 0{,}2936\ \ ou\ \ 29{,}36\%}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(ALESE – 2018) Para a obtenção de um empréstimo de R$ 100.000,00 a Cia. Flores Belas pagou à instituição financeira, na data da liberação dos recursos, R$ 1.500,00 de taxa de abertura de crédito e R$ 268,52 referentes a outras taxas. O prazo do empréstimo foi 2 meses e o principal e os juros foram pagos em uma única parcela na data do vencimento. Sabendo que a taxa de juros compostos cobrada pelo banco foi de 3% ao mês, a taxa efetiva de juros (custo efetivo) no período da operação foi de

a) 3,00%
b) 6,00%
c) 6,09%
d) 8,00%
e) 7,86%

Comentários:

Primeiramente, vamos calcular o valor do Capital efetivamente recebido pela Cia. Flores Belas.

$$C_{ef} = 100.000 - 1.500 - 268{,}52 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{C_{ef} = 98.231{,}48}}$$

Posteriormente, calculamos o Montante pago pela companhia.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 100.000 \times (1 + 0{,}03)^2$$

$$M = 100.000 \times (1{,}03)^2$$

$$M = 100.000 \times 1{,}0609 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 106.090}}$$

E, por fim, calculamos a taxa efetiva de juros (custo efetivo) no período da operação.

$$M = C_{ef} \times \left(1 + i_{ef}\right)$$

$$106.090 = 98.231{,}48 \times \left(1 + i_{ef}\right)$$

$$\left(1 + i_{ef}\right) = \frac{106.090}{98.231{,}48}$$

$$1 + i_{ef} = 1{,}08$$

$$i_{ef} = 1{,}08 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{ef} = 0{,}08 \ ou \ 8\%}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(SEGEP MA – 2018) Uma empresa obteve um empréstimo no valor de R$ 100.000,00 para ser liquidado em um único pagamento no final de 4 meses. A taxa de juros simples contratada foi 3% ao mês e a instituição financeira cobra, adicionalmente, na data do pagamento do empréstimo, uma tarifa cujo valor

corresponde a 1% do valor que deve ser pago para liquidação do empréstimo. A taxa de custo efetivo incidente no empréstimo foi, em %, no período do prazo do empréstimo,

a) 12,55
b) 13,00
c) 13,12
d) 12,00
e) 13,68

Comentários:

Observe que nessa questão, na hora da obtenção do empréstimo, não houve qualquer custo cobrado pelo banco.

Atenção ao comando de cada questão. **As bancas não irão repetir sempre o mesmo padrão**. O raciocínio para o cálculo do custo efetivo será o mesmo, mas a cobrança não. Então, vamos sempre raciocinar antes de aplicar as fórmulas.

Sendo assim, o Capital efetivamente recebido será igual a R$ 100.000,00.

Vamos, agora, calcular o valor do Montante pago pela empresa pela obtenção desse empréstimo à taxa de juros simples de 3% ao mês pelo período de 4 meses.

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$M = 100.000 \times (1 + 0{,}03 \times 4)$$

$$M = 100.000 \times (1 + 0{,}12)$$

$$M = 100.000 \times 1{,}12 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 112.000}}$$

Todavia, a instituição financeira cobra, adicionalmente, na data do pagamento do empréstimo, uma tarifa cujo valor corresponde a 1% do valor que deve ser pago para liquidação do empréstimo.

Sendo assim, ao final dos 4 meses, a empresa irá pagar um Montante final igual a:

$$M_f = 112.000 + \frac{1}{100} \times 112.000$$

$$M_f = 112.000 + 1.120 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_f = 113.120}}$$

Por fim, calculamos o custo efetivo no período do prazo do empréstimo.

$$M_f = C_{ef} \times \left(1 + i_{ef}\right)$$

$$113.120 = 100.000 \times \left(1 + i_{ef}\right)$$

$$(1+i_{ef})\frac{113.120}{100.000}$$

$$1+i_{ef}=1{,}1312$$

$$i_{ef}=1{,}1312-1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{ef}=0,1312 \ \ ou \ \ 13,12\%}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(TST – 2017) Uma empresa obteve um empréstimo no valor de R$ 100.000,00 para ser liquidado em uma única parcela no final do prazo de 2 meses. A taxa de juros compostos negociada foi 3% ao mês e a empresa deve pagar, adicionalmente, na data da obtenção do empréstimo, uma taxa de cadastro no valor de R$ 1.000,00. Na data do vencimento do empréstimo a empresa deve pagar, junto com o valor que pagará à instituição financeira, um imposto no valor de R$ 530,00. O custo efetivo total para a empresa no prazo do empréstimo, foi

a) 7,70%
b) 6,09%
c) 7,62%
d) 6,00%
e) 7,16%

Comentários:

Primeiramente, vamos calcular o valor do Capital efetivamente obtido pela empresa.

$$C_{ef}=100.000-1.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{C_{ef}=99.000}}$$

Posteriormente, calculamos o Montante pago pela companhia.

$$M=C\times(1+i)^t$$

$$M=100.000\times(1+0{,}03)^2$$

$$M=100.000\times(1{,}03)^2$$

$$M=100.000\times 1{,}0609 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M=106.090}}$$

