Aula 14

TSE - Concurso Unificado (Analista Judiciário - Área Administrativa) Raciocínio Lógico e Matemática - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

23 de Março de 2023

Índice

FUNÇÃO DO 2° GRAU

A **Função polinomial do 2° Grau** (ou Função Quadrática) é uma função de $f: R \to R$ descrita pela seguinte lei de formação matemática:

$$\boldsymbol{f(x) = y = ax^2 + bx + c}$$

Onde, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são os **coeficientes** determinados por números reais e $a \neq 0$.

TOME NOTA!

Nota 1: Esta função é dita do 2° Grau porque o maior expoente da variável x é igual a 2. Lembrando que o grau de uma função é determinado pelo maior expoente que a variável x assume.

Nota 2: Vimos que uma das condições é: $a \neq 0$. Caso a fosse igual a zero teríamos:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = 0 \times x^2 + bx + c \quad \to \quad y = bx + c$$

Ou seja, teríamos uma Função do 1° Grau, **descaracterizando** assim o conceito que queremos de Função Quadrática.

EXEMPLIFICANDO

São exemplos de Função do 2° Grau:

- $\boldsymbol{Ex_1}$: $y = 3x^2 + 8x + 5$

Onde: $a = 3$, $b = 8$ e $c = 5$

- $\boldsymbol{Ex_2}$: $y = -2x^2 + x - 3/4$

Onde: $a = -2$, $b = 1$ e $c = -3/4$

- $\boldsymbol{Ex_3}$: $y = -x^2 + 7$

Observe que nesse caso $b = 0$. Nada impede que b ou c sejam iguais a zero. O que não pode ocorrer, conforme vimos, é o Coeficiente a ser zero.

Onde: $a = -1$, $b = 0$ e $c = 7$

- $\boldsymbol{Ex_4}$: $y = 9x^2$

Onde: $a = 9$, $b = 0$ e $c = 0$

- $\boldsymbol{Ex_5}$: $y = 4 - 3x + \frac{7}{4}x^2$

Perceba que neste exemplo a "ordem" de apresentação da função foi <u>invertida</u>. E nada impede que seja. Mas tenha sempre em mente que o coeficiente a é o coeficiente que "acompanha" o x^2, isto é, que o multiplica, o Coeficiente b acompanha o x e o Coeficiente c é o termo independente. Estudaremos esses três coeficientes mais à frente na aula.

Onde: $a = \frac{7}{4}$, $b = -3$ e $c = 4$

Resolveremos algumas **questões de concursos** que trabalham com esse conceito inicial de Função do 2° Grau para consolidarmos melhor essa fase inicial.

(Pref. Imbé - 2020) Para que a função seja uma função $f(x) = (d-5)x^2 + 6x + 7$ do segundo grau, é necessário e suficiente que "d":

a) Seja o número real igual a 5.
b) Seja um número real maior do que 5.
c) Seja um número real diferente de 5.
d) Seja um número real menor do que 5.
e) Não seja um número real.

Comentários:

Estudamos na teoria acima que o **Coeficiente a** que multiplica a variável x^2 deve ser **diferente de zero**. Nesta questão, o Coeficiente que "acompanha" o termo x^2 é igual a $(d-5)$.

$$f(x) = \underbrace{(d-5)}_{a}x^2 + 6x + 7$$

Logo, para que seja uma Função do 2° Grau, esse termo deve ser diferente de zero:

$$d - 5 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{d \neq 5}$$

Sendo assim, <u>é necessário e suficiente que "d" seja um número real diferente de 5</u>.

Gabarito: Alternativa **C**

(Pref. Imbé - 2020) Se $f(x) = 20$ em $f(x) = x^2 - 5$, então "x" é igual a:

a) 20
b) 5 ou -5
c) Exatamente -5
d) Exatamente 5
e) 12

Comentários:

A banca buscar saber qual o valor de x quando $f(x) = 20$. Vamos substituir esse valor na fórmula dada e calcular o valor de x.

$$f(x) = x^2 - 5$$

$$20 = x^2 - 5$$

$$x^2 = 20 + 5$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm\sqrt{25} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = +5 \; ou - 5}$$

Gabarito: Alternativa **B**

(CM Amparo - 2020) O administrador de um hotel elaborou uma função matemática que apresenta o número "$\boldsymbol{R}$" de reservas previstas no estabelecimento em função dos meses "$\boldsymbol{x}$" do ano. Desse modo, o valor $\boldsymbol{x = 1}$ representa janeiro, $\boldsymbol{x = 2}$ é fevereiro, $\boldsymbol{x = 3}$ é março e, assim, por diante. Considere que a função descrita foi $\boldsymbol{R(x) = -5x^2 + 65x - 60}$, em que $\boldsymbol{x}$ é um número inteiro. Com base nesse modelo de função, quantas reservas serão realizadas no mês de agosto?

a) 90
b) 120
c) 140
d) 150

Comentários:

Mês de agosto é o **mês 8**, correto? Logo, queremos saber o valor da função para $\boldsymbol{x = 8}$.

Vamos substituir $x = 8$ na função dada e calcular quantas reservas serão realizadas neste mês.

$$R(x) = -5x^2 + 65x - 60$$

$$R(8) = -5 \times (8)^2 + 65 \times 8 - 60$$

$$R(8) = -5 \times 64 + 65 \times 8 - 60$$

$$R(8) = -320 + 520 - 60 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R(8) = 140}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(CM Novo Itacolomi - 2019) Dada a função quadrática, $f(x) = x^2 - 3x - 4$, quais os valores em que $f(x) = 0$?

a) $\{1\,;4\}$
b) $\{-2\,;3\}$
c) $\{-2\,;1\}$
d) $\{-1\,;4\}$

Comentários:

Já vamos adiantando um tópico super importante da aula. Valor da variável x quando $f(x) = 0$. São chamados de **Raízes da Função**. Mesma lógica da aula de Função do 1° Grau. Raiz de uma função é o valor de x que tem o condão de zerar a função $f(x)$.

Mais adiante na aula teremos um tópico específico para esse assunto. Vamos à questão.

Vamos substituir $f(x) = 0$ na função fornecida pelo enunciado e calcular os valores de x para tal igualdade.

$$f(x) = x^2 - 3x - 4$$

$$0 = x^2 - 3x - 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Onde: $a = 1$, $b = -3$ e $c = -4$

Aplicando Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{3-5}{2} = \dfrac{-2}{2} & \rightarrow \boldsymbol{x_1 = -1} \\ x_2 = \dfrac{3+5}{2} = \dfrac{8}{2} & \rightarrow \boldsymbol{x_2 = 4} \end{cases}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(Pref. Palmeira das Missões - 2019) Considere a função de segundo grau $f(x) = x^2 + 7x + c$. Se $f(2) = 4$, então c^2 vale:

a) 14
b) -14
c) 196
d) -196
e) 200

Comentários:

Questão para o cargo de **Procurador do Município** de Palmeira das Missões. Observe que a banca nos questiona o valor de c^2. Ora, nenhum número ao quadrado poderá ser negativo. Logo, já **descartaríamos as Alternativas B e D.**

Iremos substituir $f(2) = 4$, ou seja, quando $x = 2, y = 4$ na função e calcular o valor de c:

$$f(x) = x^2 + 7x + c$$

$$4 = 2^2 + 7 \times 2 + c$$

$$4 = 4 + 14 + c$$

$$c = 4 - 4 - 14 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{c = -14}}$$

Porém, conforme evidenciamos, **a banca nos questiona c^2**:

$$c^2 = (-14)^2 \quad \rightarrow \boldsymbol{c^2 = +196}$$

Gabarito: Alternativa **C**

GRÁFICO DA FUNÇÃO DO 2º GRAU

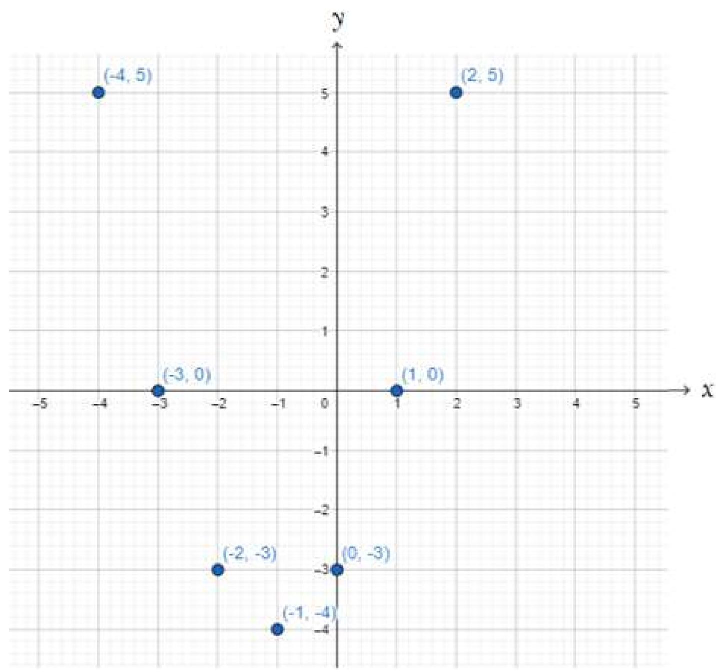
O gráfico da Função do 2° Grau é **caracterizado por uma Parábola.** Para construir o gráfico da função, vamos arbitrar alguns valores para x e encontrar o valor de y correspondente a esse x que arbitramos.

EXEMPLIFICANDO

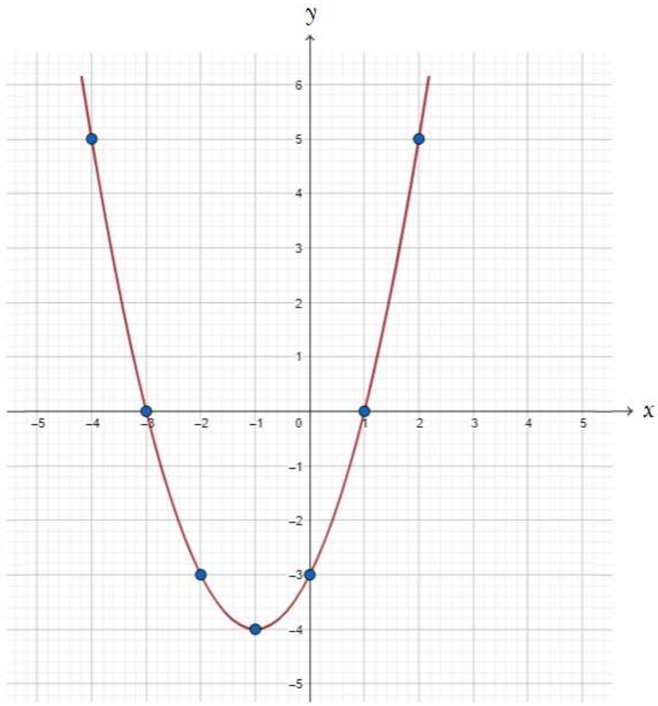
- $\boldsymbol{Ex_1}$: Vamos construir o gráfico da função $y = x^2 + 2x - 3$.

x	$y = x^2 + 2x - 3$	Ponto
-4	$y = (-4)^2 + 2 \times (-4) - 3 = 16 - 8 - 3 = \mathbf{5}$	$(-4\,;5)$
-3	$y = (-3)^2 + 2 \times (-3) - 3 = 9 - -6 - 3 = \mathbf{0}$	$(-3\,;0)$
-2	$y = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 = 4 - 4 - 3 = \mathbf{-3}$	$(-2\,;-3)$
-1	$y = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = \mathbf{-4}$	$(-1\,;-4)$
0	$y = (0)^2 + 2 \times (0) - 3 = 0 + 0 - 3 = \mathbf{-3}$	$(0\,;-3)$
1	$y = (1)^2 + 2 \times (1) - 3 = 1 + 2 - 3 = \mathbf{0}$	$(1\,;0)$
2	$y = (2)^2 + 2 \times (2) - 3 = 4 + 4 - 3 = \mathbf{5}$	$(2\,;5)$

Iremos assinalar esses pontos no gráfico:



Uma vez assinalados os pontos, traçamos a parábola.

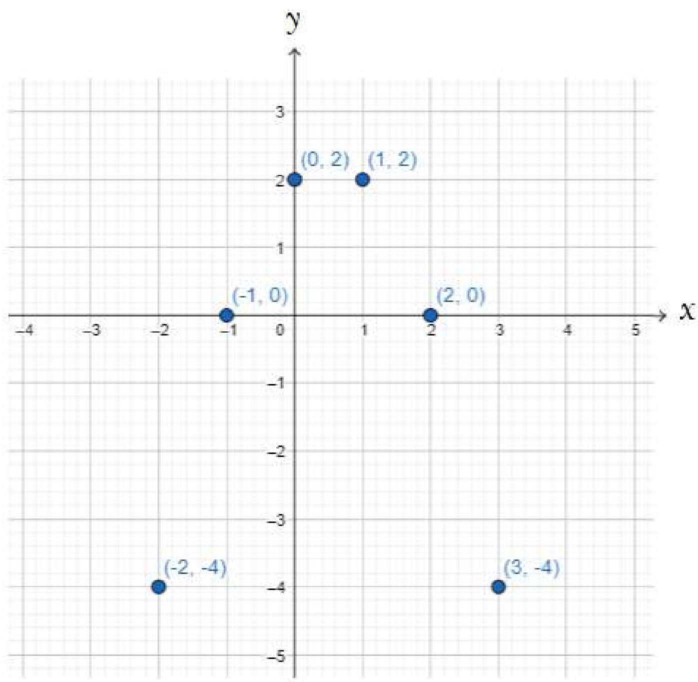


Vejamos mais um exemplo:

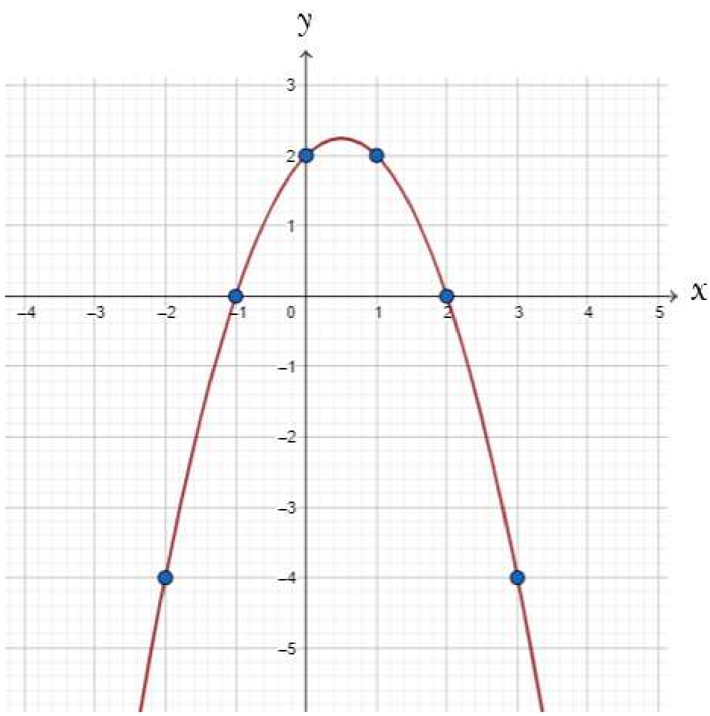
- $\boldsymbol{Ex_2}$: Vamos construir o gráfico da função $y = -x^2 + x + 2$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = -x^2 + x + 2}$	**Ponto**
-2	$y = -(-2)^2 - 2 + 2 = -4 - 2 + 2 = \mathbf{-4}$	$(-2\,;\,-4)$
-1	$y = -(-1)^2 - 1 + 2 = -1 - 1 + 2 = \mathbf{0}$	$(-1\,;\,0)$
0	$y = -0^2 + 0 + 2 = 0 + 0 + 2 = \mathbf{2}$	$(0\,;2)$
1	$y = -(1)^2 + 1 + 2 = -1 + 1 + 2 = \mathbf{2}$	$(1\,;\,2)$
2	$y = -(2)^2 + 2 + 2 = -4 + 2 + 2 = \mathbf{0}$	$(2\,;\,0)$
3	$y = -(3)^2 + 3 + 2 = -9 + 3 + 2 = \mathbf{-4}$	$(3\,;\,-4)$

Assinalando os pontos no gráfico:



Por fim, traçamos a Parábola:



É claro que, na hora da prova, você **não vai precisar gastar todo esse tempo para construir o gráfico** da função quadrática. Apenas **exemplifiquei** para que você consiga ir construindo a base teórica necessária para entender os próximos passos.

A partir de agora, iremos estudar algumas características do gráfico da Função Quadrática.

Vimos no início da aula que a **Função polinomial do 2° Grau** (ou Função Quadrática) é uma função de $f: R \rightarrow R$ descrita pela seguinte lei de formação matemática:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = y = ax^2 + bx + c}}$$

Onde, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são os **coeficientes** determinados por números reais e $a \neq 0$.

Iremos estudar cada um desses coeficientes separadamente.

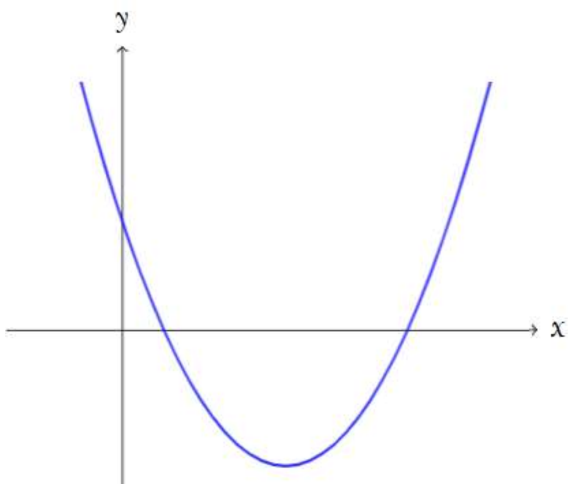
Coeficiente a - Concavidade

A Parábola que representa a função quadrática $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ pode apresentar concavidade voltada para cima ou para baixo. E isso dependerá do Coeficiente a, isto é, o Coeficiente que multiplica a variável x^2.

Lembrando que nada impede que a banca coloque outra letra no lugar do "a". O que você tem que ter em mente é que o Coeficiente que determina a concavidade da parábola é o Coeficiente que "acompanha" a variável x^2. Na nossa lei genérica, é o "a".

1. $\boldsymbol{a > 0}$

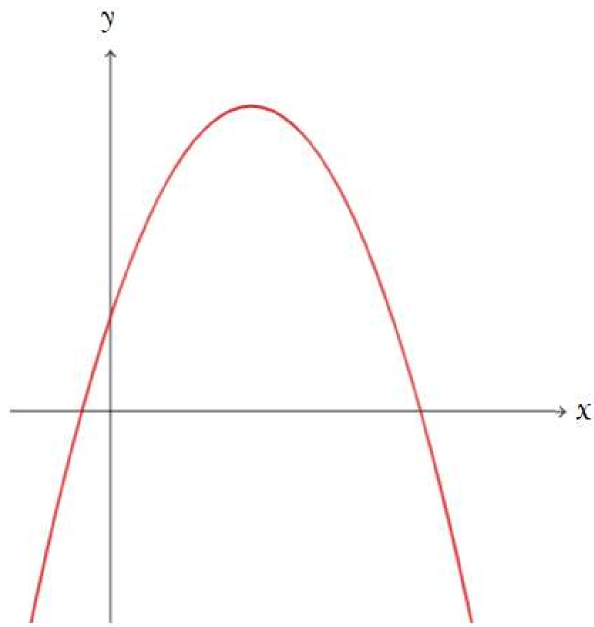
Se o Coeficiente a for **maior que zero**, teremos uma parábola com **concavidade voltada para cima**.



Volte algumas páginas e veja o gráfico do nosso primeiro exemplo deste tópico. Observe que a função $y = x^2 + 2x - 3$ tem Coeficiente $a = 1$, ou seja, maior que zero. Logo, a parábola tem concavidade voltada para cima.

2. $\boldsymbol{a < 0}$

Se o Coeficiente a for **menor que zero**, teremos uma parábola com **concavidade voltada para baixo**.



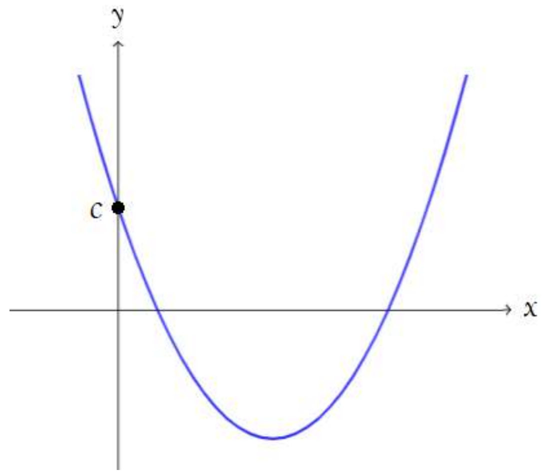
Novamente, volte algumas páginas e perceba que o gráfico do segundo exemplo ($y = -x^2 + x + 2$) é representado por uma parábola com concavidade voltada para baixo, justamente pelo fato do Coeficiente $a = -1$ ser menor que zero.

Coeficiente c - Intercepta o eixo y

É o termo **INDEPENDENTE** da função. Na nossa lei de formação matemática:

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$

é representado pela letra c e é definido pelo **ponto em que a parábola intercepta o eixo y**.

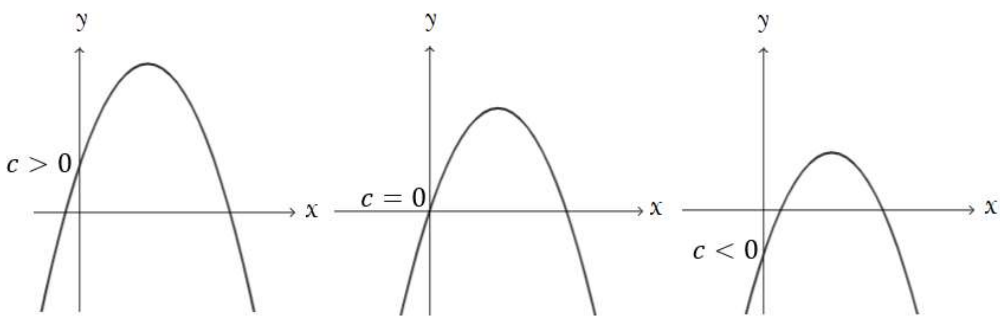


Veja que, quando a parábola intercepta o eixo y, $x = 0$.

Então, para calcular o valor do Coeficiente c, basta **igualar x a zero**.

FIQUE ATENTO!

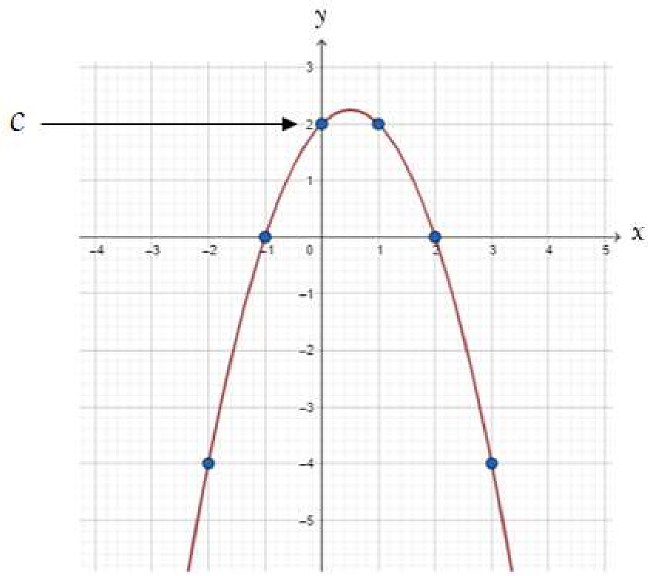
Diferentemente do Coeficiente a que não pode ser zero, o Coeficente c pode assumir qualquer valor, tanto positivo ($c > 0$), quanto negativo ($c < 0$), como também nulo ($c = 0$).



O Coeficiente c apenas indica em que ponto a parábola intercepta o eixo y.

No nosso exemplo 2 deste tópico tínhamos a seguinte função: $y = -x^2 + x + 2$.

Duas informações já sabemos: A primeira é que a concavidade é voltada para baixo ($a = -1 < 0$). A segunda é que a parábola corta o eixo y em $y = 2$, uma vez que o coeficiente c é igua a 2.



"Então, professor, bastaria eu olhar para equação e, vendo $c = 2$, já saberia que a parábola corta o eixo y em $y = 2$?"

Justamente, caro Aluno, o coeficiente c e é definido pelo **ponto em que a parábola intercepta o eixo y,** ou seja, em que $x = 0$.

Substitua x por zero na função e analise o resultado:

$$y = -x^2 + x + 2$$

$$y = -0^2 + 0 + 2$$

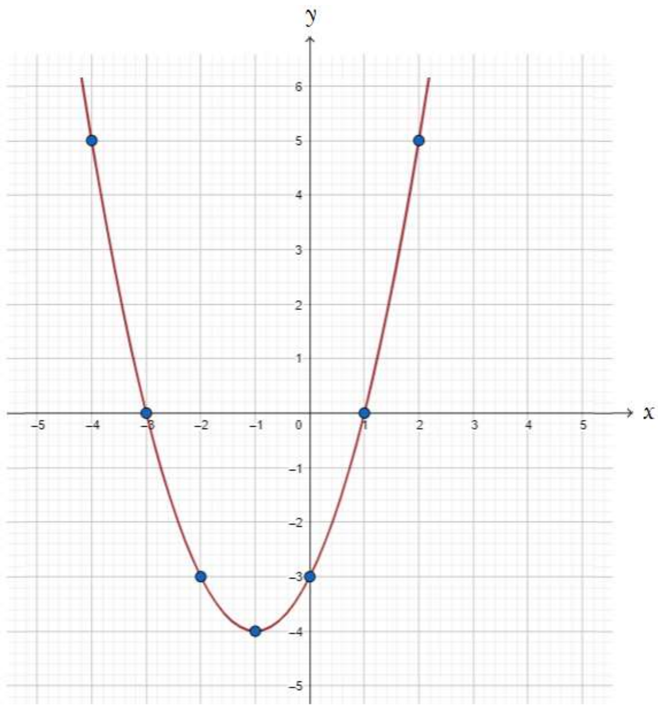
$$y = 0 + 0 + 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 2}$$

Coeficiente b - Inclinação da parábola após passar pelo eixo y

O Coeficiente b indica **"o que acontece com a parábola quando ela corta o eixo y".**

Vamos exemplificar para você entender e depois colocamos a teoria. Inverteremos a sistemática de estudo.

No exemplo $y = x^2 + 2x - 3$ a parábola desenhada foi:



A parábola intercepta o eixo y em $y = -3$, certo? E o que acontece com essa parábola quando ela passa por esse ponto?

"Ah professor, a função veio diminuindo de valor da esquerda para a direita, foi até lá embaixo e começou a subir e aí cortou o eixo y"

Pronto, você já matou o significado do coeficiente b.

Se ela estava "subindo" quando cortou o eixo y, isto é, se ela tinha uma inclinação positiva, $b > 0$.

O Coeficiente b determina o que está acontecendo com a parábola quando ela intercepta o eixo y.

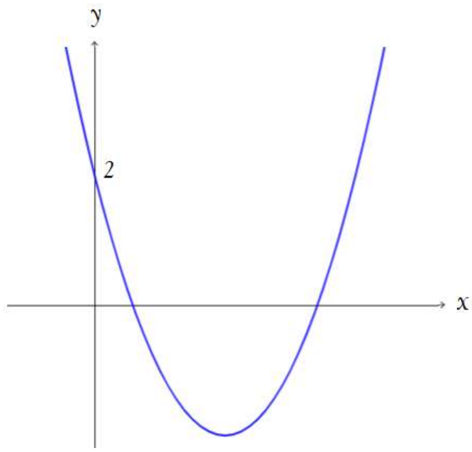
Vejamos mais um exemplo numérico:

- $\boldsymbol{Ex_3}$: Esboce o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 2$

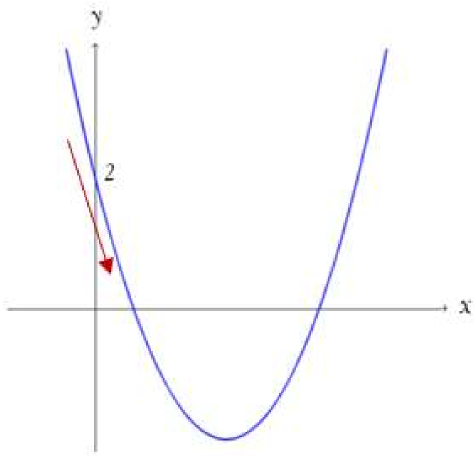
Já sabemos que a parábola tem concavidade voltada para cima $(a = 1 > 0)$ e, como $c = 2$, ela corta o eixo y em $y = 2$.

O Coeficiente b é igual a -4, ou seja, negativo $(b < 0)$. Se b positivo indicou que a parábola estava crescendo quando passou pelo eixo y, b negativo indicará que a parábola estará decrescendo quando passar por y.

Vejamos o gráfico:



Perceba que a parábola está decrescendo quando passa pelo eixo y.



Logo, $\boldsymbol{b < 0}$.

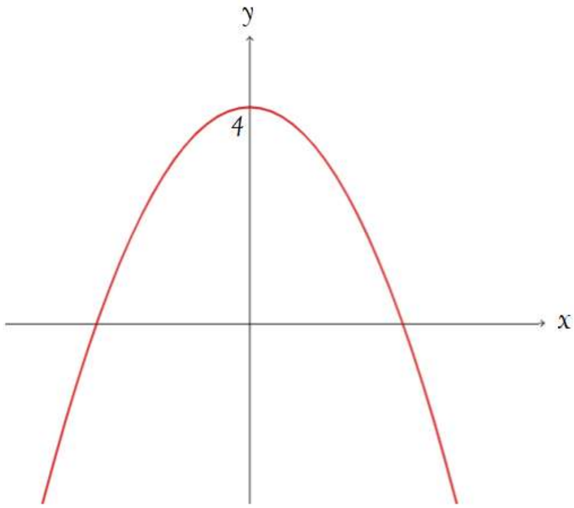
"Certo, professor. Estou entendendo. E se b for igual a zero? Ela não cresce e nem decresce?"

Mais uma vez você está certo, Aluno. Quando $b = 0$, o ponto de mínimo da função (que aprenderemos mais à frente) será em cima do eixo y.

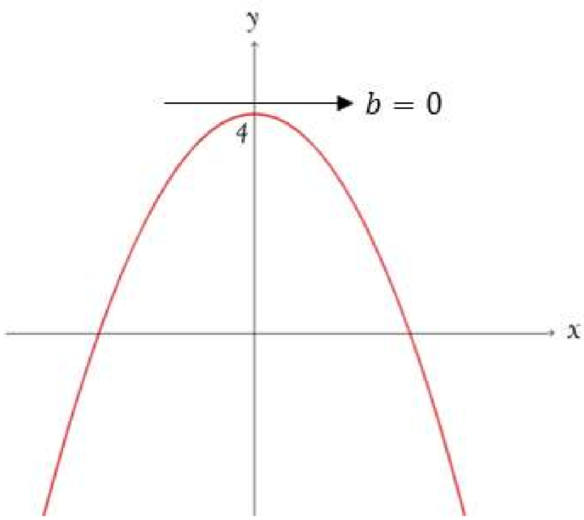
- $\boldsymbol{Ex_4}$**:** Esboce o gráfico da função $y = -4x^2 + 4$

A parábola tem concavidade voltada para baixo ($a = -4 < 0$) e, como $c = 4$, ela corta o eixo y em $y = 4$.

Vejamos o gráfico:



O Coeficiente b é nulo, ou seja, $b = 0$. Se b é igual a zero a parábola nem cresce e nem descresce quando passa pelo eixo y.



Então, podemos concluir que:

1. $\boldsymbol{b > 0}$ → Parábola está **crescendo** quando passa pelo eixo y.

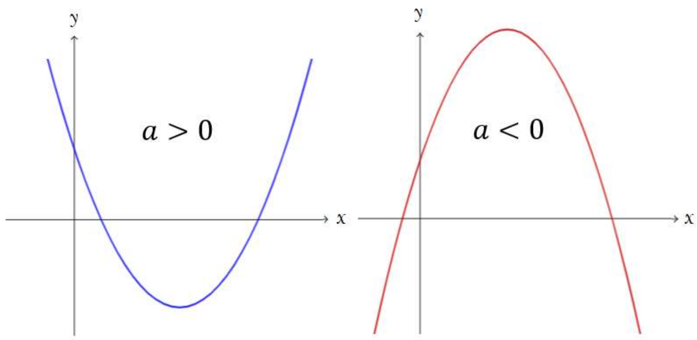
2. $\boldsymbol{b < 0}$ → Parábola está **decrescendo** quando passa pelo eixo y.

3. $b = 0$ → Parábola não está nem crescendo nem decrescendo quando passa pelo eixo y.

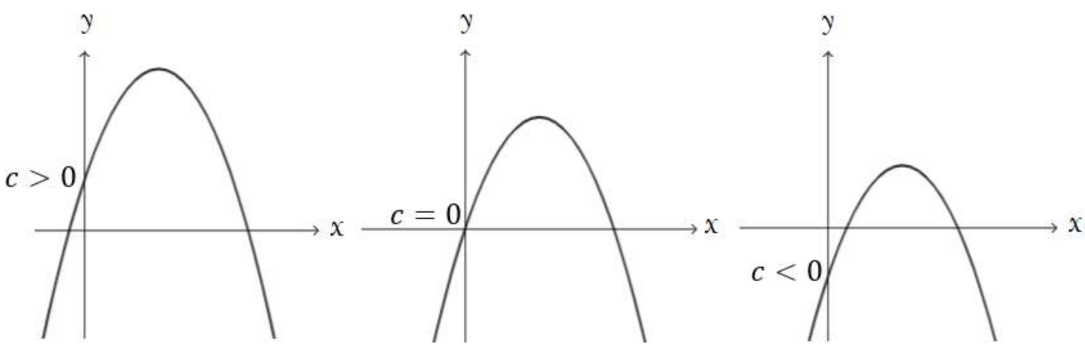
Vamos esquematizar os Coeficiente e depois resolver algumas questões de concursos sobre o gráfico da Função do 2° Grau.

ESQUEMATIZANDO

- **Coeficiente a:** Determina a concavidade da parábola



- **Coeficiente c**: Em que ponto a parábola corta o eixo y



- **Coeficiente b**: Comportamento da parábola quando está passando pelo eixo y.

$\boldsymbol{b > 0}$ → Parábola está **crescendo** quando passa pelo eixo y.

$\boldsymbol{b < 0}$ → Parábola está **decrescendo** quando passa pelo eixo y.

$b = 0$ → Parábola não está nem crescendo nem decrescendo quando passa pelo eixo y.

Resolvermos agora algumas **questões de concursos** em que você **não precisará fazer uma conta sequer** para analisar o comportamento do gráfico da função do segundo grau. Iremos apenas fazer a análise dos condicionantes dos Coeficientes da parábola.

Vamos consolidar todo este conteúdo que é muito importante para que não reste uma dúvida sequer sobre o gráfico da função. Acompanhe comigo.

(ISS Contagem - 2020) Analisando os valores mensais arrecadados com impostos em um município, percebeu-se que eles poderiam ser matematicamente modelados por uma função cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima.

Dentre as funções mostradas a seguir, a que possui um gráfico que é uma parábola com concavidade voltada para cima está corretamente indicada em

a) $f(x) = 10$
b) $f(x) = 32x + 47$
c) $f(x) = -5x + 101$
d) $f(x) = 23x^2 + 8x + 29$
e) $f(x) = -53x^2 + 923x + 4$

Comentários:

Questão do concurso de **Auditor Fiscal** do município de Contagem. O valor mensal arrecadado com impostos é modelado por uma função cujo gráfico é uma PARÁBOLA, ou seja, a função de arrecadação é uma função do segundo grau.

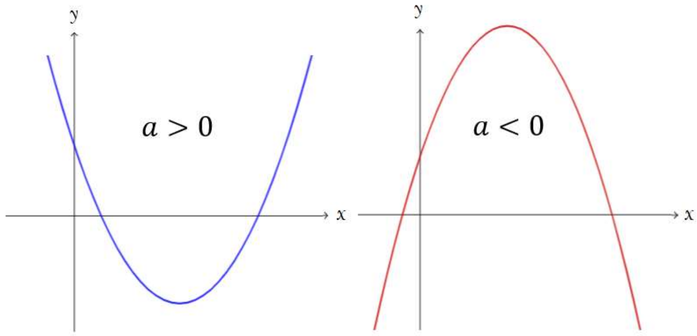
Conforme estudamos, a **Função polinomial do 2° Grau** (ou Função Quadrática) é uma função de $f: R \to R$ descrita pela seguinte lei de formação matemática:

$$\boldsymbol{f(x) = y = ax^2 + bx + c}$$

Logo, **descartaríamos as Alternativas A, B e C** (são funções do primeiro grau cujo gráfico é uma reta). Ficaríamos entre a Letra D e E.

A banca nos questiona qual das alternativas possui um gráfico que é uma parábola com concavidade voltada para cima.

Lembrando que o **Coeficiente $\boldsymbol{a}$** é que determina a concavidade da parábola:



Observe que na Alternativa E temos um Coeficiente $a = -53 < 0$, isto é, a parábola terá concavidade voltada **PARA BAIXO**. Logo, **não pode ser nossa resposta**.

Na Alternativa D, o Coeficiente $a = 23 > 0$. Sendo assim, teremos uma parábola com **convidade voltada PARA CIMA**.

