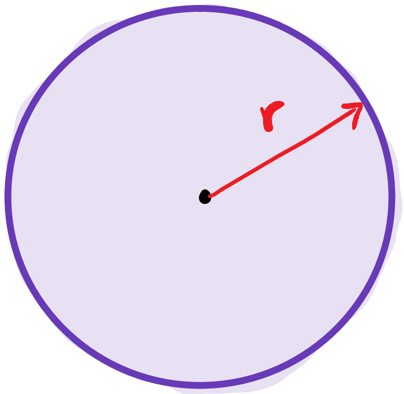
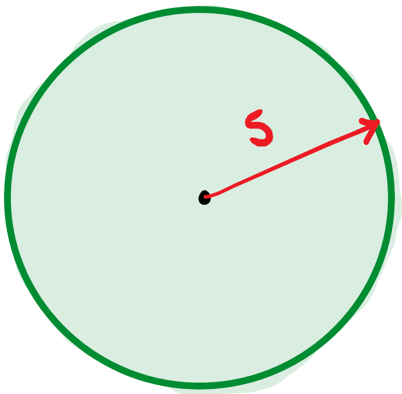
ÁREA DE CÍRCULO E SUAS PARTES

ÁREA DE CÍRCULO



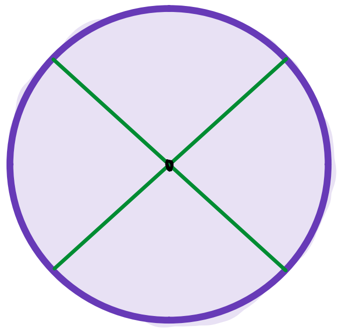
$$\boxed{A = \pi \cdot r^2}$$

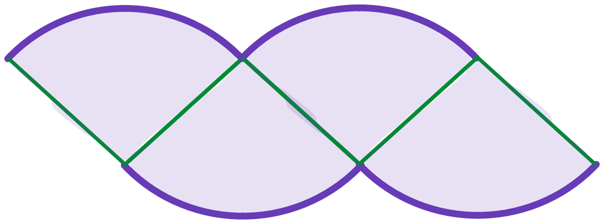


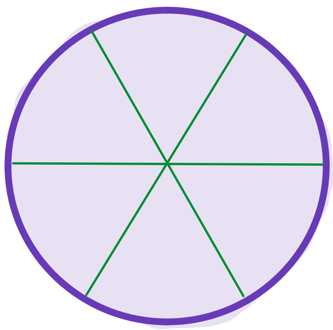
$$A = \pi \cdot 5^2$$

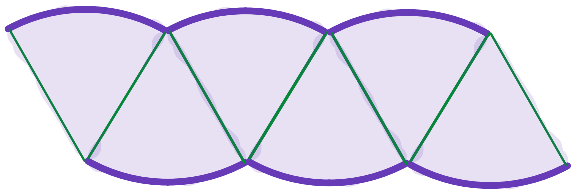
$$A = 25\pi$$

VISUALIZAÇÃO

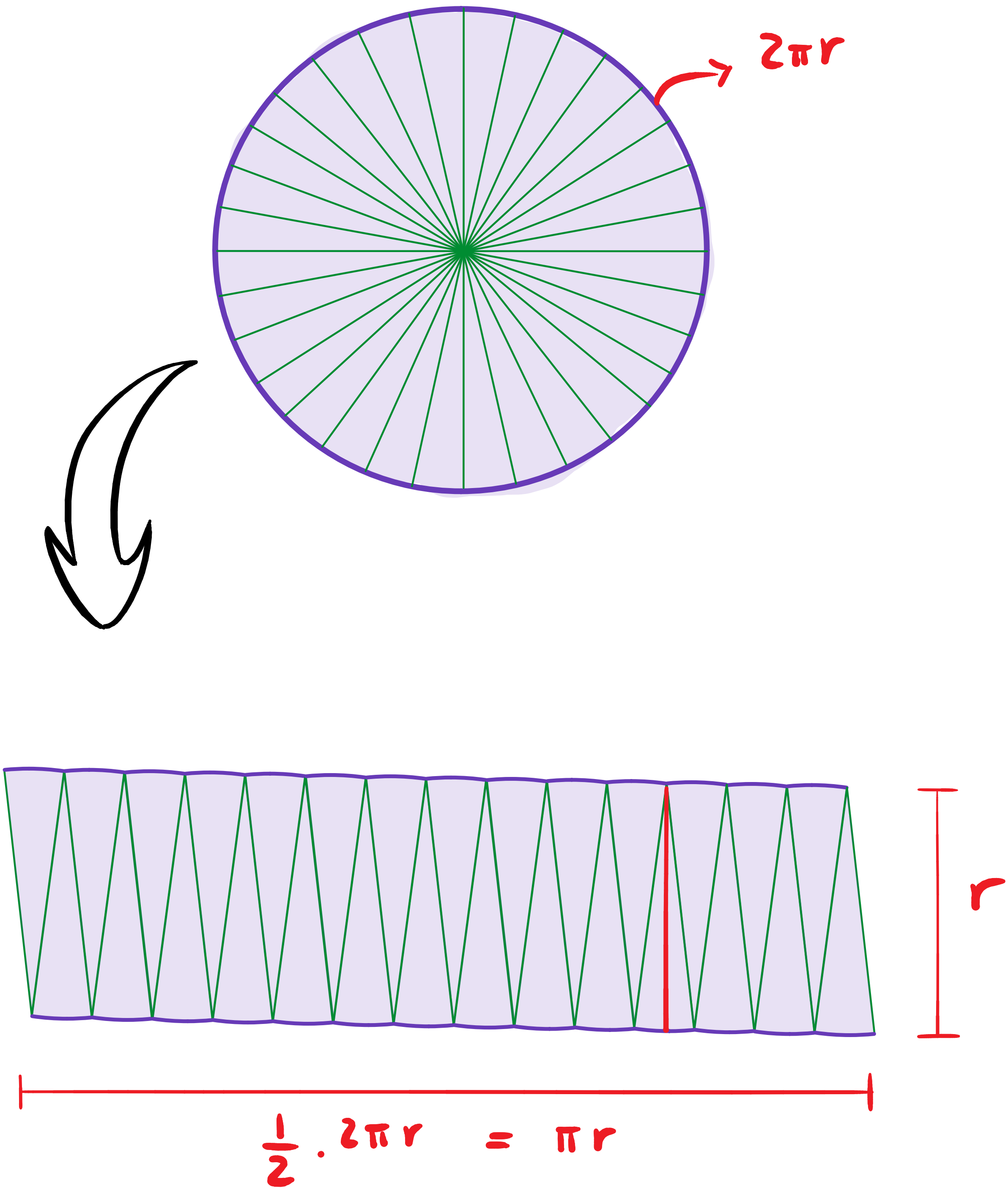








UNIVERSO NARRADO



$$A = \pi r \cdot r$$

$$\underline{A = \pi r^2}$$

UNIVERSO NARRADO

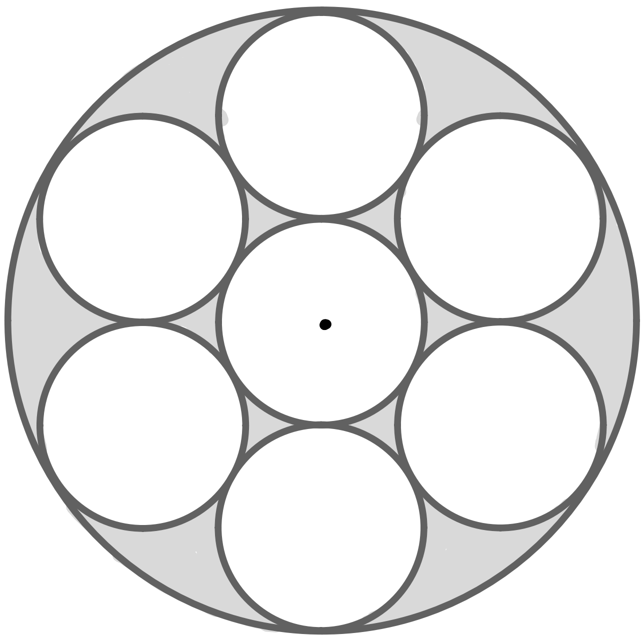
EXEMPLO

NA FIGURA, OS 7 CÍRCULOS MENORES POSSUEM RAIO UNITÁRIO.