Na data do vencimento do empréstimo a empresa deve pagar, junto com o valor que pagará à instituição financeira, um imposto no valor de R$ 530,00. Logo, o Montante final a ser pago será igual a:

$$M_f=106.090+530 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_f=106.620}}$$

Por fim, calculamos o custo efetivo no período do prazo do empréstimo.

$$M_f = C_{ef} \times (1 + i_{ef})$$

$$106.620 = 99.000 \times (1 + i_{ef})$$

$$(1 + i_{ef}) = \frac{106.620}{99.000}$$

$$1 + i_{ef} \cong 1{,}077$$

$$i_{ef} \cong 1{,}077 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{ef} \cong 0{,}077 \ \ ou \ \ 7{,}7\%}$$

Gabarito: Alternativa **A**

Com as questões de concursos acima, você deve ter percebido que **cada questão tem suas peculiaridades**. As questões não serão idênticas. Porém, a sistemática de cálculo sim.

O **custo efetivo** (taxa efetiva) do período é aquele que incide sobre o Capital efetivamente obtido e produz o Montante final que é pago.

Então, raciocine sempre no sentido de buscar o que efetivamente foi recebido na hora da obtenção do empréstimo e o que realmente foi pago de Montante ao final. Essas 2 informações serão os "inputs" para encontrar o custo efetivo da operação.

CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA

Este é um tópico isolado da matéria e o índice de cobrança não é tão elevado. Porém, o custo benefício deste tema é enorme, uma vez que, há apenas 1 fórmula para se decorar e a grande maioria dos candidatos não terão estudado esse assunto. Mas você, aluno do Estratégia, terá visto toda a matéria e estará preparado para qualquer tipo de questão.

Na **capitalização contínua**, o **Montante** é calculado pela seguinte fórmula:

$$\boxed{\boldsymbol{M = C \times e^{i \times t}}}$$

Onde,

$M = Montante$

$C = Capital$

$i = Taxa\ de\ Juros$

$t = tempo$

$e = número\ de\ Euler = 2{,}71828\ ...$

As questões de provas irão fornecer o valor da potência ou o valor do Logaritmo Neperiano (logaritmo na base e).

Quando o enunciado fornecer o valor do Logaritmo, teremos que lembrar da definição de logartimo das aulas de matemática básica em que:

Dados dois números reais positivos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{x}$, com $\boldsymbol{a} > 0$ e $\boldsymbol{a} \neq 1$, o **logaritmo** de $\boldsymbol{x}$ na base $\boldsymbol{a}$ é igual ao expoente y ao qual a base $\boldsymbol{a}$ deve ser elevada para se chegar a x como resultado.

Se $\boldsymbol{a} > 0$ e $\boldsymbol{a} \neq 1$ e $\boldsymbol{x} > 0$, temos que:

$$\log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x} = y \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}^{y} = \boldsymbol{x} \quad , \quad onde:$$

- $\boldsymbol{a}$ → base do logaritmo
- $\boldsymbol{x}$ → logaritmando
- y → logaritmo

Isto é, o **logaritmo** de $\boldsymbol{x}$ na base $\boldsymbol{a}$ <u>é a solução de y</u> na equação $\boldsymbol{a}^{y} = \boldsymbol{x}$.

Vejamos como a Capitalização Contínua é cobrada em provas.

HORA DE PRATICAR!

(Sefaz PI – 2015) Um capital de R$ 15.000,00 é aplicado, durante 2 anos, à taxa de 5% ao semestre com capitalização contínua. Dos valores abaixo, o mais próximo do valor dos juros desta aplicação é

Dados: $\mathbf{\ln(1,221403) = 0,2}$

a) R$ 3.076,00
b) R$ 3.155,00
c) R$ 3.321,00
d) R$ 3.487,00
e) R$ 3.653,00

Comentários:

Vamos aplicar diretamente a fórmula do Montante na capitalização contínua.

$$M = C \times e^{i \times t}$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 15.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 5\%\ ao\ semestre = 0{,}05$

$t = tempo = 2\ anos = 4\ semetres$

Atente-se para a **conversão da unidade** do tempo de aplicação (ano) para a unidade da taxa de Juros (semestre), pois **necessariamente** devem coincidir. Em 1 ano há 2 semestres. Logo, em 2 anos haverá 4 semestres.

Vamos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times e^{i \times t}$$

$$M = 15.000 \times e^{0{,}05 \times 4}$$

$$M = 15.000 \times e^{0{,}2}$$

Para resolver essa potência, iremos utilizar os dados fornecidos no enunciado e a definição de logaritmo.