Caro Aluno, estou explicando minuciosamente para que você possa entender. Vamos acelerando de pouco em pouco no decorrer das questões abaixo.

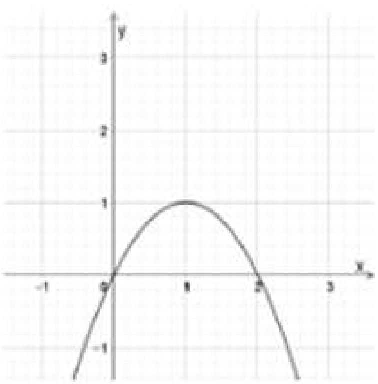
Claro que você mataria essa questão sem nem precisar desenvolver muito raciocínio. Mas, consoante falei, vamos passo a passo para consolidarmos o completo entendimento da matéria.

Gabarito: Alternativa **D**

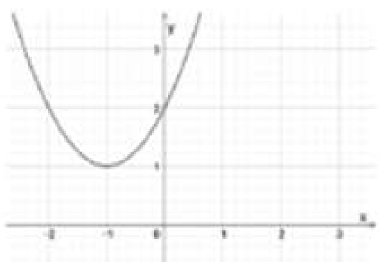
(Execução Fiscal Pref. Imbé - 2020) Assinale a alternativa que mostra o esboço do gráfico da função:

$$f(x) = -(x+1)^2 + 1$$

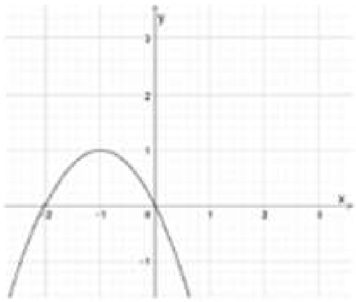
A)



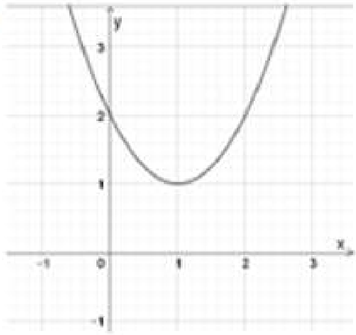
D)



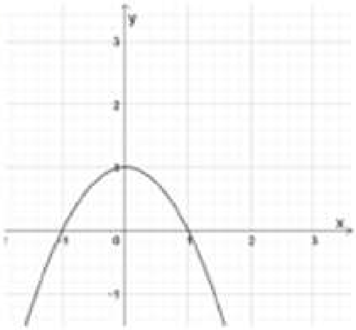
B)



E)



C)



Comentários:

Primeiramente, vamos desenvolver a função dada:

$$f(x) = -(x+1)^2 + 1$$

$$f(x) = -(x^2 + 2x + 1) + 1$$

$$f(x) = -x^2 - 2x - 1 + 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{f(x) = -x^2 - 2x + 0}}$$

Onde: $a = -1$, $b = -2$ e $c = 0$.

Duas coisas que "*de cara*" já temos que ter em mente:

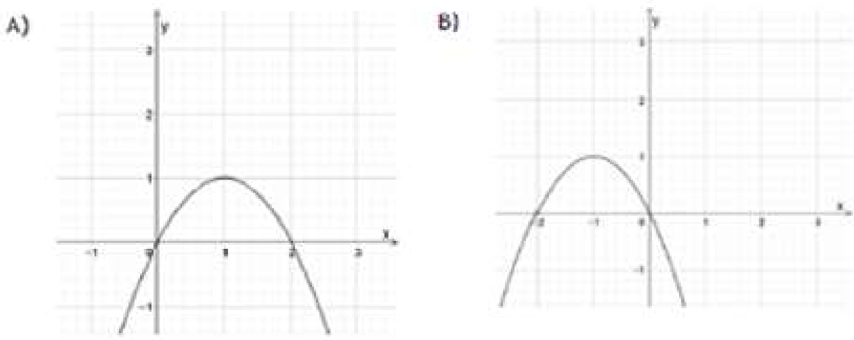
1. A parábola apresenta **Coeficiente $\boldsymbol{a = -1 < 0}$**, ou seja, a concavidade será voltada para **BAIXO**.

Elimanos assim as alternativas D e E.

2. O Coeficiente c é igual a **zero**. Logo, a parábola **cortará o eixo $\boldsymbol{y}$ em $\boldsymbol{y = 0}$.**

Eliminamos a Alternativa C (que corta o eixo y em $y = 1$).

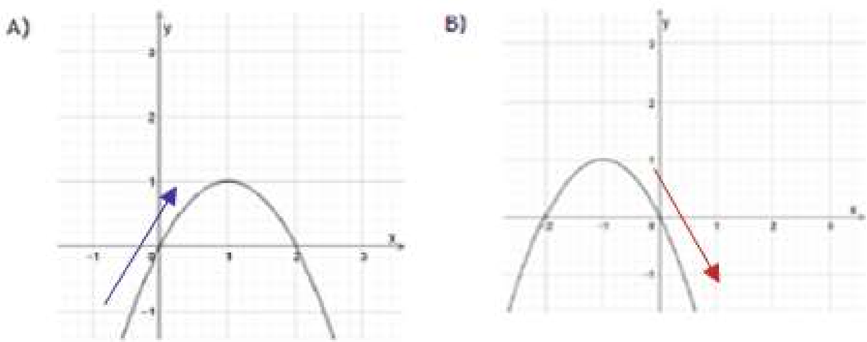
Nos restam analisar as Alternativa A e B:



Percebam que <u>as 2 passam na origem e apresentam concavidade voltada para baixo</u>. Iremos analisar o Coeficiente b.

3. O **Coeficiente b é igual a -2**, isto é, **negativo**. Ou seja, a parábola está **decrescendo** quando passa pelo eixo y.

Observe novamente as duas Alternativas:

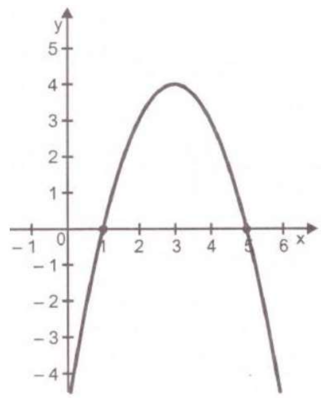


Veja que na Alternativa A a parábola está crescendo quando passa pelo eixo y e na Alternativa B ela está descrescendo.

Logo, como buscamos uma parábola com Coeficiente b negativo, isto é, que esteja descrescendo quando passa pelo eixo y, **nossa resposta é a Alternativa B**.

Gabarito: Alternativa **B**

(CM Conceição de Macabu - 2020) Na figura abaixo, está esboçado um gráfico de uma função $f(x)$ do 2º grau.



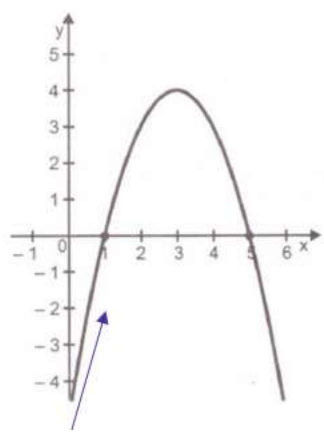
Qual é a lei de formação dessa função?

a) $f(x) = x^2 + 6x - 5$
b) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$
c) $f(x) = x^2 - 6x - 5$
d) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$

Comentários:

Vamos acelerar um pouco?

Observe o gráfico. É uma parábola com concavidade voltada para baixo e que está crescendo quando passa pelo eixo y, correto?



- Se a concavidade é voltada para **baixo**, então $\boldsymbol{a < 0}$.
- Se ela está **crescendo** quando passa pelo eixo y, $\boldsymbol{b > 0}$.

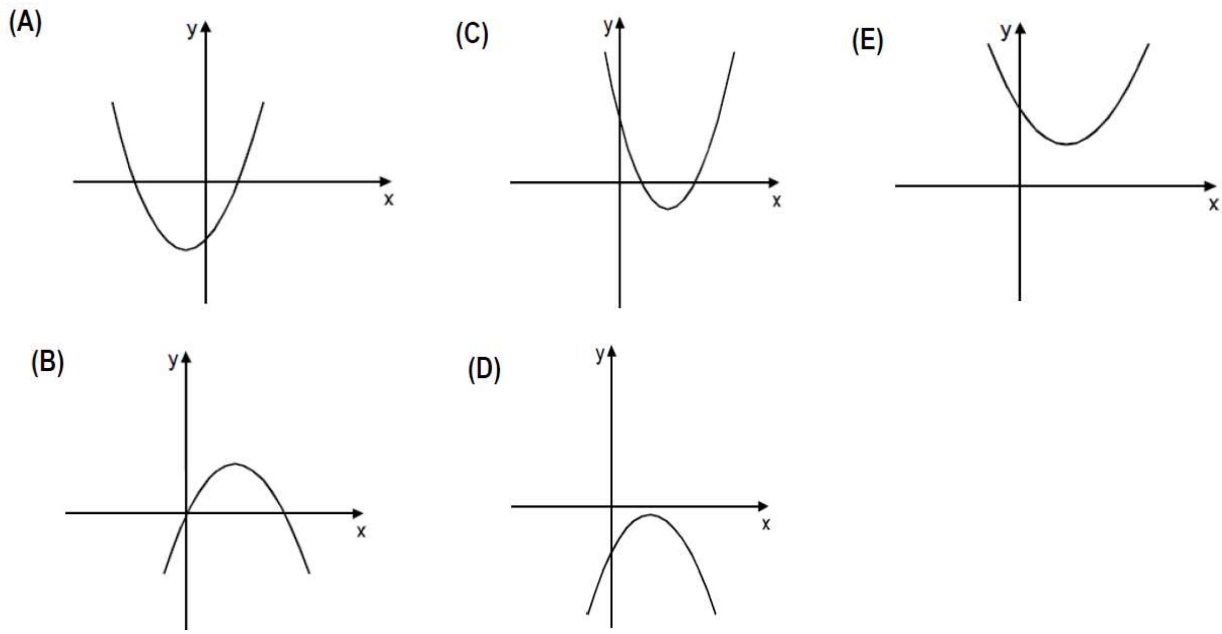
Qual das Alternativas, caro Aluno, apresenta um Coeficiente a positivo e um Coeficiente b negativo?

Apenas a Alternativa C. Matamos a questão apenas com a análise dos Coeficientes da equação do segundo grau.

Gabarito: Alternativa **C**

(Procurador Municipal de Terra Alta) O gráfico que melhor representa a parábola da função:

$$y = kx^2 + kx - k \;,\;\; k \in R^*$$



Comentários:

O enunciado nos afirma que $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{R}^*$, isto é, k é <u>diferente de zero</u>.

Chute qualquer valor para k e faça a análise como já estamos fazendo. Vamos chutar um valor de k igual a 972.

É claro que não precisa ser um número assim. Exagerei de propósito para que você tenha em mente vamos analisar os Coeficientes e não os seus valores em sim. Com $k = 972$ ficamos com:

$$y = kx^2 + kx - k$$

$$y = 972x^2 + 972x - 972$$

1. A parábola apresenta Coeficiente $\boldsymbol{a = 972 > 0}$, ou seja, a concavidade será voltada para **CIMA**.

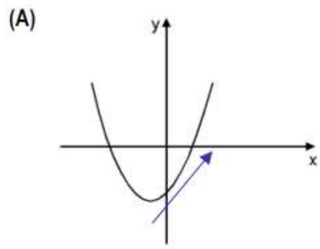
Eliminamos as Alternativas B e D.

2. O Coeficiente $c = -972 < 0$. Logo, a parábola corta o eixo y em $y = -972$, isto é, abaixo da origem.

Perceba que nas Alternativas C e E (não precisamos mais analisar a B e a D porque já as eliminamos) a parábola corta o eixo y em um valor positivo (acima da origem). E, como estamos buscando um valor negativo, eliminamos também essas 2 Alternativas.

Só nos restou a Alternativa A (que deve ser o gabarito). Vamos analisar o Coeficiente b e tirar a prova real.

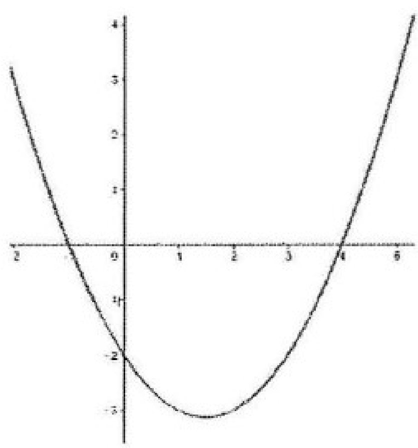
3. O Coeficiente $b = 972 > 0$. Então, a parábola deve estar **crescendo** quando passar pelo eixo y. Vamos analisar.



Realmente ela está crescendo quando passa pela origem. Confirmando assim nossa resposta.

Gabarito: Alternativa **A**

(Pref. Gravataí - 2019) A figura abaixo apresenta o gráfico de uma função do segundo grau do tipo $y = ax^2 + bx + c$. Sobre seus coeficientes, podemos afirmar que:



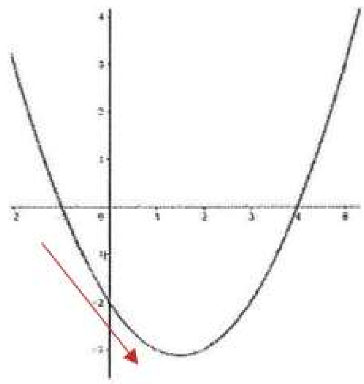
a) $a > 0, b > 0$ e $c > 0$.
b) $a > 0, b < 0$ e $c > 0$.
c) $a > 0, b > 0$ e $c < 0$.
d) $a > 0, b < 0$ e $c < 0$.
e) $a < 0, b > 0$ e $c < 0$.

Comentários:

1. Observe que a parábola tem concavidade voltada **PARA CIMA**. Logo:

$$\boldsymbol{a > 0}$$

2. A parábola está **decrescendo** quando passa pelo eixo y.



Sendo assim:

$$\boldsymbol{b < 0}$$

3. A Parábola corta o eixo y em $y = -2$. Então, $\boldsymbol{c = -2}$ que é menor que zero.

$$\boldsymbol{c < 0}$$

Então ficamos com: $\boldsymbol{a > 0, b < 0}$ e $\boldsymbol{c < 0}$.

Gabarito: Alternativa **D**

Raízes da Função do 2° Grau

Raiz de uma função, em termos genéricos, é o valor de x que tem o condão de zerar a função $f(x)$. Ou seja, para determinar a raiz da Função do 2° Grau devemos considerar $y = 0$.

Em outras palavras, as raízes da função são os valores de x tais que $f(x) = 0$.

Estudamos que a lei de formação da Função do 2° Grau é igual a:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

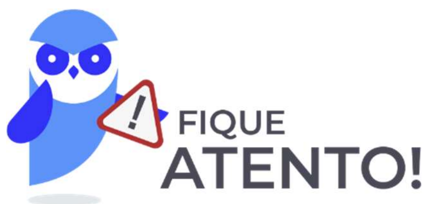
Para encontrar as raízes, vamos igualar o valor da função a zero:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Pela forma de Bhaskara teremos:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}}$$

Onde: $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$



As **raízes da função** são os pontos em que a parábola intercepta o eixo x.

Valores de Delta

Perceba que os valores de delta na fórmula acima **condicionam** as raízes da função. Veremos o que ocorre quando delta assume valores maiores que zero, igual a zero e menores que zero.

$\Delta > \mathbf{0}$

Quando delta for maior que zero $(\Delta > \mathbf{0})$, a função apresentará **duas raízes reais e distintas**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} \boldsymbol{x_1} = \dfrac{-\boldsymbol{b} + \sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}} \\ \\ \boldsymbol{x_2} = \dfrac{-\boldsymbol{b} - \sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{Ex_1}$: Encontre as raízes da função $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$

Primeiramente, vamos calcular o valor de delta:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

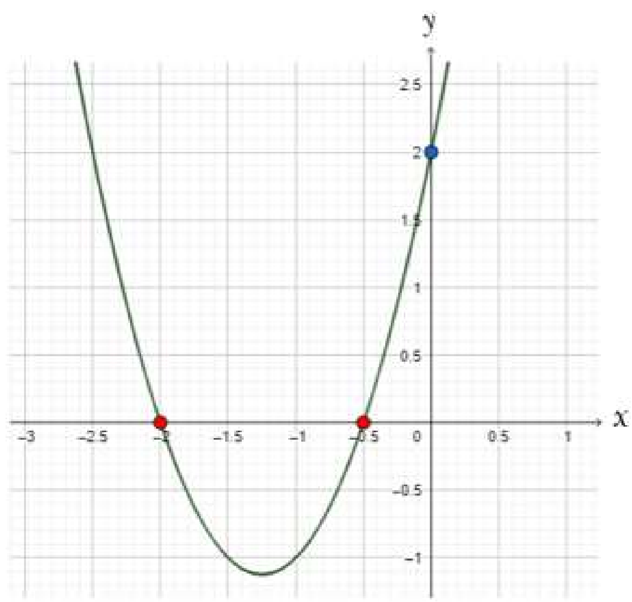
$$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 2$$

$$\Delta = 25 - 16 \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta = \mathbf{9}}$$

Ou seja, $\Delta = 9 > 0$ e assim, a função apresentará duas raízes reais e distintas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5 + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \dfrac{-5 + 3}{4} \rightarrow \boldsymbol{x_1} = \dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}} \\ x_2 = \dfrac{-5 - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \dfrac{-5 - 3}{4} \rightarrow \boldsymbol{x_2} = \mathbf{-2} \end{cases}$$

Representando graficamente teríamos:



Observe que, interpretando graficamente, conforme comentamos, <u>as raízes da função são os pontos em que a parábola intercepta o eixo x</u>.

Já podemos começar a fazer "*links*" com os outros pontos que estudamos na aula. Perceba que o Coeficiente $a = 2 > 0$ e a parábola tem concavidade voltada para cima. Perceba também que o Coeficiente $c = 2$, isto é, a parábola intercepta o eixo y em $y = 2$ (consoante assinalado no gráfico).

Veja que um ponto da aula servirá de base para outro ponto e, ao final, analisaremos a Função do 2° Grau com todas essas características aglutinadas.

$\Delta = \mathbf{0}$

Quando delta for igual a zero ($\Delta = \mathbf{0}$), a função apresentará **duas raízes reais e iguais**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm 0}{2a} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}}$$

- $\boldsymbol{Ex_2}$: Encontre as raízes da função $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$

Primeiramente, vamos calcular o valor de delta:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-3) \times (-3)$$

$$\Delta = 36 - 36 \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta = \mathbf{0}}$$

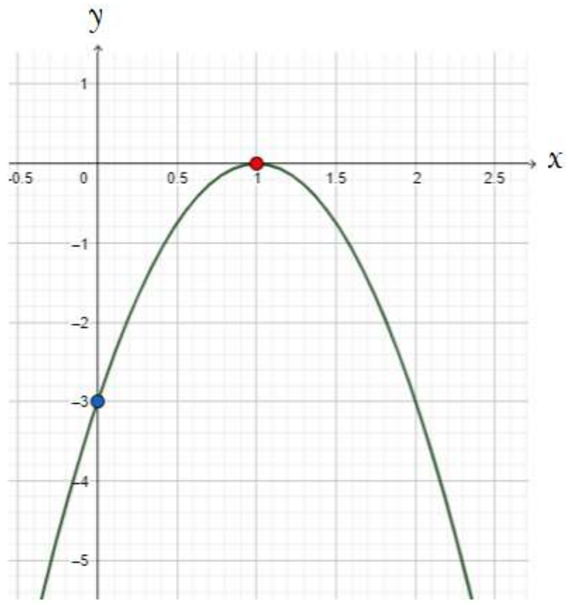
Ou seja, $\Delta = 0$ e assim, a função apresentará **duas raízes reais e iguais**:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-6}{2 \times (-3)}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-6}{-6} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = x_2 = 1}$$

Representando graficamente teríamos:



$\Delta < \mathbf{0}$

Quando delta for menor que zero $(\Delta < \mathbf{0})$, a função **não apresentará raízes reais**.

- $\boldsymbol{Ex_3}$: Encontre as raízes da função $f(x) = x^2 - x + 1$

Primeiramente, vamos calcular o valor de delta:

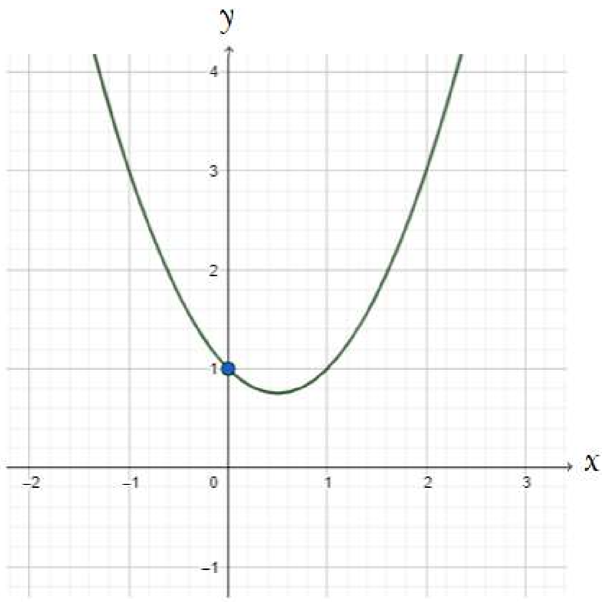
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1$$

$$\Delta = 1 - 4 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{\Delta = -3}}$$

Ou seja, $\Delta = -\mathbf{3} < \mathbf{0}$ e assim, a função não apresentará raízes reais, isto é, **NÃO INTERCEPTARÁ o eixo $\boldsymbol{x}$**.

Representando graficamente teríamos:



Observe que se trata de uma parábola com concavidade voltada para cima $(a = 1 > 0)$ e intercepta o eixo y em $y = 1$ $(c = 1)$.

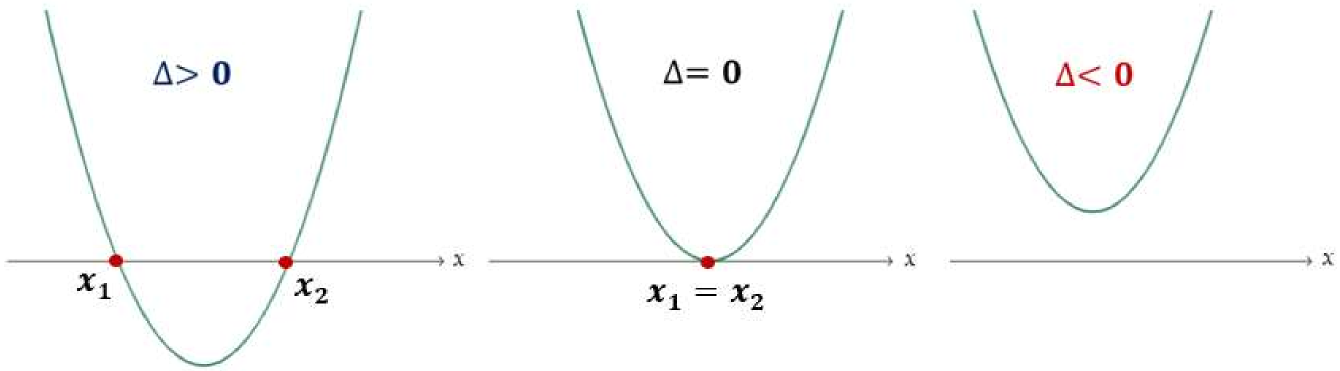
Porém, a parábola NÃO INTERCEPTA o eixo x, pois delta é menor que zero $(\Delta = -3 < 0)$ e a função não apresenta raízes reais.

ESQUEMATIZANDO

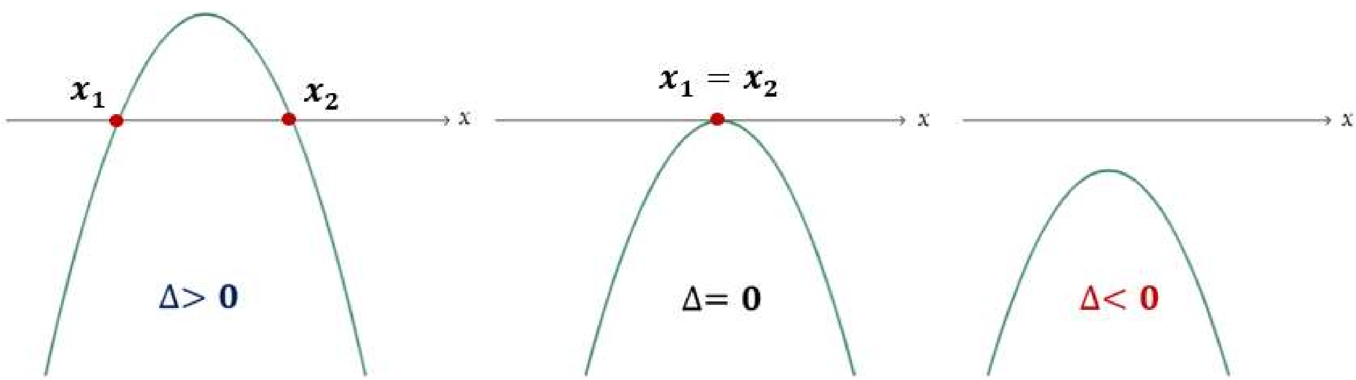
$$ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} \Delta > \mathbf{0}:\ x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = \mathbf{0}:\ x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} \\ \Delta < \mathbf{0}:\ \text{a função não apresentará raízes reais} \end{cases}$$

Uma vez estudado o Coeficiente a (que determina a concavidade da parábola) e o valor do delta da função (que determina a interceptação da parábola com o eixo x), podemos tecer alguns esboços

- $a > 0$: Concavidade voltada para **cima**



- $a < 0$: Concavidade voltada para **baixo**



Vejamos algumas **questões de concursos** sobre esse assunto.

HORA DE
PRATICAR!

(Pref. São Roque do Canaã - 2020) Em uma função quadrática chamamos de "zeros da função" os valores de x nos quais o gráfico corta o eixo das abscissas. Qual das alternativas abaixo indica os zeros da função $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$?

a) $(-3\,;1)$
b) $(-3\,;-2)$
c) $(-2\,;1)$
d) $(2\,;-1)$
e) $(3\,;-1)$

Comentários:

Em uma função quadrática chamamos de "zeros da função" os valores de x nos quais o gráfico corta o eixo das abscissas, ou seja, as raízes da função são os valores de x tais que $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

Vamos igualar $f(x) = 0$ e encontrar as raízes:

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

Onde: $a = 3, b = 6$ e $c = 9$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 3 \times (-9)}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{6}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{6}$$

$$x = \frac{-6 \pm 12}{6} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-6 - 12}{6} = \dfrac{-18}{6} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = -3} \\[2em] x_2 = \dfrac{-6 + 12}{6} = \dfrac{6}{6} \rightarrow \boldsymbol{x_2 = 1} \end{cases}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(UNIFAGOC - 2020) O valor de k para que a equação do segundo grau $2x^2 - 12x + 3k = 0$ tenha raízes reais e iguais é:

a) 0
b) 2
c) 4
d) 6

Comentários:

Estudamos que, para a Função do 2° Grau ter duas raízes reais e iguais, o delta Δ **de Bhaskara deve ser igual a zero.**

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

Na função $2x^2 - 12x + 3k = 0$ os coeficientes são:

$$a = 2\ ,\ b = -12 \text{ e } c = 3k$$

Perceba que o Coeficiente c é aquele **independente**, isto é, que **não está acompanhando a variável x**. No nosso caso, é todo o termo "$\mathbf{3k}$".

Vamos substiruir os valores na equação acima e calcular o valor de k para $\Delta = 0$.

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-12)^2 - 4 \times 2 \times (3k) = 0$$

$$144 - 24k = 0$$

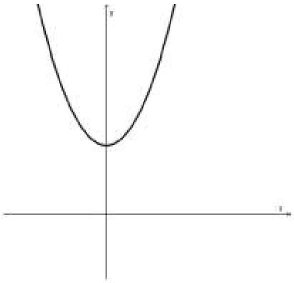
$$144 = 24k$$

$$k = \frac{144}{24} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 6}$$

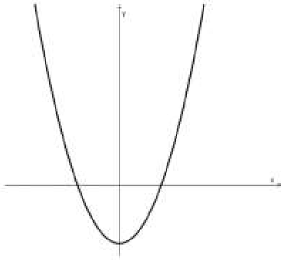
Gabarito: Alternativa **D**

(Pref. Cordilheira - 2019) Dentre as alternativas abaixo, assinale aquela que pode representar o gráfico da seguinte função de segundo grau: $f(x) = x^2 + 16$.

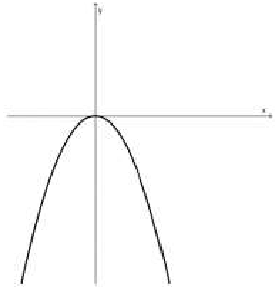
A)



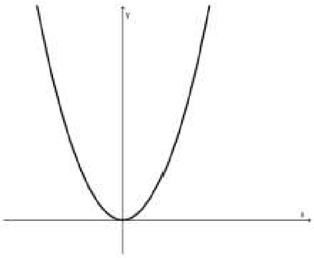
C)



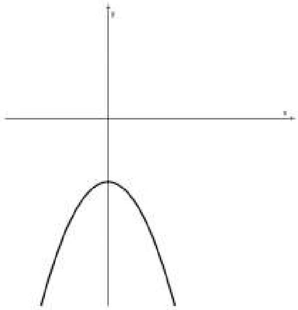
E)



B)



D)



Comentários:

Com os conhecimentos que já adquirimos na aula, vamos pensar direto:

1. O Coeficiente $\boldsymbol{a = 1 > 0}$. Logo, a parábola tem concavidade voltada para **cima**. Já eliminamos as Alternativas D e E.

2. O Coeficiente $\boldsymbol{c = 16}$. Então, a parábola corta o eixo y em $y = 16$. Observe que na Alternativa B ela corta em $y = 0$ e na alternativa C, em um valor negativo (abaixo da origem). Logo, descartaríamos essas 2 Alternativas.

Nos sobra como gabarito, a Alternativa **A**.

Porém, vamos tirar a prova real. Perceba que na Alternativa A, **a parábola não intercepta o eixo x, ou seja, não tem raízes reais.** Quando isto ocorre, o **delta Δ deve ser menor que zero**. Vamos então calcular o delta de Bhaskara e constatar se ele é mesmo menor que zero.

$$f(x) = x^2 + 16$$

Onde: $a = 1, b = 0$ e $c = 16$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 16$$

$$\Delta = 0 - 64 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta = -64}$$

Ou seja, delta é negativo, confirmando assim nosso gabarito.

Gabarito: Alternativa **A**

FORMA FATORADA

Estudamos que a **Função polinomial do 2° Grau** (ou Função Quadrática) é uma função de $f: R \rightarrow R$ descrita pela seguinte lei de formação matemática:

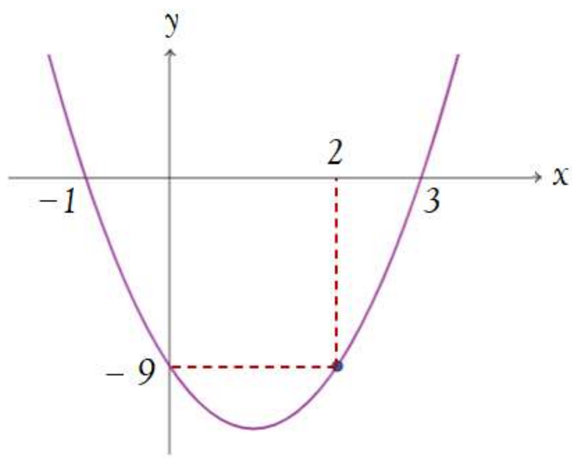
$$\boldsymbol{f(x) = y = ax^2 + bx + c}$$

Onde, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são os **coeficientes** determinados por números reais e $a \neq 0$.

Todavia, se soubermos as raízes x_1 e x_2 da função (estudadas em tópico anterior), podemos definir essa mesma função pela sua forma **FATORADA**:

$$\boldsymbol{y = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Por exemplo: Caso uma questão de concurso lhe pedisse para encontar a fórmula da seguinte função quadrática:



Vamos resolver pela forma fatorada. Sabemos, como visto acima, que a forma fatorada é igual a:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Observe que as raízes estão visíveis no gráfico: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$. Logo, a função será?

$$y = a(x - (-1))(x - 3)$$

$$\boldsymbol{y = a(x + 1)(x - 3)}$$

"Certo, professor. E para encontar o valor do Coeficiente a? Estou vendo ali que a questão trouxe o ponto $(2\,;\,-9)$ como pertencente a função. Devo substituir ele na fórmula acima?"

Perfeito, Aluno! Você mesmo já respondeu a indagação. Vamos substituir o ponto $(2\,;\,-9)$ que é pertencente à função na fórmula e encontrar o valor de a.

$$y = a(x+1)(x-3)$$

$$-9 = a(2+1)(2-3)$$

$$-9 = a \times 3 \times -1$$

$$-9 = -3a$$

$$a = \frac{-9}{-3} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = 3}}$$

Logo, a função será:

$$\boldsymbol{y = 3(x+1)(x-3)}$$

E se quisermos a fórmula geral, basta aplicarmos a <u>distributiva</u>:

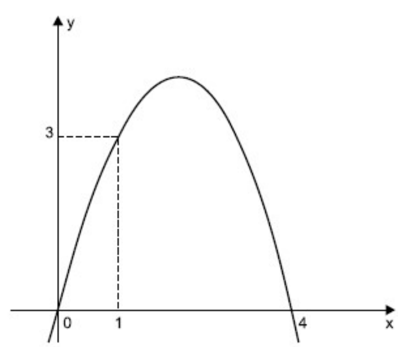
$$y = 3(x+1)(x-3)$$

$$y = (3x+3)(x-3)$$

$$y = 3x^2 + 3x - 9x - 9 \rightarrow \boldsymbol{y = 3x^2 - 6x - 9}$$

Observe a questão do concurso abaixo:

(Pref. Peruíbe - 2019) O gráfico da figura é de uma função quadrática f(x).



Assim, $f(0{,}5)$ é igual a

a) 1,75
b) 1,5
c) 1,25
d) 1
e) 0,75

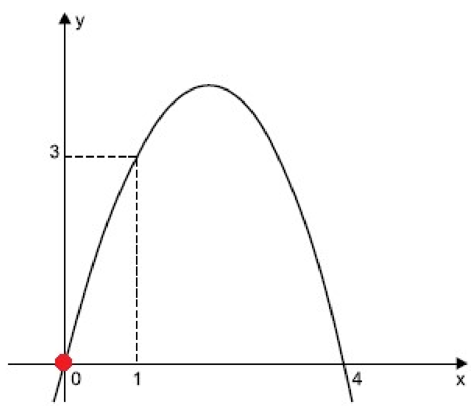
Comentários:

Vamos resolver essa questão por 2 maneiras. A primeira será pela fórmula geral $y = ax^2 + bx + c$. A segunda será pela forma fatorada $y = a(x - x_1)(x - x_2)$:

1. **Forma Geral**

Vamos, primeiramente, <u>determinar a equação da parábola $y = ax^2 + bx + c$.</u>

O Coeficiente c indica o valor onde a parábola intercepta o eixo y, isto é, quando $x = 0$. Observe que a parábola "corta" o eixo y em $y = 0$.



Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{c = 0}}$$

Observe que a parábola passa pelos pontos $(1; 3)$ e $(4; 0)$. Vamos substituir estes pontos na equação.

- Substituindo o ponto $(4; 0)$:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = a(4)^2 + b4 + 0$$

$$0 = 16a + 4b$$

Simplificando toda a igualdade por 4:

$$0 = 16a + 4b \quad \div (4)$$

$$0 = 4a + b \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = -4a}}$$

- Substituindo o ponto $(1; 3)$:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$3 = a(1)^2 + b1 + 0$$

$$3 = a + b$$

Na primeira substituição, determinamos que $b = -4a$. Sendo assim,

$$3 = a + b$$

$$3 = a - 4a$$

$$3 = -3a$$

$$a = \frac{3}{-3} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a = -1}}$$

De posse de a, calculamos b.

$$b = -4a$$

$$b = -4(-1) \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = 4}}$$

Então, a função quadrática será:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = -x^2 + 4x + 0$$

$$\boldsymbol{y = -x^2 + 4x}$$

2. Forma Fatorada

Pelo gráfico da função temos que, na forma fatorada $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$. Substituindo:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - 0)(x - 4)$$

$$\boldsymbol{y = a(x)(x - 4)}$$

E para determinar o valor de a, substituiremos o ponto $(1\,;3)$ na equação acima:

$$3 = a(1)(1 - 4)$$

$$3 = a \times 1 \times -3$$

$$3 = -3a$$

$$a = \frac{3}{-3} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = -1}}$$

Logo, a função será:

$$y = a(x)(x - 4)$$

$$y = -1(x)(x - 4)$$

$$\boldsymbol{y = -x^2 + 4x}$$

Chegamos na equação da função pelas 2 formas.

E aí, caro Aluno. Qual delas você prefere? Não importa sua preferência. As duas te levarão ao mesmo resultado. Uma com um pouco mais de trabalho que outra.

Minha função é te mostrar todos os caminhos possíveis para que, caso você se esqueça de um deles na hora da prova, possa se resguardar no outro.

Por fim, de posse da fórmula da função, calculamos $f(0{,}5)$:

$$y = -x^2 + 4x$$

$$f(0{,}5) = -(0{,}5)^2 + 4(0{,}5)$$

$$f(0{,}5) = -0{,}25 + 2 \rightarrow \boldsymbol{f(0{,}5) = 1{,}75}$$

Gabarito: Alterantiva **A**

DETERMINAÇÃO DAS RAÍZES POR SOMA E PRODUTO

Estudamos que **Raiz de uma função**, em termos genéricos, é o valor de x que tem o condão de zerar a função $f(x)$. Ou seja, para determinar as raízes da Função do 2° Grau devemos considerar $y = 0$.