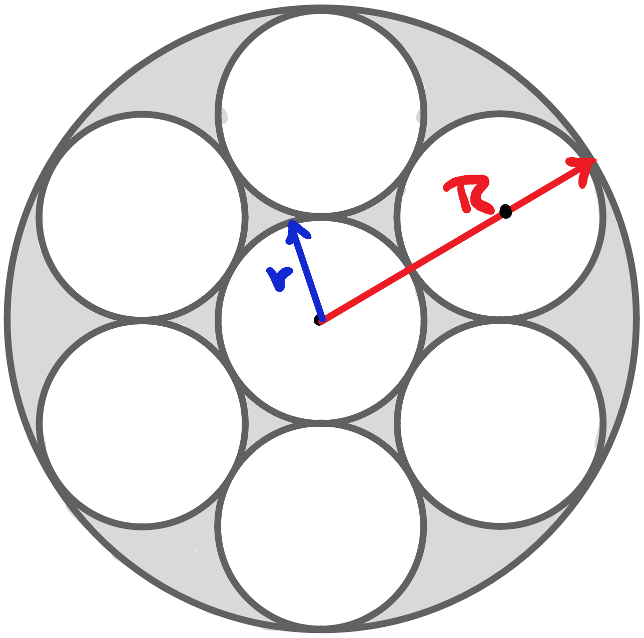
O CÍRCULO MENOR CENTRAL É CONCÊNTRICO COM O CÍRCULO GRANDE.

OS 6 OUTROS CÍRCULOS SÃO TANGENTES AO CÍRCULO MENOR CENTRAL E AO CÍRCULO MAIOR.

DETERMINE A ÁREA DA REGIÃO SOMBREADA.



UNIVERSO NARRADO



$r = 1$

$R = 3.r = 3$

$$A_S = A_G - 7.A_P$$

$$= \pi R^2 - 7.\pi r^2$$

$$= \pi.3^2 - 7.\pi.1^2$$

$$= 9\pi - 7\pi$$

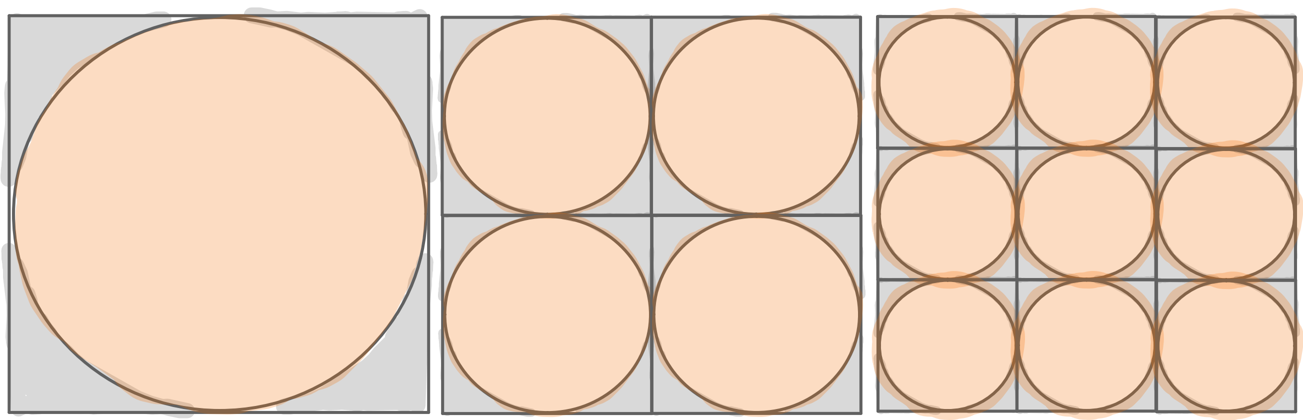
$$\underline{A_S = 2\pi}$$

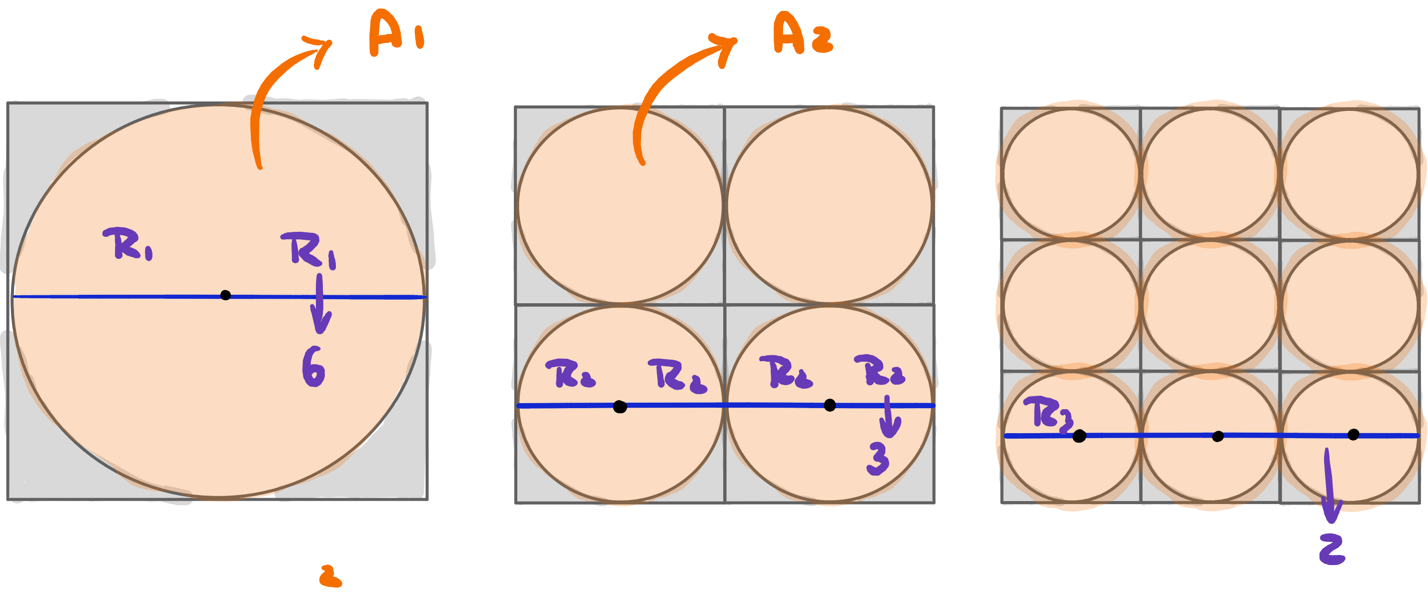
EXEMPLO

UMA EMPRESA FABRICA TAMPAS CIRCULARES DE ALUMÍNIO A PARTIR DE CHAPAS METÁLICAS QUADRADAS COM 1,2m DE LADO.

SÃO FABRICADAS TAMPAS DE 3 TAMANHOS: PEQUENAS, MÉDIAS E GRANDES, COMO MOSTRA A FIGURA ABAIXO. APÓS RETIRADAS AS TAMPAS, AS SOBRAS DE MATERIAL SÃO DESCARTADAS.

DETERMINE QUAL TIPO DE TAMPA GERA UMA MAIOR QUANTIDADE DE SOBRAS.





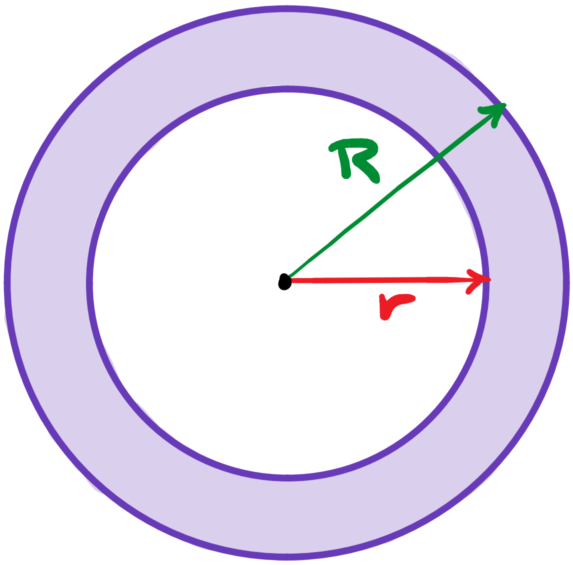
$$A_1 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$$

$$A_2 = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi$$

$$A_3 = 9 \cdot \pi \cdot 2^2 = 36\pi$$

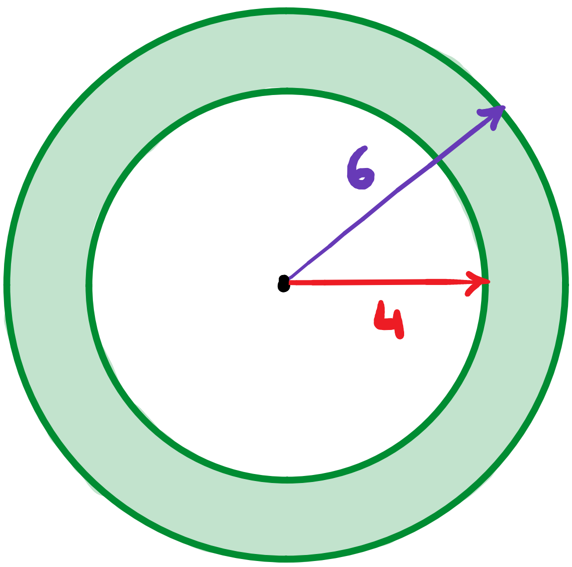
AS SOBRAS SÃO IGUAIS !