Observe que:

$$\ln 1{,}221403 = 0{,}2$$

Pela definição de logaritmo temos que:

$$\log_{a} x = y \quad \leftrightarrow \quad a^{y} = x$$

Iremos aplicar essa definição para a base "a" igual ao número de Euler (e) e para $x = 1{,}221403$ e $y = 0{,}2$. Sendo assim,

$$\ln 1{,}221403 = 0{,}2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{e^{0,2} = 1,221403}}$$

Retomando as contas para cálculo do Montante teremos:

$$M = 15.000 \times e^{0,2}$$

$$M = 15.000 \times 1{,}221403 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M \cong 18.321,00}}$$

De posse do Montante e do Capital, calculamos os Juros.

$$J = M - C$$

$$J = 18.321{,}00 - 15.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J = 3.321}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(TCE PR - 2011) Um capital no valor de R$ 25.000,00 foi aplicado, durante um ano, à taxa semestral de 6% com capitalização contínua. Utilizando a informação de que 6% é igual ao logaritmo neperiano de 1,062, tem-se que o valor do montante, no final do período, foi igual a

a) R$ 28.090,00
b) R$ 28.143,00
c) R$ 28.196,10
d) R$ 28.249,20
e) R$ 28.302,30

Comentários:

Vamos aplicar diretamente a fórmula do Montante na capitalização contínua.

$$M = C \times e^{i \times t}$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 25.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 6\%\ ao\ semestre = 0{,}06$

$t = tempo = 1\ ano = 2\ semetres$

Atente-se para a **conversão da unidade** do tempo de aplicação (ano) para a unidade da taxa de Juros (semestre), pois **necessariamente** devem coincidir. Em 1 ano há 2 semestres.

Substituindo os valores:

$$M = C \times e^{i \times t}$$

$$M = 25.000 \times e^{0{,}06 \times 2}$$

Para resolver essa potência usaremos a informação do enunciado que nos diz que 6% (0,06) é igual ao logaritmo neperiano de 1,062.

$$\ln 1{,}062 = 0{,}06$$

Pela definição de logaritmo temos que:

$$\log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x} = y \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}^{y} = \boldsymbol{x}$$

Iremos aplicar essa definição para a base "a" igual ao número de Euler (e) e para $x = 1{,}062$ e $y = 0{,}06$. Sendo assim,

$$\ln 1{,}062 = 0{,}06 \quad \rightarrow \quad e^{0{,}06} = 1{,}062$$

Vamos retomar as contas e calcular o Montante.

$$M = 25.000 \times e^{0{,}06 \times 2}$$

$$M = 25.000 \times (e^{0{,}06})^2$$

$$M = 25.000 \times (1{,}062)^2$$

$$M = 25.000 \times 1{,}062 \times 1{,}062 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 28.196{,}10}$$

Gabarito: Alternativa **C**

Chegamos ao final de mais uma teoria.

Iremos, agora, resolver uma bateria de questões de concursos que sintetizam todo o conteúdo estudado.

RESUMO DA AULA

Taxa aparente, Taxa real e Taxa de inflação

Taxa aparente: taxa de juros total.
Não são descontados os efeitos inflacionários.

$$(1+i_a) = (1+i_r) \times (1+i_i) \quad ou \quad \frac{M}{C} = (1+i_r) \times (1+i_i)$$

Taxa real: resultado "de fato" de uma operação.
São descontados os efeitos inflacionários.

Obs.: a *Taxa real é calculada através dessa equação* e NÃO POR SUBTRAÇÃO.

Podemos expandir essa equação para um **período maior que uma unidade** e teremos:

$$\boxed{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i_a}) = (\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{r1}}) \times (\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{r2}}) \times \ldots (\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{rn}}) \times (\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{i1}}) \times (\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{i2}}) \times \ldots (\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{in}})}$$

Ou

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{C}} = (\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{r1}}) \times (\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{r2}}) \times \ldots (\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{rn}}) \times (\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{i1}}) \times (\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{i2}}) \times \ldots (\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{in}})}$$

Fique **SEMPRE ATENTO aos períodos** mencionados pela banca no enunciado.

Conceitos Econômicos

- Em uma **economia inflacionária**, isto é, inflação positiva (> 0), a Taxa real de Juros é sempre **MENOR** que a Taxa aparente.

- Em uma **economia deflacionária**, isto é, inflação negativa (< 0), a Taxa real de Juros é sempre **MAIOR** que a Taxa aparente.

Esquematizando:

Economia

- Inflacionária : $\boxed{i_r < i_a}$
- Deflacionária : $\boxed{i_r > i_a}$

Inflação Acumulada

Sejam, i_{i1} , i_{i2} , i_{i3}, ... , i_{in} as taxas de inflação de períodos sucessivos, define-se **Taxa acumulada de inflação** i_{iac} nesses períodos por:

$$\boxed{(\mathbf{1} + \boldsymbol{i_{iac}}) = (\mathbf{1} + \boldsymbol{i_{i1}}) \times (\mathbf{1} + \boldsymbol{i_{i2}}) \times (\mathbf{1} + \boldsymbol{i_{i3}}) \times \ldots \times (\mathbf{1} + \boldsymbol{i_{in}})}$$

Custo Efetivo

O **custo efetivo** (taxa efetiva) do período é aquele que incide sobre o Capital efetivamente obtido e produz o Montante final que é pago.

Então, raciocine sempre no sentido de buscar o que efetivamente foi recebido na hora da obtenção do empréstimo e o que realmente foi pago de Montante ao final. Essas 2 informações serão os "inputs" para encontrar o custo efetivo da operação.