Você deve se recordar de que, para encontrar as raízes, desenvolvemos a fórmula de Bhaskara quando igualamos $y = 0$.

Este tópico presente tem o objetivo de encontrar as raízes **sem ser necessário desenvolver a equação por Bhaskara**. Iremos apenas determinar **a soma e o produto** das raízes x_1 e x_2 da equação do segundo grau.

Dada a Função do 2° Grau:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

A **soma** e o **produto** das raízes serão iguais a:

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}}$$

$$\boxed{P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}}$$

Vejamos numericamente para melhorar a compreensão.

EXEMPLIFICANDO

- $\boldsymbol{Ex_1}$: Determine as raízes da equação: $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Primeiramente vamos evidenciar os coeficientes:

$a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$

- A **soma** das raízes será igual a:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{-5}{1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 + x_2 = 5}$$

- O **produto** das raízes:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = 6}$$

Ou seja, as raízes do segundo grau deverão ter soma 5 e produto 6.

Quais os dois números que somados resultam em 5 e multiplicados resultam em 6?

2 e 3, correto?

Logo,

$$\boldsymbol{x_1 = 2} \text{ e } \boldsymbol{x_2 = 3}$$

Vamos resolver este exemplo também pelo jeito "normal" que vínhamos fazendo, isto é, por Bhaskara:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Onde: $a = 1, b = -5$ e $c = 6$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 3} \\[2ex] x_2 = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} \rightarrow \boldsymbol{x_2 = 2} \end{cases}$$

Perceba que as duas resoluções apresentam o mesmo resultado. Resolver por soma e produto é um pouco mais rápido para àqueles alunos que já tem uma certa familiaridade com a matéria.

Vejamos mais um exemplo:

- $\boldsymbol{Ex_2}$: Determine as raízes da equação: $f(x) = 2x^2 + 6x - 8$

Primeiramente vamos evidenciar os coeficientes:

$a = 2$, $b = 6$ e $c = -8$.

- A **soma** das raízes será igual a:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{6}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 + x_2 = -3}$$

- O **produto** das raízes:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-8}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = -4}$$

Ou seja, as raízes do segundo grau deverão ter soma -3 e produto -4.

Quais os dois números que somados resultam em -3 e multiplicados resultam em -4?

1 e -4, correto?

Logo,

$$\boldsymbol{x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -4}$$

TOME NOTA!

Esclareço (mais uma vez) que **as duas resoluções apresentam o mesmo resultado**. Resolver por soma e produto é um pouco mais rápido para àqueles alunos que já tem uma **certa familiaridade com a matéria**. Porém, se você resolver pela forma tradicional, isto é, por Bhaskara, chegará no mesmo resultado.

E resolver por Soma e Produto **nem sempre será mais rápido**:

Por exemplo: $f(x) = 3x + 14x + 5$

Você não vai na hora da prova ficar "se matando" para achar duas raízes que somem $-14/3$ e que a multiplicação resulte em $5/3$.

Nesse caso, melhor resolver por Bhaskara.

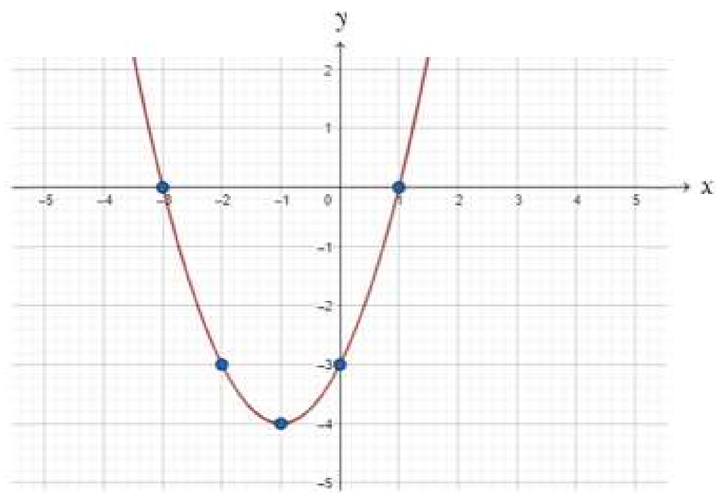
RESUMINDO

$$\text{raízes}\begin{cases}\text{Soma: } S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\\[2ex]\text{Produto: } P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}\end{cases}$$

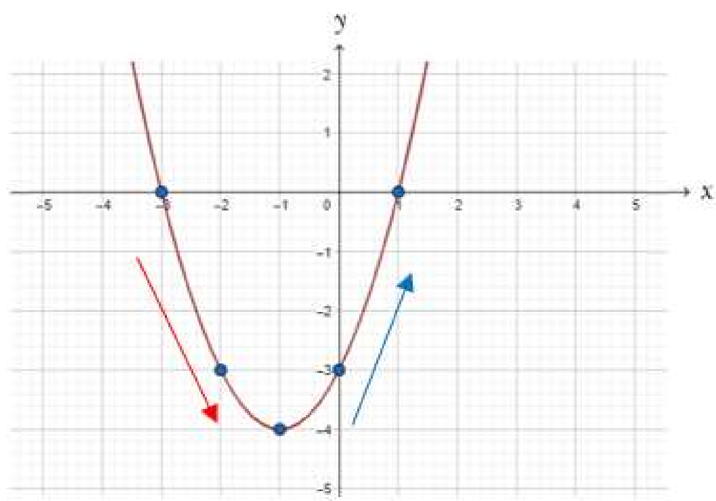
VÉRTICE DA PARÁBOLA

Acredito que, dentro da aula de Função do 2° Grau, esse seja o **assunto mais cobrado pelas bancas**.

Vamos retornar ao primeiro exemplo que estudamos ao construir o gráfico da função. Representamos graficamente a seguinte função: $y = x^2 + 2x - 3$



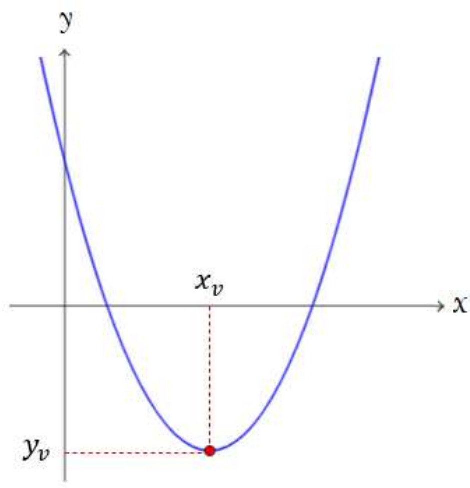
Observe que a parábola vem decaindo da esquerda para a direita até chegar em um ponto de mínimo e, depois desse ponto, a parábola começa a ser crescente.



Esse ponto, em que a parábola muda de sentido, é denominado **VÉRTICE DA PARÁBOLA** e poderá ser um **ponto de MÍNIMO** ou um **ponto de MÁXIMO** a depender do Coeficiente $\boldsymbol{a}$ da parábola.

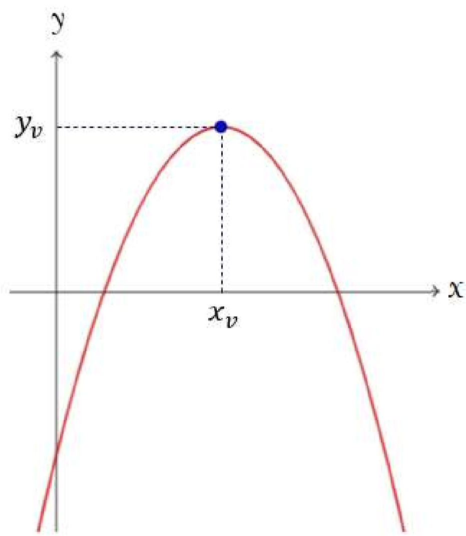
$a > 0$

Quando a parábola apresentar concavidade voltada para **cima**, isto é, Coeficiente $a > 0$, a parábola terá um **PONTO DE MÍNIMO**.



$a < 0$

Quando a parábola apresentar concavidade voltada para **baixo**, isto é, Coeficiente $a < 0$, a parábola terá um **PONTO DE MÁXIMO**.



Perceba que a parábola vem crescendo da esquerda para a direita até chegar em um ponto de máximo e, a partir desse ponto, a parábola começa a ser decrescente.

RESUMINDO

$$\textbf{Vértice da Parábola} \begin{cases} a > 0 \quad \rightarrow \quad \text{Ponto de } \textbf{MÍNIMO} \\ \\ a > 0 \quad \rightarrow \quad \text{Ponto de } \textbf{MÁXIMO} \end{cases}$$

Coordenadas do Vértice

O **Ponto de Vértice da Parábola** é representado pela abscissa x do vértice e ordenada y do vértice.

$$\boxed{\boldsymbol{V = (x_v\ ;\ y_v)}}$$

Abaixo, vamos demonstrar como se calcula cada coordenada.

TOME NOTA!

Não precisamos decorar o passo a passo abaixo de como se provar cada coordenada. Quero que você apenas entenda de onde veio e, ao final, **DECORE** a equação que eu irei apresentar de cada coordenada.

x do Vértice (x_v)

O $\boldsymbol{x}$ do Vértice da Parábola é o ponto médio das raízes da Função Quadrática.

$$\boldsymbol{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Onde:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Substituindo os valores na equação e calculando x_v teremos:

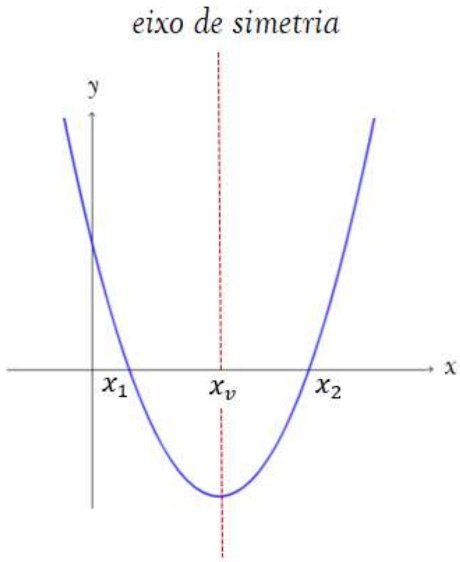
$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_v = \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2}$$

$$x_v = \frac{\frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}}{2}$$

$$x_v = \frac{-2b}{4a} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x_v = \frac{-b}{2a}}}$$

A reta vertical (paralela ao eixo y) que passa pelo ponto x do Vértice **divide a parábola em 2 partes simétricas**. Essa reta vertical é denominada **EIXO DE SIMETRIA** da parábola:



Observe graficamente que, conforme definimos inicialmente, o x do Vértice da Parábola é o ponto médio das raízes da Função Quadrática.

$$\boldsymbol{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

$\boldsymbol{y}$ do Vértice $(\boldsymbol{y_v})$

Para encontrarmos o valor do $\boldsymbol{y}$ do Vértice, vamos substituir o valor do x_v na equação da função $y = ax^2 + bx + c$.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y_v = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$y_v = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{y_v = \frac{-\Delta}{4a}}}$$

Conforme comentei acima, **você não precisa saber este passo a passo**. Saiba apenas que para encontrar o y_v, substituímos o valor do x_v na equação da função.

Todavia, você **DEVE DECORAR** as coordenadas do Vértice da Parábola.

$$\boldsymbol{V = \left(x_v = \frac{-b}{2a} \;\; ; \;\; y_v = \frac{-\Delta}{4a}\right)}$$

Vejamos dois exemplos e, depois dos exemplos, iremos resolver algumas questões de concursos sobre este tópico que "**despenca em provas**".

- $\boldsymbol{Ex_1}$: Encontre o vértice da função $y = x^2 + 2x - 5$

Primeiramente, vamos enumerar os Coeficientes dessa função:

$$a = 1 \,, b = 2 \text{ e } c = -5$$

Depois, calculamos o $\boldsymbol{x}$ do vértice da parábola (x_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-2}{2 \times 1}$$

$$x_v = \frac{-2}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x_v = -1}}$$

Para calcular o y do vértice (y_v) podemos seguir 2 caminhos. Ou utilizamos diretamente a fórmula vista acima, ou substituímos o valor do x_v na equação da função. Vejamos as 2 formas.

i. **Aplicando a fórmula**:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(2^2 - 4 \times 1 \times (-5))}{4 \times 1}$$

$$y_v = \frac{-(4 + 20)}{4}$$

$$y_v = \frac{-24}{4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y_v = -6}}$$

ii. **Substituindo o valor do x_v na equação da função.**

$$y = x^2 + 2x - 5$$

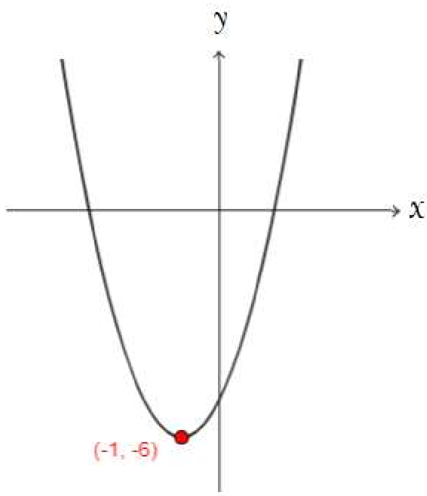
$$y_v = {x_v}^2 + 2x_v - 5$$

$$y_v = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 5$$

$$y_v = 1 - 2 - 5 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y_v = -6}}$$

Então, caro Aluno, você pode optar por qual caminho seguir para calcular a ordenada do vértice da parábola. **Escolha o que se sentir mais confortável**. Porém, **não deixe de decorar a fórmula** do y_v.

Representando o esboço da parábola teríamos:



- $\boldsymbol{Ex_2}$: Encontre o vértice da função $y = -2x^2 + 3$

$$a = -2\,,\, b = 0 \text{ e } c = 3$$

Calculando x_v:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-0}{2 \times (-2)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x_v = 0}}$$

Substituindo o valor do x_v na equação da função e calculando y_v:

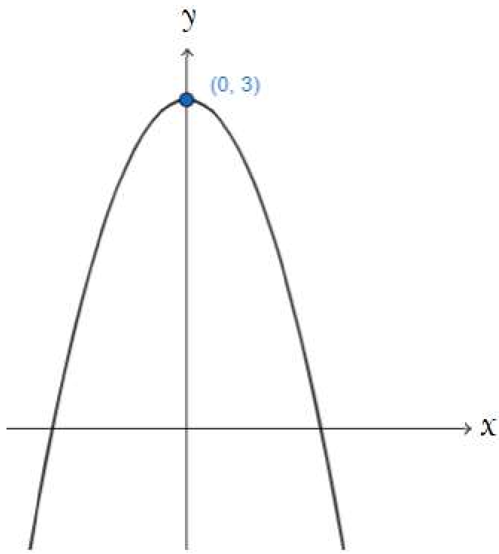
$$y = -2x^2 + 3$$

$$y_v = -2{x_v}^2 + 3$$

$$y_v = -2(0)^2 + 3$$

$$y_v = 0 + 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{y_v = 3}}$$

<u>Graficamente</u> teríamos:



Vejamos algumas **questões de concursos** para solidifcar o conhecimento desse tópico

HORA DE PRATICAR!

(Pref. Frecheirinha - 2021) O lucro mensal da minha fábrica de revistas é dado por $L(x) = -x^2 + 12x - 3$, onde x é a quantidade em milhares de revistas mensalmente vendidas. Quantas revistas devo vender num determinado mês para que minha fábrica obtenha lucro máximo?

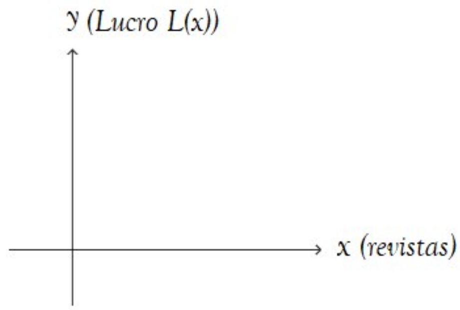
a) 1.000
b) 8.000
c) 600
d) 10.500
e) 6.000

Comentários:

Observe, primeiramente, que a parábola tem Coeficiente $a = -1 < 0$, isto é, ela apresenta concavidade voltada para **baixo** e, consequentemente, apresenta ponto de **MÁXIMO**.

O enunciado nos questiona quantas revistas devem ser vendidas para obter lucro máximo.

Perceba que o Lucro está no eixo y sendo determinado pela função $L(x)$ e a quantidade de revistas vendidas está no eixo x.



Estou <u>enfatizando</u> bem isto porque quero que você sempre **tenha em mente o que representa cada eixo para saber o que está sendi pedido no enunciado**. Nesse enunciado nos foi questionado, conforme falamos, quantas revistas devem ser vendidas para obter lucro máximo.

Se as revistas estão no eixo x, a banca quer saber qual é o x do vértice.

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

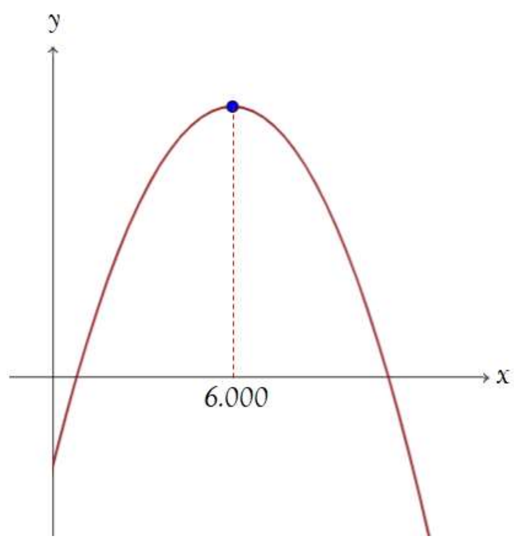
$$x_v = \frac{-12}{2 \times (-1)}$$

$$x_v = \frac{-12}{-2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x_v = 6\ milhares}}$$

Transformando para unidades:

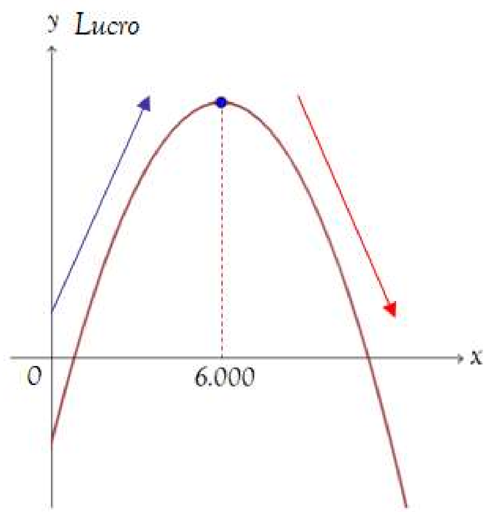
$$x_v = 6.000\ unidades$$

Por fim, vamos <u>interpretar graficamente</u> este enunciado. Desenhando a função:



- A função não pode ter valores de x negativos, uma vez que x representa a quantidade de revistas vendidas e, na teoria real, não podemos vender uma quantidade negativa de alguma coisa.

- Observe que a função do Lucro (eixo y) vai crescendo quando nos deslocamos da esquerda para a direita até um valor máximo (vértice da função). Ou seja, a cada quantidade maior de revistas vendidas, maior será o lucro. Todavia, após esse valor máximo, se vendermos uma quantidade a mais, o Lucro começa a cair (na matemática não entraremos no mérito do porquê está caindo. Deixaremos isto para a matéria de economia).



- Perceba que de 0 até 6.000 unidades vendidas o Lucro vai aumentando. Porém, quando se começa a vender mais que 6.000 unidades, o lucro decai.

- O Lucro máximo ocorre quando vendemos 6.000 unidades, isto é, quando $x_v = 6.000$.

É claro que **não iremos fazer toda esta análise nas próximas questões**. Iremos acelerar a resolução cada vez mais igual você irá fazer no dia da prova.

Dito isto,

Gabarito: Alternativa **E**

(CRQ 3 RJ - 2020) A temperatura de uma determinada solução, a partir do instante $t = 0$, varia de acordo com a função $f(t) = -t^2 + 40t - 230$, onde t é o tempo medido em minutos e $f(t)$ é a temperatura em graus Celsius da solução no instante t. A temperatura máxima que esta solução poderá atingir é:

a) 20°C
b) 170°C

c) 230°C
d) -230°C

Comentários:

Observe, primeiramente, que a função $f(t) = -t^2 + 40t - 230$ tem Coeficiente $\boldsymbol{a = -1 < 0}$, isto é, ela apresenta concavidade voltada para **baixo** e, consequentemente, apresenta ponto de **MÁXIMO**.

A banca nos questiona o valor de t do vértice da função (perceba que t está no eixo x). Ou seja, $\boldsymbol{t_v}$ **é análogo a** $\boldsymbol{x_v}$.

Lembre-se de que a banca pode colocar qualquer letra nos lugares das variáveis e dos coeficientes. Debatemos este ponto nessa aula e também na aula de função do primeiro grau.

Calculando t_v:

$$t_v = \frac{-b}{2a}$$

$$t_v = \frac{-40}{2 \times (-1)}$$

$$t_v = \frac{-40}{-2} \rightarrow \boldsymbol{t_v = 20°C}$$

Ou seja, **a temperatura máxima que esta solução poderá atingir é de 20°C**.

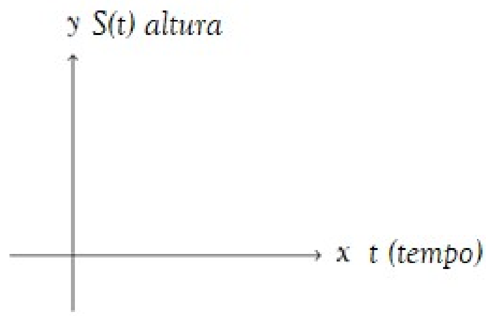
Gabarito: Alternativa **A**

(Pref. Conceição de Macabu - 2020) Um canhão de guerra lançou uma bola para frente, onde a bola fez uma trajetória parabólica descrita pela função $\boldsymbol{S(t) = 30t - t^2}$, onde $\boldsymbol{S(t)}$ representa a altura atingida pela bola, em metros, e $\boldsymbol{t}$ representa o tempo, em segundos. Qual foi a altura máxima atingida pela bola?

a) 30m
b) 125m
c) 225m
d) 300m

Comentários:

Perceba que nesse problema a banca nos questiona o **valor da altura máxima** e observe que a altura está no eixo y representada pela função $S(t)$.



Por isso a importância de **distuinguir previamente quem está no eixo x e quem está no eixo y**. Tenho certeza que se você calculasse automaticamente o x_v, encontraria uma resposta dentre as alternativas que não seria o gabarito. Seria um erro crucial na sua prova.

Então, vamos calcular o y do vértice da parábola da função $S(t) = 30t - t^2$, onde:

$$a = -1 \, , b = 30 \text{ e } c = 0$$

Aplicando a fórmula teremos:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(30^2 - 4 \times (-1) \times 0)}{4 \times (-1)}$$

$$y_v = \frac{-(900 - 0)}{-4}$$

$$y_v = \frac{-900}{-4} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y_v = 225}$$

Então, **a altura máxima atingida pela bola foi de $225m$.**

Gabarito: Alternativa **C**

(Pref. Colômbia - 2020) Sendo o ponto $P(4, 13)$ o ponto máximo da função $y = -x^2 + mx + n$, então, a soma entre os valores de m e n é:

a) 5

b) 8
c) 9
d) 11

Comentários:

O enunciado nos afirma que o ponto máximo da função $y = -x^2 + mx + n$, onde $a = -1$, $b = m$ e $c = n$ é $P(x_v = 4\,;\ y_v = 13)$.

Vamos aplicar a fórmula do x do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$4 = \frac{-m}{2 \times (-1)}$$

$$4 = \frac{-m}{-2}$$

$$-m = 4 \times -2$$

$$-m = -8 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{m = 8}}$$

Ou seja, $\boldsymbol{b = m = 8}$.

Para encontrar o valor de n, aplicamos a fórmula do y do vértice:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$13 = \frac{-(8^2 - 4 \times (-1) \times n)}{4 \times (-1)}$$

$$13 = \frac{-(64 + 4n)}{-4}$$

$$-4 \times 13 = -64 - 4n$$

$$-52 = -64 - 4n$$

$$4n = -64 + 52$$

$$4n = -12$$

$$n = \frac{-12}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{n = -3}}$$

Logo,

$$m + n = 8 + (-3) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m + n = 5}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(Pref. São Cristóvão - 2019) Tendo como referência as funções $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = x^2 - 3$ em que $-\infty < x < +\infty$, julgue o item que se segue.

A função $f(x)$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 5/2]$ e crescente no intervalo $[5/2, +\infty]$.

Comentários:

Primeiro passo é <u>esboçar a parábola</u> da função $f(x) = x^2 - 5x + 4$, onde $a = 1, b = -5$ e $c = 4$ para visualizarmos suas características.

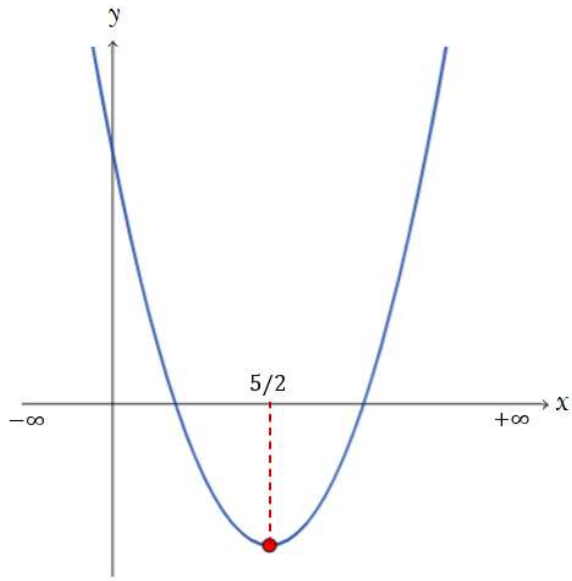
Observe que se trata de uma parábola com concavidade voltada para **cima** (Coeficiente $\boldsymbol{a = 1 > 0}$) e, consequentemente, apresentará ponto de **MÍNIMO**.

Vamos calcular o x do vértice para saber onde ocorre esse ponto de mínimo:

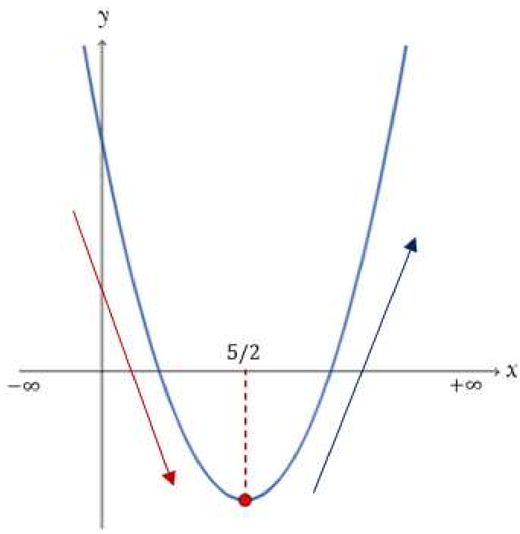
$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-(-5)}{2 \times 1} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x_v = \frac{5}{2}}}$$

Representado o esboço <u>graficamente</u>:



Observe que, conforme nos deslocamos da esquerda para a direita, a parábola vem decrescendo até atingir o ponto de mínimo e, a partir desse ponto, ela começa a ser crescente.



Ou seja, a parábola é **decrescente** no intervalo $(-\infty, 5/2]$ e **crescente** no intervalo $[5/2, +\infty]$.

Gabarito: **CERTO**

(EEAR - 2019) Para que a função quadrática $y = -x^2 + 3x + m - 2$ admita o valor máximo igual a $-3/4$, o valor de m deve ser

a) -3

b) -2
c) -1
d) 0

Comentários:

Vamos detalhar os coeficientes da função quadrática $y = -x^2 + 3x + m - 2$.

$a = -1$

$b = 3$

$c = m - 2$

Observe que o coeficiente $\boldsymbol{c}$, isto é, o termo independente da função, é tudo aquilo que não multiplica a variável x. Então, nesse problema, temos $\boldsymbol{c = m - 2}$.

O enunciado nos questiona o valor de m para que a função tenha valor máximo em $-3/4$, ou seja, para que **$\boldsymbol{y}$ do vértice seja igual a $\boldsymbol{-3/4}$**.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$\frac{-3}{4} = \frac{-\left(3^2 - 4 \times (-1) \times (m - 2)\right)}{4 \times (-1)}$$

$$\frac{-3}{4} = \frac{-\left(9 + 4(m - 2)\right)}{-4}$$

$$\frac{-3}{4} = \frac{-(9 + 4m - 8)}{-4}$$

$$\frac{-3}{4} = \frac{-(1 + 4m)}{-4}$$

$$\frac{-3 \times -4}{4} = -(1 + 4m)$$

$$3 = -1 - 4m$$

$$4m = -1 - 3$$

$$4m = -4$$

$$m = \frac{-4}{4} \rightarrow \boldsymbol{m = -1}$$

Gabarito: Alternativa **C**

Domínio e Imagem

Domínio

Na função do primeiro do grau (e em qualquer função genérica), o **domínio** é composto pelos **valores que a variável x pode assumir.**

O **domínio da função afim** é o Conjuntos dos números Reais. Ou seja, x pode assumir qualquer valor na reta Real.

$$\boxed{\boldsymbol{D(f) = x \in R}}$$

Imagem

A **Imagem da função afim** definida por $f(x) = y = ax + b$ é, assim como o Domínio, composta pelo Conjunto dos números Reais.

Em outras palavras, a **Imagem** é o valor que y assume dado um valor de x. E, conforme falamos acima, y pode ter qualquer valor dentre os números Reais.

$$\boxed{\boldsymbol{I(f) = R}}$$

Resumindo, os valores de $\boldsymbol{x}$ são o **Domínio** da função, enquanto que os valores de $\boldsymbol{y}$ (dado esses valores de x) são chamados de **Imagem** da função.

(Pref. Tramandaí - 2021) A partir de uma função $f(x) = 2x - 13$ de $R \to R$, qual elemento do domínio tem imagem igual a 3?

a) 10
b) 8
c) 6
d) 5

Comentários:

A banca nos questiona qual o valor de x (elemento do domínio) que tem resultado $y = 3$ (imagem). Vamos substituir $y = 3$:

$$f(x) = y = 2x - 13$$

$$3 = 2x - 13$$

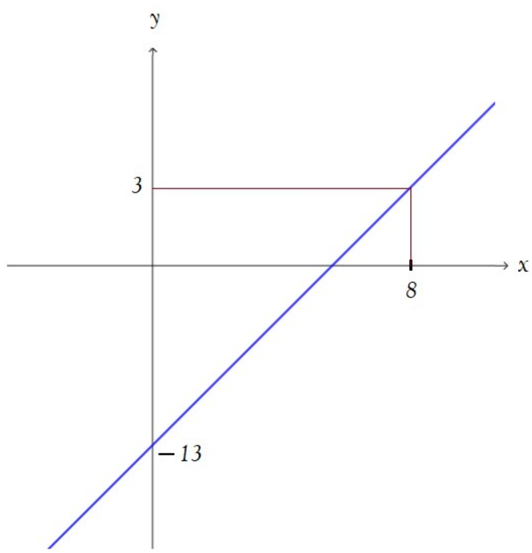
$$2x = 3 + 13$$

$$2x = 16$$

$$x = \frac{16}{2} \rightarrow \boldsymbol{x = 8}$$

Então, o elemendo do domínio $x = 8$, tem como Imagem o valor $y = 3$.

Ainda iremos estudar o gráfico da função do primeiro grau. Mas, para já ir adiantando, seria igual a:



Perceba que, quando $x = 8$ (domínio), $y = 3$ (imagem).

Gabarito: Alternativa **B**

(Pref. Santo Augusto - 2020) A partir da seguinte função:

$$f(x) = \frac{3x + 6}{4}$$

qual das alternativas abaixo apresenta um elemento do domínio que fará com que a imagem pertença ao conjunto dos números naturais?

a) -1
b) -2
c) 0
d) 1
e) 3

Comentários:

A banca nos questiona qual o valor de x (dentre as alternativas) que irá gerar um valor de y natural. Vamos substituir os valores:

- $\boldsymbol{x = -1}$

$$f(-1) = \frac{3 \times (-1) + 6}{4} = \frac{-3 + 6}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{f(-1) = 0,75}}$$

- $\boldsymbol{x = -2}$

$$f(-2) = \frac{3 \times (-2) + 6}{4} = \frac{-6 + 6}{4} = \frac{0}{4} \rightarrow \boldsymbol{f(-2) = 0}$$

- $\boldsymbol{x = 0}$

$$f(0) = \frac{3 \times 0 + 6}{4} = \frac{0 + 6}{4} = \frac{6}{4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{f(0) = 1,5}}$$

- $\boldsymbol{x = 1}$

$$f(1) = \frac{3 \times 1 + 6}{4} = \frac{3 + 6}{4} = \frac{9}{4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{f(1) = 2,25}}$$

- $\boldsymbol{x = 3}$

$$f(3) = \frac{3 \times 3 + 6}{4} = \frac{9 + 6}{4} = \frac{15}{4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{f(3) = 3,75}}$$

Observe que, dentre as alternativas, a única que produz um valor de y Natural é $\boldsymbol{x = -2}$.

Lembrando que os números **Naturais** são os Inteiros positivos, isto é, $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Obs: Na hora da prova você não precisa perder tempo com as contas. Quando chegasse no resultado fracionário, por exemplo, 3/4, você já saberia de antemão que essa divisão não seria "exata" e isso não iria gerar um número Natural. Já poderia pular para a próxima tentativa/alternativa.

Dito isto,

Gabarito: Alternativa **B**

(Pref. Mostardas - 2021) Na função $f(x) = x - 89$, o conjunto imagem é o conjunto:

a) $[-89, 0]$.
b) $[0, 89]$.
c) $(0, 89)$.
d) $Reais$.

Cometários:

Observe que **a banca não restringe os valores de x**. Ou seja, x, como domínio, pode admitir qualquer valor na reta Real.

Logo, conforme estudamos, a Imagem da função, dado $x \in R$, será o Conjunto dos números Reais.

$$\boldsymbol{I(f) = R}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(CM Imbé - 2020) A função $f(x) = 3x + 18$ cuja imagem é igual a 63 tem o elemento do domínio igual a:

a) 15
b) 12
c) 10
d) 8
e) 5

Comentários:

O enunciado nos informa que **a imagem é igual a 63**, isto é, $y = 63$. Substituindo na equação:

$$f(x) = y = 3x + 18$$

$$63 = 3x + 18$$

$$3x = 63 - 18$$

$$3x = 45$$

$$x = \frac{45}{3} \rightarrow \boldsymbol{x = 15}$$

Logo, o elemendo do domínio $x = 15$, tem como Imagem o valor $y = 63$.

Gabarito: Alternativa **A**

Questões Comentadas - Bancas Diversas

Função do 2º Grau

1. **(Vunesp / Pref. Taubaté - 2022) O custo C, em reais, da produção de x litros de uma substância química é dado por $C = 0,005x^2 - 0,5x + 21$. Nessa condição, uma equação, na incógnita x, que fornece uma boa aproximação do total de litros dessa substância que pode ser produzido com $R\$\ 22,00$ é:**

a) $2{,}42x^2 - 11x + 21 = 0$
b) $x^2 - 100x + 8.600 = 0$
c) $x^2 - 100x + 200 = 0$
d) $x^2 - 100x - 200 = 0$
e) $x^2 - 100x - 8.600 = 0$

Comentários:

Vamos substituir C, que é o valor do custo, por $R\$$ 22,00 e calcular a expressão com base na quantidade x litros da substância.

$$C = 0{,}005x^2 - 0{,}5x + 21$$

$$22 = 0{,}005x^2 - 0{,}5x + 21$$

$$0{,}005x^2 - 0{,}5x + 21 - 22 = 0$$

$$0{,}005x^2 - 0{,}5x - 1 = 0$$

Observe as respostas. Excluindo a alternativa A, todas estão com x^2. Então, vamos **dividir toda a equação acima por $\mathbf{0,005}$** justamente para aparecer o termo x^2.

$$0{,}005x^2 - 0{,}5x - 1 = 0 \quad (\div\, 0{,}005)$$

$$\frac{0{,}005x^2}{0{,}005} - \frac{0{,}5x}{0{,}005} - \frac{1}{0{,}005} = \frac{0}{0{,}005}$$

$$\boldsymbol{x^2 - 100x - 200 = 0}$$

Gabarito: Alternativa **D**

2. **(AOCP / CM Bauru - 2022) Dada uma função do 2º grau do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c pertencente aos reais, com $a \neq 0$, sabendo que $f(-5) = f(5) = 0$ e $f(0) = 10$, assinale a alternativa que apresenta corretamente o valor de $f(3)$.**

a) 3,6
b) 4,2
c) 5,6
d) 6
e) 6,4

Comentários:

Iremos utilizar as informações fornecidas pela banca para calcular os coeficientes da função.