ÁREA DE COROA CIRCULAR



$$A_c = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$\boxed{A_c = \pi (R^2 - r^2)}$$



$$A_c = \pi . 6^2 - \pi . 4^2$$

$$A_c = 36\pi - 16\pi$$

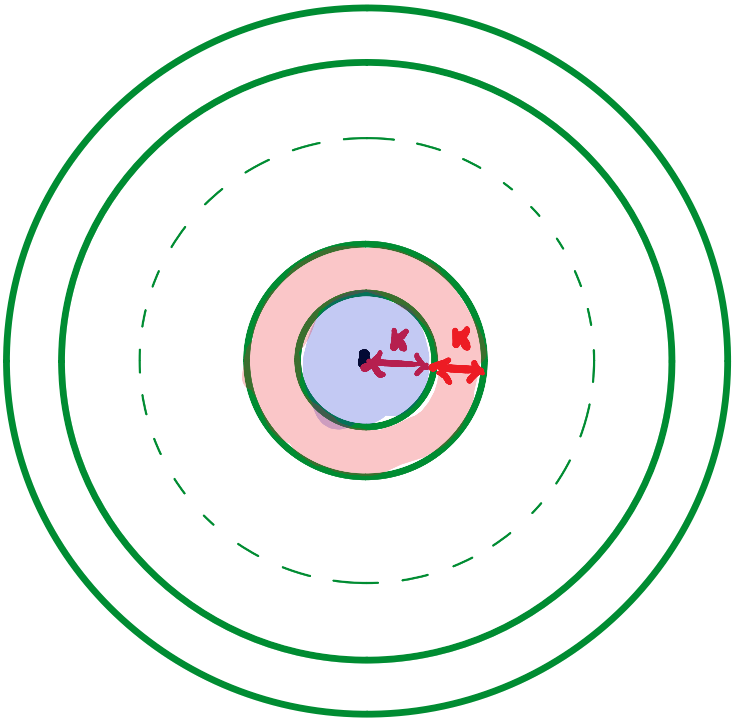
$$A_c = 20\pi$$

EXEMPLO

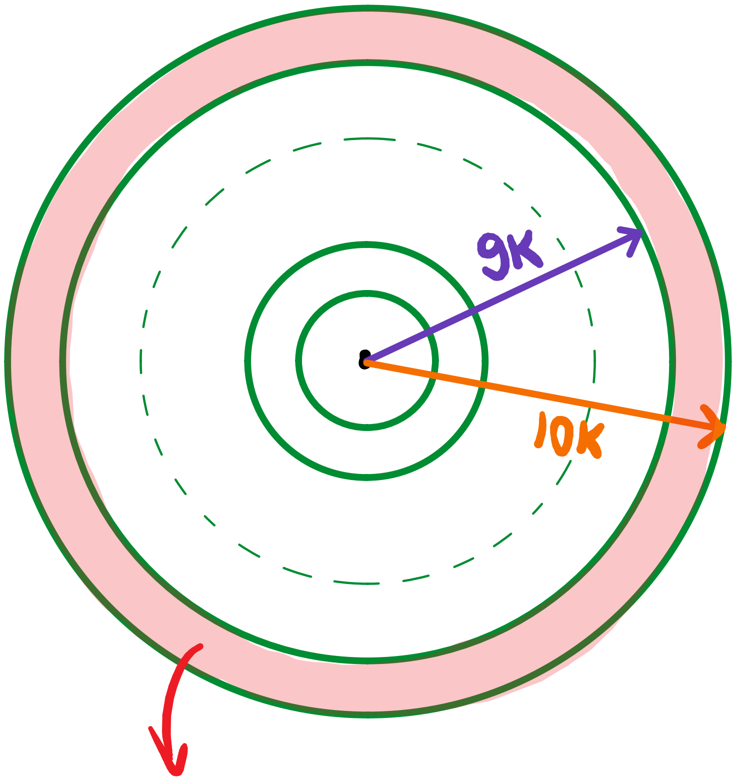
CONSIDERE QUE UM TSUNAMI SE PROPAGA COMO UMA ONDA CIRCULAR.

A CADA HORA, O TSUNAMI AVANÇA K QUILÔMETROS NA DIREÇÃO RADIAL, A PARTIR DO SEU EPICENTRO, COMO MOSTRA A FIGURA.

CALCULE A ÁREA VARRIDA PELO TSUNAMI ENTRE A 9ª E A 10ª HORA.



UNIVERSO NARRADO



$$A = \pi \cdot (10K)^2 - \pi (9K)^2$$

$$A = 100\pi K^2 - 81\pi K^2$$

$$\underline{A = 19\pi K^2}$$

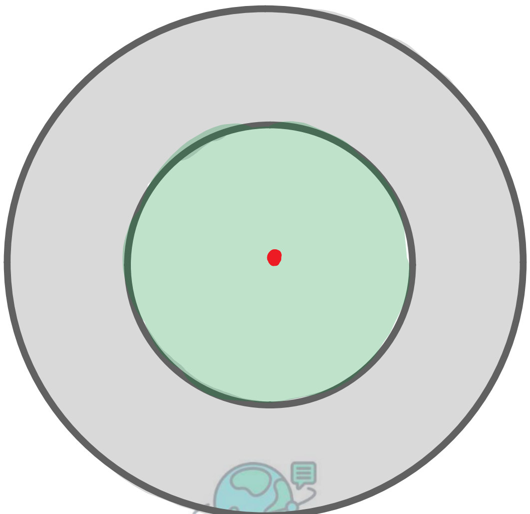
UNIVERSO NARRADO

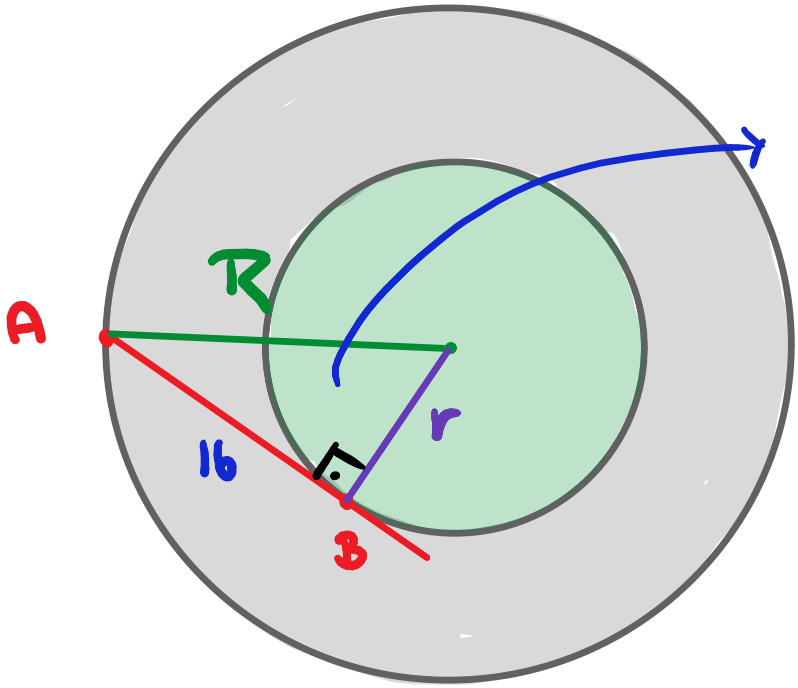
EXEMPLO

A FIGURA ABAIXO MOSTRA UM JARDIM COMPOSTO POR 2 CIRCUNFERÊNCIAS CONCÊNTRICAS: A PARTE INTERNA DO CÍRCULO CENTRAL É GRAMADA ENQUANTO A PARTE EM VOLTA É DE CALÇAMENTO.

ENCARREGADO DE CALCULAR A ÁREA TOTAL DO CALÇAMENTO E SEM FERRAMENTAS SUFICIENTES PARA DETERMINAR O CENTRO DOS CÍRCULOS E MEDIR OS RAIOS, UM BRILHANTE PADAWAN TEVE UMA IDEIA IGUALMENTE BRILHANTE: **PRENDEU UM BARBANTE NA CIRCUNFERÊNCIA EXTERNA E O ESTICOU ATÉ QUE ELE TANGENCIASSE A CIRCUNFERÊNCIA INTERNA.** ELE ENTÃO MEIDU O COMPRIMENTO DO BARBANTE ESTICADO ENCONTRANDO 16m.