Capitalização Contínua

Na **capitalização contínua**, o **Montante** é calculado pela seguinte fórmula:

$$\boxed{\boldsymbol{M = C \times e^{i \times t}}}$$

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Taxa Aparente, Real e de Inflação

1. **(CESGRANRIO / BB - 2010) Um investimento obteve variação nominal de 15,5% ao ano. Nesse mesmo período, a taxa de inflação foi 5%. A taxa de juros real anual para esse investimento foi**

a) 0,5%
b) 5,0%
c) 5,5%
d) 10,0%
e) 10,5%

Comentários:

A **Taxa Real**, que é taxa onde são descontados os efeitos inflacionários, é calculada através da equação de relação entre as taxas e **NÃO por subtração**.

Vamos utilizar a equação de relação entre essas taxas:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente\ (variação\ nominal) = 15{,}5\%\ ao\ ano = 0{,}155$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 5\%\ no\ ano = 0{,}05$

Iremos substituir os valores e calcular a taxa real.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$(1 + 0{,}155) = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}05)$$

$$1{,}155 = (1 + i_r) \times 1{,}05$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}155}{1{,}05}$$

$$1 + i_r = 1{,}1$$

$$i_r = 1{,}1 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = 0{,}1\ ou\ 10\%\ ao\ ano}$$

Gabarito: Alternativa **D**

2. (CESGRANRIO / BB - 2015) Em um período no qual a inflação acumulada foi de 100%, R$ 10.000,00 ficaram guardados em um cofre, ou seja, não sofreram qualquer correção.

Nessas condições, houve uma desvalorização dos R$ 10.000,00 de

a) 1/4
b) 1/2
c) 2/3
d) 3/4
e) 1

Comentários:

Observe que os R$ 10.000,00 ficaram guardados em um cofre, isto é, o valor permaneceu constante. Vamos utilizar a equação "adaptada" de relação entre as taxas e calcular

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$M = Montante = 10.000$

$C = Capital = 10.000$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 100\% = 1$

Perceba que, conforme comentamos, o Capital e o Montante são iguais, uma vez que não houve alteração do valor guardado.

Vamos substituir os valores e calcular a taxa real (o quanto realmente desvalorizou).

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$\frac{10.000}{10.000} = (1 + i_r) \times (1 + 1)$$

$$1 = (1 + i_r) \times 2$$

$$(1 + i_r) = \frac{1}{2}$$

$$1 + i_r = 0{,}5$$

$$i_r = 0{,}5 - 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_r = -0{,}5}}$$

As respostas estão em termos fracionários. Logo:

$$i_r = -0{,}5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = -\frac{1}{2}}$$

Ou seja, houve uma desvalorização dos R$ 10.000,00 de 1/2.

Gabarito: Alternativa **B**

3. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2018) Uma construtora anuncia a venda de um imóvel à taxa nominal de juros de 12% a.a. com correção mensal do saldo e das prestações.

Qual é a taxa real anual, aproximada, do financiamento, considerando-se uma inflação anual de 10%?

Dados: $1{,}01^{12} = 1{,}127$

a) 2,44%
b) 2,00%
c) 1,98%
d) 1,82%
e) -2,38%

Comentários:

ACORDE!

Observe que a taxa fornecida pelo enunciado é a taxa nominal de juros. Lembram-se da aula passada?

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

$$i_{Nominal} = 12\%\ ao\ ano\ capitalizada\ mensalmente$$

Tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

Em 1 ano há 12 meses. Então, a Taxa Efetiva mensal será um doze avos da taxa anual.

$$i_{Efetiva\ Mensal} = \frac{12\%}{12} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\ Mensal} = 1\%\ a.m.}}$$

Agora, de posse taxa efetiva mensal, vamos calcular a taxa efetiva equivalente anual. Ou seja, a taxa mensal de 1% capitalizada por 12 meses (1 ano) será equivalente a qual taxa anual?

$$(1 + i_{mensal})^{12} = (1 + i_{anual})$$

$$(1 + 0{,}01)^{12} = (1 + i_{anual})$$

$$1{,}01^{12} = (1 + i_{anual})$$

O enunciado nos informa que $1{,}01^{12} = 1{,}127$.

$$1{,}127 = 1 + i_{anual}$$

$$i_{anual} = 1{,}127 - 1 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{anual} = 0{,}127\ ou\ 12{,}7\%}}$$

- ✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Vamos utilizar a equação de relação entre essas taxas:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente = 12{,}7\%\ ao\ ano = 0{,}127$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$$i_i = Taxa\ de\ inflação = 10\%\ no\ ano = 0{,}1$$

Iremos substituir os valores e calcular a taxa real.

$$(1 + 0{,}127) = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}1)$$

$$1{,}127 = (1 + i_r) \times 1{,}1$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}127}{1{,}1}$$

$$1 + i_r = 1{,}0244$$

$$i_r = 1{,}0244 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = 0{,}0244\ ou\ 2{,}44\%}$$

Gabarito: Alternativa **A**

4. (CESGRANRIO / BNDES - 2013) Uma pessoa que vive de rendimentos do mercado financeiro aplicou todos os seus recursos, o que lhe rendeu um retorno nominal de 20% no ano.