- $f(-5) = 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$0 = a(-5)^2 + b(-5) + c$$

$$\mathbf{25a - 5b + c = 0} \quad \text{equação I}$$

- $f(5) = 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$0 = a(5)^2 + b(5) + c$$

$$\mathbf{25a + 5b + c = 0} \quad \text{equação II}$$

Vamos subtrair a equação II da equação I.

$$\begin{array}{rl} 25a + 5b + c = 0 & \\ 25a - 5b + c = 0 & - \\ \hline 5b - (-5b) = 0 & \end{array}$$

$$10b = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{b = 0}}$$

Então, nossa função será do tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = ax^2 + 0x + c \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{f(x) = ax^2 + c}}$$

Substituiremos agora a terceira informação:

- $f(0) = 10$

$$f(x) = ax^2 + c$$

$$10 = a(0)^2 + c \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{c = 10}}$$

Sendo assim, a **função** será:

$$f(x) = ax^2 + c \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{f(x) = ax^2 + 10}}$$

Para descobrir o valor de a, vamos voltar na segunda informação ($f(5) = 0$) e substituir na fórmula acima.

$$0 = a(5)^2 + 10$$

$$0 = 25a + 10$$

$$25a = -10 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = \frac{-10}{25}}}$$

Agora temos a **função completa**:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \frac{-10}{25}x^2 + 10}}$$

Por fim, <u>calculamos $f(3)$.</u>

$$f(x) = \frac{-10}{25}x^2 + 10$$

$$f(3) = \frac{-10}{25}(3)^2 + 10$$

$$f(3) = \frac{-10}{25} \times 9 + 10$$

$$f(3) = \frac{-90}{25} + 10$$

$$f(3) = -3{,}6 + 10 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(3) = 6,4}$$

Gabarito: Alternativa **E**

3. **(FADESP / CM Marabá - 2021) Um experimento foi realizado em uma universidade para analisar a evolução da altura de frangos ao longo do tempo e, assim, encontrar um modelo matemático para representar a curva de crescimento dos animais. Após um ano de observação, os pesquisadores modelaram a altura y dos frangos (em centímetros) em função do tempo t (em dias) e obtiveram a seguinte função:**

$$y = 0{,}013t^2 + 0{,}045t + 11{,}98$$

Com este modelo, pode-se afirmar que, no 10º dia de observação, a altura dos frangos era de aproximadamente

a) 20,3 cm.
b) 18,9 cm.
c) 17,1 cm.
d) 13,7 cm.
e) 10,2 cm.

Comentários:

Para calcular a a altura dos frangos no 10º dia de observação, vamos **substituir $\boldsymbol{t = 10}$** na função dada:

$$f(t) = 0{,}013t^2 + 0{,}045t + 11{,}98$$

$$f(10) = 0{,}013 \times (10)^2 + 0{,}045 \times (10) + 11{,}98$$

$$f(10) = 0{,}013 \times 100 + 0{,}045 \times 10 + 11{,}98$$

$$f(10) = 1{,}3 + 0{,}45 + 11{,}98 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(10) \cong 13,7}$$

Gabarito: Alternativa **D**

4. **(VUNESP / Pref. Peruíbe - 2019) A tabela apresenta informações obtidas a partir de uma observação em laboratório da relação entre duas grandezas: $y = f(x)$.**

x	0	–1	2
y = f(x)	–2	–6	0

Após alguns estudos numéricos, identificou-se que a relação entre as variáveis x e y é modelada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a soma $a + b + c$ é igual a

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

Comentários:

Vamos determinar a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, **substituindo os pontos forncedios na função**.

- **Substituindo o ponto $(\mathbf{0}; -\mathbf{2})$, isto é, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{y} = -\mathbf{2}$:**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$-2 = a(0)^2 + (0)x + c$$

$$-2 = 0 + 0 + c \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{c = -2}}$$

- **Substituindo o ponto $(\mathbf{2}; \mathbf{0})$:**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$0 = a(2)^2 + b(2) - 2$$

$$0 = 4a + 2b - 2$$

$$4a + 2b = 2$$

Simplificando a igualdade por 2:

$$4a + 2b = 2 \quad \div (2)$$

$$2a + b = 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b = 1 - 2a}$$

- **Substituindo o ponto $(-\mathbf{1}; -\mathbf{6})$:**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$-6 = a(-1)^2 + b(-1) - 2$$

$$-6 = a - b - 2$$

$$\boldsymbol{a - b = -4}$$

Na segunda substituição, determinamos que $b = 1 - 2a$. Sendo assim,

$$a - (1 - 2a) = -4$$

$$a - 1 + 2a = -4$$

$$a + 2a = -4 + 1$$

$$3a = -3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a = -1}}$$

De posse de a, calculamos b:

$$b = 1 - 2a$$

$$b = 1 - 2(-1)$$

$$b = 1 + 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = 3}}$$

Logo,

$$a + b + c = -1 + 3 - 2$$

$$\boldsymbol{a + b + c = 0}$$

Gabarito: Alternativa **C**

5. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Um vendedor de livros estipula como meta que, até o dia x de cada semana, que se inicia na segunda-feira (dia 1) e termina no sábado (dia 6), ele deve vender um total de $x^2 + 3x$ livros. No final de cada dia, ele anota a quantidade de livros que vende no dia, formando uma lista de números.**

Se o vendedor conseguir cumprir a meta, a lista de números anotados em uma semana completa será uma progressão

a) aritmética de razão 2
b) aritmética de razão 3
c) com números iguais a 9
d) geométrica de razão 2
e) geométrica de razão 3

Comentários:

Para resolvermos esta questão, vamos substituir os valores de x na função quadrática e determinar a quantidade de livros vendidos até cada dia da semana que se inicia na segunda-feira $(x = 1)$ e termina no sábado $(x = 6)$.

- Para $x = 1$:

$$x^2 + 3x = 1^2 + 3(1) = 1 + 3 = 4$$

$$\boxed{\boldsymbol{segunda = 4\ livros}}$$

- Para $x = 2$:

$$x^2 + 3x = 2^2 + 3(2) = 4 + 6 = 10$$

FIQUE ATENTO!

Observe que ele deve vender um total de 10 livros até a terça-feira. Porém, atente-se (para este "pequeno" grande detalhe) que ele já vendeu um total de 4 livros na segunda-feira.

A função quadrática $x^2 + 3x$ livros é a quantidade TOTAL de livros que ele deve vender ATÉ aquele dia.

Ou seja, na terça-feira ele deve vender um total de livros igual a:

$$terça = 10 - 4 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{terça = 6\ livros}}$$

- Para $x = 3$:

$$x^2 + 3x = 3^2 + 3(3) = 9 + 9 = 18$$

Perceba, novamente, que ele deve vender um total de 18 livros até a quarta-feira. Porém, ele já vendeu um total de 10 livros na segunda-feira e na terça-feira.

Ou seja, na quarta-feira ele deve vender um total de livros igual a:

$$quarta = 18 - 10 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{quarta = 8\ livros}}$$

Veja que a sequência formada pela quantidade de livros que ele vende no dia $(4; 6; 8; \dots)$ é definida pelo número anterior somado a uma razão fixa (2).

Sendo assim, se o vendedor conseguir cumprir a meta, **a lista de números anotados em uma semana completa será uma progressão aritmética de razão 2**.

Gabarito: Alternativa **A**

6. (CESPE / Pref. São Cristóvão - 2019) Tendo como referência as funções $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = x^2 - 3$ em que $-\infty < x < +\infty$, julgue o item que se segue.

A função $g(x)$ é ímpar.

Comentários:

Vamos relembrar o conceito de função par e função ímpar.

- **Função Par:**

$$g(-x) = g(x)$$

- **Função Ímpar:**

$$g(-x) = -g(x)$$

Vamos então arbitrar um valor para x e substituir na função para averiguar se a função $g(x)$ é ímpar. Arbitrando $x = 5$.

- Calculando $g(-5)$:

$$g(x) = x^2 - 3$$

$$g(-5) = (-5)^2 - 3$$

$$g(-5) = 25 - 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{g(-5) = 22}}$$

- Calculando $-g(5)$:

$$g(x) = x^2 - 3$$

$$-g(x) = -(x^2 - 3)$$

$$-g(5) = -(5^2 - 3)$$

$$-g(5) = -(25 - 3) \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{-g(5) = -22}}$$

Ou seja,

$$\boldsymbol{g(-5) \neq -g(5)}$$

Logo, a função $g(x)$ **NÃO** é uma função ímpar.

Gabarito: **ERRADO**

7. (CESPE / Pref. São Cristóvão - 2019) Tendo como referência as funções $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = x^2 - 3$ em que $-\infty < x < +\infty$, julgue o item que se segue.

No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, os gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se interceptam no ponto de coordenadas $(7/5, -26/25)$.

Comentários:

Vamos igualar as funções e encontrar o ponto de interseção:

$$\cancel{x^2} - 5x + 4 = \cancel{x^2} - 3$$

$$-5x + 4 = -3$$

$$-5x = -3 - 4$$

$$-5x = -7$$

$$x = \frac{-7}{-5} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = \frac{7}{5}}}$$

De posse de x, substituimos em qualquer uma das funções para encontrar o valor de y do ponto de interseção:

$$y = x^2 - 3$$

$$y = \left(\frac{7}{5}\right)^2 - 3$$

$$y = \frac{49}{25} - 3$$

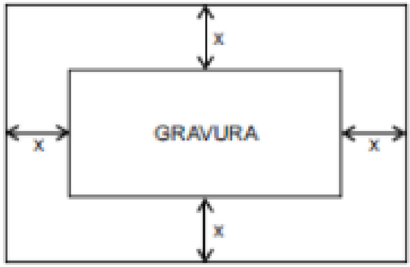
$$y = \frac{49}{25} - \frac{75}{25}$$

$$y = \frac{49 - 75}{25} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y = -\frac{26}{25}}}$$

Logo, os gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se interceptam no ponto de coordenadas $(7/5, -26/25)$.

Gabarito: **CERTO**

8. (VUNESP / CM Araras - 2015) A figura mostra uma gravura retangular, de lados iguais a $20\ cm$ e $30\ cm$, posicionada de forma centralizada em uma folha também retangular, de área igual a $1.200\ cm^2$, de modo que, na folha, restassem margens (superior, inferior e laterais) de largura constante.

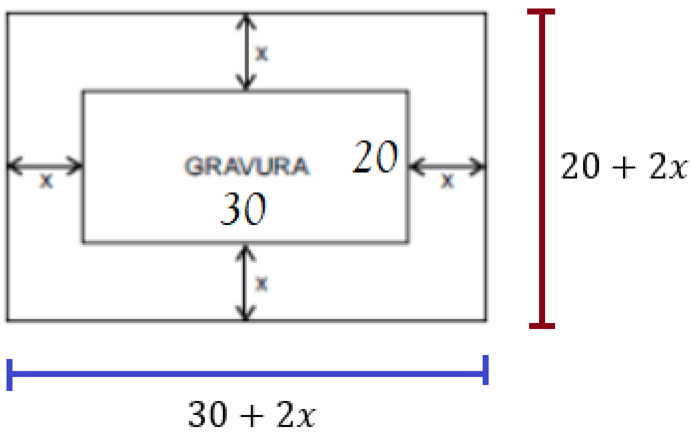


A equação que permite calcular corretamente a medida da largura da margem, indicada por x na figura, é

a) $x^2 + 25x - 150 = 0$
b) $x^2 + 25x + 150 = 0$
c) $x^2 - 25x + 150 = 0$
d) $x^2 + 50x - 300 = 0$
e) $x^2 - 50x + 300 = 0$

Comentários:

Vamos representar o desenho com todas as dimensões informadas no enunciado:



Acredito que agora tenha ficado mais fácil de entender, correto?

A banca nos afirma que essa área total é igual a $1.200\ cm^2$, ou seja, a base vezes a altura da figura tem área igual a $1.200\ cm^2$.

$$A = 1.200$$

$$b \times h = 1.200$$

$$(30 + 2x) \times (20 + 2x) = 1.200$$

Aplicando a distributiva e calculando a equação que permite calcular corretamente a medida da largura da margem teremos:

$$600 + 60x + 40x + 4x^2 = 1.200$$

$$\mathbf{4x^2 + 100x - 600 = 0}$$

Simplificando toda a equação por 4:

$$4x^2 + 100x - 600 = 0 \quad (\div 4)$$

$$\mathbf{x^2 + 25x - 150}$$

Gabarito: Alternativa **A**

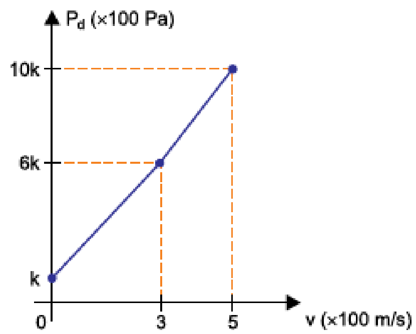
QUESTÕES COMENTADAS - BANCAS DIVERSAS

Gráfico da Função do 2° Grau

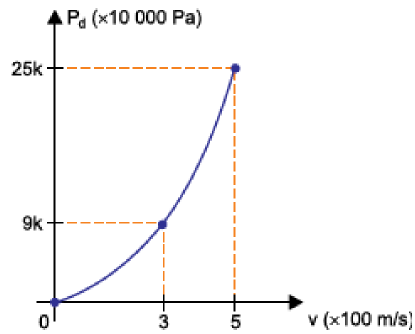
1. **(VUNESP / UNESP - 2021) Quando a velocidade de um avião aumenta, o deslocamento das moléculas da atmosfera provoca um aumento da chamada pressão dinâmica (P_d) sobre o avião. Se a altitude de voo é mantida constante, a pressão dinâmica, dada em Pa, pode ser calculada por $P_d = k \cdot v^2$, sendo v o módulo da velocidade do avião em relação ao ar, em m/s, e k uma constante positiva, que depende da altitude.**

O gráfico que representa a relação correta entre P_d e v é:

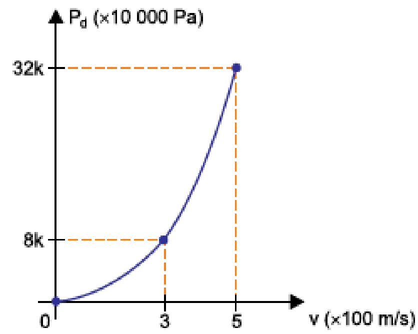
(A)



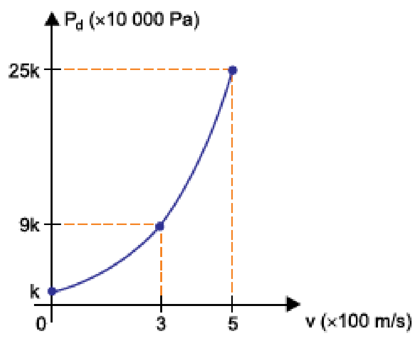
(C)



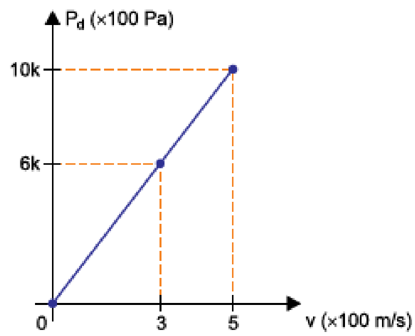
(E)



(B)



(D)



Comentários:

Observe que $P_d = k \cdot v^2$ representa uma **função do segundo grau** com $a = k, b = 0$ e $c = 0$. Perceba que P_d está no eixo y enquanto que v está no eixo x.

Lembre-se de que a banca pode colocar qualquer letra nos lugares das variáveis e dos coeficientes

Se a função $P_d = k \cdot v^2$ representa uma função do segundo grau, seu gráfico será uma parábola. Logo, já **descartaríamos as alternativas A e D**.

Como o coeficiente c é igual a zero, a função intercepta o eixo y em $y = 0$. Sendo assim, também podemos **descartar a alternativa B** (que intercepta o eixo y em $y = k$).

Ficamos então entre as alternativas C e E. Para isso, vamos substituir $v = 3$ na equação e constatar o valor de P_d.

$$P_d = k \cdot v^2$$

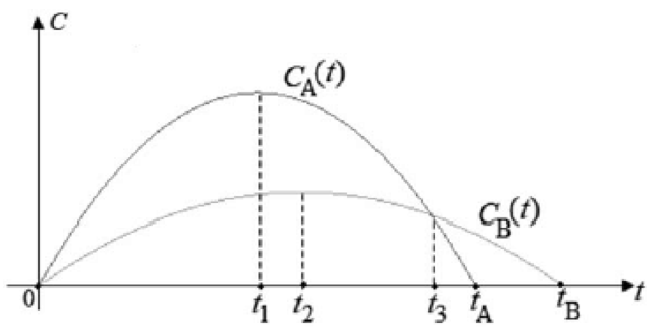
$$P_d = k \cdot (3)^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_d = 9k}$$

Constatamos tal igualdade na alternativa C. Perceba que na alternativa E, quando $v = 3, P_d = 8k$, o que contraria o que acabamos de calcular.

Dito isto,

Gabarito: Alternativa **C**

2. **(CESPE / IBGE - 2021) Considere que os gráficos C_A e C_B apresentados representam, respectivamente, as quantidades mensais de clientes de dois mercados concorrentes A e B, desde o instante da sua inauguração simultânea, em $t = 0$, até os instantes em que esses mercados encerraram suas atividades, respectivamente, nos instantes t_A e t_B, em que t é dado em meses. Considere, ainda, que $C_A(t) = 300t - 3t^2$ e que $C_B(t) = 120t - t^2$.**



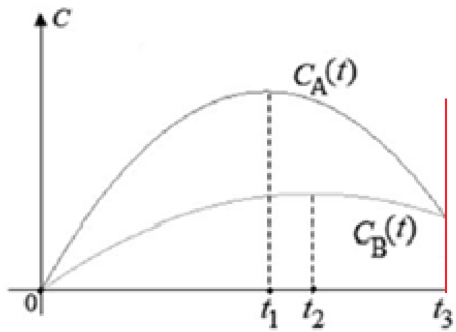
De acordo com as informações do texto, o período total em que a quantidade de clientes do mercado A foi maior ou igual que a quantidade de clientes do mercado B foi

a) entre a inauguração e o instante t1.
b) entre a inauguração e o instante t3.
c) entre a inauguração e o instante tA.
d) entre o instante t1 e o instante t2.
e) entre o instante t1 e o instante t3.

Comentários:

Observe que no gráfico que entre o momento zero (inauguração) e o momento t_3, a função C_A é superior (maior) que a função C_B.

Vejamos um recorte da figura no instante t_3:

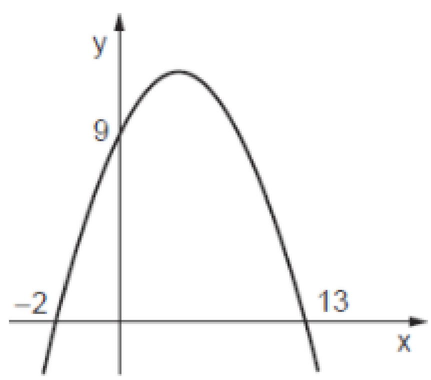


Perceba que, para **qualquer valor entre 0 e t_3**, a curva da função C_A será **maior** (estará mais acima) que a curva da função C_B.

Sendo assim, o período total em que a quantidade de clientes do mercado A foi maior ou igual que a quantidade de clientes do mercado B foi entre a inauguração e o instante t3.

Gabarito: Alternativa **B**

3. **(CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) O gráfico de uma função quadrática, mostrado na Figura a seguir, intersecta o eixo y no ponto (0,9), e o eixo x, nos pontos (-2, 0) e (13, 0).**



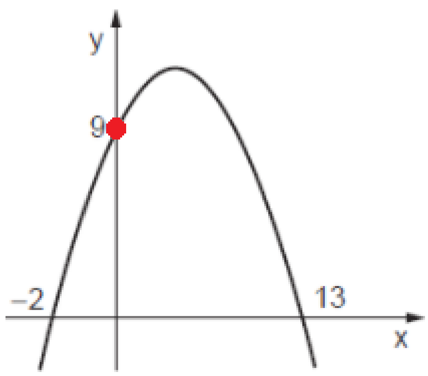
Se o ponto $P(11; k)$ é um ponto da parábola, o valor de k será

a) 5,5
b) 6,5
c) 7,0
d) 7,5
e) 9,0

Comentários:

Vamos, primeiramente, determinar a equação da parábola $y = ax^2 + bx + c$.

O Coeficiente c indica o valor onde a parábola intercepta o eixo y, isto é, quando $x = 0$. Observe que a parábola "corta" o eixo y em $y = 9$.



Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{c = 9}}$$

Sabemos que a multiplicação das raízes é igual a:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Substituindo as raízes $x_1 = -2$ e $x_2 = 13$ teremos:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$-2 \times 13 = \frac{9}{a}$$

$$-26 = \frac{9}{a} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = -\frac{9}{26}}}$$

Sabemos também que, a soma das raízes é:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$-2 + 13 = \frac{-b}{-\frac{9}{26}}$$

$$11 = \frac{-b}{-\frac{9}{26}} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{b = \frac{99}{26}}}$$

Sendo assim, <u>a fórmula da parábola será</u>:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{9}{26}x^2 + \frac{99}{26}x + 9}$$

Para encontrar o valor de k, substituimos $x = 11$:

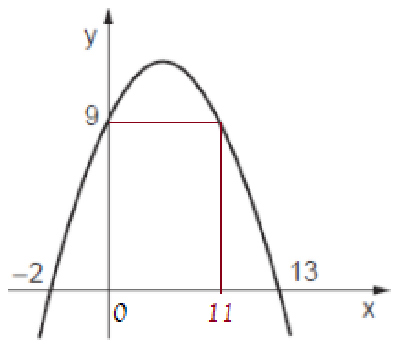
$$y = -\frac{9}{26}x^2 + \frac{99}{26}x + 9$$

$$k = -\frac{9}{26}(11)^2 + \frac{99}{26}(11) + 9$$

$$k = -\frac{9}{26} \times 121 + \frac{1.089}{26} + 9$$

$$k = -\cancel{\frac{1.089}{26}} + \cancel{\frac{1.089}{26}} + 9 \rightarrow \boldsymbol{k = 9}$$

Na hora da prova, iremos utilizar um pouco da experiência. Estudamos na teoria que a parábola é simétrica. Perceba que $x = 0$ está 2 unidades da raiz $x = -2$. Perceba também que o valor solicitado $x = 11$ está a 2 unidades da outra raiz $x = 13$.



Então, pela simetria da parábola temos que y, quando $x = 11$, é igual a 9.

"Ah professor, e porque você não resolveu assim logo no início?"

Porque, caro Aluno, imagine se a banca pergunta o valor de y quando $x = 8{,}5$ por exemplo. Você não conseguiria usar a simetria neste exemplo. Então, **eu quero que você se prepare para tudo que possa vir na sua prova**.

Dito isto,

Gabarito: Alternativa **E**

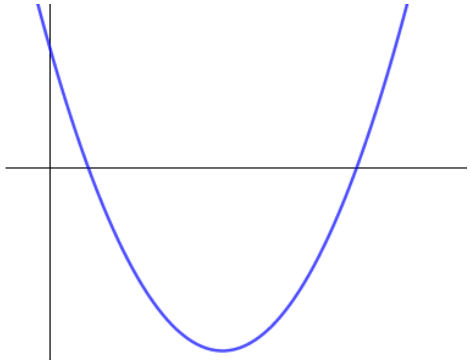
4. **(CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) O gráfico de uma função $f: R \to R$ é uma parábola cujo x do vértice é igual a 5.**

Se $x \in R$ é tal que $f(x) = f(x-4)$, então x é igual a

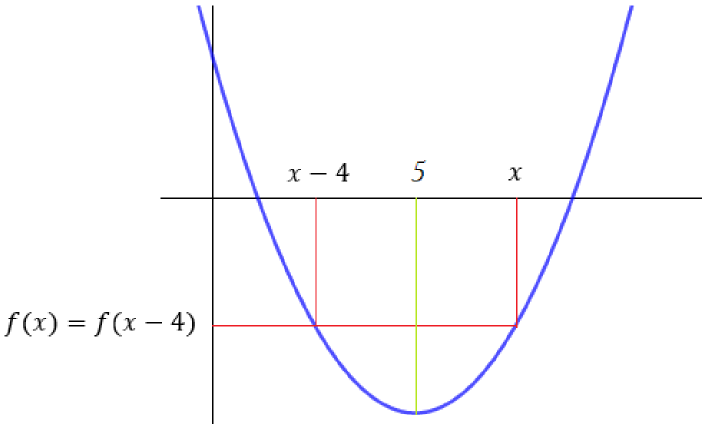
a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

Comentários:

Na hora da prova, esboce o gráfico de uma função quadrática qualquer.



O enunciado nos afirma que o x do vértice é igual a 5 e que $f(x) = f(x-4)$. Assinalamos no gráfico.



Observe, pela simetria da parábola em relação ao seu vértice, que o x do vértice será a média aritmética de x e $x-4$. Em outras palavras, x do vértice é equidistante de x e $x-4$.

Logo:

$$5 = \frac{x-4+x}{2}$$

$$5 = \frac{2x-4}{2}$$

$$2x - 4 = 10$$

$$2x = 10 + 4$$

$$2x = 14$$

$$x = \frac{14}{2} \rightarrow \boldsymbol{x = 7}$$

Gabarito: Alternativa **A**

5. (CESPE / Pref. São Cristóvão - 2019) Tendo como referência as funções $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = x^2 - 3$ em que $-\infty < x < +\infty$, julgue o item que se segue.

A função $f(x)$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 5/2]$ e crescente no intervalo $[5/2, +\infty]$

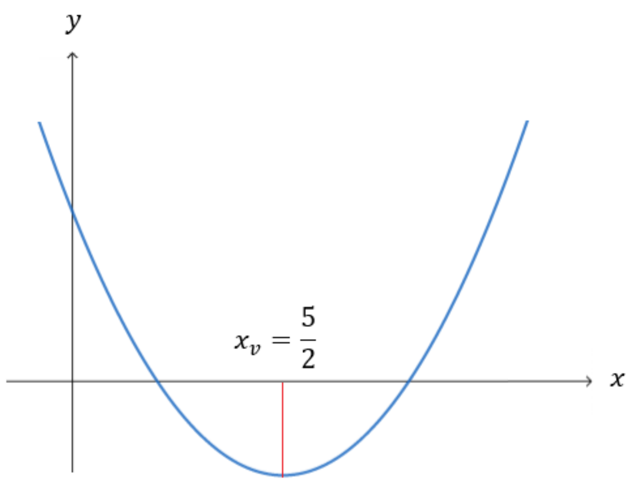
Comentários:

Primeiramente, vemos que a função $f(x) = x^2 - 5x + 4$ tem o coeficiente a $(a = 1)$ positivo, isto é, é uma função com concavidade voltada para cima e apresente **ponto de mínimo** (x do véritce). Vamos calcular este ponto:

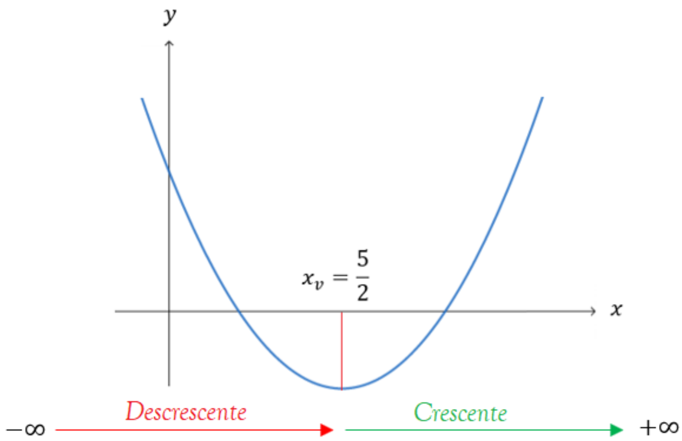
$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-(-5)}{2(1)} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x_v = \frac{5}{2}}}$$

Vejamos graficamente (esboço) como seria esta função:



Observe que a função descresce até chegar no ponto de abscissa $(x = 5/2)$ e, a partir deste ponto, ela começa a crescer, isto é, a medidade que "andamos para a direita" o valor da função aumenta.

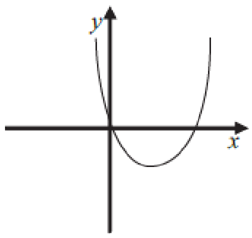


Então, a assertiva está certa, uma vez que a função $f(x)$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 5/2]$ e crescente no intervalo $[5/2, +\infty]$.

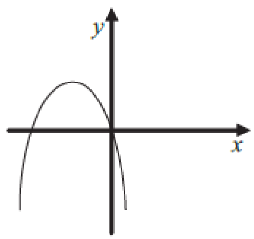
Gabarito: **CERTO**

6. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Considere a função $f(x) = mx^2 + px$, onde m, p e q são números reais tais que $m < 0$ e $p > 0$. O gráfico que melhor representa $f(x)$ é**

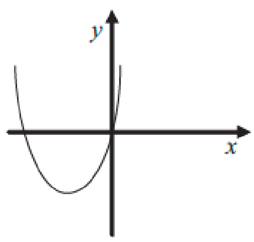
(A)



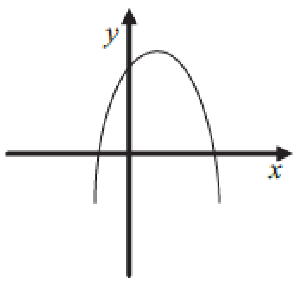
(B)



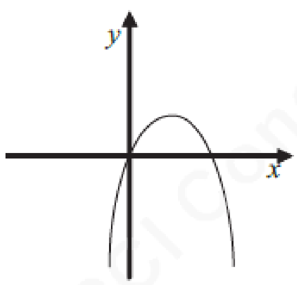
(C)



(D)



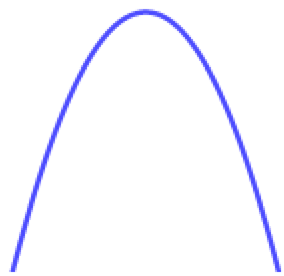
(E)



Comentários:

Observe, primeiramente, que a função $f(x) = mx^2 + px$ tem o Coeficiente $m < 0$. Ou seja, **a figura será uma parábola com concavidade voltada para baixo**.

$$m < 0$$



Podemos descartar as letras A e E.

Secundariamente, perceba que o Coeficiente "c" da função quadrática é igual a zero. Vamos comparar a função quadrática em termos gerais com a função quadrática fornecida no enunciado.

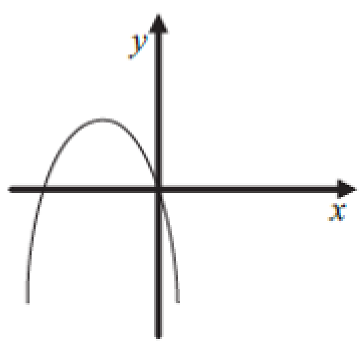
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = mx^2 + px + 0$$

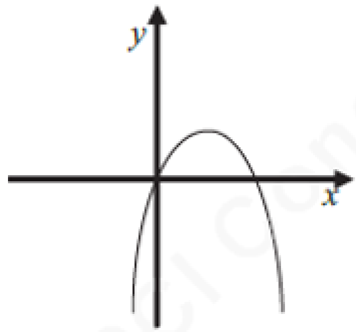
O Coeficiente "c" indica o valor onde a parábola intercepta o eixo y, isto é, quando $x = 0$. **Sendo $c = 0$, a função passa pela origem**.

Logo, eliminamos a alternativa D. **Ficamos com as Alternativas B e E**.

O coeficiente "p" determina a inclinação da parábola após passar o eixo y. Como $p > 0$, após passar pelo eixo y, a parábola irá subir. Vejamos a alternativa B.



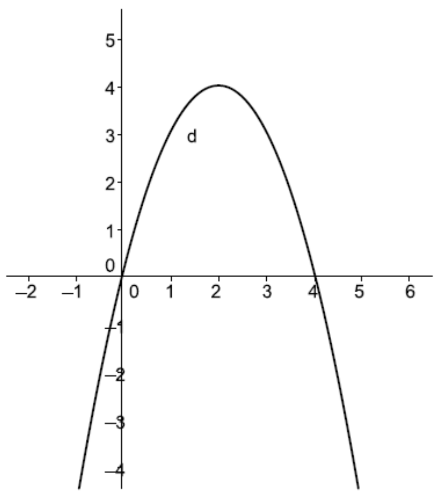
Perceba que, depois de passar pelo eixo y, a curvatura da parábola desce. Logo, esta não pode ser nossa resposta. Restou a alternativa E.



Justamente. **Veja que esta parábola sobe depois que passa pelo eixo y**. Além de ter a curvatura voltada para baixo $(m < 0)$ e cortar a origem $(c = 0)$.

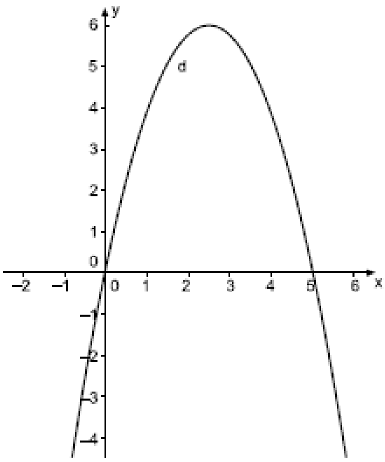
Gabarito: Alternativa **E**

7. (VUNESP / Pref. Aluminio - 2016) O gráfico da função definida por $f(x) = -x^2 + 4x$ é dado por:

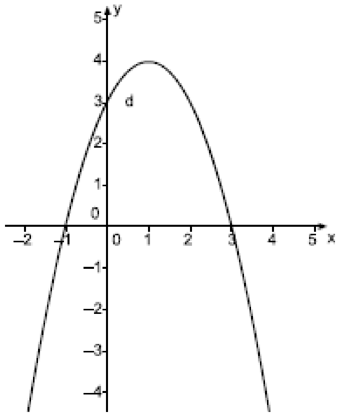


A função $g(x)$ é definida por $g(x) = f(x) - 1$. Assim, o gráfico de $g(x)$ é

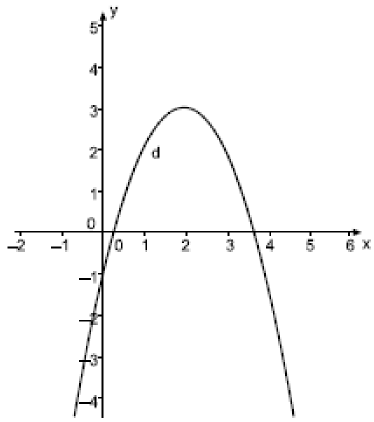
(A)



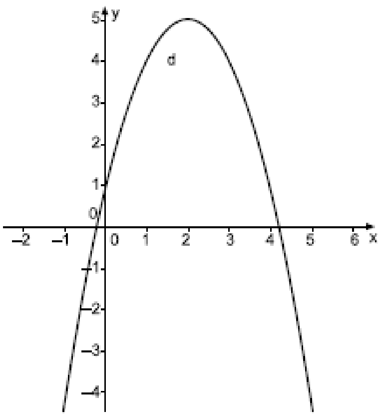
(C)



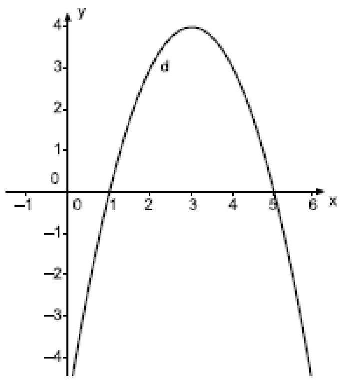
(E)



(B)



(D)



Comentários:

Primeiramente, vamos **calcular a função $g(x)$**:

$$g(x) = f(x) - 1$$

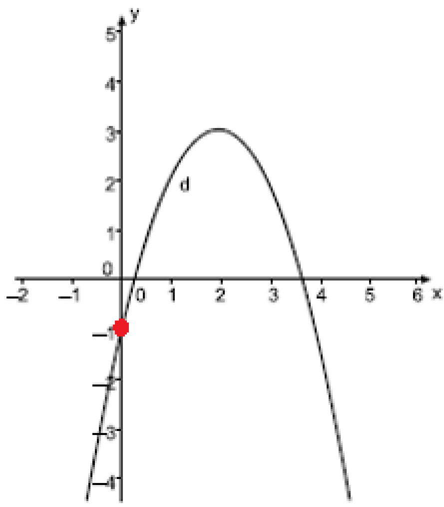
$$\boxed{\boldsymbol{g(x) = -x^2 + 4x - 1}}$$

Onde: $a = -1, b = 4$ e $c = -1$.

Observe que o Coeficente c é igual a -1. Lembrando que o Coeficiente c é definido pelo **ponto em que a parábola intercepta o eixo y**.

Atente-se para as alternativas e veja **qual dentre elas que intercepta o eixo y em $y = -1$**.

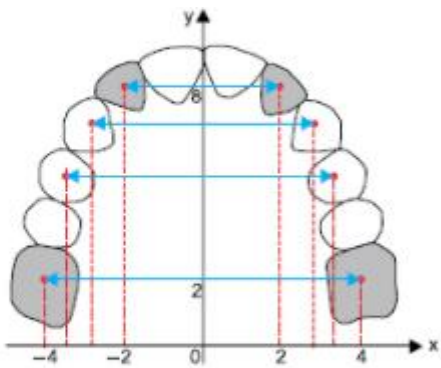
Apenas a Alternativa **E**, correto?



Logo, está será nossa resposta.

Gabarito: Alternativa **E**

8. **(VUNESP / FAMERP - 2016) A figura representa o desenho da arcada dentária de um animal, feito no plano cartesiano ortogonal em escala linear.**



Sabendo que as posições dos centros dos dentes destacados em cinza nessa arcada são modeladas nesse plano por meio da função quadrática $y = ax^2 + c$, então $a + c$ é igual a

a) 8,5.
b) 9,2.
c) 9,5.
d) 10,2.
e) 9,0.

Comentários:

Observe pela imagem que, quando $x = 4, y = 2$ e que, quando $x = 2, y = 8$.