QUAL A ÁREA DO CALÇAMENTO?





$$R^2 = r^2 - 16^2$$

$$R^2 - r^2 = 256$$

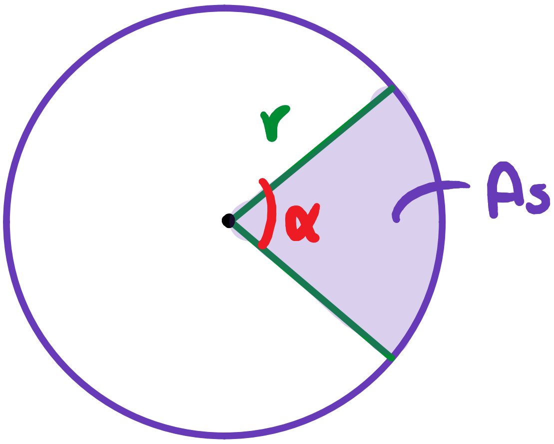
? ?

$$A_c = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$A_c = \pi \underbrace{(R^2 - r^2)}_{256}$$

$$\underline{A_c = 256\pi}$$

ÁREA DE SETOR CIRCULAR

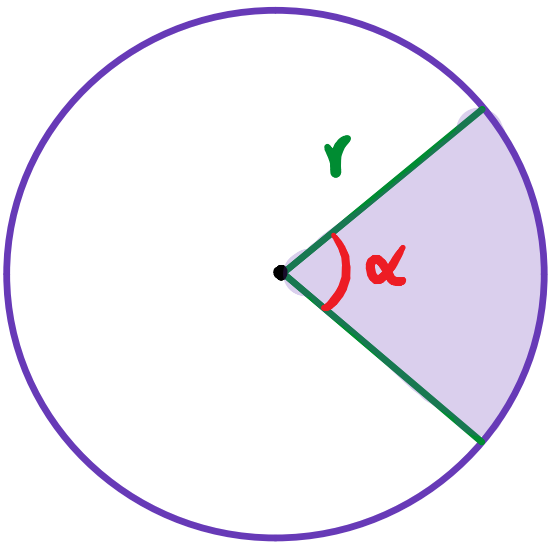


ÂNGULO	ÁREA
$360°$	πr^2
α	A_s

$$\boxed{A_s = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2}$$

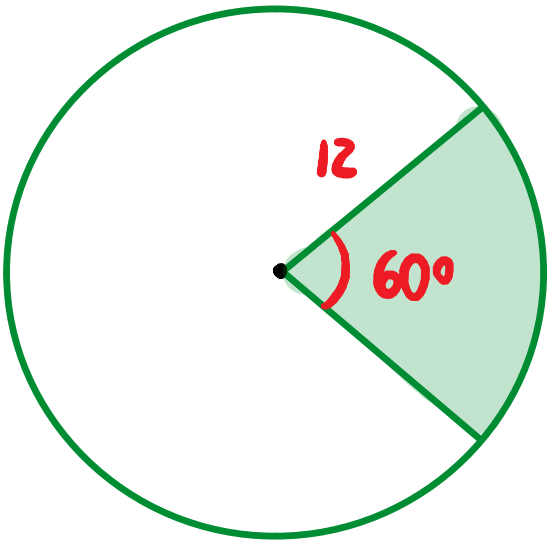
FRAÇÃO

INTEIRO



$$\boxed{A_s = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2}$$

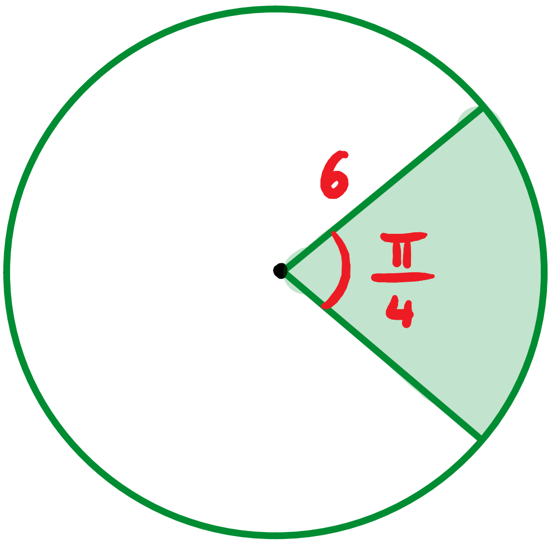
$$\boxed{A_s = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2}$$



$$A_s = \frac{\overset{1}{\cancel{60}}}{\underset{6}{\cancel{360}}} \cdot \pi \cdot 12^2$$

$$A = \frac{\pi \cdot 12 \cdot \overset{2}{\cancel{12}}}{\cancel{6}}$$

$$\underline{A = 24\pi}$$



$$A_s = \frac{\pi/4}{2\pi} \cdot \pi \cdot 6^2$$

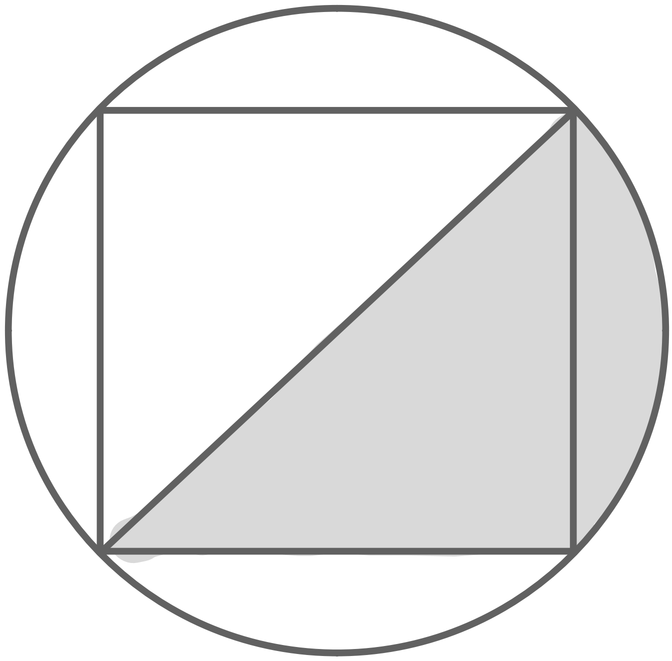
$$A_s = \frac{\cancel{\pi}}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \pi \cdot \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \overset{3}{\cancel{6}}$$

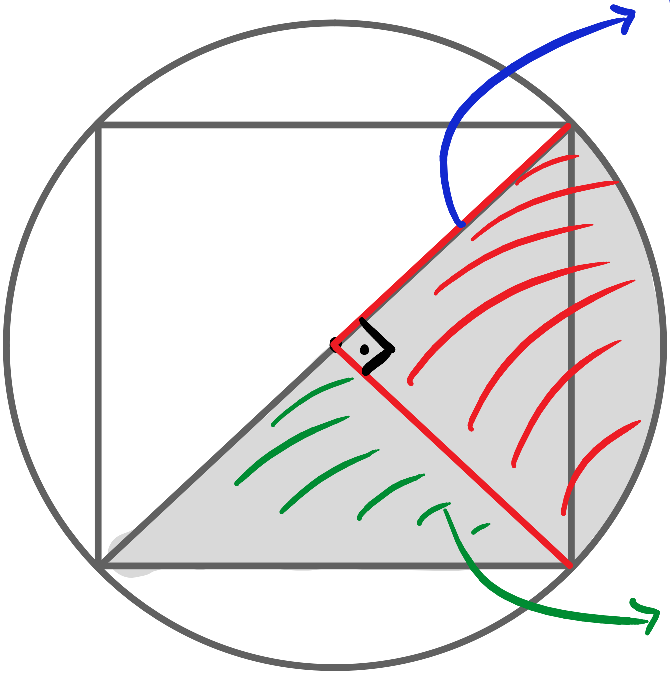
$$\underline{A_s = \frac{9\pi}{2}}$$

EXEMPLO

O QUADRADO DE LADO 8 ESTÁ INSCRITO NA CIRCUNFERÊNCIA.

CALCULE O VALOR DA ÁREA HACHURADA.





$r = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$\frac{1}{4} A_{\square}$

$$A_H = A_{SET} + A_{\triangle}$$

$$= \frac{\cancel{90}^{\,1}}{\cancel{360}_{\,4}} \cdot \pi \cdot (4\sqrt{2})^2 + \frac{1}{4} \cdot 8^2$$

$$= \frac{\cancel{4}\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}\,\pi}{\cancel{4}} + \frac{8 \cdot \cancel{8}^{\,2}}{\cancel{4}}$$