Considerando-se que a inflação da cesta básica foi de 6% nesse mesmo ano, quantas cestas básicas a mais, em termos percentuais, ela poderá comprar após o retorno da aplicação?

a) 12,8%
b) 13,2%
c) 14,0%
d) 14,8%
e) 15,0%

Comentários:

O enunciado é meio confuso. A banca tenta outra forma de te perguntar "qual a taxa real?". Para não ficar repetitivo este estilo de cobrança, o Cesgranrio inventou este enunciado.

Vamos então, utilizar a equação de relação entre as taxas e determinar o quanto realmente a mais de cestas básicas percentualmente a pessoa poderá comprar.

A **Taxa Real**, que é taxa onde são descontados os efeitos inflacionários, é calculada através da equação de relação entre as taxas e **NÃO por subtração**. Se você apenas subtraísse uma taxa da outra, encontraria uma alternativa que não é o gabarito.

$$(1+i_a)=(1+i_r)\times(1+i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente = 20\%\ ao\ ano = 0{,}2$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 6\%\ no\ ano = 0{,}06$

Substituindo os valores e calculando o ganho real:

$$(1+i_a)=(1+i_r)\times(1+i_i)$$

$$(1+0{,}2)=(1+i_r)\times(1+0{,}06)$$

$$1{,}2=(1+i_r)\times 1{,}06$$

$$(1+i_r)=\frac{1{,}2}{1{,}06}$$

$$1+i_r=1{,}132$$

$$i_r=1{,}132-1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r=0{,}132\ ou\ 13{,}2\%\ no\ ano}$$

Gabarito: Alternativa **B**

5. **(CESGRANRIO / BR - 2013) Um capital foi aplicado por dois anos, pelo regime de juros compostos, à taxa nominal aparente de 12% ao ano capitalizados mensalmente e, nesse período, rendeu juros de R$ 2.697,35.**

Considerando-se que a taxa de inflação foi de 5,3% ao ano, a taxa de rentabilidade anual real dessa aplicação foi, aproximadamente, de

Dado
$(1{,}01)^2 = 1{,}0201$
$(1{,}01)^{12} = 1{,}1268$
$(1{,}01)^{24} = 1{,}2697$

a) 6,7%
b) 7,0%
c) 9,8%
d) 11,5%
e) 17,3%

Comentários:

Observe que a taxa fornecida pelo enunciado é a taxa nominal de juros. Lembram-se da aula passada?

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

$$i_{Nominal} = 12\% \ ao \ ano \ capitalizada \ mensalmente$$

Tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

Em 1 ano há 12 meses. Então, a Taxa Efetiva mensal será um doze avos da taxa anual.

$$i_{Efetiva\ Mensal} = \frac{12\%}{12} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\ Mensal} = 1\% \ a.m.}}$$

Agora, de posse taxa efetiva mensal, vamos calcular a taxa efetiva equivalente anual. Ou seja, a taxa mensal de 1% capitalizada por 12 meses (1 ano) será equivalente a qual taxa anual?

$$(1 + i_{mensal})^{12} = (1 + i_{anual})$$

$$(1 + 0{,}01)^{12} = (1 + i_{anual})$$

$$1{,}01^{12} = (1 + i_{anual})$$

O enunciado nos informa que $1{,}01^{12} = 1{,}1268$.

$$1{,}1268 = 1 + i_{anual}$$

$$i_{anual} = 1{,}1268 - 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_{anual} = 0{,}1268 \ ou \ 12{,}68\%}}$$

✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Vamos utilizar a equação de relação entre essas taxas:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente = 12{,}68\%\ ao\ ano = 0{,}1268$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 5{,}3\%\ no\ ano = 0{,}053$

Iremos substituir os valores e calcular a taxa real.

$$(1 + 0{,}1268\ ) = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}053)$$

$$1{,}1268 = (1 + i_r) \times 1{,}053$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}1268}{1{,}053}$$

$$1 + i_r = 1{,}07$$

$$i_r = 1{,}07 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = 0{,}07\ ou\ 7\%}$$

Obs: Os dados referentes aos Juros foram fornecidos pois esta questão tinha um enunciado em comum para duas questões.

Gabarito: Alternativa **B**

6. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2012) Aplicaram-se R$ 5.000,00 em um investimento que remunera, além da taxa de inflação, uma taxa real de juros de 6% ao ano, capitalizados mensalmente.**

Se, no primeiro mês, a inflação foi de 1%, o montante dessa aplicação, ao fim do primeiro mês, em reais, foi de

a) 5.075,25
b) 5.100,30
c) 5.302,50
d) 5.350,00
e) 5.353,00

Comentários:

ACORDE!

Observe que a taxa real fornecida pelo enunciado é uma taxa nominal real de juros. Lembram-se da aula passada?

Primeiro passo é converter a Taxa real nominal para a Taxa real efetiva.

$$i_{real\ nominal} = 6\%\ ao\ ano\ capitalizada\ mensalmente$$

Tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

Em 1 ano há 12 meses. Então, a Taxa real efetiva mensal será um doze avos da taxa anual.

$$i_{Efetiva\ real\ Mensal} = \frac{6\%}{12} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\ real\ Mensal} = 0,5\%\ a.m.}}$$

Vamos utilizar a relação "adaptada" entre as taxas para calcular o Montante.