Sendo assim, vamos subsituir esses dois pontos na função $y = ax^2 + c$ e calcular o valor de a e c.

- $\boldsymbol{x = 4}$ **e** $\boldsymbol{y = 2}$

$$y = ax^2 + c$$

$$2 = a(4)^2 + c$$

$$2 = 16a + c \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{c = 2 - 16a}$$

- $\boldsymbol{x = 2}$ **e** $\boldsymbol{y = 8}$

$$y = ax^2 + c$$

$$8 = a(2)^2 + c$$

$$\boldsymbol{8 = 4a + c}$$

Vamos substituir o valor de c que isolamos acima:

$$8 = 4a + c$$

$$8 = 4a + 2 - 16a$$

$$6 = -12a$$

$$a = \frac{6}{-12} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a = -0,5}}$$

De posse de a, calculamos c:

$$c = 2 - 16a$$

$$c = 2 - 16 \times (-0,5)$$

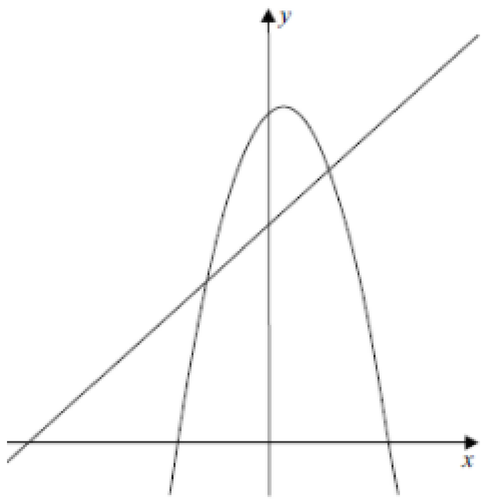
$$c = 2 + 8 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{c = 10}}$$

Logo,

$$a + c = -0,5 + 10 \quad \rightarrow \boldsymbol{a + c = 9,5}$$

Gabarito: Alternativa **C**

9. (VUNESP / PC SP - 2014) Considere as funções $f: R \to R$ e $g: R \to R$, dadas por $f(x) = ax^2 + bx + 12$ e $g(x) = x + 8$. Sabe-se que os gráficos dessas funções se intersectam nos pontos de abscissa 2 e -2.

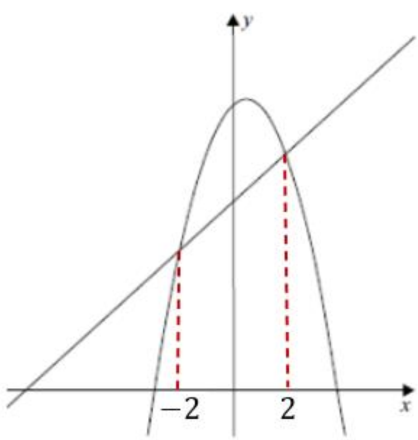


A soma dos coeficientes a e b da função f é igual a

a) 2
b) 4
c) 0
d) 1
e) 3

Comentários:

O enunciado nos afirma que os gráficos dessas funções se intersectam nos pontos de abscissa 2 e -2. Vejamos:



Vamos determinar o valor de y para $x = -2$ e $x = 2$ substituindo essas ordenadas na função $y = g(x) = x + 8$.

$$y = -2 + 8 \;\rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{y = 6}}$$

$$y = 2 + 8 \;\rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{y = 10}}$$

Ou seja, as funções se cruzam nos pontos $(\mathbf{-2}\,; \mathbf{6})$ e $(\mathbf{2}\,; \mathbf{10})$.

De posse desses pontos, podemos calcular os coeficientes da função $f(x) = ax^2 + bx + 12$. Vamos substituir esses dois pontos em $f(x)$.

- $(\mathbf{-2}\,; \mathbf{6})$

$$f(x) = ax^2 + bx + 12$$

$$6 = a(-2)^2 - 2b + 12$$

$$6 = 4a - 2b + 12$$

$$\boldsymbol{4a - 2b = -6} \qquad \textit{equação } (I)$$

- $(2\,; 10)$

$$f(x) = ax^2 + bx + 12$$

$$10 = a2^2 + 2b + 12$$

$$10 = 4a + 2b + 12$$

$$\boldsymbol{4a + 2b = -2} \qquad \textit{equação } (II)$$

Temos 2 equações com 2 incógnitas. Iremos <u>somar a equação (I) com a equação (II):</u>

$$\begin{cases} 4a - \cancel{2b} = -6 \\ 4a + \cancel{2b} = -2 \end{cases} +$$

$$8a = -8$$

$$a = \frac{-8}{8} \;\rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{a = -1}}$$

Com o valor de a, calculamos b:

$$4a + 2b = -2$$

$$4 \times (-1) + 2b = -2$$

$$-4 + 2b = -2$$

$$2b = 2$$

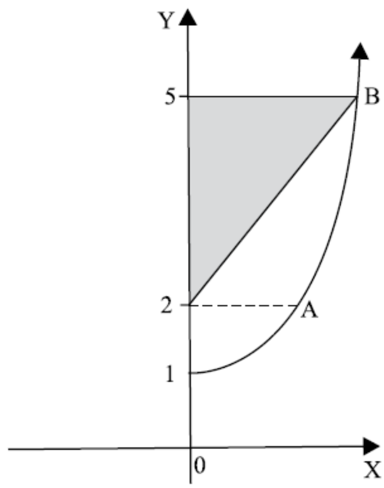
$$b = \frac{2}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = 1}}$$

Logo,

$$a + b = -1 + 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a + b = 0}$$

Gabarito: Alternativa **C**

10. (VUNESP / UNCISAL - 2010) Na figura, A e B são pontos de um trecho do gráfico da função de variável real dada por $y = x^2 + c$. A área do triângulo sombreado na figura é, em u.a., igual a



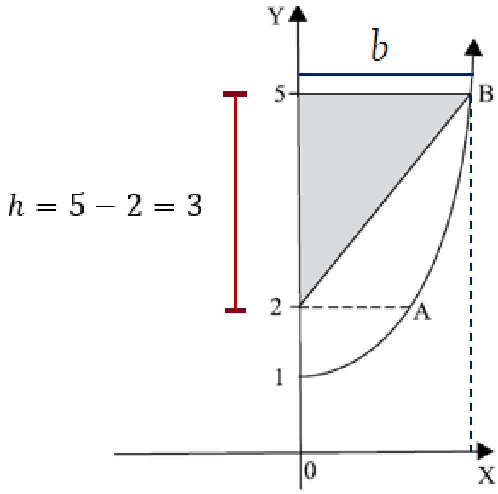
a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

Comentários:

A área do triângulo é igual a base vezes a altura divididos por 2.

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Vejamos no gráfico:



Observe que temos a altura $(h = 3)$. Nos resta calcular o valor da base. Perceba que a base será igual ao valor de x quando a função tiver valor igual a $y = 5$.

Então, vamos calcular nossa função $y = x^2 + c$.

Veja que a parábola intercepta o eixo y em $y = 1$. Logo, o Coeficiente c (termo independente da função) será igual a 1 $(c = 1)$.

$$y = x^2 + c$$

$$y = x^2 + 1$$

Iremos encontrar o valor de x para $y = 5$:

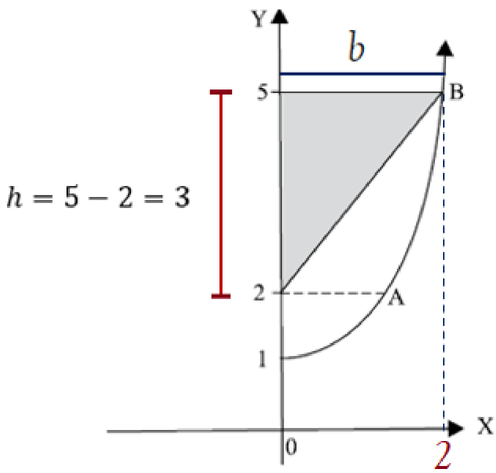
$$y = x^2 + 1$$

$$5 = x^2 + 1$$

$$x^2 = 5 - 1$$

$$x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x = \pm 2}}$$

Como estamos trabalhando com o lado positivo do gráfico, temos que $\boldsymbol{x = 2}$.



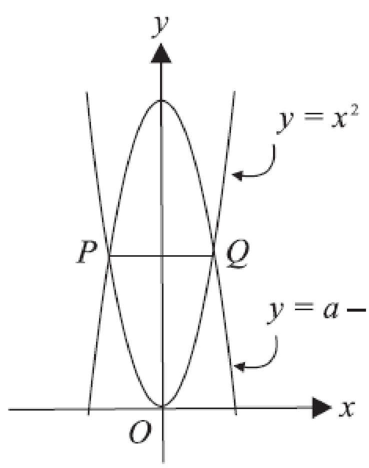
Ou seja, a base b do triângulo será igual a 2. De posse da base e da altura, calculamos a área:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \frac{2 \times 3}{2} \rightarrow A = 3\ u.a.$$

Gabarito: Alternativa **D**

11. (VUNESP / UNCISAL - 2009) A figura mostra o gráfico das funções $y = x^2$ e $y = a - x^2$, definidas no conjunto R, sendo a constante. Sabendo-se que o comprimento de $\overline{PQ}$ é 6, pode-se afirmar que o valor de a na função $y = a - x^2$, é

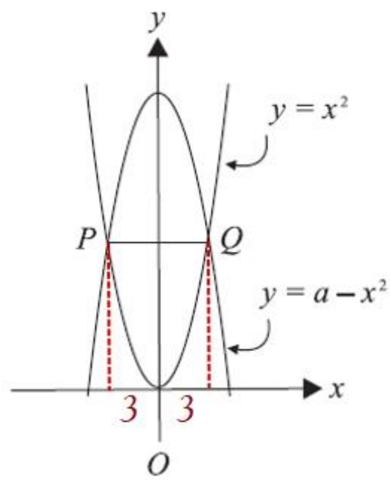


a) 18

b) 15
c) 12
d) 9
e) 6

Comentários:

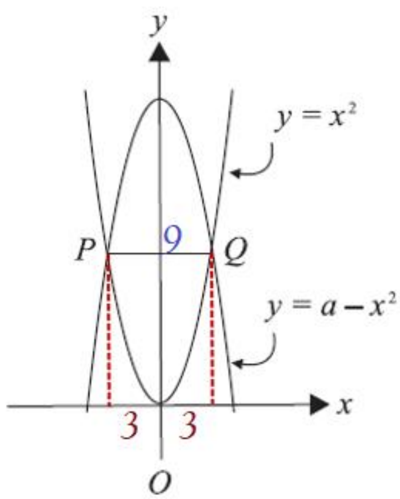
Sabemos que o comprimento $\overline{PQ}$ é 6 e está dividido pelo eixo de simetria y em duas partes iguais:



Observe que o comprimento de valor 3 é igual ao comprimento horizontal, isto é, o valor de x. Cuidado que esta não é a altura. Para calcularmos o valor em y temos que substituir $x = 3$ na função. E será isto que iremos fazer.

$$y = x^2$$

$$y = 3^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{y = 9}}$$



Ou seja, as funções se encontram nos pontos: $(-3\,;9)$ e $(3\,;9)$.

Vamos pegar um desses pontos e substituir na função $y = a - x^2$. Substituindo $(3\,;9)$:

$$y = a - x^2$$

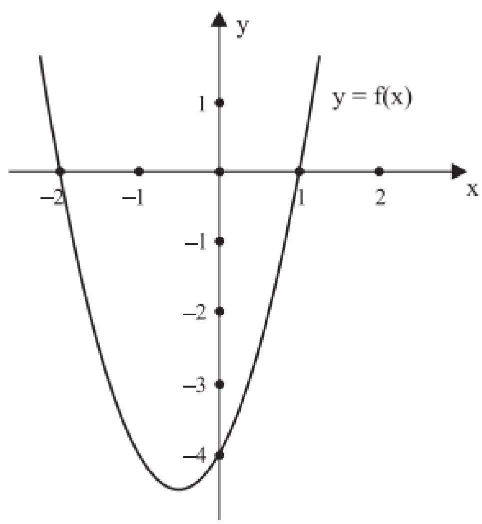
$$9 = a - 3^2$$

$$9 = a - 9$$

$$a = 9 + 9 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = 18}$$

Gabarito: Alternativa **A**

12. (VUNESP / UNESP - 2006) A expressão que define a função quadrática f(x), cujo gráfico está esboçado, é:



a) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4.$
b) $f(x) = x^2 + 2x - 4.$
c) $f(x) = x^2 + x - 2.$
d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4.$
e) $f(x) = 2x^2 + 2x - 2.$

Comentários:

Vamos calcular a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ representada no gráfico acima.

"De cara" já olhamos no gráfico e percebos que a função intercepta o eixo y em $y = -4$. Logo, **o Coeficiente c será igual a 4.**

$$f(x) = ax^2 + bx - 4$$

Observe que a parábola passa pelos pontos $(-2\,;0)$ e $(1\,;0)$, isto é, as raízes da função. Vamos substituir esses pontos na equação da parábola para determinar os demais Coeficientes:

- $\mathbf{(-2\,;0)}$

$$f(x) = ax^2 + bx - 4$$

$$0 = a(-2)^2 + b \times (-2) - 4$$

$$0 = 4a - 2b - 4$$

$$2b = 4a - 4$$

$$b = \frac{4a-4}{2} \quad \rightarrow \quad b = 2a - 2$$

- $\mathbf{(1\,;0)}$

$$f(x) = ax^2 + bx - 4$$

$$0 = a1^2 + b \times 1 - 4$$

$$0 = a + b - 4$$

Substituindo b em função de a que encontramos acima:

$$0 = a + b - 4$$

$$0 = a + 2a - 2 - 4$$

$$0 = 3a - 6$$

$$3a = 6$$

$$a = \frac{6}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a = 2}}$$

De posse de a, calculamos b:

$$b = 2a - 2$$

$$b = 2 \times 2 - 2$$

$$b = 4 - 2 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{b = 2}}$$

Logo, **a função $\boldsymbol{f(x)}$ será igual a:**

$$f(x) = ax^2 + bx - 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = 2x^2 + 2x - 4}$$

Gabarito: Alternativa **D**

Questões Comentadas - Bancas Diversas

Raízes da Função do 2° Grau

1. **(FUNDATEC / Pref. Flores da Cunha - 2022) Analise as informações descritas abaixo sobre a função $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 14x + 8}$:**

I. $f(x)$ é uma função do 2º grau.

II. Se $x = 4$, então $f(4) = 0$.

III. Se $f(x) = 0$, a função possui apenas uma raiz real.

Quais estão corretas?

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas I e II.
e) I, II e III.

Comentários:

Vamos analisar item a item.

I. $f(x)$ é uma função do 2º grau.

CORRETO. Estudamos que a **Função do 2° Grau** é uma função de $f: R \to R$ descrita pela seguinte lei de formação matemática:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = y = ax^2 + bx + c}}$$

Onde, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são os **coeficientes** determinados por números reais e $a \neq 0$. Então, $f(x) = 3x^2 - 14x + 8$ representa (sim) uma função do 2º grau.

II. Se $x = 4$, então $f(4) = 0$.

CORRETO. Iremos substituir $x = 4$ na equação e constatar o valor de $f(4)$.

$$f(x) = 3x^2 - 14x + 8$$

$$f(4) = 3 \times (4)^2 - 14 \times (4) + 8$$

$$f(4) = 3 \times 16 - 56 + 8$$

$$f(4) = 48 - 56 + 8 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(4) = 0}$$

III. Se $f(x) = 0$, a função possui apenas uma raiz real.

INCORRETO. Vamos calcular o valor de delta da função $f(x) = 3x^2 - 14x + 8$ em que $a = 3, b = -14$ e $c = 8$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-14)^2 - 4(3)(8)$$

$$\Delta = 196 - 96 \quad \rightarrow \quad \Delta = \mathbf{100}$$

Ou seja, $\Delta = 100 > 0$ e assim, a função apresentará duas raízes reais e distintas. Não precisamos calcular quais são as raízes. A banca não nos questiona isso. Ela quer saber se função tem apenas uma raiz real. Cuidado para não perder tempo na hora da prova.

Dito isto,

Gabarito: Alternativa **D**

2. (AOCP / SANESUL - 2021) Se representarmos uma função de segundo grau da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ por meio de um gráfico e notarmos que há, na figura, dois interceptos com o eixo das abscissas, um intercepto com o eixo das ordenadas e a concavidade da parábola é voltada para baixo, então é correto afirmar que

a) $a > 0$ e $b^2 > 4ac$.
b) $a > 0$ e $b^2 < 4ac$.
c) $a > 0$ e $b^2 = 4ac$.
d) $a < 0$ e $b^2 < 4ac$.
e) $a < 0$ e $b^2 > 4ac$.

Comentários:

Observe o final do enunciado: *"... a concavidade da parábola é voltada para baixo"*.

Logo, como a parábola tem concavidade voltada para baixo, apresenta **Coeficiente Angular $a < 0$**.

Sendo assim, descartamos as alternativas A, B e C.

O enunciado nos afirma também que há *"... dois interceptos com o eixo das abscissas"*. Isto é, $\Delta > \mathbf{0}$.

$$\Delta > 0$$

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \rightarrow \boldsymbol{b^2 > 4ac}$$

Gabarito: Alternativa **E**

3. **(VUNESP / Pref. Itapevi - 2019) Os organizadores de um evento perceberam que se baixassem o preço do ingresso poderiam obter maior lucro, uma vez que isso atrairia maior número de espectadores. Para tanto, contrataram uma empresa que fez toda a análise da situação e projetaram o lucro L, em milhares de reais, em função do desconto d, em reais, aplicado no valor do ingresso, utilizando a seguinte fórmula:**

$$L = -0{,}4d^2 + 7d + 150$$

Após uma reunião, os organizadores decidiram que irão aplicar um desconto superior a R$ 5,00 no preço de ingresso, de forma a obterem um lucro igual a 165 mil reais, segundo a fórmula apresentada pela empresa. Nesse caso, o desconto aplicado no preço do ingresso será de

a) R$ 7,50
b) R$ 10,00
c) R$ 12,50
d) R$ 15,00
e) R$ 20,00

Comentários:

Vamos **determinar o valor do desconto** que gera um Lucro L de 165 mil reais.

$$L = -0{,}4d^2 + 7d + 150$$

$$165 = -0{,}4d^2 + 7d + 150$$

$$-0{,}4d^2 + 7d + 150 - 165 = 0$$

$$-0{,}4d^2 + 7d - 15 = 0$$

Iremos aplicar a fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes dessa função do segundo grau.

$$d = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$d = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(-0,4)(-15)}}{2(-0,4)}$$

$$d = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-0,8}$$

$$d = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-0,8}$$

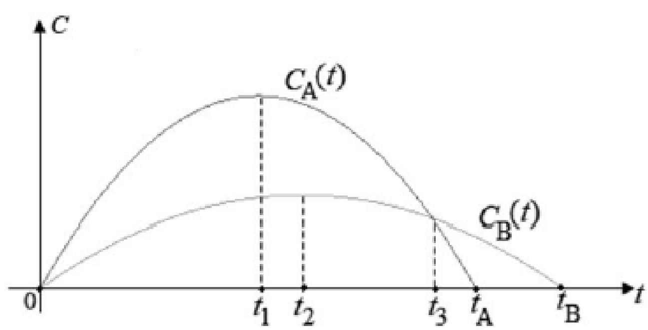
$$d = \frac{-7 \pm 5}{-0,8} \begin{cases} d_1 = \dfrac{-7+5}{-0,8} = \dfrac{-2}{-0,8} \rightarrow \cancel{\boldsymbol{d_1 = 2,5}} \\ d_2 = \dfrac{-7-5}{-0,8} = \dfrac{-12}{-0,8} \rightarrow \boldsymbol{d_2 = 15} \end{cases}$$

Como a banca nos informa que **o desconto é superior a 5 reais**, o valor de $\boldsymbol{d_1}$ **é descartado**, uma vez que $2,5 < 5$. Logo, o desconto será igual a:

$$\boldsymbol{d = 15}$$

Gabarito: Alternativa **D**

4. **(CESPE / IBGE - 2021) Considere que os gráficos C_A e C_B apresentados representam, respectivamente, as quantidades mensais de clientes de dois mercados concorrentes A e B, desde o instante da sua inauguração simultânea, em $t = 0$, até os instantes em que esses mercados encerraram suas atividades, respectivamente, nos instantes t_A e t_B, em que t é dado em meses. Considere, ainda, que $C_A(t) = 300t - 3t^2$ e que $C_B(t) = 120t - t^2$.**

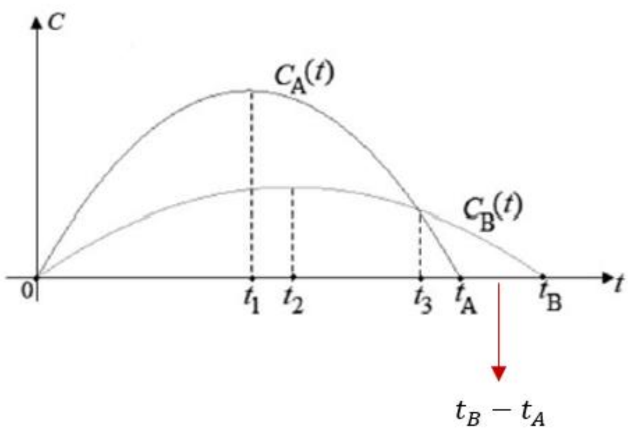


Considerando-se as informações do texto, é correto afirmar que, após o encerramento das atividades comerciais do mercado A, o mercado B ainda permaneceu em atividade comercial por

a) 10 meses
b) 20 meses
c) 30 meses
d) 40 meses
e) 50 meses

Comentários:

Após o encerramento das atividades comerciais do mercado A, o mercado B ainda permaneceu em atividade comercial por um tempo igual a diferença de $t_B - t_A$, correto?



t_B é uma das raízes da função C_B e t_A é uma das raízes da função C_A. Vamos calcular as raízes das funções.

- $C_A(t) = 300t - 3t^2$

$$C_A(t) = 300t - 3t^2$$

$$0 = 300t - 3t^2$$

Colocando $3t$ em evidência:

$$0 = 3t(100 - t) \begin{cases} 3t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \\ 100 - t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 100 \end{cases}$$

O valor 0 já havíamos visto pela figura que é uma das raízes. Logo, a segunda raiz t_A será igual a:

$$\boxed{t_A = 100}$$

- $C_B(t) = 120t - t^2$

$$C_B(t) = 120t - t^2$$

$$0 = 120t - t^2$$

Colocando t em evidência:

$$0 = t(120 - t) \begin{cases} t = 0 \\ 120 - t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 120 \end{cases}$$

Assim como na função acima, o valor 0 já havíamos visto pela figura que é uma das raízes. Logo, a segunda raiz t_B será igual a:

$$\boxed{\boldsymbol{t_B = 120}}$$

Então, é correto afirmar que, após o encerramento das atividades comerciais do mercado A, o mercado B ainda permaneceu em atividade comercial por:

$$t_B - t_A = 120 - 100 = \boldsymbol{20\ meses}$$

Gabarito: Alternativa **B**

5. **(VUNESP / PM SP - 2019) Um míssil, posicionado em um ponto A e inclinado a determinado ângulo com o solo horizontal, foi programado para percorrer uma trajetória modelada por uma função f, definida por**

$$f(x) = -\frac{1}{10.000}x^2 + \frac{1}{4}x$$

com o objetivo de atingir um ponto B. Fixando-se como $(0, 0)$ as coordenadas do ponto A em um sistema de coordenadas cartesianas, cujo eixo das abscissas, com unidade em metros, representaria o referido solo, a ordenada do ponto B seria igual a zero, e a abscissa desse ponto seria igual a

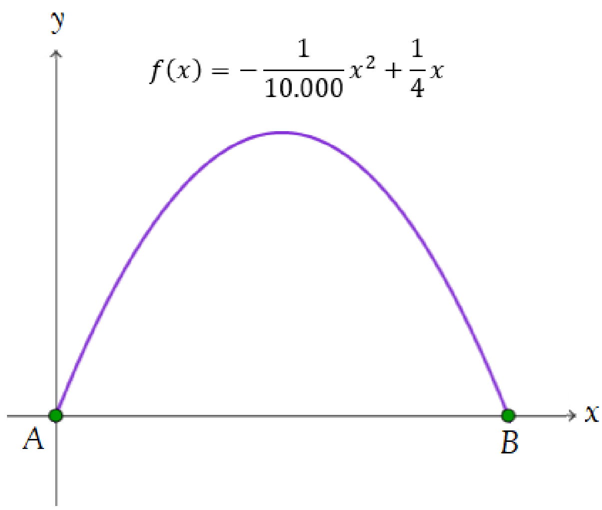
a) 1.000
b) 1.500
c) 2.000
d) 2.500
e) 3.000

Comentários:

O enunciado nos informa que o míssil descrece uma trajetória de parábola com função:

$$f(x) = -\frac{1}{10.000}x^2 + \frac{1}{4}x$$

passando pela origem A e pelo ponto B. Vejamos graficamente o esboço do comando da questão.



Observe então que A e B são as Raízes da função do segundo grau. **Raiz de uma função**, em termos genéricos, é o valor de x que tem o condão de zerar a função $f(x)$. Ou seja, para determinar a raiz da Função do 2° Grau devemos considerar $y = 0$.

Em outras palavras, as raízes da função são os valores de x tais que $f(x) = 0$.

Igualando a função a zero para encontrar as raízes teremos:

$$-\frac{1}{10.000}x^2 + \frac{1}{4}x = 0$$

Colocando x em evidência:

$$x\left(-\frac{1}{10.000}x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

Então,

$$\boldsymbol{x = 0 \quad ou \quad -\frac{1}{10.000}x + \frac{1}{4} = 0}$$

A primeira raiz $(x = 0)$ nada mais é que o ponto A que nos foi fornecido no enunciado. Vamos calcular a outra raiz (ponto B):

$$-\frac{1}{10.000}x + \frac{1}{4} = 0$$

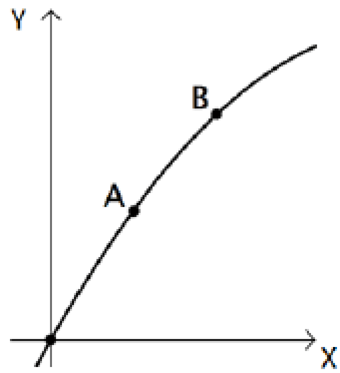
$$\frac{1}{4} = \frac{x}{10.000}$$

$$x = \frac{10.000}{4} \rightarrow \boldsymbol{x = 2.500}$$

Logo, o ponto B será $(0\,;2.500)$. Ou seja, **a abscissa desse ponto seria igual a 2.500**.

Gabarito: Alternativa **D**

6. (FGV / SEE PE - 2016) A figura a seguir mostra um uma parte do gráfico de uma função quadrática.



Dois pontos do gráfico são dados: A = (2, 15) e B = (4, 26).

O gráfico encontrará novamente o eixo X no ponto de abscissa

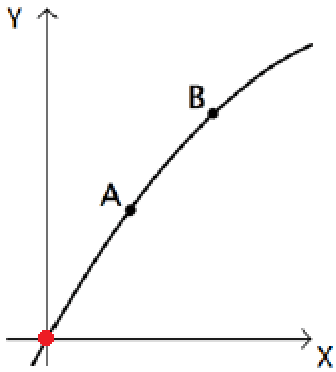
a) 16
b) 17
c) 18
d) 19
e) 20

Comentários:

O gráfico encontra o eixo X nas raízes da função quadrática, isto é, quando $y = 0$.

Vamos, primeiramente, determinar a equação da parábola $y = ax^2 + bx + c$.

O Coeficiente c indica o valor onde a parábola intercepta o eixo y, isto é, quando $x = 0$. Observe que a parábola "corta" o eixo y em $y = 0$.



Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{c = 0}}$$

Observe que o enunciado nos informa que a parábola passa pelos pontos $(2; 15)$ e $(4; 26)$. Vamos substituir estes pontos na equação.

- Substituindo o ponto $(2; 15)$:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$15 = a(2)^2 + b(2) + 0$$

$$\mathbf{15 = 4}\boldsymbol{a} + \mathbf{2}\boldsymbol{b}$$

- Substituindo o ponto $(4; 26)$:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$26 = a(4)^2 + b(4) + 0$$

$$\mathbf{26 = 16}\boldsymbol{a} + \mathbf{4}\boldsymbol{b}$$

Então, temos um sistema de 2 equações e 2 incógnitas:

$$\begin{cases} 15 = 4a + 2b \\ 26 = 16a + 4b \end{cases}$$

Vamos multiplicar a primeira equação por 2 e substrair a primeira da segunda:

$$\begin{cases} 30 = 8a + 4\cancel{b} \\ 26 = 16a + 4\cancel{b} \end{cases} \quad -$$

$$4 = -8a$$

$$a = \frac{4}{-8} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a = -0,5}}$$

De posse de a, calculamos b:

$$15 = 4a + 2b$$

$$15 = 4(-0{,}5) + 2b$$

$$15 = -2 + 2b$$

$$2b = 17$$

$$b = \frac{17}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = 8,5}}$$

Então, nossa função será:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = -0{,}5x^2 + 8{,}5x + 0$$

$$y = -0{,}5x^2 + 8{,}5x$$

$$\boldsymbol{y = x \times (-0,5x + 8,5)}$$

Vamos encontrar as raízes da equação:

$$0 = x \times (-0{,}5x + 8{,}5)$$

Então,

$$\begin{cases} x = 0 \\ ou \\ -0{,}5x + 8{,}5 = 0 \end{cases}$$

A primeira raiz $x = 0$ já está assinalada no gráfico. Vamos determinar a segunda raiz, isto é, o ponto no gráfico que encontrará novamente o eixo x $(y = 0)$.

$$-0{,}5x + 8{,}5 = 0$$

$$0{,}5x = 8{,}5$$

$$x = \frac{8{,}5}{0{,}5} \rightarrow \boldsymbol{x = 17}$$

Gabarito: Alternativa **B**

7. **(VUNESP / UNESP - 2008) Na Volta Ciclística do Estado de São Paulo, um determinado atleta percorre um declive de rodovia de 400 metros e a função**

$$d(t) = 0{,}4t^2 + 6t$$

fornece, aproximadamente, a distância em metros percorrida pelo ciclista, em função do tempo t, em segundos. Pode-se afirmar que a velocidade média do ciclista (isto é, a razão entre o espaço percorrido e o tempo) nesse trecho é

a) superior a 15 m/s.
b) igual a 17 m/s.
c) inferior a 14 m/s.
d) igual a 15 m/s.
e) igual a 14 m/s.

Comentários:

A velocidade média será igual a razão entre o espaço percorrido e o tempo.

$$v = \frac{d}{t}$$

A distância o enunciado nos fornece: 400 metros. Para calcularmos o tempo, vamos substituir a distância percorrida na fórmula:

$$d(t) = 0{,}4t^2 + 6t$$

$$400 = 0{,}4t^2 + 6t$$

$$\boldsymbol{0,4t^2 + 6t - 400 = 0}$$

Onde: $a = 0,4, b = 6$ e $c = -400$.

Calculando por Bhaskara:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times (0,4) \times (-400)}}{2 \times (0,4)}$$

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 640}}{0,8}$$

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{676}}{0,8}$$

$$t = \frac{-6 \pm 26}{0,8} \begin{cases} t_1 = \dfrac{-6 + 26}{0,8} = \dfrac{20}{0,8} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{t_1 = 25}} \\ \\ t_2 = \dfrac{-6 - 26}{0,8} = \dfrac{-32}{0,8} \end{cases}$$

Perceba que nem precisávamos fazer a conta para descobrir t_2. O tempo em t_2 será negativo. Ou seja, é inviável. Logo, <u>o tempo para percorrer 400 metros será de $t_1 = 25\ s$.</u>

Caculando a velocidade média:

$$v = \frac{d}{t}$$

$$v = \frac{400}{25} \rightarrow \boldsymbol{v = 16\ m/s}$$

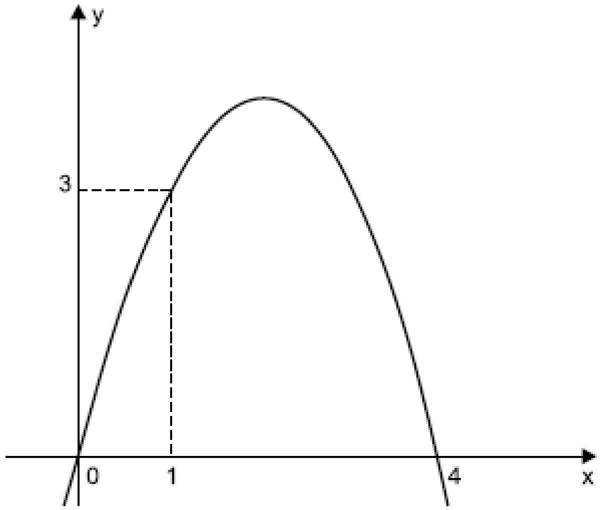
Então, pode-se afirmar que a velocidade média do ciclista nesse trecho de 400 metros é superior a 15 m/s.

Gabarito: Alternativa **A**

QUESTÕES COMENTADAS - BANCAS DIVERSAS

Forma Fatorada

1. **(VUNESP / Pref. Peruíbe - 2019) O gráfico da figura é de uma função quadrática f(x).**



Assim, $f(0{,}5)$ é igual a

a) 1,75
b) 1,5
c) 1,25
d) 1
e) 0,75

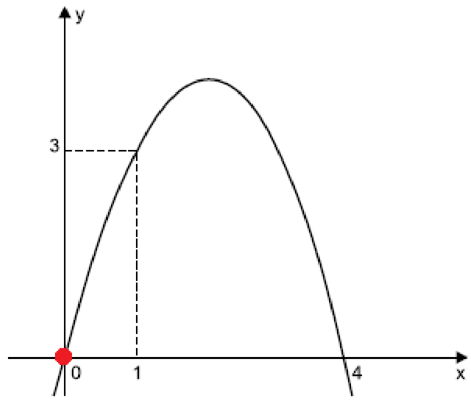
Comentários:

Vamos resolver essa questão por 2 maneiras. A primeira será pela fórmula geral $y = ax^2 + bx + c$. A segunda será pela forma fatorada $y = a(x - x_1)(x - x_2)$:

1. **Forma Geral**

Vamos, primeiramente, determinar a equação da parábola $y = ax^2 + bx + c$.

O Coeficiente c indica o valor onde a parábola intercepta o eixo y, isto é, quando $x = 0$. Observe que a parábola "corta" o eixo y em $y = 0$.



Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{c = 0}}$$

Observe que a parábola passa pelos pontos $(1; 3)$ e $(4; 0)$. Vamos substituir estes pontos na equação.

- Substituindo o ponto $(4; 0)$:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = a(4)^2 + b4 + 0$$

$$0 = 16a + 4b$$

Simplificando toda a igualdade por 4:

$$0 = 16a + 4b \quad \div (4)$$

$$0 = 4a + b \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = -4a}}$$

- Substituindo o ponto $(1; 3)$:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$3 = a(1)^2 + b1 + 0$$

$$3 = a + b$$

Na primeira substituição, determinamos que $b = -4a$. Sendo assim,

$$3 = a + b$$

$$3 = a - 4a$$

$$3 = -3a$$

$$a = \frac{3}{-3} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = -1}}$$

De posse de a, calculamos b.

$$b = -4a$$

$$b = -4(-1) \rightarrow \boxed{\boldsymbol{b = 4}}$$

Então, a função quadrática será:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = -x^2 + 4x + 0$$

$$\boldsymbol{y = -x^2 + 4x}$$

2. **Forma Fatorada**

Pelo gráfico da função temos que, na forma fatorada $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$. Substituindo:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - 0)(x - 4)$$

$$\boldsymbol{y = a(x)(x - 4)}$$

E para determinar o valor de a, substituiremos o ponto $(1\,;3)$ na equação acima:

$$3 = a(1)(1 - 4)$$

$$3 = a \times 1 \times -3$$

$$3 = -3a$$

$$a = \frac{3}{-3} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = -1}}$$

Logo, a função será:

$$y = a(x)(x - 4)$$

$$y = -1(x)(x - 4)$$

$$\boldsymbol{y = -x^2 + 4x}$$

Chegamos na equação da função pelas 2 formas.

E aí, caro Aluno. Qual delas você prefere? Não importa sua preferência. As duas te levarão ao mesmo resultado. Uma com um pouco mais de trabalho que outra.

Minha função é te mostrar todos os caminhos possíveis para que, caso você se esqueça de um deles na hora da prova, possa se resguardar no outro.

Por fim, de posse da fórmula da função, calculamos $f(0{,}5)$:

$$y = -x^2 + 4x$$

$$f(0{,}5) = -(0{,}5)^2 + 4(0{,}5)$$

$$f(0{,}5) = -0{,}25 + 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(0,5) = 1,75}$$

Gabarito: Alterantiva **A**

Questões Comentadas - Bancas Diversas

Raízes por soma e produto

1. **(AOCP / IPE Prev. - 2022) O lucro $L(t)$ obtido com a venda de uma apólice de seguro, em um período de t dias, é dado por:**

$$L(t) = t^2 + 90.t - 1000 \ \ , \ \ \text{em que } t > 0.$$

Com base no exposto, o lucro com a venda dessa apólice será nulo em

a) 100 dias.
b) 110 dias.
c) 90 dias.
d) 55 dias.
e) 10 dias.

Comentários:

A banca nos questiona o período t em que o Lucro é igual a zero. Ou seja, a banca quer saber as raízes da equação do segundo grau, isto é, para quais valores de $t, L(t) = 0$.