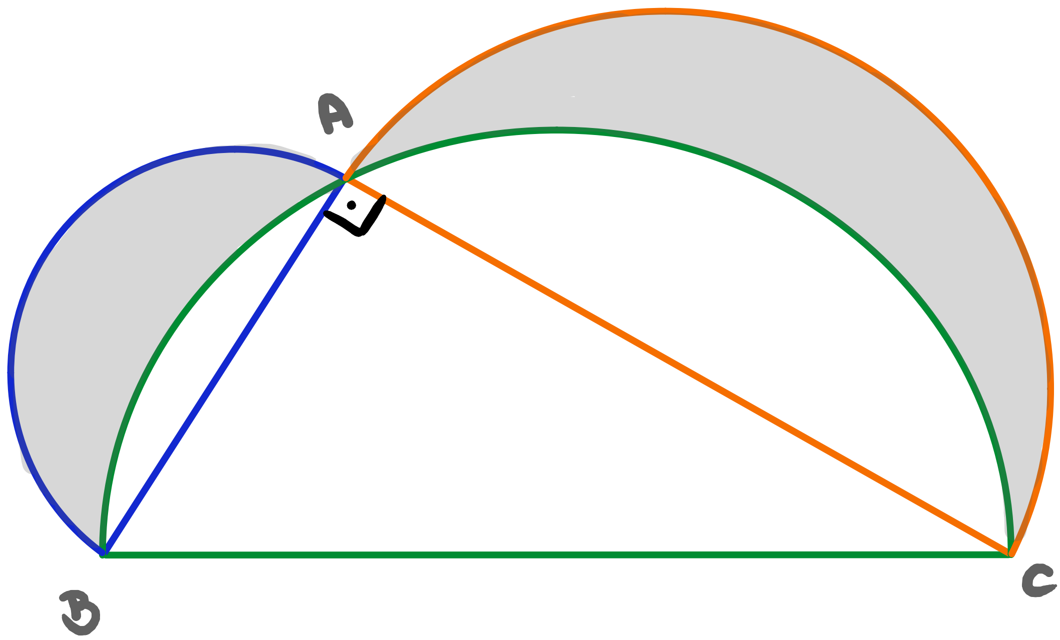
$$= 8\pi + 16$$

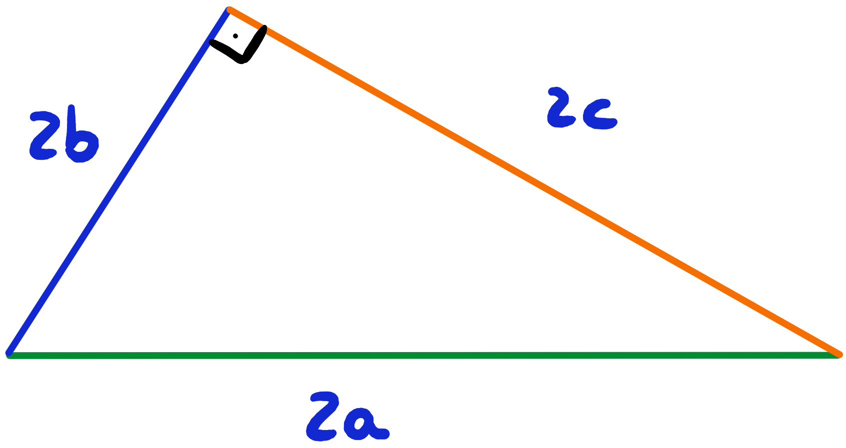
$$A_H = 8(\pi + 2)$$

EXEMPLO

SEJA O TRIÂNGULO ABC E OS TRÊS SEMI-CÍRCULOS CUJOS DIÂMETROS COINCIDEM COM OS LADOS DO TRIÂNGULO, COMO MOSTRA A FIGURA

CALCULE A RAZÃO ENTRE A ÁREA HACHURADA E A ÁREA DO TRIÂNGULO ABC.





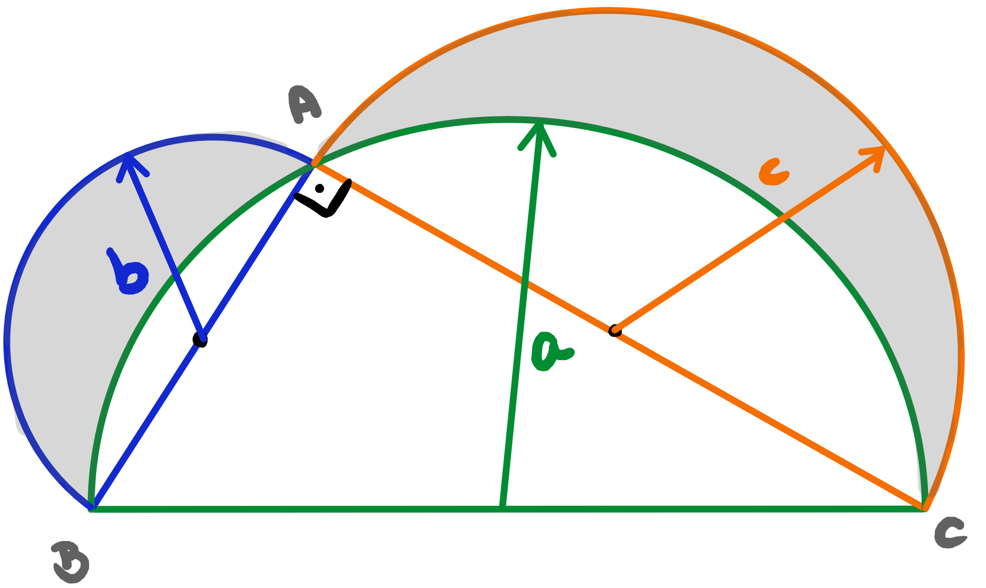
$$(2a)^2 = (2b)^2 + (2c)^2$$

$$\cancel{4}a^2 = \cancel{4}b^2 + \cancel{4}c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = 0$$

UNIVERSO NARRADO



$$\frac{A_H}{A_\Delta} = ?$$

$$A_H = A_\Delta + A_{AZ} + A_{LAR} - A_{VERD}$$

$$A_H = A_\Delta + \frac{1}{2}\pi b^2 + \frac{1}{2}\pi c^2 - \frac{1}{2}\pi a^2$$

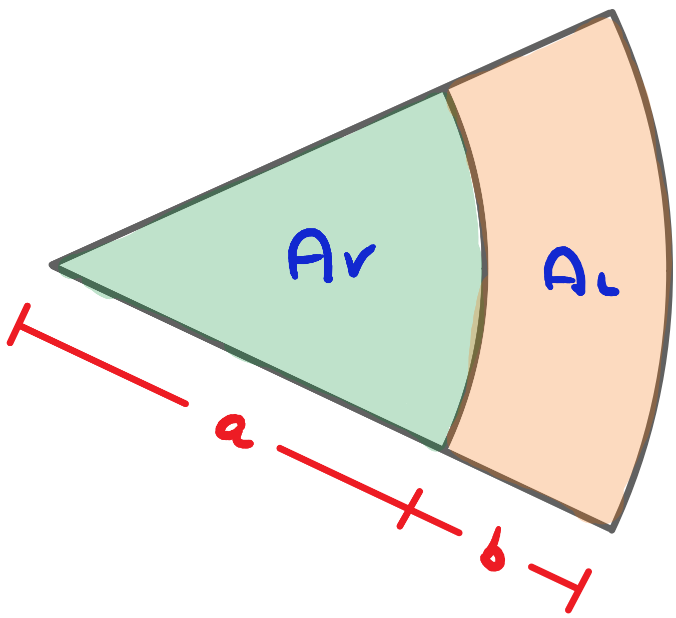
$$A_H = A_\Delta + \cancel{\frac{\pi}{2}\underbrace{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}_{0}}$$

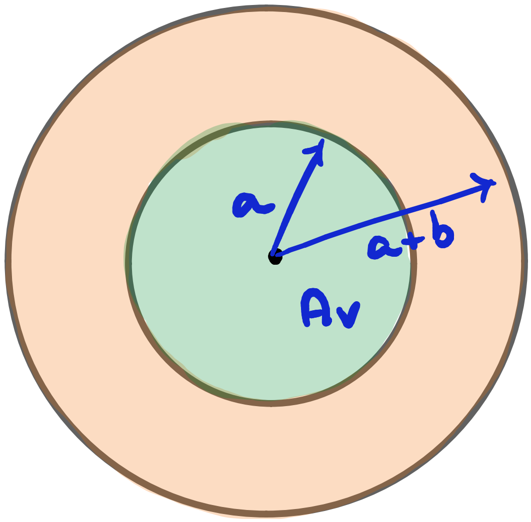
$$A_H = A_\Delta$$

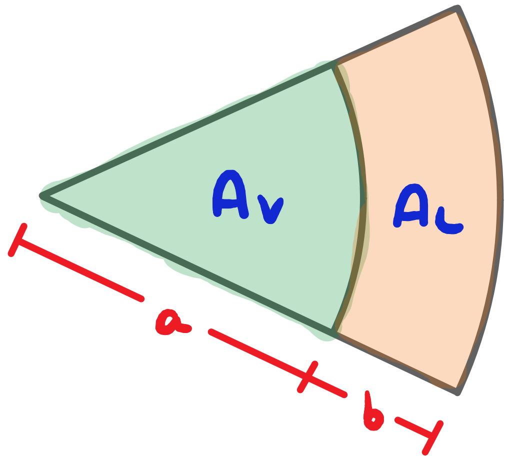
$$\frac{A_H}{A_\Delta} = 1$$

EXEMPLO

DETERMINE A RAZÃO ENTRE a E b PARA QUE AS ÁREAS HACHURADAS SEJAM IGUAIS.







$$A_V = A_L \rightarrow A_{TOTAL} = 2 \cdot A_V$$

$$\cancel{\pi}(a+b)^2 = 2 \cdot \cancel{\pi} a^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2$$

$$\underset{x}{a^2} - 2b\,\underset{x}{a} - b^2 = 0$$

$$\Delta = (-2b)^2 - 4 \cdot 1(-b^2) \rightarrow \Delta = 8b^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2b\sqrt{2}$$

$$a = \frac{\cancel{2}b \pm \cancel{2}b\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

$$a = b(1 \pm \sqrt{2}) \qquad \frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\frac{a^2 - 2ba - b^2}{b^2} = 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$$

$$\frac{a}{b} = x \rightsquigarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 . 1(-1) = 8 \to \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