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 5.000$

$i_r = Taxa\ real = 0{,}5\%\ ao\ mês = 0{,}005$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 1\%\ no\ mês = 0{,}01$

Substituindo os valores e calculando o Montante teremos:

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$\frac{M}{5.000} = (1 + 0{,}005) \times (1 + 0{,}01)$$

$$\frac{M}{5.000} = 1{,}005 \times 1{,}01$$

$$M = 5.000 \times 1{,}005 \times 1{,}01 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 5.075,25}$$

Gabarito: Alternativa **A**

7. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2012) A política de aumento salarial de uma empresa fez com que, em dez anos, os salários dos seus funcionários aumentassem nominalmente 274%.**

Se, nesse mesmo período, a inflação foi de 87%, o ganho real foi de

a) 87%
b) 100%
c) 187%
d) 200%
e) 215%

Comentários:

A **Taxa Real**, que é taxa onde são descontados os efeitos inflacionários, é calculada através da equação de relação entre as taxas e **NÃO por subtração**. Se você apenas subtraísse uma taxa da outra, encontraria uma alternativa que não é o gabarito.

Vamos utilizar a equação de relação entre essas taxas para determinar o ganho real:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente = 274\% = 2{,}74$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 87\%$

Substituindo os valores e calculando o ganho real:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$(1 + 2{,}74) = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}87)$$

$$3{,}74 = (1 + i_r) \times 1{,}87$$

$$(1 + i_r) = \frac{3{,}74}{1{,}87}$$

$$1 + i_r = 2$$

$$i_r = 2 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = 1 \; ou \; 100\%}$$

Gabarito: Alternativa **B**

8. (CESGRANRIO / FINEP - 2011) Um investimento rendeu 10% em um ano em que a inflação acumulada foi de 5%. A rentabilidade real desse investimento, ao ano, foi de, aproximadamente,

a) 4,2%
b) 4,8%
c) 5,0%
d) 5,6%
e) 15,5%

Comentários:

Depois de todos os exercícios que fizemos, a única alternativa que você **JAMAIS** poderia marcar é a letra C, certo?

A **Taxa Real**, que é taxa onde são descontados os efeitos inflacionários, é calculada através da equação de relação entre as taxas e **NÃO por subtração**. Se você apenas subtraísse uma taxa da outra, encontraria Letra C que não é o gabarito.

Vamos utilizar a equação de relação entre essas taxas para determinar a rentabilidade real:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente = 10\%\ ao\ ano = 0{,}1$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 5\%\ no\ ano = 0{,}05$

Substituindo os valores e calculando a rentabilidade real:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$(1 + 0{,}1) = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}05)$$

$$1{,}1 = (1 + i_r) \times 1{,}05$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}1}{1{,}05}$$

$$1 + i_r \cong 1{,}048$$

$$i_r \cong 1{,}048 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r \cong 0{,}048\ ou\ 4{,}8\%\ ao\ ano}$$

Gabarito: Alternativa **B**

9. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Uma aplicação financeira é realizada em período com inflação de 2,5%. Se a taxa real foi de 5,6%, a taxa aparente da aplicação no período foi de**

a) 3,02%
b) 3,10%
c) 8,10%
d) 8,24%
e) 8,32%

Comentários:

Vamos utilizar a equação de relação entre essas taxas para determinar a taxa aparente:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente = ?$

$i_r = Taxa\ real = 5{,}6\% = 0{,}056$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 2{,}5\% = 0{,}025$

Substituindo os valores e calculando a taxa aparente:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$(1 + i_a) = (1 + 0{,}056) \times (1 + 0{,}025)$$

$$(1 + i_a) = 1{,}056 \times 1{,}025$$

$$1 + i_a = 1{,}0824$$

$$i_a = 1{,}0824 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_a = 0{,}0824\ ou\ 8{,}24\%}$$

Gabarito: Alternativa **D**

10. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Os bancários tiveram um aumento nominal nos seus salários de 7,5%. Se o aumento real conquistado foi de 3,1%, a taxa de inflação do período é mais próxima de

a) 10,8%
b) 4,4%
c) 4,3%
d) 4,0%
e) 3,8%

Comentários:

Mais uma questão que vamos usar a fórmula de relação entre as taxas.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente\ (nominal) = 7{,}5\% = 0{,}075$

$i_r = Taxa\ real = 3{,}1\% = 0{,}031$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = ?$

Substituindo os valores e calculando a taxa de inflação:

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$(1 + 0{,}075) = (1 + 0{,}031) \times (1 + i_i)$$

$$1{,}075 = 1{,}031 \times (1 + i_i)$$

$$(1 + i_i) = \frac{1{,}075}{1{,}031}$$

$$1 + i_i \cong 1{,}0427$$

$$i_i \cong 1{,}0427 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_i \cong 0,0427 \ ou \ 4,27\%}$$

A alternativa mais próxima é a letra C.