Vamos igualar $\boldsymbol{L(t) = 0}$:

$$L(t) = t^2 + 90.t - 1000$$

$$0 = t^2 + 90.t - 1000$$

Iremos resolver por soma e produto em que $a = 1, b = 90$ e $c = -1.000$.

A **soma** e o **produto** das raízes serão iguais a:

$$S = t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{90}{1} = \boldsymbol{-90}$$

$$P = t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1.000}{1} = \boldsymbol{-1.000}$$

Ou seja, dois números que somados deem -90 e multiplicados deem -1.000.

$$t_1 = -100$$

$$t_2 = 10$$

Observe que **a banca deixa explícito que $t > 0$.**

Ou seja, **descartamos $t_1 = -100$** e nossa resposta será igual a:

$$\boldsymbol{t_2 = 10}$$

Logo, o lucro com a venda dessa apólice será nulo em 10 dias.

Gabarito: Alternativa **E**

2. (FUNDATEC / Pref. Vacaria - 2021) A soma e o produto das raízes da equação do segundo grau $2x^2 + 4x - 6 = 0$ são, respectivamente:

a) -2 e -3
b) -3 e -2
c) 2 e 3
d) 3 e 2
e) 2 e -6

Comentários:

A **soma** e o **produto** das raízes serão iguais a:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = \mathbf{-2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = \mathbf{-3}$$

Então, a soma e o produto das raízes são, respectivamente, -2 e -3.

Gabarito: Alternativa **A**

3. (CETREDE / Pref. Icapuí - 2021) Se $y = x^2 + 7x + 12$, então as raízes que satisfazem y serão:

a) 3 e 4.
b) -3 e 3.
c) 3 e -4.

d) -3 e -4.
e) 3 e 3.

Comentários:

Vamos resolver por soma e produto.

A **soma** e o **produto** das raízes serão iguais a:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{1} = \mathbf{-7}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{12}{1} = \mathbf{12}$$

Ou seja, dois números que somados deem -7 e multiplicados deem 12.

$$\boldsymbol{x_1 = -3}$$

$$\boldsymbol{x_2 = -4}$$

Gabarito: Alternativa **D**

Questões Comentadas - Bancas Diversas

Vértice da Parábola

1. (CESPE / TELEBRAS - 2022) A respeito das funções e suas propriedades, julgue o item subsecutivo.

O vértice da função quadrática $q(x) = x^2 + x - 7/4$ ocorre no ponto $V = (-1/2, -2)$.

Comentários:

Vamos calcular separadamente x_V e y_V.

- Calculando $\boldsymbol{x}$ **do vértice**:

$$x_V = \frac{-b}{2a}$$

$$x_V = \frac{-1}{2 \times 1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_V = -\frac{1}{2}}$$

- Calculando $\boldsymbol{y}$ **do vértice**:

Para encontrarmos o valor do y do Vértice, vamos substituir o valor do x_V na equação da função $q(x) = x^2 + x - 7/4$.

$$q(x) = x^2 + x - \frac{7}{4}$$

$$y_V = {x_V}^2 + x_V - \frac{7}{4}$$

$$y_V = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{7}{4}$$

$$y_V = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{7}{4}$$

$$y_V = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{7}{4}$$

$$y_V = \frac{1 - 2 - 7}{4}$$

$$y_V = \frac{-8}{4} \rightarrow \boldsymbol{y_V = -2}$$

Lembrando que você também poderia calcular y_V fazendo $-\Delta/4a$. Todavia, como já temos o valor de x_V, é mais fácil "jogá-lo" na função e calcular y_V.

Então, **o vértice da função quadrática $q(x) = x^2 + x - 7/4$ ocorre (sim) no ponto $V = (-1/2, -2)$.**

Gabarito: **CERTO**

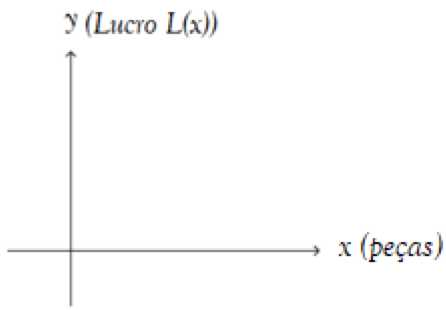
2. **(FUNDATEC / Pref. Flores da Cunha - 2022) Em uma determinada empresa, o lucro é dado pela função $L(x) = -x^2 + 50x + 104$, onde x expressa o número de peças produzidas por semana. Nessa situação, quantas peças essa empresa deverá produzir para alcançar o lucro máximo?**

a) 10.
b) 15.
c) 20.
d) 25.
e) 50.

Comentários:

Observe, primeiramente, que a função $L(x) = -x^2 + 50x + 104$ tem Coeficiente $\boldsymbol{a = -1 < 0}$, isto é, ela apresenta concavidade voltada para **baixo** e, consequentemente, apresenta ponto de **MÁXIMO**.

A banca nos questiona o valor de x do vértice da função. Perceba que o Lucro está no eixo y sendo determinado pela função $L(x)$ e a quantidade de peças produzidas por semana está no eixo x.



Estou enfatizando bem isto porque quero que você sempre **tenha em mente o que representa cada eixo para saber o que está sendi pedido no enunciado**. Nesse enunciado nos foi questionado, conforme falamos, quantas peças essa empresa deverá produzir para alcançar o lucro máximo.

Se as peças produzidas estão no eixo x, a banca quer saber qual é o x do vértice.

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-50}{2 \times (-1)}$$

$$x_v = \frac{-50}{-2} \rightarrow \boldsymbol{x_v = 25}$$

Gabarito: Alternativa **D**

3. (AOCP / SEAD GO - 2022) Seja $f: R \rightarrow R$ uma função polinomial do 2º grau que satisfaz às seguintes condições relativas ao gráfico de f:

• intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0\,,3)$;

• tem vértice $(-2\,,5/2)$

Nessas condições, o valor de $f(4)$ é

a) 9/2
b) 5
c) 11/2
d) 7
e) 17/2

Comentários:

Vamos escreve a <u>função genérica do segundo grau</u> e posteriormente utilizar as informações para calcular os coeficientes.

$$y = ax^2 + bx + c$$

- **Primeira informação**. intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0\,,3)$, isto é, quando $x = 0, y = 3$. Substituindo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$3 = a(0)^2 + b(0) + c \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{c = 3}}$$

Então, a função será do tipo:

$$y = ax^2 + bx + 3$$

- **Segunda informação**. tem vértice $(-2\,, 5/2)$, isto é, $x_V = -2$ e $y_V = 5/2$.

Começando com x_V:

$$x_V = \frac{-b}{2a}$$

$$-2 = \frac{-b}{2a} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{b = 4a}}$$

Para encontrarmos o valor do y do Vértice, vamos substituir o valor do x_V na equação da função $y = ax^2 + bx + 3$.

$$y = ax^2 + bx + 3$$

$$y_V = a{x_V}^2 + bx_V + 3$$

$$\frac{5}{2} = a(-2)^2 + b(-2) + 3$$

$$\frac{5}{2} = 4a - 2b + 3$$

Vamos substituir $b = 4a$ e calcular o valor de a.

$$\frac{5}{2} = 4a - 2(4a) + 3$$

$$\frac{5}{2} = 4a - 8a + 3$$

$$4a = 3 - \frac{5}{2}$$

$$4a = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = \frac{1}{8}}}$$

E consequentemente:

$$b = 4a$$

$$b = 4 \times \frac{1}{8} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{b = \frac{1}{2}}}$$

Logo, a **equação da função** será igual a:

$$y = ax^2 + bx + 3$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + 3}}$$

Por fim, calculamos o valor de $f(4)$:

$$y = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + 3$$

$$f(4) = \frac{(4)^2}{8} + \frac{4}{2} + 3$$

$$f(4) = 2 + 2 + 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(4) = 7}$$

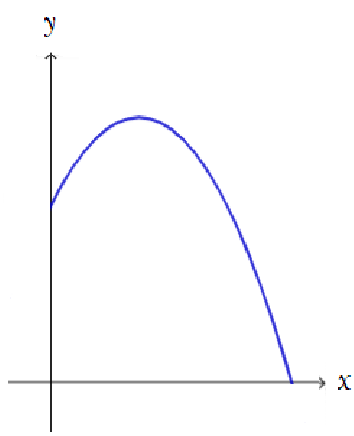
Gabarito: Alternativa **D**

4. (CESPE / PM AL - 2021) Com relação a tópicos de matemática, julgue o item que se segue.

Durante uma caminhada, uma pessoa que segurava na mão uma pequena bola de gude tropeçou em um obstáculo fixo no solo, o que fez a bola ser lançada para frente e cair no chão. A trajetória percorrida pela bola — da mão da pessoa até o chão, suposto plano e horizontal — segue a função espacial $y(x) = -x^2 + x + 1$, em que as distâncias consideradas estão todas em metros e x é não negativo. Nesse caso, considerando-se que $x = 0$ corresponda à localização do obstáculo, conclui-se que a maior altura alcançada pela bola durante o voo é igual a 1,25 metro e que a distância do ponto do tropeço até o ponto em que a bola atingiu o chão é superior a 1 metro.

Comentários:

Vamos esboçar a parábola que descreve a trajetória espacial percorrida pela bola.



A banca nos questiona o valor da altura máxima e a distância do ponto do tropeço $x = 0$ até o ponto em que a bola atingiu o chão. Iremos calcular separadamente.

- **Altura Máxima**

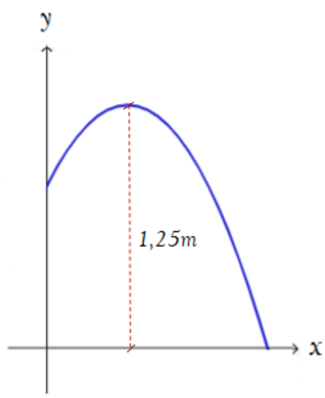
A altura (eixo y) máxima é dado pelo y do vértice da parábola $y(x) = -x^2 + x + 1$, em que $a = -1, b = 1$ e $c = 1$. Sendo calculado pela seguinte equação:

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_V = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

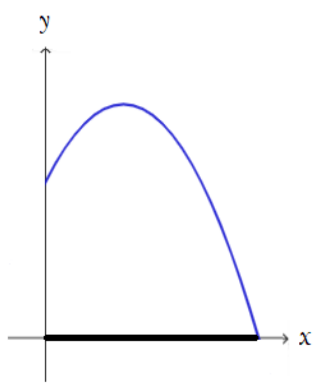
$$y_V = \frac{-\left(1^2 - 4(-1)(1)\right)}{4(-1)} = \frac{-5}{-4} \rightarrow \mathbf{y_V = 1,25}$$

Logo, conclui-se que a maior altura alcançada pela bola durante o voo é igual a 1,25 metro.



- **Distância do ponto do tropeço $x = 0$ até o ponto em que a bola atingiu o chão.**

A distância requerida acima é igual ao comprimento x em negrito abaixo.



Cuidado para não calcular o x do vértice. Não é isso que está sendo pedido. Temos que calcular o valor de x para $y = 0$, isto é, devemos achar a **raiz da função**.

$$y(x) = -x^2 + x + 1$$

$$0 = -x^2 + x + 1$$

Calculando por Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)(1)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{-2} = \dfrac{-1 - 1{,}7}{-2} = \dfrac{-2{,}7}{-2} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 1{,}35} \\ x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{-2} \end{cases}$$

A bem da verdade, nem precisaríamos realizar todas essas contas. A banca apenas questiona se é maior que 1. Então, quando você chegasse na fração, já saberia que esta resultaria em um **valor maior que $\mathbf{1}$**.

Não calculamos x_2 pois nos resultaria em um número negativo e queremos a raiz positiva da função, uma vez que $x > 0$.

Então, a distância do ponto do tropeço até o ponto em que a bola atingiu o chão é superior a 1 metro.

As duas afirmativas estão **certas**.

Gabarito: **CERTO**

5. **(FUNDEP / IPREMU - 2021) Uma agência do INSS fez um estudo para entender o comportamento de seus usuários. Após analisar o horário de chegada de cada cidadão no período de um mês, concluiu-se que a quantidade média de usuários presentes na agência ao longo do dia é dada pela função $n(t) = -10t^2 + 60t + 160$, em que n é número de usuários dentro da agência a cada tempo t, que é dado em horas após a abertura do expediente, que vai das 8 horas da manhã até as 15 horas. Qual é o momento em que há mais usuários na agência e quantos são estes?**

a) às 8h, 160 usuários.

b) às 11h, 250 usuários.
c) às 13h, 570 usuários.
d) às 15h, 1280 usuários.

Comentários:

Observe, primeiramente, que a função $n(t) = -10t^2 + 60t + 160$ tem Coeficiente $\boldsymbol{a = -10 < 0}$, isto é, ela apresenta concavidade voltada para **baixo** e, consequentemente, apresenta ponto de **MÁXIMO**.

O momento em que há mais usuários na agência é dado pelo t do vértice da função.

$$t_V = \frac{-b}{2a}$$

$$t_V = \frac{-(60)}{2(-10)}$$

$$t_V = \frac{-60}{-20} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{t_V = 3}}$$

Perceba que o eixo t é dado em horas após a abertura do expediente que começa as 8 horas da manhã. Logo, se $t_V = 3$, **o momento em que há mais usuários na agência se dá às 11 horas**.

Já poderíamos assinalar a alternativa B e partir pra próxima questão. Porém, vamos calcular quantos são os usuários neste momento.

Para encontrarmos o valor do n do Vértice, vamos substituir o valor do t_V na equação da função $n(t) = -10t^2 + 60t + 160$.

$$n(t) = -10t^2 + 60t + 160$$

$$n_V = -10{t_V}^2 + 60t_V + 160$$

$$n_V = -10 \times (3)^2 + 60 \times (3) + 160$$

$$n_V = -10 \times 9 + 60 \times 3 + 160$$

$$n_V = -90 + 180 + 160 \rightarrow \boldsymbol{n_V = 250}$$

Gabarito: Alternativa **B**

6. **(CESGRANRIO / BB - 2021) Para os seis primeiros meses de um investimento, a evolução, em milhares de reais, de um certo investimento de $R\$\,3.000,00$ é expressa pela fórmula $M(x) =$**

$-1/4(x-4)^2+7$, onde $M(x)$ indica quantos milhares de reais a pessoa poderá retirar após x meses desse investimento. Um cliente pretende deixar esse investimento por seis meses.

Nesse caso, de quanto será a sua perda, em reais, em relação ao máximo que ele poderia ter retirado?

a) 1.000
b) 3.000
c) 4.000
d) 5.000
e) 6.000

Comentários:

Vamos calcular separadamente o quanto ele receberá com a retirada em 6 meses e o qual seria o máximo que ele poderia retirar.

- **6 meses**

Em 6 meses ele terá retirado:

$$M(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^2+7$$

$$M(6) = -\frac{1}{4}(6-4)^2+7$$

$$M(6) = -\frac{1}{4}\times 4+7$$

$$M(6) = -1+7 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M(6) = 6\ \text{mil}}}$$

- **Máximo que ele poderia retirar**

Para calcular o Máximo que ele poderia retirar, podemos aplicar diretamente a fórmula do y do vértice da parábola (observe que M corresponde ao eixo y).

Porém, antes, vamos expandir a fórmula de $M(x)$.

$$M(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^2+7$$

$$M(x) = -\frac{1}{4}(x^2-8x+16)+7$$

$$M(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x - 4 + 7$$

$$\boldsymbol{M(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x + 3}$$

Em que: $a = -1/4\,, b = 2$ e $c = 3$.

Calculando o Montante máximo:

$$M_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$M_V = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$M_V = \frac{-\left(2^2 - 4 \times -\frac{1}{4} \times 3\right)}{4 \times -\frac{1}{4}}$$

$$M_V = \frac{-(4+3)}{-1}$$

$$M_V = \frac{-7}{-1} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_V = 7\ \text{mil}}}$$

Ele retirou 6 mil ao final de 6 meses e poderia ter retirado 7 mil no máximo. Logo, **a perda foi de 1 mil reais**.

Gabarito: Alternativa **A**

7. **(CESPE / UB - 2021) Determinada clínica ofereceu um programa radical de emagrecimento de 60 dias para um grupo de pessoas com obesidade. A média de peso de seus integrantes era de 150 kg no início do programa. O resultado do programa foi descrito pela função**

$$P(t) = 150 - \frac{33t}{10} + \frac{t^2}{25}$$

em que $P(t)$ indica o peso médio das pessoas desse grupo no dia t, com t variando no intervalo $[0{,}60]$.

De acordo com essa função, o menor valor do peso médio dos integrantes desse grupo ocorreu

a) entre o 28.º dia e o 31.º dia.

b) entre o 32.º dia e o 35.º dia.
c) entre o 36.º dia e o 39.º dia.
d) entre o 40.º dia e o 43.º dia.
e) entre o 44.º dia e o 50.º dia.

Comentários:

Reescrevendo a parábola:

$$P(t) = 150 - \frac{33t}{10} + \frac{t^2}{25}$$

$$P(t) = \frac{t^2}{25} - \frac{33t}{10} + 150$$

Em que: $a = 1/25$, $b = -33/10$ e $c = 150$.

Observe, primeiramente, que a parábola tem Coeficiente $\boldsymbol{a = 1/25 > 0}$, isto é, ela apresenta concavidade voltada para **cima** e, consequentemente, apresenta ponto de **MÍNIMO**.

O enunciado nos questiona em que dia ocorreu o menor valor do peso médio.

Perceba que o Peso médio está no eixo y sendo determinado pela função $P(t)$ e o dia t está no eixo x.

Estou enfatizando bem isto porque quero que você sempre **tenha em mente o que representa cada eixo para saber o que está sendi pedido no enunciado**. Nesse enunciado nos foi questionado, em qual dia ocorre o Peso mínimo.

Se os dias t estão no eixo x, a banca quer saber qual é o t do vértice.

$$t_v = \frac{-b}{2a}$$

$$t_v = \frac{-\left(-\frac{33}{10}\right)}{2 \times \frac{1}{25}}$$

$$t_v = \frac{3{,}3}{0{,}08} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t_v = 41{,}25 \text{ dias}}$$

Ou seja, o menor valor do peso médio dos integrantes desse grupo ocorreu entre o 40.º dia e o 43.º dia.

Gabarito: Alternativa **D**

8. **(INEP / ENEM - 2021) Considere que o modelo matemático utilizado no estudo da velocidade V, de uma partícula de um fluido escoando em um tubo, seja diretamente proporcional à diferença dos quadrados do raio R da secção transversal do tubo e da distância x da partícula ao centro da secção que a contém. Isto é, $V(x) = K^2(R^2 - x^2)$, em que K é uma constante positiva. O valor de x, em função de R, para que a velocidade de escoamento de uma partícula seja máxima é de**

a) 0
b) R
c) $2R$
d) KR
e) K^2R^2

Comentários:

Vamos reescrever a função fornecida no enunciado:

$$V(x) = K^2(R^2 - x^2)$$

$$V(x) = K^2R^2 - x^2K^2$$

$$\boldsymbol{V(x) = -K^2x^2 + K^2R^2}$$

Observe que se trata de uma função do segundo grau com coeficientes $a = -K^2, b = 0$ e $c = K^2R^2$.

Perceba que a parábola tem Coeficiente Angular **negativo**, isto é, ela apresenta concavidade voltada para **baixo** e, consequentemente, apresenta ponto de **MÁXIMO**.

O valor de x, para que a velocidade de escoamento de uma partícula seja máxima é igual ao x vo vértice da parábola.

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-0}{2 \times -K^2} \rightarrow \boldsymbol{x_v = 0}$$

Logo, o valor de x, em função de R, para que a velocidade de escoamento de uma partícula seja máxima é igual a 0.

Gabarito: Alternativa **A**

9. **(AOCP / SANESUL - 2021) Um funcionário representou os valores do lucro da empresa em que trabalha de acordo com o número de meses trabalhados com a seguinte função:**

$$y = -x^2 + 12x - 32,$$

em que x é o número de meses e y é o lucro em milhões de reais. Sendo assim, assinale a alternativa que apresenta após quantos meses essa empresa obteve o lucro máximo e qual seria esse lucro.

a) $x = 3$ meses e $y = 2$ milhões
b) $x = 4$ meses e $y = 6$ milhões
c) $x = 5$ meses e $y = 1$ milhões
d) $x = 6$ meses e $y = 4$ milhões
e) $x = 8$ meses e $y = 8$ milhões

Comentários:

Dada a função: $y = -x^2 + 12x - 32$, em que $a = -1, b = 12$ e $c = -32$.

Inicialmente, observe que o Coeficiente $\boldsymbol{a}$ da parábola é igual a $\mathbf{-1}$, isto é, **menor que zero**. Logo, a parábola terá concavidade voltada **PARA BAIXO** e, consequentemente, **PONTO DE MÁXIMO**.

Vamos calcular as coordenadas do ponto de máximo (vértice) da parábola. Calculando x_V:

$$x_V = \frac{-b}{2a}$$

$$x_V = \frac{-12}{2(-1)} \rightarrow \boldsymbol{x_V = 6}$$

Logo, após 6 meses essa empresa obteve o lucro máximo. Já poderíamos assinalar a alternativa D e partir para a próxima questão. Porém, como estamos treinando, iremos calcular qual é esse lucro máximo.

Para encontrarmos o valor do y do Vértice, isto é, o valor do lucro máximo, vamos substituir o valor do x_V na equação da função $y = -x^2 + 12x - 32$.

$$y = -x^2 + 12x - 32$$

$$y_V = -{x_V}^2 + 12x_V - 32$$

$$y_V = -(6)^2 + 12(6) - 32$$

$$y_V = -36 + 72 - 32 \rightarrow \boldsymbol{y_V = 4}$$

Então, **o lucro máximo foi igual a 4 milhões**.

Gabarito: Alternativa **D**

10. (FCC / IBMEC - 2019) A empresa de Paulo fabrica e vende um produto cuja quantidade vendida Q depende do preço unitário P cobrado no mercado, de acordo com a expressão $Q = 100 - 2P$. Sabe-se que o custo unitário de fabricação deste produto é de R$ 3,00. Então, o preço unitário que Paulo deve cobrar pelo produto, de modo que a empresa tenha o maior lucro (faturamento das vendas menos custos totais) possível, é

a) R$ 30,00
b) R$ 24,00
c) R$ 26,50
d) R$ 21,00
e) R$ 36,00

Comentários:

O **lucro** de uma operação é determinado pela diferença do preço de Venda menos o preço de Custo, correto?

$$L = V - C$$

Vamos determinar o lucro na operação para Q unidades compradas e vendidas.

- O custo unitário de fabricação deste produto é de R$ 3,00. Então, o Custo total para Q unidades será:

$$C = 3 \times Q$$

$$C = 3 \times (100 - 2P) \rightarrow \boxed{\boldsymbol{C = 300 - 6P}}$$

- A empresa de Paulo fabrica e vende um produto cuja quantidade vendida Q depende do preço unitário P cobrado no mercado. Logo, o Valor total obtido na Venda será igual a quantidade vendida vezes o preço unitário:

$$V = Q \times P$$

$$V = (100 - 2P) \times P \rightarrow \boxed{\boldsymbol{V = 100P - 2P^2}}$$

Sendo assim, a função do Lucro L será:

$$L = V - C$$

$$L = 100P - 2P^2 - (300 - 6P)$$

$$L = 100P - 2P^2 - 300 + 6P$$

$$\boldsymbol{L = -2P^2 + 106P - 300}$$

A banca nos questiona o preço unitário que Paulo deve cobrar pelo produto, de modo que a empresa tenha o maior lucro, isto é, o valor do P do vértice da parábola (nesse caso, P é o equivalente ao x do vértice).

$$P_v = \frac{-b}{2a}$$

$$P_v = \frac{-106}{2(-2)}$$

$$P_v = \frac{-106}{-4} \rightarrow \boldsymbol{P_v = 26,5}$$

Gabarito: Alternativa **C**

11. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) Um estudo revelou que o valor da variável $y = f(x)$, em milhares de reais, em função da variável x, em milhares de peças, é dado pela função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com x variando de 0 a 400. Considere que $f(0) = 800$, e $f(100) = f\ (300) = 1.400$.

Assim, o valor máximo que y pode assumir, em milhões de reais, é igual a:

a) 1,2
b) 1,4
c) 1,6
d) 1,8
e) 2,0

Comentários:

Observe que a banca nos fornece o valor de y quando $x = 0$.

$$f(0) = 800$$

Este é o nosso ponto c que representa o valor em que a parábola intercepta o eixo y. Logo:

$$\boxed{\boldsymbol{c = 800}}$$

O enunciado nos informa que $f(100) = f\ (300) = 1.400$. Vamos substituir estes dois pontos na equação da parábola e determinar os Coeficientes a e b.

- $f(100) = 1.400$

$$f(x) = ax^2 + bx + 800$$

$$1.400 = a(100)^2 + b(100) + 800$$

$$1.400 = 10.000a + 100b + 800$$

$$\mathbf{10.000}\boldsymbol{a} + \mathbf{100}\boldsymbol{b} = \mathbf{600} \quad equação\ (I)$$

- $f(300) = 1.400$

$$f(x) = ax^2 + bx + 800$$

$$1.400 = a(300)^2 + b(300) + 800$$

$$1.400 = 90.000a + 300b + 800$$

$$\mathbf{90.000}\boldsymbol{a} + \mathbf{300}\boldsymbol{b} = \mathbf{600} \quad equação\ (II)$$

Então ficamos com um <u>sistema formado por 2 equações e 2 incógnitas</u>.

$$\begin{cases} 10.000a + 100b = 600 \\ 90.000a + 300b = 600 \end{cases}$$

Vamos multiplicar a equação de cima por 3:

$$\begin{cases} 30.000a + 300b = 1.800 \\ 90.000a + 300b = 600 \end{cases}$$

Agora vamos **subtrair a primeira da segunda**:

$$\begin{cases} 30.000a + \cancel{300b} = 1.800 \\ 90.000a + \cancel{300b} = 600 \end{cases} \quad -$$

$$-60.000a = 1.200$$

Então:

$$a = -\frac{1.200}{60.000} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = -0,02}}$$

Vamos substituir na equação (I) e calcular b:

$$10.000a + 100b = 600$$

$$10.000(-0{,}02) + 100b = 600$$

$$-200 + 100b = 600$$

$$100b = 600 + 200$$

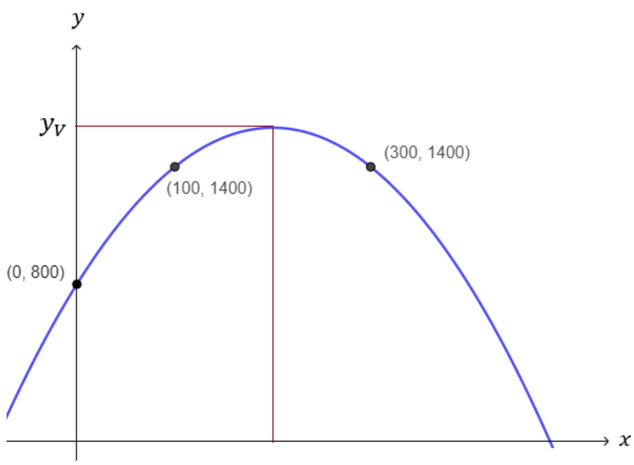
$$100b = 800 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = 8}}$$

Logo, a equação da parábola será igual a:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\boldsymbol{f(x) = -0,2x^2 + 8x + 800}$$

Esboçando a curva (apenas para visualização. Não precisaríamos esboçar na hora da prova) teremos:



O enunciado nos questiona o valor máximo de y, isto é, o y do vértice (y_V).

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

Substituindo os valores:

$$y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y_V = -\frac{8^2 - 4 \times (-0{,}02) \times (800)}{4 \times (-0{,}02)}$$

$$y_V = -\frac{64 + 64}{-0{,}08}$$

$$y_V = \frac{-128}{-0{,}08} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y_V = 1.600\ milhares}$$

Assim, o valor máximo que y pode assumir, em **milhões** de reais, é **igual a 1,6 milhões**.

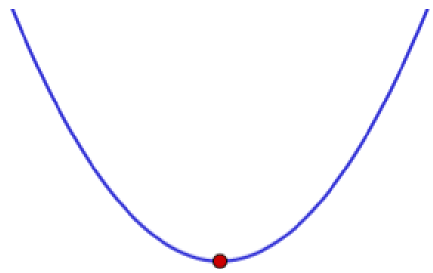
Gabarito: Alternativa **C**

12. (VUNESP / Pref. Cerquilho - 2019) Sobre a função $f: R \rightarrow R$, cuja representação algébrica é $y = f(x) = x^2 - 144$, é correto afirmar que o vértice de sua representação gráfica é um ponto

a) de máximo e tem coordenadas $(-144, 0)$.
b) de mínimo e tem coordenadas $(-144, 0)$.
c) de máximo e tem coordenadas $(0, -144)$.
d) de mínimo e tem coordenadas $(0, -144)$.
e) de máximo e tem coordenadas $(0, 144)$.

Comentários:

Inicialmente, observe que o Coeficiente $\boldsymbol{a}$ da parábola é igual a $\mathbf{1}$, isto é, **maior que zero**. Logo, a parábola terá concavidade voltada **PARA CIMA** e, consequentemente, **PONTO DE MÍNIMO**.



Só com isso, já descartaríamos as Alternativas A, C e E.

- **Calculando x do vértice:**

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-0}{2 \times 1} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x_v = 0}}$$

Perceba que na Alternativa B (lembrando que já eliminamos A, C e E e estamos então, entre a B e a D) o valor de x é igual a -144. Ou seja, a Alternativa B também já seria descartada, nos restando assim a Alternativa D.

Vamos confirmar.

- **Calculando y do vértice:**

Para encontrarmos o valor do y do Vértice, vamos substituir o valor do x_v na equação da função $y = x^2 - 144$.

$$y = x^2 - 144$$

$$y_v = {x_v}^2 - 144$$

$$y_v = 0^2 - 144 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{y_v = -144}}$$

Lembrando que você também poderia calcular y_v fazendo $-\Delta/4a$. Todavia, como já temos o valor de x_v, é mais fácil "jogá-lo" na função e calcular y_v.

Então, é correto afirmar que o vértice de sua representação gráfica é um **PONTO DE MÍNIMO** e tem coordenadas $(\mathbf{0}, -\mathbf{144})$.

Gabarito: Alternativa **D**

13. (CESPE / TJ PA - 2020) Considere que, em determinado dia, um computador seja ligado às 5 horas e desligado às 19 horas e que, nesse intervalo de tempo, a porcentagem da memória desse computador que esteja sendo utilizada na hora x seja dada pela expressão

$$P(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 30x - 100$$

Nessa situação, no intervalo de tempo considerado, na hora em que a memória do computador estiver sendo mais demandada, a porcentagem utilizada será igual a

a) 12%
b) 20%
c) 70%
d) 80%
e) 100%

Comentários:

Observe que a função apresenta o Coeficiente $a = -5/4$ (menor que zero), o que caracteriza uma parábola com concavidade voltada para baixo e, consequentemente, aprensenta ponto de máximo.

A banca nos questiona a Porcentagem utilizada na maior demanda.

FIQUE ATENTO!

Observe que **a Porcentagem P é relativa ao y da função genérica** $y = ax^2 + bx + c$ que estudamos. Apenas mudou a "letra".

Ou seja, a banca nos questiona o máximo P (y do vértice).

$$P_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$P_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$P_v = \frac{-\left(30^2 - 4\left(\frac{-5}{4}\right)(-100)\right)}{4\left(\frac{-5}{4}\right)}$$

$$P_v = \frac{-(900 - 500)}{-5}$$

$$P_v = \frac{-400}{-5} \rightarrow \boldsymbol{P_v = 80}$$

Então, no intervalo de tempo considerado, na hora em que a memória do computador estiver sendo mais demandada, a porcentagem utilizada será igual a 80%.

Gabarito: Alternativa **D**

14. (VUNESP / Pref. Dois Córregos - 2019) Sobre a função $f: R \rightarrow R$ dada por $y = f(x) = (10 - x)(50 + x)$, é correto afirmar que ela tem como ponto

a) de máximo o ponto $V(-20, 900)$.
b) de máximo o ponto $V(-20, 1\,700)$.
c) de mínimo o ponto $V(-20, 900)$.
d) de mínimo o ponto $V(-20, 1\,700)$.
e) de mínimo o ponto $V(20, 100)$.

Comentários:

Primeiro passo é desenvolver a função:

$$y = (10 - x)(50 + x)$$

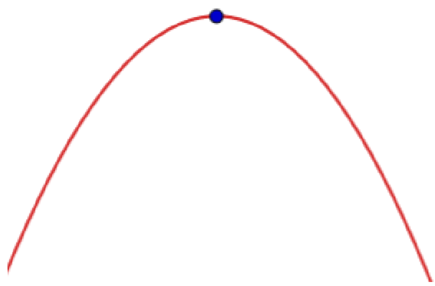
$$y = 500 - 50x + 10x - x^2$$

Reordenando:

$$y = -x^2 - 40x + 500$$

Onde: $a = -1, b = -40$ e $c = 500$.

Perceba que o Coeficiente a da parábola é igual a $\mathbf{-1}$, isto é, **menor que zero**. Logo, a parábola terá concavidade voltada **PARA BAIXO** e, consequentemente, **PONTO DE MÁXIMO**.



Já descartaríamos as Alternativas C, D e E.

- **Calculando x do vértice:**

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-(-40)}{2 \times (-1)}$$

$$x_v = \frac{40}{-2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x_v = -20}}$$

Tanto a letra D quanto a letra E tem -20 como valor de x_v. Próximo passo é calcular y_v.

- **Calculando y do vértice:**

Para encontrarmos o valor do y do Vértice, vamos substituir o valor do x_v na equação da função $y = -x^2 - 40x + 500$.

$$y = -x^2 - 40x + 500$$

$$y_v = -{x_v}^2 - 40x_v + 500$$

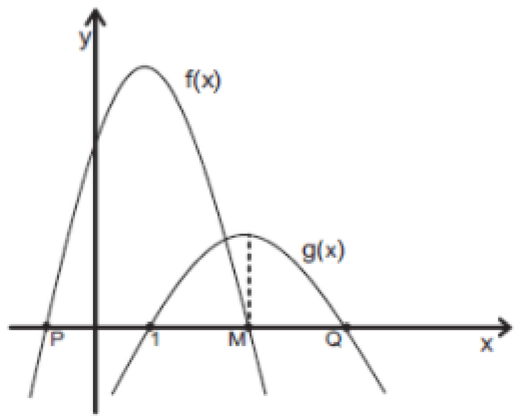
$$y_v = -(-20)^2 - 40 \times (-20) + 500$$

$$y_v = -400 + 800 + 500 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{y_v = 900}}$$

Então, é correto afirmar que ela tem como **PONTO DE MÁXIMO** o ponto $\boldsymbol{V(-20, 900)}$.

Gabarito: Alternativa **A**

15. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2012) Sejam $\boldsymbol{f(x) = -2x^2 + 4x + 16}$ e $\boldsymbol{g(x) = ax^2 + bx + c}$ funções quadráticas de domínio real, cujos gráficos estão representados abaixo. A função $\boldsymbol{f(x)}$ intercepta o eixo das abscissas nos pontos $\boldsymbol{P(x_P, 0)}$ e $\boldsymbol{M(x_M, 0)}$, e $\boldsymbol{g(x)}$, nos pontos $\boldsymbol{(1, 0)}$ e $\boldsymbol{Q(x_Q, 0)}$.



Se g(x) assume valor máximo quando $x = x_M$, conclui-se que x_Q é igual a

a) 3
b) 7
c) 9
d) 11
e) 13

Comentários:

Observe que P e M são os pontos das raízes da função $f(x) = -2x^2 + 4x + 16$. Vamos encontrar as raízes desta função.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-2)(16)}}{2(-2)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 128}}{-4}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{-4}$$

$$x = \frac{-4 \pm 12}{-4} \quad \begin{cases} x_M = \dfrac{-4 - 12}{-4} = \dfrac{-16}{-4} = 4 \\ x_P = \dfrac{-4 + 12}{-4} = \dfrac{+8}{-4} = -2 \end{cases}$$

Temos então que $\boldsymbol{x_M = 4}$.

Perceba que $x_M = 4$, pela simetraria da parábola, é o <u>ponto médio das duas raízes da função $g(x)$</u>. As duas raízes são 1 e x_Q.

Então:

$$x_M = \frac{1 + x_Q}{2}$$

$$4 = \frac{1 + x_Q}{2}$$

$$8 = 1 + x_Q$$

$$x_Q = 8 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_Q = 7}$$

Gabarito: Alternativa **B**

16. (VUNESP / Pref. Ribeirão Preto - 2019) A representação gráfica de uma função quadrática, dada por $y = g(x) = -x^2 + bx + c$, tem como máximo o ponto de coordenadas $(0, 5)$. Logo, $b + c$ é igual a

a) -5
b) -3
c) 0
d) 3
e) 5

Comentários:

O enunciado nos informa que o **Vértice** da função tem ponto $(x_v = 0\ ;\ y_v = 5)$.

Vamos substituir a fórmula do x_v:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$0 = \frac{-b}{2 \times (-1)}$$

Observe que na função $g(x) = -x^2 + bx + c$, o coeficiente a que multiplica a variável x^2 é igual a -1.

$$0 = \frac{-b}{-2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = 0}}$$

Então, a função será:

$$y = -x^2 + bx + c$$

$$y = -x^2 + 0x + c \quad \rightarrow \quad y = -x^2 + c$$

Vamos substituir os pontos do vértice na função acima e calcular o valor de c:

$$y = -x^2 + c$$

$$y_v = -{x_v}^2 + c$$

$$5 = -0^2 + c$$

$$5 = 0 + c \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{c = 5}}$$

Poderíamos também calcular c com a fórmula do y_v:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$5 = \frac{-(0^2 - 4 \times (-1) \times c)}{4 \times (-1)}$$

$$5 = \frac{-(0 + 4c)}{-4}$$

$$5 = \frac{-4c}{-4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{c = 5}}$$

Acredito que seja mais fácil substituir o valor de x_v na função, não é?!