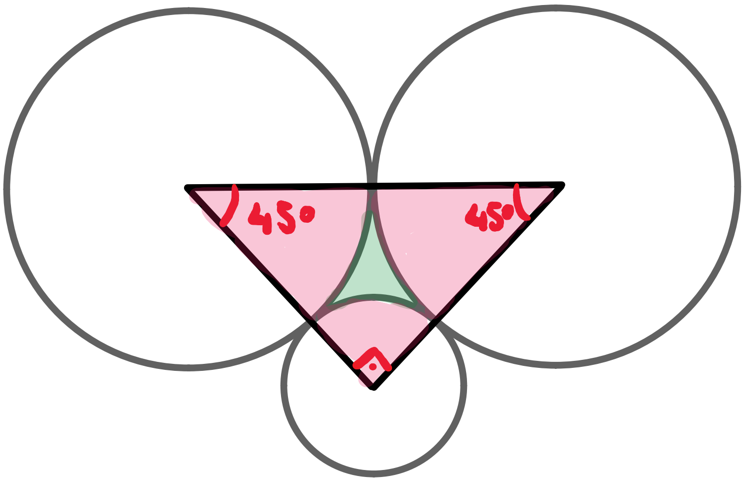
$$x = \frac{a}{b} = \frac{\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

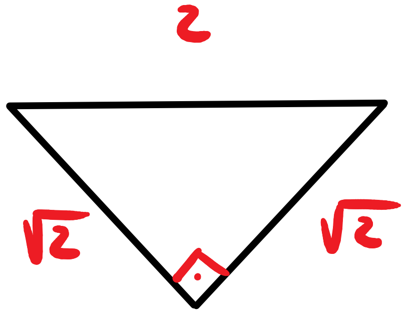
$$\frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2}$$

EXEMPLO

SEJAM C_1, C_2 E C_3 CIRCUNFERÊNCIAS TANGENTES EXTERNAMENTE DUAS A DUAS. SEUS RAIOS SÃO, RESPECTIVAMENTE, 1, 1 E $\sqrt{2} - 1$.

CALCULE A ÁREA DA REGIÃO LIMITADA E EXTERIOR ÀS CIRCUNFERÊNCIAS DADAS.





$$2^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2$$

$$A_\Delta = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \longrightarrow \underline{A_\Delta = 1}$$

$$A_R = \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{45}}{\cancel{360}} \cdot \pi \cdot 1^2 + \frac{\cancel{90}}{\cancel{360}} \cdot \pi \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$$

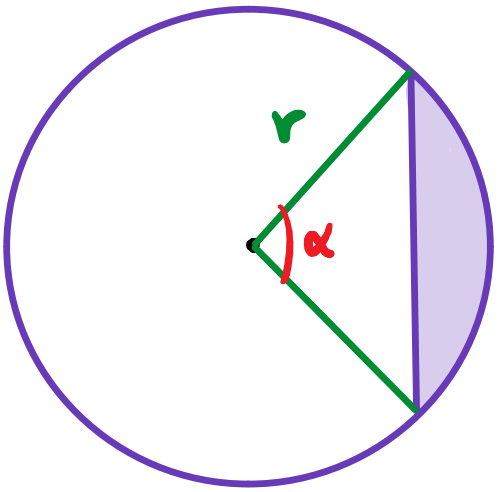
$$\cancel{8}\ 4 \qquad 4$$

$$A_R = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\left(2 - 2\sqrt{2} + 1\right)$$

$$\underline{A_R = \pi - \frac{\pi\sqrt{2}}{2}}$$

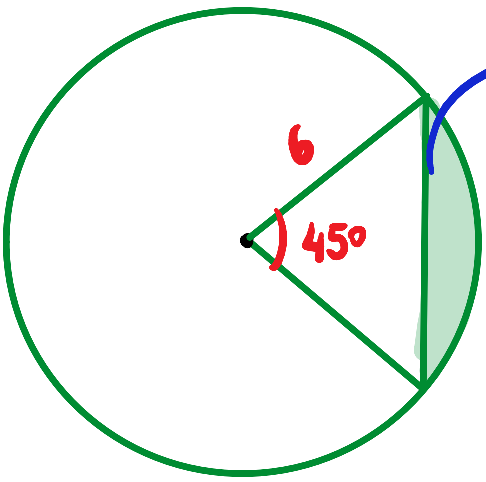
$$A_V = 1 - \left(\pi - \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \pi + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

ÁREA DE SEGMENTO CIRCULAR



$$A_{SEG} = A_{SET} - A_{\Delta}$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha$$



$$A_{SEG} = \frac{\cancelto{1}{45}}{\cancelto{8}{360}} \cdot \pi \cdot 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ$$

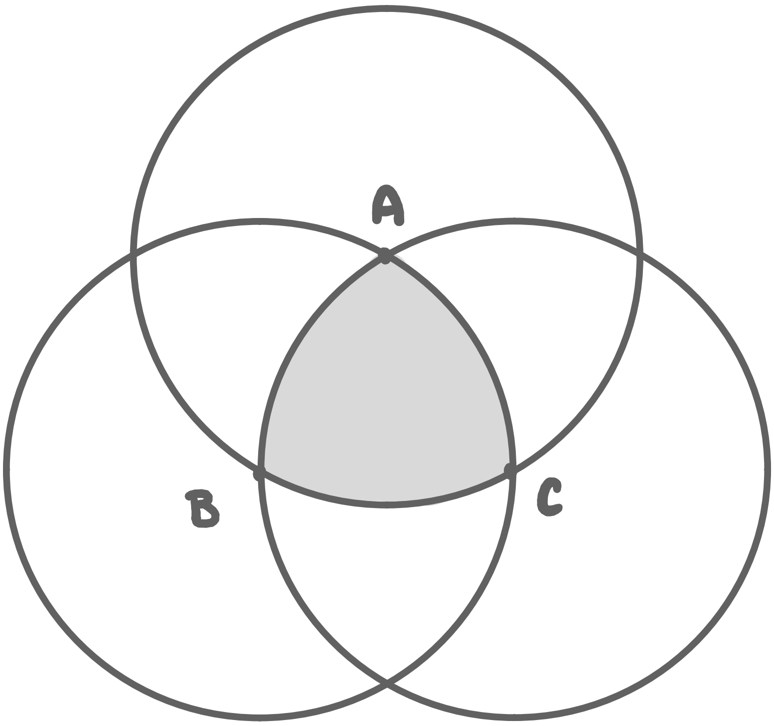
$$A_{SEG} = \frac{1}{\cancelto{4\,2}{8}} \pi \cdot \cancelto{3}{6} \cdot \cancelto{3}{6} - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancelto{3}{6} \cdot \cancelto{3}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

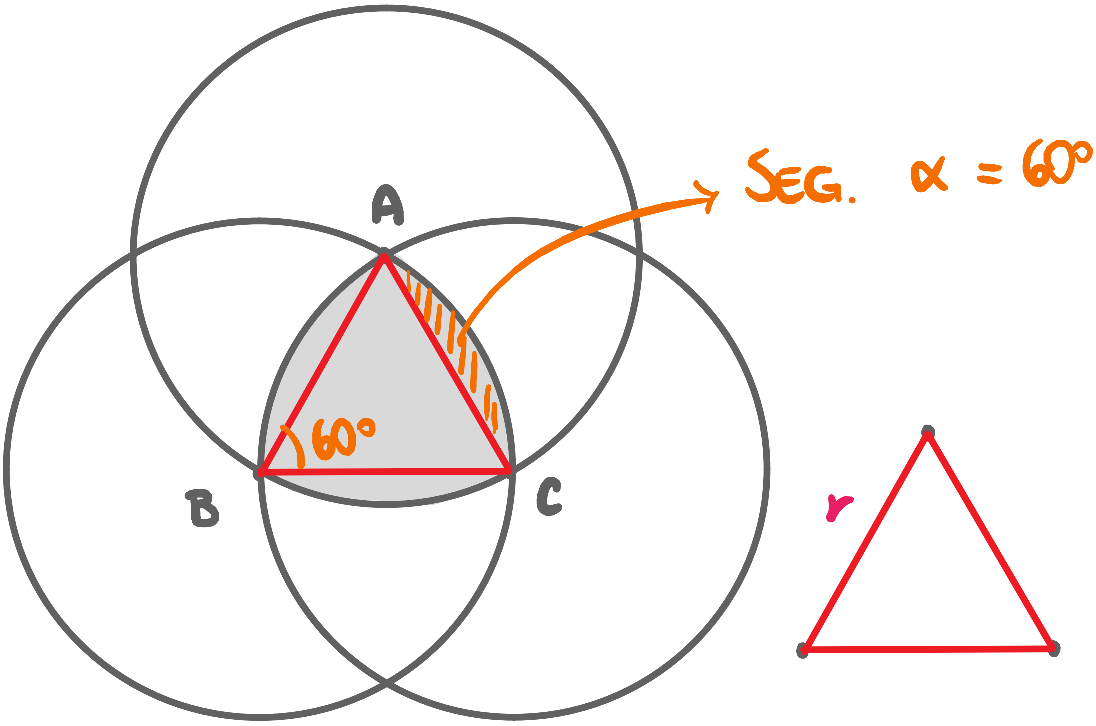
$$\boxed{A_{SEG} = \frac{9\pi}{2} - 9\sqrt{2}}$$

EXEMPLO

OS PONTOS A, B e C DA FIGURA SÃO OS CENTROS DOS CÍRCULOS DE RAIO r.