Gabarito: Alternativa **C**

11. (CESGRANRIO / BR - 2010) Um capital foi aplicado, sob regime de juros compostos, durante dois meses, à taxa de juros de 20% ao mês. A taxa de inflação, durante esse mesmo período, foi de 8%. A verdadeira taxa de rendimento obtida nessa aplicação é de, aproximadamente,

a) 30%
b) 32%
c) 33%
d) 35%
e) 36%

Comentários:

Observe que a banca nos fornece a taxa de juros ao mês enquanto que a taxa de inflação é dada "no período". E o período que estamos tratando é o período de 2 meses.

Vamos então, primeiramente, calcular a taxa equivalente aparente bimestral.

$$(1 + i_{mensal})^2 = (1 + i_{bimestral})$$

$$(1 + 0{,}2)^2 = (1 + i_{bimestral})$$

$$1{,}44 = 1 + i_{bimestral}$$

$$i_{bimestral} = 1{,}44 - 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_{bimestral} = 0,44\ ou\ 44\%\ no\ bimestre}}$$

Agora, podemos usar a fórmula de relação entre as taxas.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente = 44\%\ ao\ bimestre = 0{,}44$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$i_i = Taxa\ de\ inflação =\ 8\%\ no\ bimestre = 0{,}08$

Substituindo os valores e calculando a taxa real no períoro (2 meses):

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$(1 + 0{,}44) = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}08)$$

$$1{,}44 = (1 + i_r) \times 1{,}08$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}44}{1{,}08}$$

$$1 + i_r = 1{,}33$$

$$i_r = 1{,}33 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = 0,33\ ou\ 33\%\ no\ período\ (bimestre)}$$

Gabarito: Alternativa **C**

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Inflação Acumulada

1. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2018 - Adaptada) O governo central publicou os números da inflação geral apurados a cada mês no primeiro trimestre do ano 20X8, conforme a Tabela I:

	Janeiro/20X8	Fevereiro/20X8	Março/20X8
Inflação geral	1,00%	0,90%	0,85%

Com base nos dados acima, verifica-se que o percentual da inflação acumulada, no primeiro trimestre, foi de

a) 2,75%
b) 1,0275%
c) 2,78%
d) 1,0278%
e) 3,00%

Comentários:

PEGADINHA

Perceba que se você somasse as inflações para calcular a inflação acumulada, encontraria a resposta letra A. E assim, erraria a questão.

A inflação acumulada **NÃO É OBTIDA somando as inflações** de cada período. Precisamos utilizar a equação que aprendemos na aula.

$$(1+i_{iac}) = (1+i_{i1}) \times (1+i_{i2}) \times (1+i_{i3}) \times \ldots \times (1+i_{in})$$

Como temos apenas três período ficamos com:

$$(1+i_{iac}) = (1+i_{i1}) \times (1+i_{i2}) \times (1+i_{i3})$$

Vamos subsituir os valores da inflação de cada período e calcular a inflação acumulada dos três primeiros meses de 2018.

$$(1+i_{iac}) = (1+i_{i1}) \times (1+i_{i2}) \times (1+i_{i3})$$

$$(1 + i_{iac}) = (1 + 0{,}01) \times (1 + 0{,}009) \times (1 + 0{,}0085)$$

$$(1 + i_{iac}) = 1{,}01 \times 1{,}009 \times 1{,}0085$$

$$1 + i_{iac} = 1{,}0278$$

$$i_{iac} = 1{,}0278 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{iac} = 0{,}0278 \text{ ou } 2{,}78\%}$$

Gabarito: Alternativa **C**

2. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Uma pessoa fez uma aplicação financeira em um banco, no valor de R$ 10.000,00, pelo prazo de três meses, pela qual receberá o equivalente à inflação do período mais juros de 1% ao mês.**

Se a inflação acumulada do período foi 3%, o montante a ser recebido no vencimento da aplicação, calculado de acordo com a metodologia de juros compostos, é

a) R$ 10.612,10
b) R$ 10.609,00
c) R$ 10.600,00
d) R$ 10.403,00
e) R$ 10.400,00

Comentários:

Primeiramente, vamos calcular o Montante da aplicação.

$$M = C \times (1 + i)^3$$

$$M = 10.000 \times (1 + 0{,}01)^3$$

$$M = 10.000 \times 1{,}01^3$$

$$M = 10.000 \times 1{,}0303 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 10.303}}$$

O enunciado nos afirma que o valor foi remunerado, não só pela taxa de 1% ao mês, mas também pela inflação de 3% no período.

Observe que a inflação é de 3% no período (3 meses) e não "ao mês".