Finalizando o exercício:

$$b + c = 0 + 5 \rightarrow \boldsymbol{b + c = 5}$$

Gabarito: Alternativa **E**

17. (FCC / TRE AC - 2010) Para repor o estoque de sua loja, Salma compra certo artigo ao preço de R$ 28,00 a unidade. Suponha que Salma estime que, se cada artigo for vendido ao preço unitário de x reais, ela conseguirá vender $(84 - x)$ unidades. De acordo com essa estimativa, para que seja obtido o maior lucro possível, o número de artigos que deverão ser vendidos é

a) 84
b) 70
c) 56
d) 42
e) 28

Comentários:

O **lucro** de uma operação é determinado pela diferença do preço de Venda menos o preço de Custo, correto?

$$L = V - C$$

Vamos determinar o lucro na operação para $(84 - x)$ unidades compradas e vendidas.

- Salma estime que, se cada artigo for vendido ao preço unitário de x reais, ela conseguirá vender $(84 - x)$ unidades. Logo, o valor recebido nas vendas será igual a quantidade de produtos vendidos vezes o valor de cada unidade.

$$V = (84 - x) \times x$$

$$\boxed{\boldsymbol{V = 84x - x^2}}$$

- Salma compra certo artigo ao preço de R$ 28,00 a unidade, isto é, o Custo do produto é igual a R$ 28,00 vezes a quantidade de unidades compradas $(84 - x)$.

$$C = 28 \times (84 - x)$$

$$\boxed{\boldsymbol{C = 2.352 - 28x}}$$

Sendo assim, a função do Lucro L será:

$$L = V - C$$

$$L = 84x - x^2 - (2.352 - 28x)$$

$$L = 84x - x^2 - 2.352 + 28x$$

$$\boldsymbol{L = -x^2 + 112x - 2.352}$$

A banca nos questiona o valor do x do vértice, isto é, o valor de x (preço) para que seja obtido o maior lucro possível.

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{112}{2(-1)}$$

$$x_v = \frac{-112}{-2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x_v = 56}}$$

Cuidado para não marcar a Alternativa C. Determinamos o preço que maximiza o lucro. A banca nos questiona a QUANTIDADE VENDIDA, ou seja, $(84 - x)$.

$$84 - x = 84 - 56 = \mathbf{28}\ \boldsymbol{unidades}$$

Gabarito: Alternativa **E**

18. (VUNESP / Pref. São Paulo - 2019) A função dada por $P = f(x) = x^2 - 3,5x$, com $0 \leq x \leq 7/2$, em que P corresponde à profundidade, ao nível do mar, e x corresponde ao deslocamento, ambos em metros, é a que melhor modela a curva feita por um mergulhador em um dos seus mergulhos. A maior profundidade que esse nadador atingiu, ao nível do mar, em metros, foi, aproximadamente,

a) 4,5
b) 3,0
c) 2,5
d) 3,5
e) 4,0

Comentários:

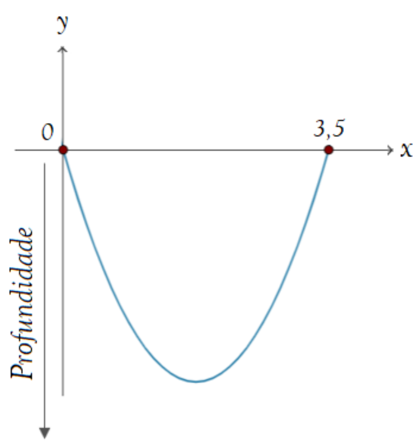
Vamos **esboçar a função** $f(x) = x^2 - 3{,}5x$ em um gráfico. Primeiramente, iremos encontrar as raízes da equação:

$$x^2 - 3{,}5x = 0$$

Colocando x em envidência:

$$x(x - 3{,}5) = 0 \begin{cases} \boxed{x_1 = 0} \\ x_2 - 3{,}5 = 0 \quad \rightarrow \boxed{x_2 = 3,5} \end{cases}$$

Representando graficamente:



Observe que, apesar da Profundidade P estar no eixo y, ela aumenta para baixo, uma vez que **a função dada é a que melhor modela a curva feita por um mergulhador** em um dos seus mergulhos. Ou seja, **quanto mais baixo o mergulhador estiver, MAIOR será sua profundidade.**

Com esse raciocínio temos que: a maior profundidade que esse nadador atingirá, será igual ao **Ponto de MÍNIMO** dessa parábola, isto é, será igual ao y do vértice.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

Perceba que na função $f(x) = x^2 - 3{,}5x$, os Coeficiente são $a = 1$, $b = -3{,}5$ e $c = 0$. Substituindo na função acima:

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-((-3{,}5)^2 - 4 \times 1 \times 0)}{4 \times 1}$$

$$y_v = \frac{-(12{,}25 - 0)}{4}$$

$$y_v = \frac{-12{,}25}{4} \rightarrow \boldsymbol{y_v \cong -3}$$

Resultado deu negativo porque, como vimos, **a Profundidade cresce para baixo no gráfico**. A maior profundidade que esse nadador atingiu, ao nível do mar, foi de aproximadamente, 3 metros.

Gabarito: Alternativa **B**

19. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2012) A raiz da função $f(x) = 2x - 8$ é também raiz da função quadrática $g(x) = ax^2 + bx + c$.

Se o vértice da parábola, gráfico da função $g(x)$, é o ponto $V(-1, -25)$, a soma $a + b + c$ é igual a:

a) -25
b) -24
c) -23
d) -22
e) -21

Comentários:

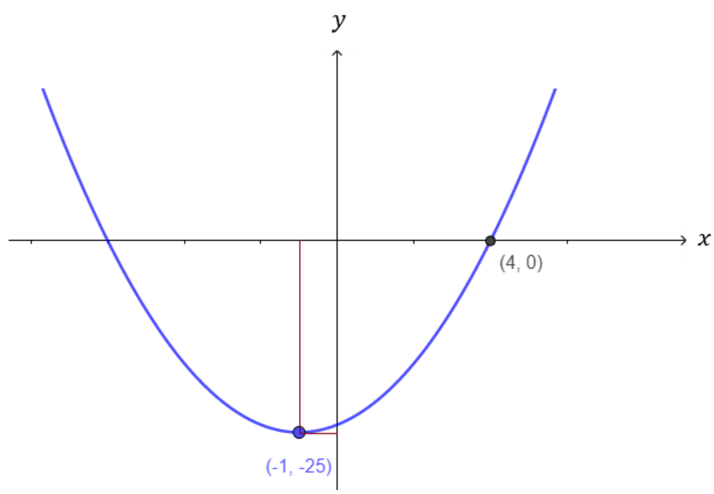
Primeiramente, vamos calcular a raiz da função $f(x) = 2x - 8$.

$$2x - 8 = 0$$

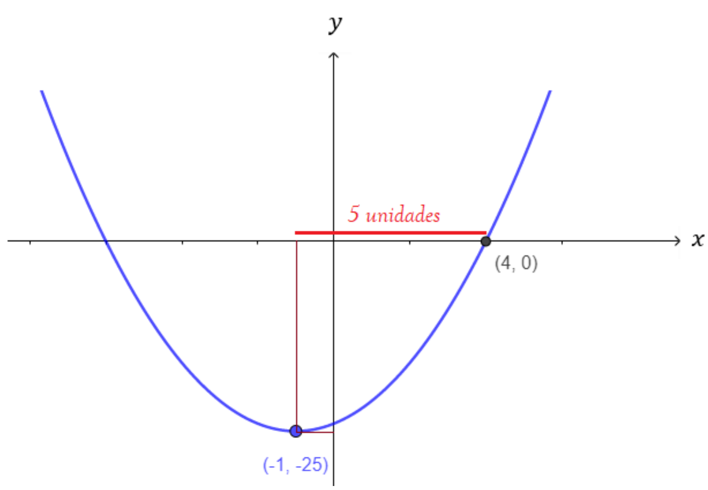
$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2} \rightarrow \boldsymbol{x = 4}$$

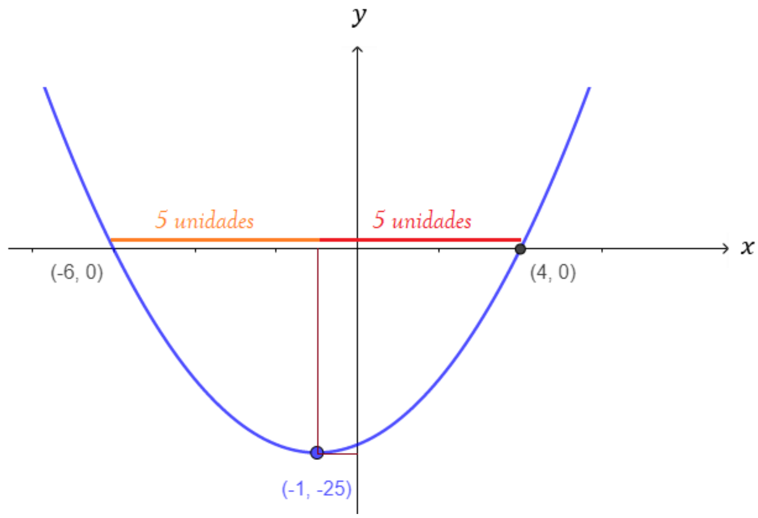
Então, $x = 4$ também é raiz da função quadrática. Esboçando a função teríamos algo do tipo:



Observe que o x do vértice (x_V) é simétrico em relação às raízes. Perceba que do $x_V = -1$ até a raiz $x_1 = 4$ tem uma distância de 5 unidades para a direita.



Logo, pela simetria da parábola, do $x_V = -1$ até a outra raiz x_2 terá que ter 5 unidades para a esquerda. Em outras palavras, x_V é a média aritmética das raízes. Sendo assim, $x_2 = -6$.



Sabemos então que as raízes da equação do segundo grau são:

$$x_1 = 4 \quad e \quad x_2 = -6$$

Vamos determinar o valor dos coecifientes. Sabemos que a <u>multiplicação das raízes</u> é igual a:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Substituindo as raízes $x_1 = 4$ e $x_2 = -6$ teremos:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$4 \times -6 = \frac{c}{a}$$

$$-24 = \frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{c = -24a}}$$

Sabemos também que, a soma das raízes é:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$4 - 6 = \frac{-b}{a}$$

$$-2 = \frac{-b}{a} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = 2a}}$$

Ou seja, <u>calculamos todas as incógnitas em função do Coeficiente a</u>.

Vamos utilizar a única informação que ainda não utilizamos. A banca nos informa que o $y_V - 25$.

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Substituindo os valores em função de a:

$$-25 = -\frac{(2a)^2 - 4a(-24a)}{4a}$$

$$-25 = -\frac{4a^2 + 96a^2}{4a}$$

$$-25 = -\frac{100a^2}{4a}$$

$$-25 = -25a$$

$$a = \frac{-25}{-25} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a = 1}}$$

De posse de a, calculamos b e c:

$$c = -24a$$

$$c = -24 \times 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{c = -24}}$$

$$b = 2a$$

$$b = 2 \times 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = 2}}$$

Logo,

$$a + b + c = 1 + 2 - 24 = \mathbf{-21}$$

Gabarito: Alternativa **E**

20. (VUNESP / IPMS SJC - 2018) Uma pequena fábrica produz pelo menos 4 canetas por dia. O custo y (em reais) para a produção de um número x de canetas é dado pela equação $y = -x^2 + 10x + 20$. Certo dia, o custo de produção das canetas foi de $R\$\ 36,00$. No dia seguinte, o custo de

produção das canetas foi de $R\$\ 20,00$. A diferença, em reais, entre o custo unitário da produção dessas canetas, nesses dias, é igual a

a) 1,80
b) 2,10
c) 2,50
d) 2,90
e) 3,20

Comentários:

Atente-se que a banca quer a diferença entre o **CUSTO UNITÁRIO** da produção. O custo unitário, conforme o próprio nome sugere, é igual ao **Custo total dividido pela quantidade produzida**.

Vamos calcular separadamente o Custo Unitário para cada dia:

- **Certo dia, o custo de produção y das canetas foi de $R\$\ 36,00$. Calculando a quantidade de canetas produzidas nesse dia:**

$$-x^2 + 10x + 20 = 36$$

$$-x^2 + 10x - 16 = 0$$

Onde: $a = -1, b = 10$ e $c = -16$.

Calculando as raízes da função:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times (-1) \times (-16)}}{2 \times (-1)}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 64}}{-2}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{36}}{-2}$$

$$x = \frac{-10 \pm 6}{-2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-10-6}{-2} = \dfrac{-16}{-2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x_1 = 8}} \\ \\ x_2 = \dfrac{-10+6}{-2} = \dfrac{-4}{-2} \rightarrow \cancel{\boldsymbol{x_2 = 2}} \end{cases}$$

Observe, porém, que a fábrica produz <u>pelo menos 4 canetas por dia</u>. Logo, $x_2 = 2$ não pode ser solução da função.

Logo, para um Custo Total de 36 reais temos a produção de 8 canetas. Sendo assim, o **CUSTO UNITÁRIO** dessa primera parte será:

$$C_{un} = \frac{C_T}{q}$$

$$C_{un\,1} = \frac{36}{8} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{C_{un\,1} = 4,5}}$$

Faremos toda essa sistemática para a segunda parte do problema.

- **No dia seguinte, o custo de produção das canetas foi de $R\$\ 20,00$.**

$$-x^2 + 10x + 20 = 20$$

$$-x^2 + 10x = 0$$

Colocando x em evidência:

$$x(-x+10) = 0 \begin{cases} \cancel{\boldsymbol{x_1 = 0}} \\ \\ -x_2 + 10 = 0 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x_2 = 10}} \end{cases}$$

Como a fábrica <u>produz pelo menos 4 canetas por dia</u>, descartamos x_1.

Logo, para um Custo Total de 20 reais temos a produção de 10 canetas. Sendo assim, o CUSTO UNITÁRIO dessa segunda parte será:

$$C_{un} = \frac{C_T}{q}$$

$$C_{un\,2} = \frac{20}{10} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{C_{un\,2} = 2}}$$

Por fim, calculamos **a diferença entre os Custos Unitários**:

$$d = C_{un\,1} - C_{un\,2}$$

$$d = 4{,}5 - 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{d = 2,5}$$

Gabarito: Alternativa **C**

21. (CESPE / TJ PR - 2019) Uma instituição alugou um salão para realizar um seminário com vagas para 100 pessoas. No ato de inscrição, cada participante pagou R$ 80 e se comprometeu a pagar mais R$ 4 por cada vaga não preenchida.

Nessa situação hipotética, a maior arrecadação da instituição ocorrerá se a quantidade de inscrições for igual a

a) 95
b) 90
c) 84
d) 60
e) 50

Comentários:

Vamos chamar de x a quantidade de vagas preenchidas. Cada pessoa pagará um valor y igual a:

$$y = 80 + 4 \times (100 - x)$$

Ou seja, cada pessoa pagará os 80 reais que serão fixos relativos a sua própria entrada mais 4 reais por vaga não preenchida. Se eram 100 vagas e x vagas foram preenchidas, restaram $(100 - x)$ vagas não preenchidas.

$$y = 80 + 4 \times (100 - x)$$

$$y = 80 + 400 - 4x$$

$$\boldsymbol{y = -4x + 480}$$

A fórmula acima é a arrecadação individual (de cada pessoa). Para acharmos a arrecadação Y total, multiplicamos a arrecadação individual pela quantidade de pessoas que compareceram (que chamamos de x).

$$Y = x \times (-4x + 480)$$

$$\boxed{\boldsymbol{Y = -4x^2 + 480x}}$$

Observe que temos uma função do segundo grau com Coeficiente $a = -4$ (menor que zero), o que caracteriza uma parábola com concavidade voltada para baixo e, consequentemente, apresenta **ponto de máximo**.

A banca nos questiona o maior valor de vagas preenchidas x para que tenha uma arrecadação máxima, ou seja, a banca quer saber o valor do x do vértice.

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-480}{2(-4)}$$

$$x_v = \frac{-480}{-8} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_v = 60}$$

Gabarito: Alternativa **D**

22. (VUNESP / CM Mogi das Cruzes - 2017) As emissoras de televisão têm sua audiência medida em pontos, que correspondem, de modo simplificado, ao conjunto de pessoas que estão assistindo ao programa.

Aos domingos, os principais programas de uma emissora são exibidos entre meio-dia e meia-noite, de modo que a média dos seus pontos de audiência para um determinado horário é descrita pela fórmula $P = -\frac{1}{3}(t^2 - 12t - 36)$, sendo P a média dos pontos de audiência, e t o número de horas após o meio-dia.

Em seu horário de maior audiência aos domingos, a emissora atinge, em média, 24 pontos, o que, segundo a fórmula descrita anteriormente, ocorre às

a) 15:00
b) 16:00
c) 18:00
d) 22:00
e) 23:00

Comentários:

Vamos substituir os 24 pontos atingidos pela emissora na fórmula e calcular em que tempo t isso ocorre.

$$P = -\frac{1}{3}(t^2 - 12t - 36)$$

$$24 = -\frac{1}{3}(t^2 - 12t - 36)$$

$$-3 \times 24 = t^2 - 12t - 36$$

$$-72 = t^2 - 12t - 36$$

$$t^2 - 12t + 36 = 0$$

Calculando as raízes da função:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 1 \times (36)}}{2 \times 1}$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2}$$

$$t = \frac{12 \pm 0}{2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{t = 6}}$$

Perceba que t representa o número de horas após o meio-dia. Então, se encontramos $t = 6$ para o tempo em que ocorre a maior audiência, significa que a maior audiência ocorreu **6 horas depois do meio dia**.

Então, segundo a fórmula descrita **o horário de maior audiência aos domingos ocorre às $12 + 6 = 18h$.**

Gabarito: Alternativa **C**

23. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) O valor máximo da função de variável real $f(x) = 4(1 + x)(6 - x)$ é

a) 44

b) 46
c) 48
d) 49
e) 50

Comentários:

Vamos aplciar a distributiva e "expandir" esta função:

$$f(x) = 4(1 + x)(6 - x)$$

$$f(x) = (4 + 4x)(6 - x)$$

$$f(x) = 24 - 4x + 24x - 4x^2$$

$$\boldsymbol{f(x) = -4x^2 + 20x + 24}$$

A banca nos questiona o valor máximo da função, isto é, y do vértice.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y_V = -\frac{20^2 - 4(-4)(24)}{4(-4)}$$

$$y_V = -\frac{400 + 384}{-16}$$

$$y_V = \frac{-784}{-16} \rightarrow \boldsymbol{y_V = +49}$$

Gabarito: Alternativa **D**

24. (VUNESP / UNESP - 2017) Uma função quadrática f é dada por $f(x) = x^2 + bx + c$, com b e c reais. Se $f(1) = -1$ e $f(2) - f(3) = 1$, o menor valor que $f(x)$ pode assumir, quando x varia no conjunto dos números reais, é igual a

a) -12
b) -6
c) -10

d) -5
e) -9

Comentários:

Sabemos e estudamos que **o menor valor que $f(x)$ pode assumir é o y do vértice da parábola**. Porém, antes de calcularmos tal valor, precisamos saber a equação dessa funçao.

Vamos utilizar os dados da questão para encontrar $f(x)$.

- $\boldsymbol{f(1) = -1}$

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

$$-1 = 1^2 + 1 \times b + c$$

$$-1 = 1 + b + c \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b + c = -2}$$

- $\boldsymbol{f(2) - f(3) = 1}$

$$2^2 + 2b + c - (3^2 + 3b + c) = 1$$

$$4 + 2b + \cancel{c} - 9 - 3b - \cancel{c} = 1$$

$$4 + 2b - 9 - 3b = 1$$

$$2b - 3b = 1 + 9 - 4$$

$$-b = 6 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = -6}}$$

De posse de b, calculamos c:

$$b + c = -2$$

$$-6 + c = -2$$

$$c = -2 + 6 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{c = 4}}$$

Logo, **a função $f(x)$ será igual a**:

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x + 4}$$

Calculando o y do vértice da função, isto é, o menor valor que a função poderá assumir:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-((-6)^2 - 4 \times 1 \times 4)}{4 \times 1}$$

$$y_v = \frac{-(36 - 16)}{4}$$

$$y_v = \frac{-20}{4} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y_v = -5}$$

Gabarito: Alternativa **D**

25. (VUNESP / AMLURB - 2016) A quantidade Q de bicicletas produzidas por ano, em função do tempo t, é dada pela fórmula $Q = -t^2 + 17t + 60$, sendo que t representa o total de anos decorridos desde 1995, ano em que foram produzidas 60 bicicletas. Por exemplo, no ano 2005, t é igual a 10, e Q é igual a 130. Esse modelo prevê que, em algum momento, nenhuma bicicleta será produzida e, a partir de então, terá sua produção interrompida. O último ano em que essas bicicletas serão produzidas será

a) 2010
b) 2012
c) 2009
d) 2014
e) 2015

Comentários:

Se nenhuma bicicleta será produzida, $Q = 0$, certo?!

Vamos calcular em que ano isso ocorre:

$$Q = -t^2 + 17t + 60$$

$$-t^2 + 17t + 60 = 0$$

Onde: $a = -1, b = 17$ e $c = 60$.

Calculando as raízes da função:

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$t=\frac{-17\pm\sqrt{17^2-4\times(-1)\times 60}}{2\times(-1)}$$

$$t=\frac{-17\pm\sqrt{289+240}}{-2}$$

$$t=\frac{-17\pm\sqrt{529}}{-2}$$

$$t=\frac{-17\pm 23}{-2}\quad\begin{cases} t_1=\dfrac{-17-23}{-2}=\dfrac{-40}{-2}\quad\rightarrow\quad \boldsymbol{t_1=20} \\[2ex] t_2=\dfrac{-17+23}{-2}=\dfrac{6}{-2}\quad\rightarrow\quad \boldsymbol{t_2=-3}\end{cases}$$

Como o tempo não pode ser negativo, descartamos a raiz t_2.

Sendo assim, **a produção será interrompida no ano de 1995 mais 20 anos**. Lembre-se de que t representa o total de anos decorridos desde 1995.

$$t=1995+20\quad\rightarrow\quad\boxed{\boldsymbol{t=2015}}$$

Todavia, **a banca nos questiona o último ano em que essas bicicletas serão produzidas**. Oras, se a produção é interrompida em 2015, **o último anos em que elas serão produzidas será em 2014**.

Maldade da banca, não é?! Confesso que, quando resolvi essa questão pela primeira vez, eu marquei diretamente a alternativa que contém 2015 e, assim, errei a questão.

Gabarito: Alternativa **D**

26. (VUNESP / CM Poá - 2016) Uma empresa adquiriu um novo forno para ampliar sua produção, porém, antes de utilizá-lo, é necessário que este seja aquecido até atingir uma temperatura de

$1.100\ ºC$, estabilizando-se logo em seguida. Durante o aquecimento, a temperatura (T) do forno é descrita em função das horas (h) de funcionamento pela lei $T = 4(h^2 + 3h + 5)$. Sendo assim, se o forno começou a ser aquecido às 6:00h da manhã, então ele atingirá a temperatura necessária para poder ser utilizado às

a) 13:00h
b) 15:00h
c) 18:00h
d) 21:00h
e) 23:00h

Comentários:

Vamos encontar o tempo h para que a Temperatura T atinja 1.100 $ºC$:

$$T = 4(h^2 + 3h + 5)$$

$$1.100 = 4(h^2 + 3h + 5)$$

$$\frac{1.100}{4} = h^2 + 3h + 5$$

$$275 = h^2 + 3h + 5$$

$$h^2 + 3h - 270 = 0$$

Onde: $a = 1, b = 3$ e $c = -270$.

Calculando por Bhaskara:

$$h = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$h = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (1) \times (-270)}}{2 \times 1}$$

$$h = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 1.080}}{2}$$

$$h = \frac{-3 \pm \sqrt{1.089}}{2}$$

$$h = \frac{-3 \pm 33}{2} \begin{cases} h_1 = \frac{-3+33}{2} = \frac{30}{2} & \rightarrow \boxed{\boldsymbol{h_1 = 15}} \\ h_2 = \frac{-3-33}{2} = \frac{-36}{2} & \rightarrow \cancel{\boldsymbol{h_2 = -18}} \end{cases}$$

Como o tempo em horas h não pode ser negativo, descartamos h_2. Logo, $\boldsymbol{h = 15}$ **horas**.

FIQUE ATENTO!

Observe que o enunciado deixa explícito que **o início do procedimento ocorre as 6h**. Sendo assim, são 15 horas após o início, isto é, 15 horas após 6h.

$$t = 15 + 6 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t = 21h}$$

Gabarito: Alternativa **D**

27. (FGV / CODEBA - 2010) Seja g uma função de $R \rightarrow R$ tal que $g(x) = 2x^2 - 7x + 3$. O valor mínimo que g pode ter é

a) -66/8
b) -7/4
c) 7/4
d) 25/8
e) -25/8

Comentários:

O menor valor que a função quadrática $g(x)$ pode assumir é o y do vértice da parábola que é determinado pela seguinte equação:

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

Vamos substituir os valores e calcular o mínimo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_V = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_V = \frac{-\left((-7)^2 - 4(2)(3)\right)}{4(2)}$$

$$y_V = \frac{-(49 - 24)}{8} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y_V = \frac{-25}{8}}}$$

Gabarito: Alternativa **E**

28. (VUNESP / PM SP - 2014) A função $f: R \rightarrow R$, dada por $f(x) = ax^2 - 16x + c$, tem um valor máximo e admite duas raízes reais e iguais. Nessas condições, e sabendo-se que $c = a$, é correto afirmar que o par ordenado que representa o vértice dessa parábola é

a) (–2,0).
b) (–1,0).
c) (1,0).
d) (2,0).
e) (3,0).

Comentários:

Três informações iniciais que precisamos estar **atentos**:

I. A função tem um valor máximo. Logo, ela tem concavidade voltada para **BAIXO**, isto é, o Coeficiente a é **NEGATIVO**.

II. A função admite duas raízes reais e iguais. Ou seja, **delta de Bhaskara é igual a ZERO** $(\Delta = 0)$.

III. $c = a$

Inicialmente, vamos igualar delta a zero:

$$\Delta = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

Como $c = a$:

$$b^2 - 4aa = 0$$

$$b^2 - 4a^2 = 0$$

$$b^2 = 4a^2$$

$$(-16)^2 = 4a^2$$

$$4a^2 = 256$$

$$a^2 = \frac{256}{4}$$

$$a^2 = 64 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = \pm 8}$$

Como ***a* deve ser negativo**, uma vez que a parábola tem ponto de máximo, $\boldsymbol{a = -8}$.

Se $c = a$, então **c também será igual a -8**. Sendo assim nossa função será:

$$f(x) = ax^2 - 16x + c$$

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = -8x^2 - 16x - 8}}$$

Por fim, calculamos o Vértice dessa função. Começando com y do Vértice:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Lembrando que $\Delta = \mathbf{0}$ (a função admite <u>duas raízes reais e iguais):</u>

$$y_v = \frac{0}{4 \times (-8)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{y_v = 0}}$$

Calculando x do Vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-(-16)}{2 \times (-8)}$$

$$x_v = \frac{16}{-16} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x_v = -1}}$$

Logo, **o Vértice dessa função será**:

$$V = (x_v\ ;\ y_v)\ \rightarrow \boldsymbol{V = (-1\ ;\ 0)}$$

Gabarito: Alternativa **B**

29. (VUNESP / FAMERP - 2014) Em um estudo controlado de uma nova medicação contra dor, pesquisadores acompanharam um grupo de pessoas submetidas à administração desse medicamento durante alguns dias. A cada novo dia de tratamento, as pessoas tinham que atribuir um número inteiro, de 1 a 10, para o nível de dor que sentiam (1 significando "dor desprezível" e 10 significando "dor insuportável"). A tabela indica a média dos resultados da pesquisa nos primeiros dias, já sugerindo uma modelagem matemática para o estudo.

dia de tratamento	nível médio de dor do grupo
1.º	$\frac{1}{80}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 1 + 9 = 8{,}5125$
2.º	$\frac{1}{80}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 2 + 9 = 8{,}0500$
3.º	$\frac{1}{80}\cdot 3^2 - \frac{1}{2}\cdot 3 + 9 = 7{,}6125$
4.º	$\frac{1}{80}\cdot 4^2 - \frac{1}{2}\cdot 4 + 9 = 7{,}2000$
⋮	⋮

Supondo que nenhum outro fator intervenha no estudo e utilizando a modelagem matemática sugerida, o menor nível médio de dor do grupo foi dado no

a) 18.º dia.
b) 16.º dia.
c) 15.º dia.
d) 20.º dia.
e) 22.º dia.

Comentários:

Observe que a função da dor é igual a:

$$f = \frac{1}{80}x^2 - \frac{1}{2}x + 9$$

Onde x são os dias de tratamento.

A banca nos questiona o dia (x) em que a função (dor) é menor. Ou seja, a banca nos questiona o valor do x do vértice.

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)}{2 \times \frac{1}{80}}$$

$$x_v = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{40}}$$

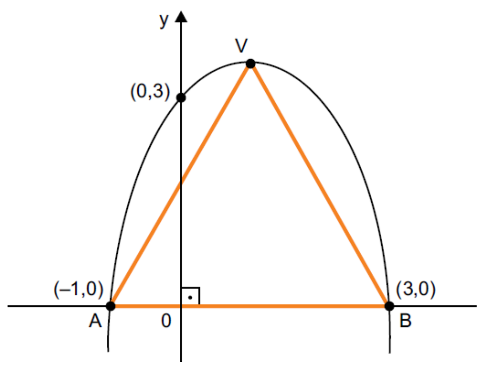
Repetindo a primeira fração e multiplicando pelo inverso da segunda:

$$x_v = \frac{1}{2} \times 40 \quad \rightarrow \boldsymbol{x_v = 20}$$

Logo, **o menor nível médio de dor do grupo foi dado no $20^{\underline{o}}$ dia**.

Gabarito: Alternativa **D**

30. (VUNESP / PM SP 2013) Na figura, tem-se o gráfico de uma parábola.



Os vértices do triângulo AVB estão sobre a parábola, sendo que os vértices A e B estão sobre o eixo das abscissas e o vértice V é o ponto máximo da parábola.

A área do triângulo AVB, cujas medidas dos lados estão em centímetros, é, em centímetros quadrados, igual a

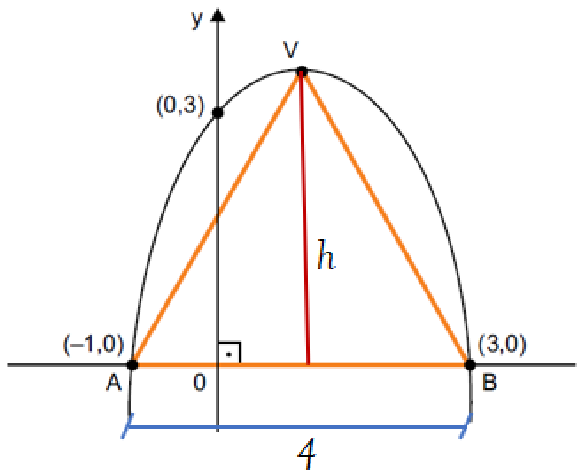
a) 8
b) 9
c) 12
d) 14
e) 16

Comentários:

Sabemos que a área do triângulo é igual a base vezes a altura divididos por 2.

$$\boldsymbol{A = \frac{b \times h}{2}}$$

Observe na figura que nós temos a base. Ela vai de -1 até 3. Ou seja, ela tem <u>4 unidades de comprimento</u>.



Perceba que **a altura será igual ao valor do y do Vértice da parábola**. E para encontrar este Vértice, temos primeiro que encontrar a fórmula da parábola.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Veja que a parábola intercepeta o eixo y em $y = 3$. Logo, $c = 3$.

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

Veja também que a parábola passa pelos pontos $(-1\,;0)$ e $(3\,;0)$. Vamos substituir esses pontos na fórmula acima:

- $\boldsymbol{(-1\,;0)}$

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

$$0 = a(-1)^2 + b \times (-1) + 3$$

$$0 = a - b + 3$$

$$\boldsymbol{a = b - 3}$$

- $\mathbf{(3\,;0)}$

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

$$0 = a3^2 + 3b + 3$$

$$0 = 9a + 3b + 3$$

Substituindo o valor de a em função de b encontrando acima:

$$0 = 9(b - 3) + 3b + 3$$

$$0 = 9b - 27 + 3b + 3$$

$$12b = 24$$

$$b = \frac{24}{12} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = 2}}$$

Logo,

$$a = b - 3$$

$$a = 2 - 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a = -1}}$$

Sendo assim, nossa função será:

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

Vimos que a altura é igual ao y do vértice da função:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(2^2 - 4 \times (-1) \times (3))}{4 \times (-1)}$$

$$y_v = \frac{-(4 + 12)}{-4}$$

$$y_v = \frac{-16}{-4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y_v = 4}}$$

Ou seja, **a altura do triângulo é igual a 4.**

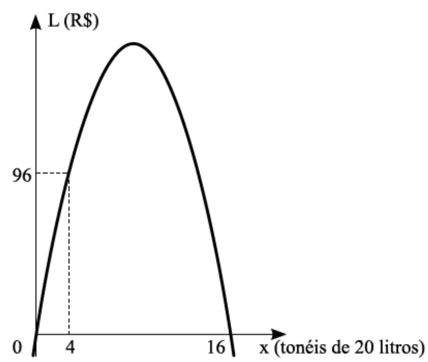
Por fim, calculamos a área do triângulo:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2} \rightarrow \boldsymbol{A = 8}$$

Gabarito: Alternativa **A**

31. (VUNESP / Pref. Aluminio - 2011) A parábola representa a variação do lucro L em reais em função da produção diária x de tonéis de 20 litros de vinho proveniente de uma vinícola.



O lucro máximo obtido é de

a) R$ 192,00.
b) R$ 175,00.
c) R$ 142,00.
d) R$ 128,00.
e) R$ 117,00.

Comentários:

Observe que o lucro se encontra no eixo y. Então, **o lucro máximo será o y do Vértice da parábola**. E, para encontrar este Vértice, temos primeiro que encontrar a fórmula da parábola.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Veja que a parábola intercepeta o eixo y em $y = 0$. Logo, $c = 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx$$

Veja também que a parábola passa pelos pontos $(4\,;96)$ e $(16\,;0)$. Vamos substituir esses pontos na fórmula acima:

- $\boldsymbol{(16\,;0)}$

$$f(x) = ax^2 + bx$$

$$0 = a16^2 + 16b$$

Dividindo por 16:

$$0 = 16a + b$$

$$\boldsymbol{b = -16a}$$

- $\boldsymbol{(4\,;96)}$

$$f(x) = ax^2 + bx$$

$$96 = a4^2 + 4b$$

$$96 = 16a + 4b$$

Dividindo toda a equação por 4:

$$24 = 4a + b$$

Substituindo o valor de b em função de a encontrado no passo anterior:

$$24 = 4a - 16a$$

$$24 = -12a$$

$$a = \frac{24}{-12} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a = -2}}$$

De posse de a, calculamos b:

$$b = -16a$$

$$b = -16 \times -2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b = 32}}$$

Logo, nossa função será:

$$f(x) = ax^2 + bx$$

$$f(x) = -2x^2 + 32x$$

Calculando o y do vértice da função:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(32^2 - 4 \times (-2) \times 0)}{4 \times -2}$$

$$y_v = \frac{-(1.024 + 0)}{-8}$$

$$y_v = \frac{-1.024}{-8} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y_v = 128}$$

Ou seja, **o lucro máximo obtido é de $R\$\ 128,00$**.

Gabarito: Alternativa **D**

32. (VUNESP / PM SP - 2010) Um avião com 100 lugares foi fretado para uma excursão. O valor pago por cada passageiro foi estabelecido como sendo R$ 400,00 mais R$ 5,00 por cada assento não ocupado. A receita máxima que a empresa conseguirá é

a) R$ 40.000,00.
b) R$ 40.350,00.
c) R$ 40.500,00.

d) R$ 41.000,00.
e) R$ 42.000,00.

Comentários:

Vamos chamar a quantidade de passageiros de x.

O enunciado nos afirma que o valor pago por cada passageiro x foi estabelecido como sendo R$ 400,00 mais R$ 5,00 por cada assento não ocupado.

Logo, a receita y será:

$$y = x \times \left(400 + 5 \times (100 - x)\right)$$

Observe que cada passageiro x vai pagar os 400 reais informados mais 5 reais por assento não ocupado. Ora, se temos 100 assentos no total e x estarão ocupados, restarão $(100 - x)$ não ocupados, correto?

Desenvolvendo a função da receita y teremos:

$$y = x \times \left(400 + 5 \times (100 - x)\right)$$

$$y = x \times (400 + 500 - 5x)$$

$$y = x \times (900 - 5x)$$

$$y = 900x - 5x^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = -5x^2 + 900x}}$$

Onde: $a = -5, b = 900$ e $c = 0$.

A receita máxima que a empresa conseguirá é igual ao y do Vértice da função:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(900^2 - 4 \times (-5) \times 0)}{4 \times (-5)}$$

$$y_v = \frac{-(810.000 + 0)}{-20}$$

$$y_v = \frac{-810.000}{-20} \quad \rightarrow \boldsymbol{y_v = 40.500}$$

Gabarito: Alternativa **C**

33. (VUNESP / UNESP - 2009) A proprietária de uma banca de artesanatos registrou, ao longo de dois meses de trabalho, a quantidade diária de guardanapos bordados vendidos (g) e o preço unitário de venda praticado (p). Analisando os dados registrados, ela observou que existia uma relação quantitativa entre essas duas variáveis, a qual era dada pela lei:

$$p = \frac{-25}{64}g + \frac{25}{2}$$

O preço unitário pelo qual deve ser vendido o guardanapo bordado, para que a receita diária da proprietária seja máxima, é de

a) R$ 12,50.
b) R$ 9,75.
c) R$ 6,25.
d) R$ 4,25.
e) R$ 2,00.