CALCULE A ÁREA DA REGIÃO HACHURADA.





$$A_H = A_\Delta + 3 \cdot A_{SEG}$$

$$A_\Delta = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{SEG} = A_{SET} - A_\Delta$$

$$= \frac{\cancel{60}^{\,1}}{\cancel{360}_{\,6}} \cdot \pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{SEG} = \frac{r^2}{12}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

$$A_H = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} + \cancel{3} \cdot \frac{r^2}{\cancel{12}_{4}}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

$$A_H = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi r^2}{4} - \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_H = \frac{\cancel{2}\pi r^2 - \cancel{2}r^2\sqrt{3}}{\cancel{4}\,2}$$

$$A_H = \frac{\pi r^2 - r^2\sqrt{3}}{2}$$

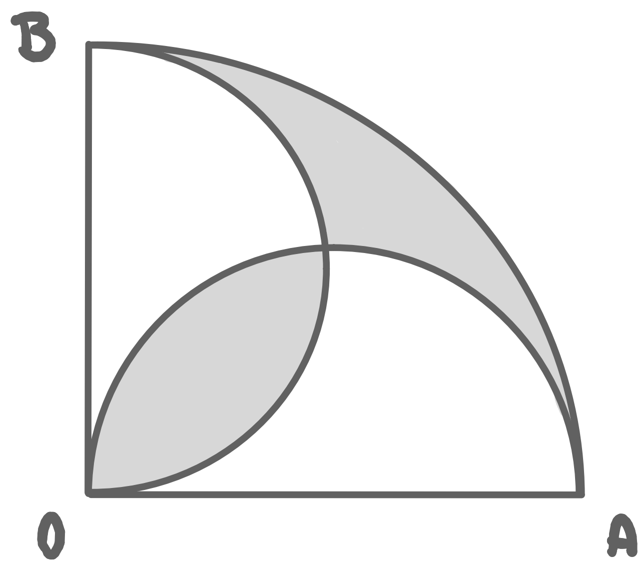
$$\boxed{A_H = \frac{r^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)}$$

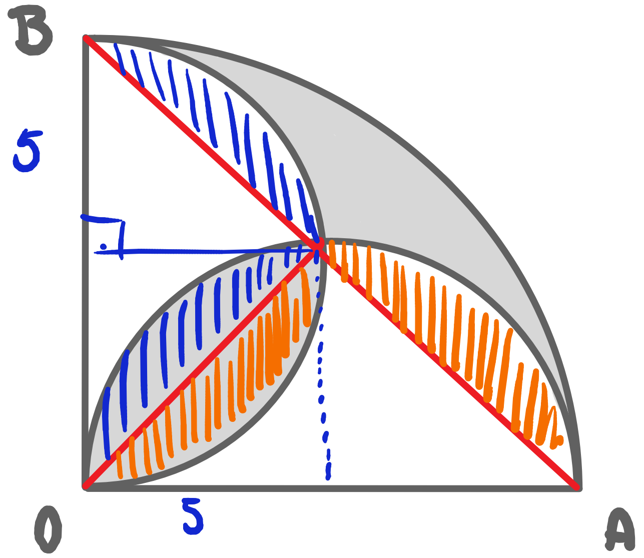
UNIVERSO NARRADO

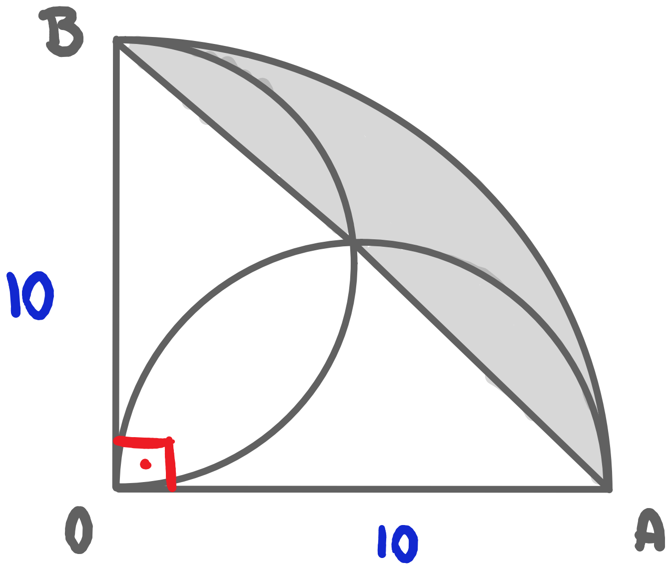
EXEMPLO

O ARCO AB É UM QUARTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA DE CENTRO O E RAIO 10. OS ARCOS OA E OB SÃO SEMICIRCUNFERÊNCIAS.

QUAL A ÁREA DA REGIÃO SOMBREADA?







$$A_H = A_S - A_\Delta = \frac{90}{360}\cdot\pi\cdot 10^2 - \frac{1}{2}\cdot 10^2$$

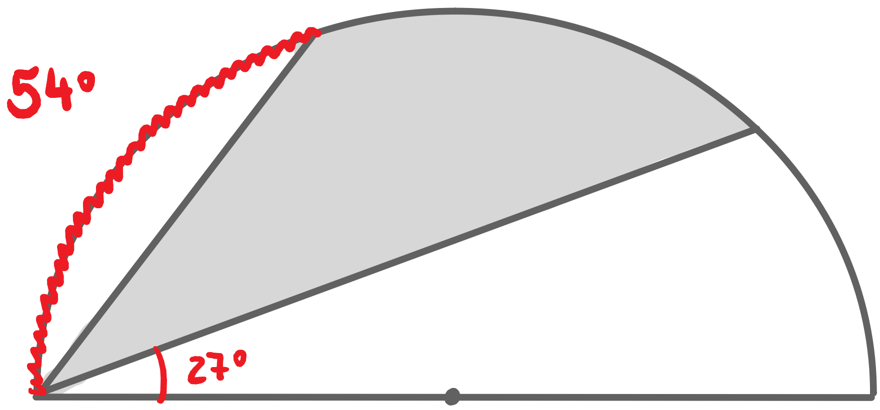
$$= \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 100 - \frac{100}{2}$$

$$= 25\pi - 50 = \underline{25(\pi - 2)}$$

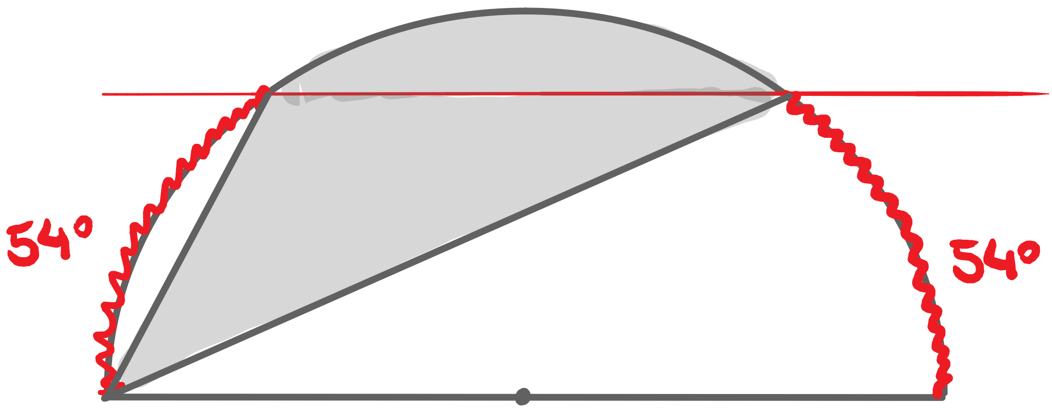
UNIVERSO NARRADO

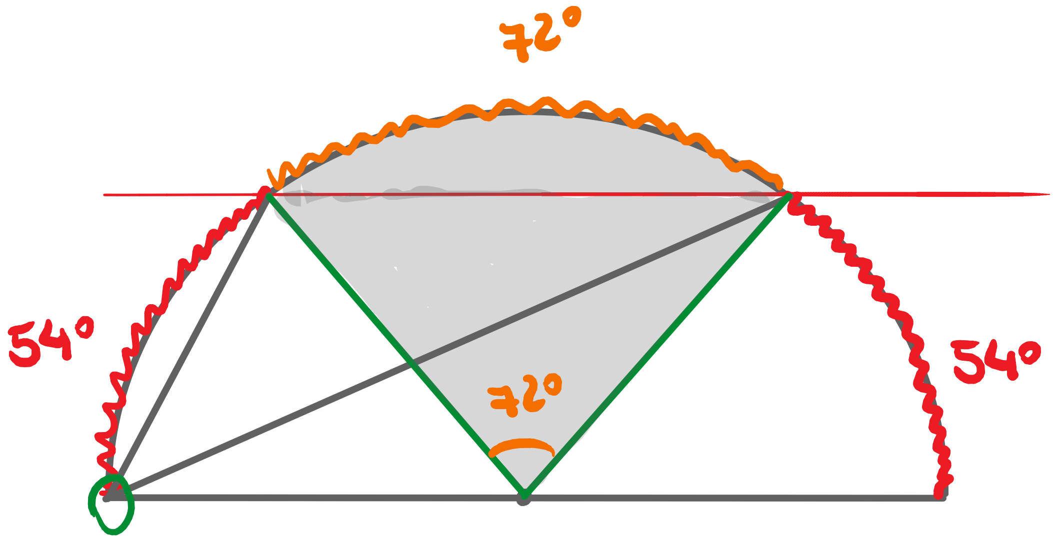
EXEMPLO

CALCULE A ÁREA HACHURADA, SABENDO QUE O SEMICÍRCULO TEM RAIO 5.