Logo, o valor final do Montante será igual ao valor investido mais a remuneração da inflação de 3%.

$$M_{final} = 10.303 + \frac{3}{100} \times 10.303$$

$$M_{final} = 10.303 + 309{,}1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M_{final} = 10.612,10}$$

Gabarito: Alternativa **A**

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Taxa Aparente, Real e de Inflação

1. **(CESGRANRIO / BB - 2010) Um investimento obteve variação nominal de 15,5% ao ano. Nesse mesmo período, a taxa de inflação foi 5%. A taxa de juros real anual para esse investimento foi**

a) 0,5%
b) 5,0%
c) 5,5%
d) 10,0%
e) 10,5%

2. **(CESGRANRIO / BB - 2015) Em um período no qual a inflação acumulada foi de 100%, R$ 10.000,00 ficaram guardados em um cofre, ou seja, não sofreram qualquer correção.**

Nessas condições, houve uma desvalorização dos R$ 10.000,00 de

a) 1/4
b) 1/2
c) 2/3
d) 3/4
e) 1

3. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2018) Uma construtora anuncia a venda de um imóvel à taxa nominal de juros de 12% a.a. com correção mensal do saldo e das prestações.**

Qual é a taxa real anual, aproximada, do financiamento, considerando-se uma inflação anual de 10%?

Dados: $1{,}01^{12} = 1{,}127$

a) 2,44%
b) 2,00%
c) 1,98%
d) 1,82%
e) -2,38%

4. (CESGRANRIO / BNDES - 2013) Uma pessoa que vive de rendimentos do mercado financeiro aplicou todos os seus recursos, o que lhe rendeu um retorno nominal de 20% no ano.

Considerando-se que a inflação da cesta básica foi de 6% nesse mesmo ano, quantas cestas básicas a mais, em termos percentuais, ela poderá comprar após o retorno da aplicação?

a) 12,8%
b) 13,2%
c) 14,0%
d) 14,8%
e) 15,0%

5. (CESGRANRIO / BR - 2013) Um capital foi aplicado por dois anos, pelo regime de juros compostos, à taxa nominal aparente de 12% ao ano capitalizados mensalmente e, nesse período, rendeu juros de R$ 2.697,35.

Considerando-se que a taxa de inflação foi de 5,3% ao ano, a taxa de rentabilidade anual real dessa aplicação foi, aproximadamente, de

Dado
$(1,01)^2 = 1,0201$
$(1,01)^{12} = 1,1268$
$(1,01)^{24} = 1,2697$

a) 6,7%
b) 7,0%
c) 9,8%
d) 11,5%
e) 17,3%

6. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2012) Aplicaram-se R$ 5.000,00 em um investimento que remunera, além da taxa de inflação, uma taxa real de juros de 6% ao ano, capitalizados mensalmente.

Se, no primeiro mês, a inflação foi de 1%, o montante dessa aplicação, ao fim do primeiro mês, em reais, foi de

a) 5.075,25
b) 5.100,30

c) 5.302,50
d) 5.350,00
e) 5.353,00

7. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2012) A política de aumento salarial de uma empresa fez com que, em dez anos, os salários dos seus funcionários aumentassem nominalmente 274%.

Se, nesse mesmo período, a inflação foi de 87%, o ganho real foi de

a) 87%
b) 100%
c) 187%
d) 200%
e) 215%

8. (CESGRANRIO / FINEP - 2011) Um investimento rendeu 10% em um ano em que a inflação acumulada foi de 5%. A rentabilidade real desse investimento, ao ano, foi de, aproximadamente,

a) 4,2%
b) 4,8%
c) 5,0%
d) 5,6%
e) 15,5%

9. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Uma aplicação financeira é realizada em período com inflação de 2,5%. Se a taxa real foi de 5,6%, a taxa aparente da aplicação no período foi de

a) 3,02%
b) 3,10%
c) 8,10%
d) 8,24%
e) 8,32%

10. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Os bancários tiveram um aumento nominal nos seus salários de 7,5%. Se o aumento real conquistado foi de 3,1%, a taxa de inflação do período é mais próxima de

a) 10,8%
b) 4,4%
c) 4,3%
d) 4,0%
e) 3,8%

11. (CESGRANRIO / BR - 2010) Um capital foi aplicado, sob regime de juros compostos, durante dois meses, à taxa de juros de 20% ao mês. A taxa de inflação, durante esse mesmo período, foi de 8%. A verdadeira taxa de rendimento obtida nessa aplicação é de, aproximadamente,

a) 30%
b) 32%
c) 33%
d) 35%
e) 36%

GABARITO

1. D
2. B
3. A
4. B
5. B
6. A
7. B
8. B
9. D
10. C
11. C

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Inflação Acumulada

1. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2018 - Adaptada) O governo central publicou os números da inflação geral apurados a cada mês no primeiro trimestre do ano 20X8, conforme a Tabela I:**

	Janeiro/20X8	Fevereiro/20X8	Março/20X8
Inflação geral	1,00%	0,90%	0,85%

Com base nos dados acima, verifica-se que o percentual da inflação acumulada, no primeiro trimestre, foi de

a) 2,75%
b) 1,0275%
c) 2,78%
d) 1,0278%
e) 3,00%

2. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Uma pessoa fez uma aplicação financeira em um banco, no valor de R$ 10.000,00, pelo prazo de três meses, pela qual receberá o equivalente à inflação do período mais juros de 1% ao mês.**

Se a inflação acumulada do período foi 3%, o montante a ser recebido no vencimento da aplicação, calculado de acordo com a metodologia de juros compostos, é

a) R$ 10.612,10
b) R$ 10.609,00
c) R$ 10.600,00
d) R$ 10.403,00
e) R$ 10.400,00

GABARITO

1. C
2. A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.