UNIVERSO NARRADO





$$A_H = A_{SETOR}(72°)$$

$$A_H = \frac{\cancel{72}^{\,1}}{\cancel{360}_{\,5}} \cdot \pi \cdot 5^2$$

$$\boxed{A_H = 5\pi}$$

UNIVERSO NARRADO

EXEMPLO

NA FIGURA, OS COMPRIMENTOS DOS LADOS DO TRIÂNGULO ABC SÃO:

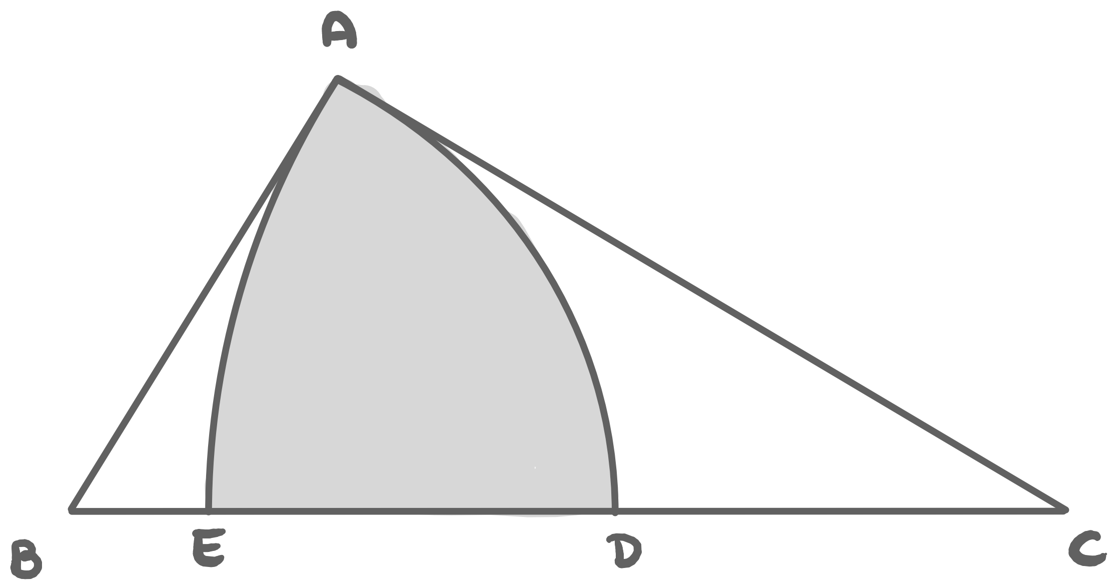
$AB = 2$

$AC = 2\sqrt{3}$

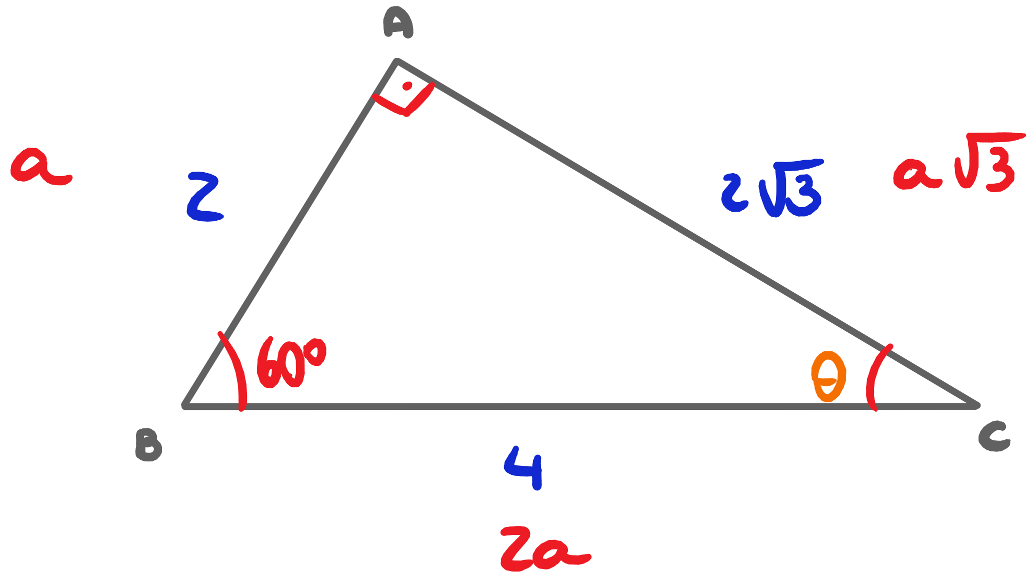
$BC = 4$

O ARCO AD POSSUI CENTRO B E RAIO AB E O ARCO AE POSSUI CENTRO C E RAIO AC.

CALCULE O ÁREA DA REGIÃO SOMBREADA.



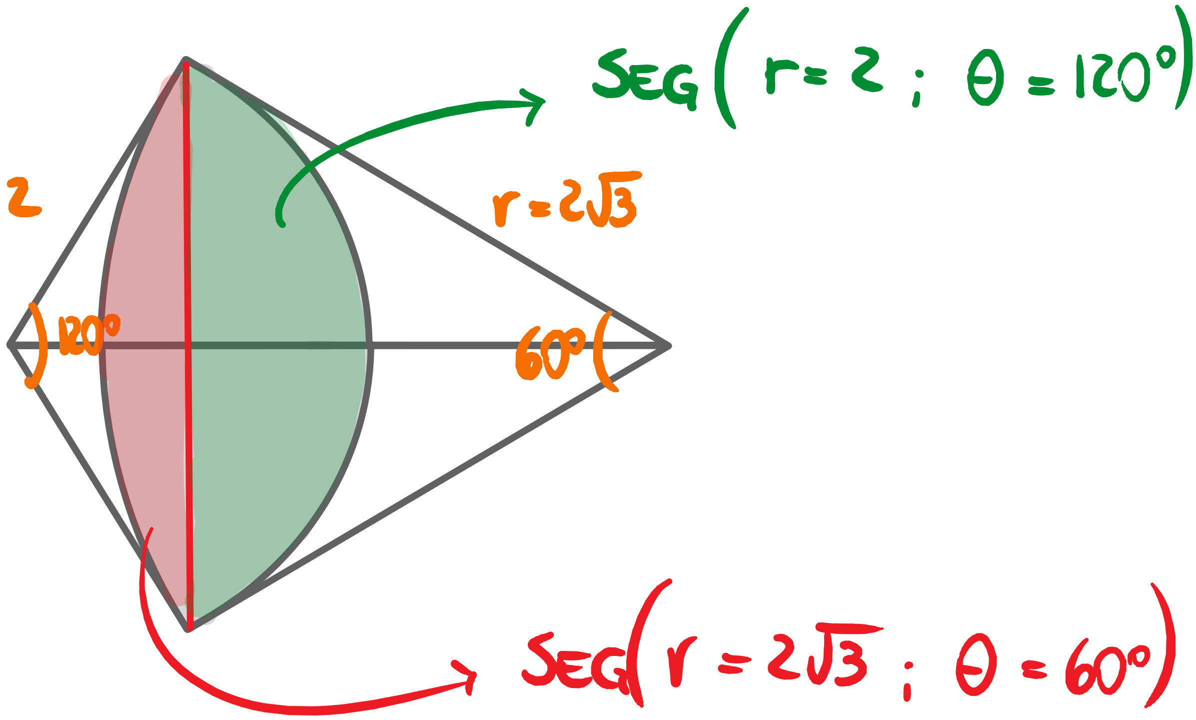
UNIVERSO NARRADO



$$4^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 \longrightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \hat{C} = 30^\circ$$

$$\hat{B} = 60^\circ$$



$$2A_H = A_{verm} + A_{verd}$$

$$A_{verm} = \frac{\overset{1}{\cancel{60}}}{\underset{6}{\cancel{360°}}} \cdot \pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{6}}\pi \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} - \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$$

$$= 2\pi - 3\sqrt{3}$$

$$A_V = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{2}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$A_V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 - \sqrt{3}$$

$$A_V = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$A_H = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + \overset{\frac{6\pi}{3}}{2\pi} - 3\sqrt{3}\right)$$

$$A_H = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\overset{5}{\cancel{10}}\pi}{3} - \overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{3}\right)$$

$$A_H = \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$