Comentários:

Observe que **p é o preço unitário**, isto é, o preço de apenas 1 unidade vendida.

Para sabermos a receita diária, temos que **multplicar o preço de venda unitário pela quantidade vendida g em um dia**, correto?

$$R = p(un) \times g(em\ um\ dia)$$

$$R = \left(\frac{-25}{64}g + \frac{25}{2}\right) \times g$$

$$\boldsymbol{R = \frac{-25}{64}g^2 + \frac{25}{2}g}$$

Vamos calcular a quantidade vendida g para que a Receita seja máxima, isto é, vamos calcular o **g do vértice** (perceba que g neste caso é análogo ao x)

$$g = \frac{-b}{2a}$$

$$g = \frac{\frac{-25}{2}}{2 \times \frac{-25}{64}}$$

$$g = \frac{\frac{-25}{2}}{\frac{-25}{32}}$$

$$g = \frac{-25}{2} \times \frac{32}{-25} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{g = 16\ unidades}}$$

Então, a receita será máxima quando a empresária vender 16 unidades.

De posse da quantidade necessária para vender para se obter a Receita máxima, calculamos o preço unitário para que essa hipótese ocorra:

$$p = \frac{-25}{64} g + \frac{25}{2}$$

$$p = \frac{-25}{64} \times 16 + \frac{25}{2}$$

$$p = \frac{-25}{4} + \frac{25}{2}$$

$$p = -6{,}25 + 12{,}5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p = 6{,}25}$$

Ou seja, o preço unitário pelo qual deve ser vendido o guardanapo bordado, para que a receita diária da proprietária seja máxima, é de $\boldsymbol{R\$\ 6{,}25}$.

Gabarito: Alternativa **C**

QUESTÕES COMENTADAS - BANCAS DIVERSAS

Domínio e Imagem

1. **(FUNDATEC / Pref. Candelária - 2021) A imagem da função de 2º grau $y = C(x) = 2x^2 - 180x + 9000$ representa o custo de manutenção de x horas de trabalho de uma equipe de agentes de combate a endemias é:**

a) $\mathbb{R}$.
b) $\{y \in \mathbb{R}, y \geq 4950\}$.
c) $\{y \in \mathbb{R}, y \geq 9000\}$.
d) $\{y \in \mathbb{R}, y < 4950\}$.
e) $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 4500\}$.

Comentários:

Quando falamos em Imagem da Função do 2° Grau, 2 coisas automaticamente temos que ter em mente:

1. A **concavidade** da parábola (e seu esboço)

O coeficiente a da função $f(x) = 2x^2 - 180x + 9000$ é igual a 2, isto é, maior que zero. Logo, a parábola terá concavidade voltada para **cima** e, consequentemente, ponto de **MÍNIMO**.

2. O cálculo do valor do $\boldsymbol{y}$ **do vértice**.

Calculando o y_v:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

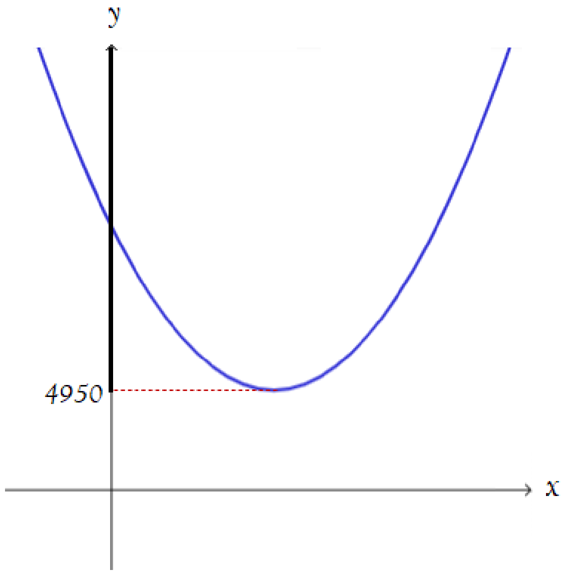
$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-((-180)^2 - 4 \times 2 \times 9.000)}{4 \times 2}$$

$$y_v = \frac{-(32.400 - 72.000)}{8}$$

$$y_v = \frac{39.600}{8} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{y_v = 4.950}}$$

Esboçando a parábola:



Observe que **não há valores de y abaixo de 4.950** (ele é o ponto de mínimo da função), ou seja, a Imagem é composta pelos valores de y pertencentes ao Reais tal que y seja **maior ou igual** ao 4.950.

$$\boldsymbol{I = \left\{ y \in R \; y \geq 4.950 \right\}}$$

Gabarito: Alternativa **B**

2. **(INDEC / Pref. Mauá - 2021) Denotamos por R o conjunto dos números reais. Assinale dentre as alternativas abaixo a que corresponde à imagem da função g definida por $\boldsymbol{g(t) = 2t^2 + 3t + 1}$.**

a) $y \in R : y \geq -1/8$
b) $y \in R : y \leq -1/8$
c) $y \in R : y \geq -3/4$
d) $y \in R : y \geq 0$

Comentários:

$g(t) = 2t^2 + 3t + 1$, onde $a = 2, b = 3$ e $c = 1$. Coeficiente $\boldsymbol{a = 2 > 0}$ $\rightarrow$ Parábola com concavidade voltada para **cima**. Ponto de **MÍNIMO**.

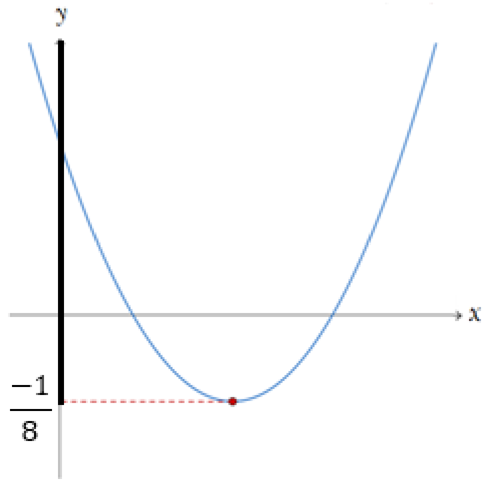
Calculando y_v:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(3^2 - 4 \times 2 \times 1)}{4 \times 2} = \frac{-(9-8)}{8} \quad \rightarrow \quad y_v = \frac{-1}{8}$$

Esboçando a parábola:



Perceba que **não há valores de y abaixo de $-1/8$** (ele é o ponto de mínimo da função, isto é, menor valor que a função pode assumir), ou seja, a Imagem é composta pelos valores de y pertencentes ao Reais tal que y seja maior ou igual ao $-1/8$.

$$I = \left\{ \, y \in R \, / \, y \geq -1/8 \, \right\}$$

Gabarito: Alternativa **A**

3. (FUNDATEC / Pref. Bom Jesus - 2021) A função quadrática de R em R é definida por: $f(x) = x^2 + 2x + 8$. Determine o elemento do domínio cuja imagem é igual a 56.

a) 5.
b) 6.
c) 7.
d) 8.
e) 9.

Comentários:

"Elemento do domínio" significa "valor de x". E "cuja imagem é igual a" é análogo a "valor de y".

Então, reescrevendo a oração **"Determine o elemento do domínio cuja imagem é igual a 56."** teremos: "Qual valor de x cujo valor de y é igual a 56"

Vamos substituir $f(x) = 56$ e calcular o valor de x:

$$f(x) = x^2 + 2x + 8$$

$$56 = x^2 + 2x + 8$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

Calculando por Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-48)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 14}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2 + 14}{2} = \dfrac{12}{2} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 6} \\ x_2 = \dfrac{-2 - 14}{2} \end{cases}$$

Perceba que nem calculamos o valor de x_2. <u>O enunciado nos traz apenas números positivos</u>. x_2 daria um número negativo e assim, já não precisamos calcular (evitar perder tempo na hora da prova).

Logo, o elemento do domínio cuja imagem é igual a 56 é $\boldsymbol{x = 6}$.

Gabarito: Alternativa **B**

4. **(SELECON / SEDUC MT - 2021) O conjunto imagem da função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ é o intervalo real $]-\infty, t]$. O valor de t é igual a:**

a) 4
b) 3
c) 2
d) − 4

Comentários:

Observe que a parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ tem Coeficiente Angular **negativo**, isto é, ela apresenta concavidade voltada para **baixo** e, consequentemente, apresenta ponto de **MÁXIMO**.

Vamos calcular esse ponto de máximo que é dado pelo y do vértice da parábola.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

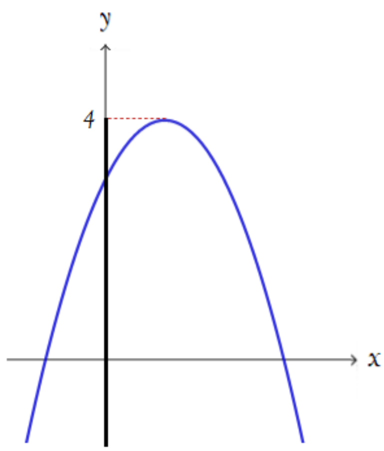
$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-\left(2^2 - 4(-1)(3)\right)}{4(-1)}$$

$$y_v = \frac{-(4+12)}{-4} = \frac{-16}{-4} \quad \rightarrow \quad y_v = 4$$

Perceba que não há valores de y acima de 4 (ele é o ponto de **máximo** da função, isto é, maior valor que a função pode assumir), ou seja, a Imagem é composta pelos valores de y pertencentes ao Reais tal que **y seja menor ou igual ao 4**.

$$]-\infty, \mathbf{4}]$$



Gabarito: Alternativa **A**

5. **(AOCP / SANESUL - 2021) A lei da oferta e da procura, uma empresa encontrou uma fórmula que acreditava ser capaz de determinar a relação entre o preço "x" da mercadoria e a quantidade "y" de milhões de unidades vendidas da mesma mercadoria. Tal expressão era caracterizada algebricamente por $y = f(x) = -x^2 + 10x - 16$ e permitia, através do domínio e do conjunto imagem da função, determinar a relação entre preço e quantidade, apontando, inclusive, a maior quantidade de unidades vendidas.**

Assinale a alternativa em que figura a representação precisa do conjunto imagem da função.

a) $y > 9$
b) $y < 9$
c) $y \leq 9$
d) $0 \leq y \leq 9$
e) $0 < y < 9$

Comentários:

$y = -x^2 + 10x - 16$, onde $a = -1, b = 10$ e $c = -16$. Coeficiente $\boldsymbol{a = -1 < 0}$ → Parábola com concavidade voltada para **baixo**. Ponto de **MÁXIMO**.

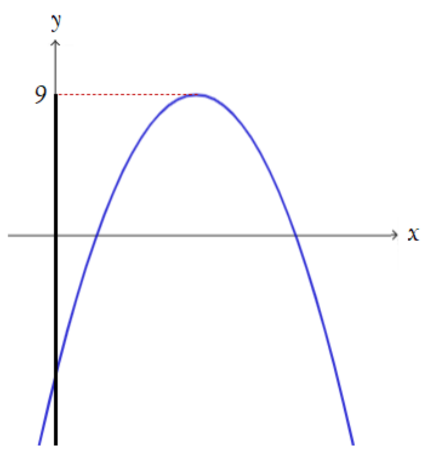
Calculando y_v:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-\left(10^2 - 4 \times (-1) \times (-16)\right)}{4 \times (-1)} = \frac{-(100 - 64)}{-4} = \frac{-36}{-4} \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y_v = 9}}$$

Esboçando a parábola:



Perceba que **não há valores de y maiores que 9** (ele é o ponto de máximo da função, isto é, maior valor que a função pode assumir), ou seja, a Imagem é composta pelos valores de y pertencentes ao Reais tal que y seja menor ou igual a 9.

$$\boldsymbol{I = \left\{ y \in R \,/\, y \leq 9 \right\}}$$

Gabarito: Alternativa **C**

6. **(Pref. Panambi - 2020) Qual o valor da imagem da $f(5)$ na seguinte função de segundo grau: $x^2 + 8x - 20$?**

a) 45
b) 40
c) 35
d) 30
e) 25

Comentários:

Para encontrarmos o valor da imagem de $f(5)$, isto é, o valor de y quando $x = 5$, vamos substituir $x = 5$ na função dada:

$$f(x) = x^2 + 8x - 20$$

$$f(5) = 5^2 + 8(5) - 20$$

$$f(5) = 25 + 40 - 20 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(5) = 45}$$

Gabarito: Alternativa **A**

7. **(CM Tapejara - 2019) O conjunto imagem da função de segundo grau $f(x) = x^2 - 1$ é:**

a) $[-1, +\infty)$
b) $(-1, +\infty)$
c) $(-\infty, -1]$
d) $(-\infty, -1)$
e) $(-\infty, +\infty)$

Comentários:

$f(x) = x^2 - 1$, onde $a = 1, b = 0$ e $c = -1$. Coeficiente $\boldsymbol{a = 1 > 0}$ → Parábola com concavidade voltada para **cima**. Ponto de **MÍNIMO**.

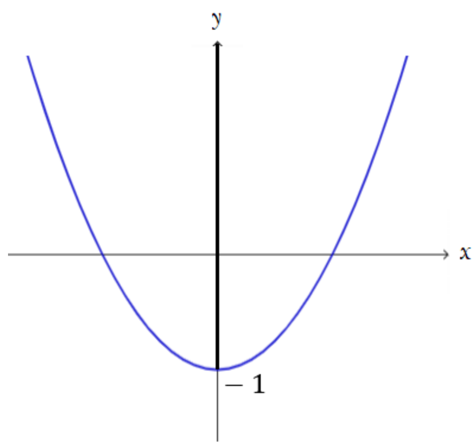
Calculando y_v:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-\left(0^2 - 4(1)(-1)\right)}{4(1)}$$

$$y_v = \frac{-4}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{y_v = -1}}$$

Esboçando a parábola:



Perceba que **não há valores de y menores que -1** (ele é o ponto de mínimo da função, isto é, menor valor que a função pode assumir), ou seja, a Imagem é composta pelos valores de y pertencentes ao Reais tal que y seja maior ou igual a -1.

$$I = \left\{ \ y \in R \ / y \geq -1 \ \right\}$$

Ou, em outra notação, conforme trouxe a banca, podemos dizer que <u>y está compreendido entre -1 como menor valor e $+\infty$ como maior valor.</u>

$$[\mathbf{-1}, +\infty)$$

Observe que -1 está **INCLUÍDO** no valor da imagem. Logo, deve ser **colchetes** para representar seu limite. Na alternativa A temos um parânteses (que significa intervalo aberto) e por isso a alternativa está errada.

Gabarito: Alternativa **B**

8. **(FUNDATEC / Pref. Imbé - 2021) A alternativa que mostra o domínio da função $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$ é**

a) $(-\infty, 3)$
b) $(3, +\infty)$
c) $(-6,9)$
d) $(3,9)$
e) $(-\infty, +\infty)$

Comentários:

Observe que a questão está pedindo o **DOMÍNIO**. Cuidado para não ir no "automático" e calcular a imagem.

O **domínio da função quadrática** é o Conjuntos dos números Reais. Ou seja, x pode assumir qualquer valor na reta Real.

$$\boldsymbol{D(f) = x \in R} \quad ou \quad \boldsymbol{D(f) = x \in} \ (-\infty, +\infty)$$

Gabarito: Alternativa **E**

9. **(VUNESP / Pref. Serrana - 2018) Na função quadrática cuja representação algébrica é $y = f(x) = x^2 - 144$, o maior conjunto que pode ser fixado como imagem da função e os zeros da função são, correta e respectivamente,**

a) $IR; -144 \ e \ 144$
b) $\{y \in IR \mid y \leq 12\}; 144 \ e \ 144$
c) $\{y \in IR \mid y \leq -144\}; -12 \ e \ 12$
d) $\{y \in IR \mid y \geq -144\}; -12 \ e \ 12$
e) $\{y \in IR \mid y \geq 12\}; -144 \ e \ 144$

Comentários:

Primeiramente, vamos calcular os zeros da função (raízes). **Raiz de uma função (ou zero de uma função)**, em termos genéricos, <u>é o valor de x que tem o condão de zerar a função $f(x)$.</u> Ou seja, para determinar as raízes da Função do 2° Grau devemos considerar $y = 0$.

Em outras palavras, as raízes da função são os valores de x tais que $f(x) = 0$.

$$x^2 - 144 = 0$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \sqrt{144} \rightarrow \boldsymbol{x = \pm 12}$$

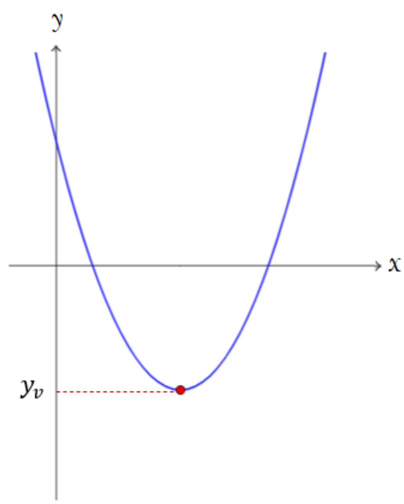
Então, $\boldsymbol{x_1 = 12}$ e $\boldsymbol{x_2 = -12}$.

Observe que ficamos apenas com as Alternativas C e D como possíveis respostas.

Secundariamente, vamos calcular a Imagem da função. A **Imagem da função quadrática** definida por $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ é composta pelo Conjunto dos números Reais maiores ou menores que o y do vértice a depender do Coeficiente a da parábola.

Perceba que a função $f(x) = x^2 - 144$ tem coeficeinte $a = 1 > 0$, ou seja, concavidade voltada para cima. Quando a parábola tem concavidade voltada para cima, a Imagem será os valores de y iguais ou maiores que o y_v (explicamos todo esse passo a passo na teoria. É uma boa hora de voltar à teoria e revisar).

Seria algo do tipo:



Perceba que **não há valores de y abaixo de y_v**, ou seja, a Imagem é composta pelos valores de y pertencentes ao Reais tal que y seja maior ou igual ao y_v.

Só com este pensamento já poderíamos marcar a letra D. Mas, vamos calcular o y_v.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(0^2 - 4 \times 1 \times (-144))}{4 \times 1}$$

$$y_v = \frac{-4 \times 144}{4} \rightarrow \boldsymbol{y_v = -144}$$

Logo, a Imagem será composta pelos valores de y pertencentes ao Reais tal que y seja **MAIOR** ou igual ao -144.

$$\boxed{\boldsymbol{I = \left\{\ y \in R\ /\ y \geq -144\ \right\}}}$$

Gabarito: Alternativa **D**

10. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Na função $f(x) = -x^2 + 3x - 1$, a imagem de -1 é

a) -5
b) -3
c) 0
d) +1
e) +3

Comentários:

Para calcular a imagem de -1, vamos substituir $x = -1$ na função e determinar o valor da $f(-1)$.

$$f(x) = -x^2 + 3x - 1$$

$$f(-1) = -(-1)^2 + 3(-1) - 1$$

$$f(-1) = -1 - 3 - 1 \rightarrow \boldsymbol{f(-1) = -5}$$

Gabarito: Alternativa **A**

Lista de Questões - Bancas Diversas

Função do 2° Grau

1. **(Vunesp / Pref. Taubaté - 2022) O custo C, em reais, da produção de x litros de uma substância química é dado por $C = 0,005x^2 - 0,5x + 21$. Nessa condição, uma equação, na incógnita x, que fornece uma boa aproximação do total de litros dessa substância que pode ser produzido com $R\$\ 22,00$ é:**

a) $2{,}42x^2 - 11x + 21 = 0$
b) $x^2 - 100x + 8.600 = 0$
c) $x^2 - 100x + 200 = 0$
d) $x^2 - 100x - 200 = 0$
e) $x^2 - 100x - 8.600 = 0$

2. **(AOCP / CM Bauru - 2022) Dada uma função do 2º grau do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c pertencente aos reais, com $a \neq 0$, sabendo que $f(-5) = f\ (5) = 0$ e $f(0) = 10$, assinale a alternativa que apresenta corretamente o valor de $f(3)$.**

a) 3,6
b) 4,2
c) 5,6
d) 6
e) 6,4

3. **(FADESP / CM Marabá - 2021) Um experimento foi realizado em uma universidade para analisar a evolução da altura de frangos ao longo do tempo e, assim, encontrar um modelo matemático para representar a curva de crescimento dos animais. Após um ano de observação, os pesquisadores modelaram a altura y dos frangos (em centímetros) em função do tempo t (em dias) e obtiveram a seguinte função:**

$$y = 0{,}013t^2 + 0{,}045t + 11{,}98$$

Com este modelo, pode-se afirmar que, no 10º dia de observação, a altura dos frangos era de aproximadamente

a) 20,3 cm.
b) 18,9 cm.
c) 17,1 cm.

d) 13,7 cm.
e) 10,2 cm.

4. (VUNESP / Pref. Peruíbe - 2019) A tabela apresenta informações obtidas a partir de uma observação em laboratório da relação entre duas grandezas: $y = f(x)$.

x	0	–1	2
y = f(x)	–2	–6	0

Após alguns estudos numéricos, identificou-se que a relação entre as variáveis x e y é modelada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a soma $a + b + c$ é igual a

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

5. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Um vendedor de livros estipula como meta que, até o dia x de cada semana, que se inicia na segunda-feira (dia 1) e termina no sábado (dia 6), ele deve vender um total de $x^2 + 3x$ livros. No final de cada dia, ele anota a quantidade de livros que vende no dia, formando uma lista de números.

Se o vendedor conseguir cumprir a meta, a lista de números anotados em uma semana completa será uma progressão

a) aritmética de razão 2
b) aritmética de razão 3
c) com números iguais a 9
d) geométrica de razão 2
e) geométrica de razão 3

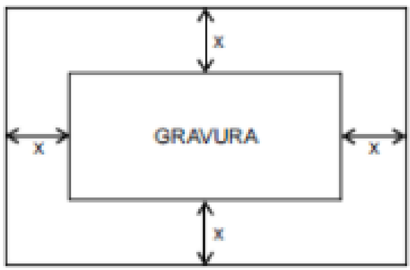
6. (CESPE / Pref. São Cristóvão - 2019) Tendo como referência as funções $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = x^2 - 3$ em que $-\infty < x < +\infty$, julgue o item que se segue.

A função $g(x)$ é ímpar.

7. **(CESPE / Pref. São Cristóvão - 2019) Tendo como referência as funções $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = x^2 - 3$ em que $-\infty < x < +\infty$, julgue o item que se segue.**

No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, os gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se interceptam no ponto de coordenadas $(7/5, -26/25)$.

8. **(VUNESP / CM Araras - 2015) A figura mostra uma gravura retangular, de lados iguais a $20\ cm$ e $30\ cm$, posicionada de forma centralizada em uma folha também retangular, de área igual a $1.200\ cm^2$, de modo que, na folha, restassem margens (superior, inferior e laterais) de largura constante.**



A equação que permite calcular corretamente a medida da largura da margem, indicada por x na figura, é

a) $x^2 + 25x - 150 = 0$
b) $x^2 + 25x + 150 = 0$
c) $x^2 - 25x + 150 = 0$
d) $x^2 + 50x - 300 = 0$
e) $x^2 - 50x + 300 = 0$

Gabarito

1. D
2. E
3. D
4. C
5. A
6. ERRADO
7. CERTO
8. A

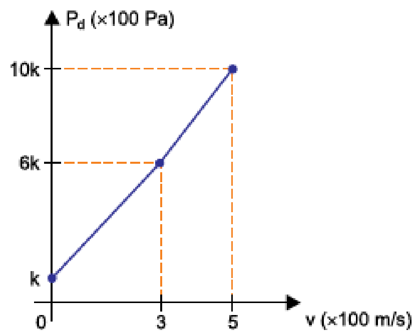
LISTA DE QUESTÕES - BANCAS DIVERSAS

Gráfico da Função do 2º Grau

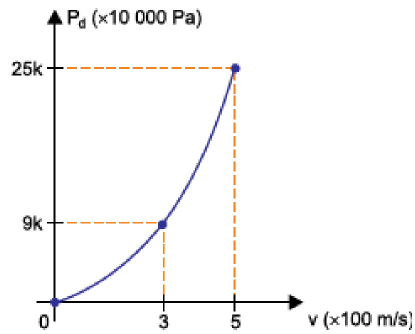
1. (VUNESP / UNESP - 2021) Quando a velocidade de um avião aumenta, o deslocamento das moléculas da atmosfera provoca um aumento da chamada pressão dinâmica (P_d) sobre o avião. Se a altitude de voo é mantida constante, a pressão dinâmica, dada em Pa, pode ser calculada por $P_d = k \cdot v^2$, sendo v o módulo da velocidade do avião em relação ao ar, em m/s, e k uma constante positiva, que depende da altitude.

O gráfico que representa a relação correta entre P_d e v é:

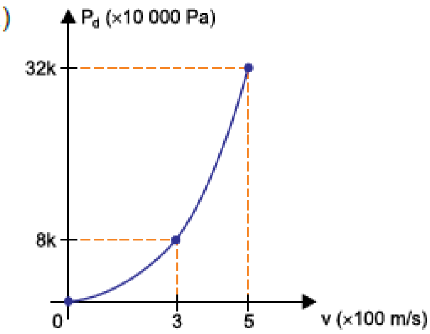
(A)



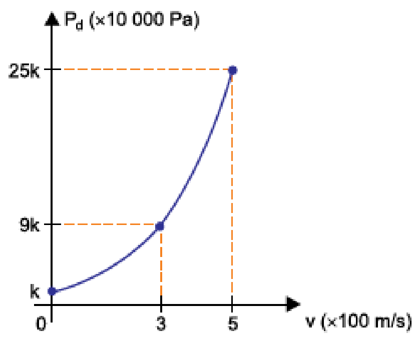
(C)



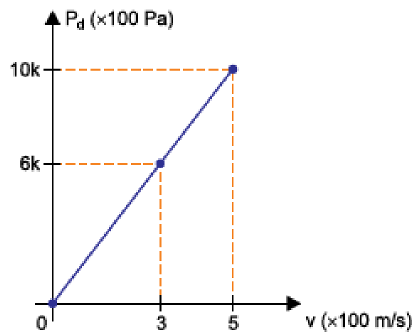
(E)



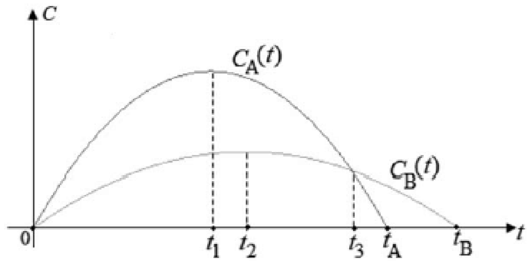
(B)



(D)



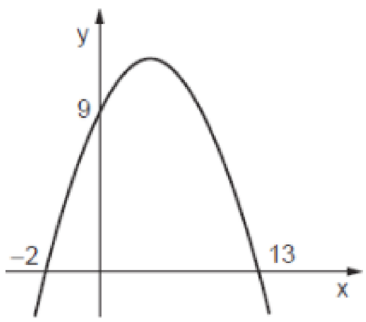
2. (CESPE / IBGE - 2021) Considere que os gráficos C_A e C_B apresentados representam, respectivamente, as quantidades mensais de clientes de dois mercados concorrentes A e B, desde o instante da sua inauguração simultânea, em $t = 0$, até os instantes em que esses mercados encerraram suas atividades, respectivamente, nos instantes t_A e t_B, em que t é dado em meses. Considere, ainda, que $C_A(t) = 300t - 3t^2$ e que $C_B(t) = 120t - t^2$.



De acordo com as informações do texto, o período total em que a quantidade de clientes do mercado A foi maior ou igual que a quantidade de clientes do mercado B foi

a) entre a inauguração e o instante t1.
b) entre a inauguração e o instante t3.
c) entre a inauguração e o instante tA.
d) entre o instante t1 e o instante t2.
e) entre o instante t1 e o instante t3.

3. **(CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) O gráfico de uma função quadrática, mostrado na Figura a seguir, intersecta o eixo y no ponto (0,9), e o eixo x, nos pontos (-2, 0) e (13, 0).**



Se o ponto $P(11; k)$ é um ponto da parábola, o valor de k será

a) 5,5
b) 6,5
c) 7,0
d) 7,5
e) 9,0

4. **(CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) O gráfico de uma função $f: R \to R$ é uma parábola cujo x do vértice é igual a 5.**

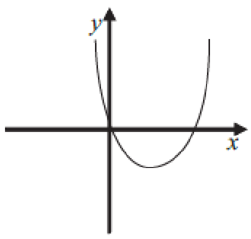
Se $x \in R$ é tal que $f(x) = f(x-4)$, então x é igual a

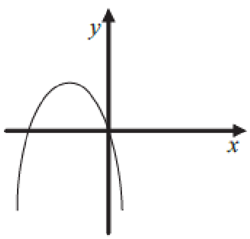
a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

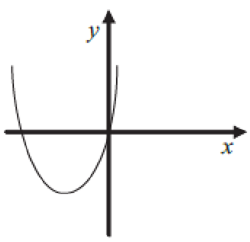
5. **(CESPE / Pref. São Cristóvão - 2019) Tendo como referência as funções $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = x^2 - 3$ em que $-\infty < x < +\infty$, julgue o item que se segue.**

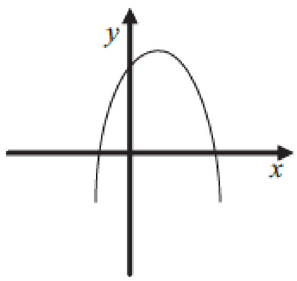
A função $f(x)$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 5/2]$ e crescente no intervalo $[5/2, +\infty]$

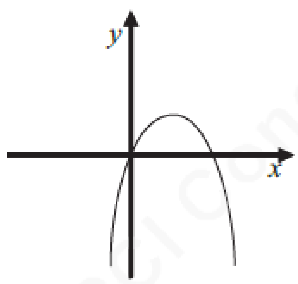
6. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Considere a função $f(x) = mx^2 + px$, onde m, p e q são números reais tais que $m < 0$ e $p > 0$. O gráfico que melhor representa $f(x)$ é**

(A)


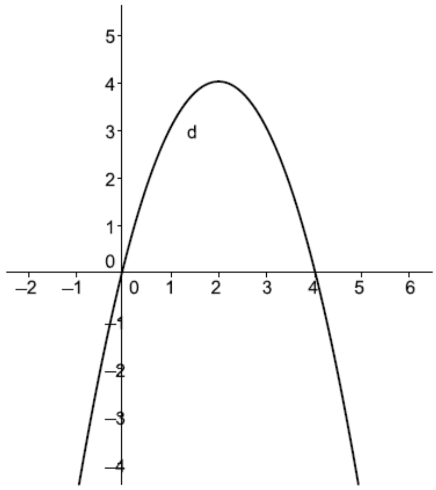
(B)


(C)


(D)


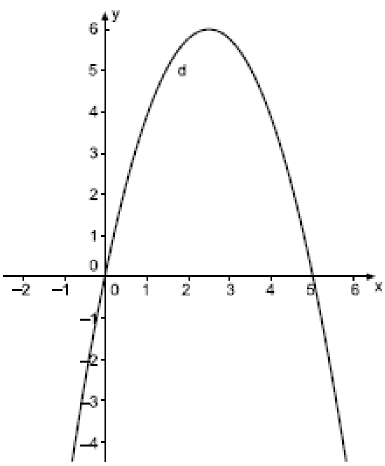
(E)


7. (VUNESP / Pref. Aluminio - 2016) O gráfico da função definida por $f(x) = -x^2 + 4x$ é dado por:

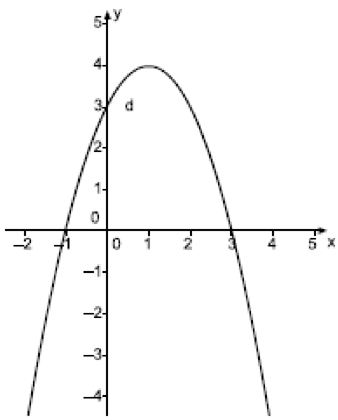


A função $g(x)$ é definida por $g(x) = f(x) - 1$. Assim, o gráfico de $g(x)$ é

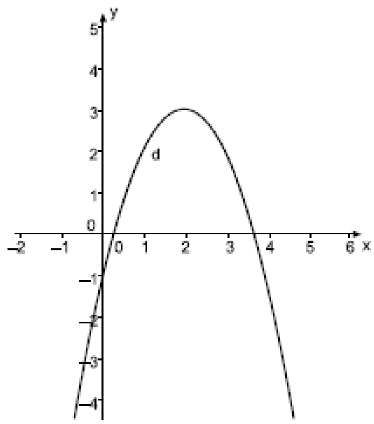
(A)



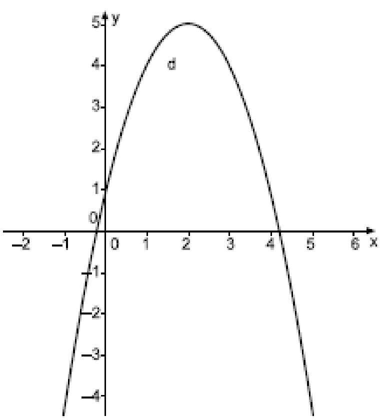
(C)



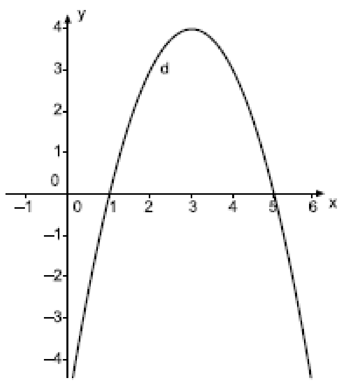
(E)



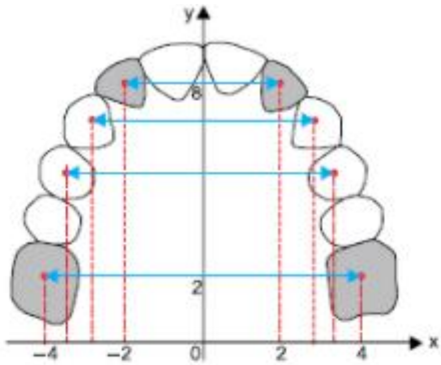
(B)



(D)



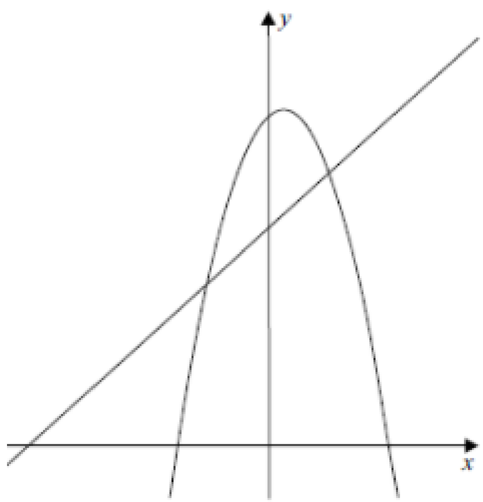
8. **(VUNESP / FAMERP - 2016) A figura representa o desenho da arcada dentária de um animal, feito no plano cartesiano ortogonal em escala linear.**



Sabendo que as posições dos centros dos dentes destacados em cinza nessa arcada são modeladas nesse plano por meio da função quadrática $y = ax^2 + c$, então $a + c$ é igual a

a) 8,5.
b) 9,2.
c) 9,5.
d) 10,2.
e) 9,0.

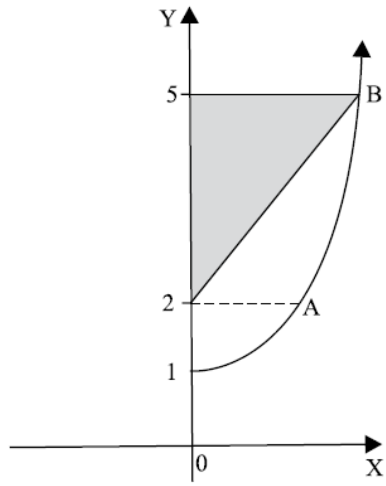
9. **(VUNESP / PC SP - 2014) Considere as funções $f: R \rightarrow R$ e $g: R \rightarrow R$, dadas por $f(x) = ax^2 + bx + 12$ e $g(x) = x + 8$. Sabe-se que os gráficos dessas funções se intersectam nos pontos de abscissa 2 e -2.**



A soma dos coeficientes a e b da função f é igual a

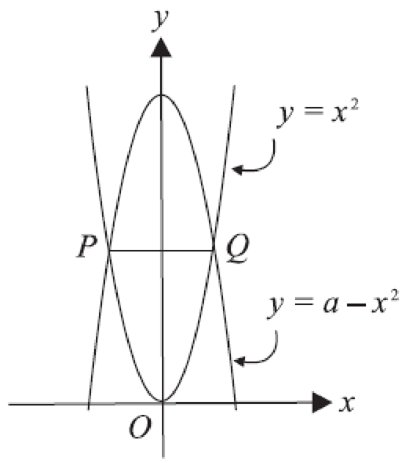
a) 2
b) 4
c) 0
d) 1
e) 3

10. (VUNESP / UNCISAL - 2010) Na figura, A e B são pontos de um trecho do gráfico da função de variável real dada por $y = x^2 + c$. A área do triângulo sombreado na figura é, em u.a., igual a



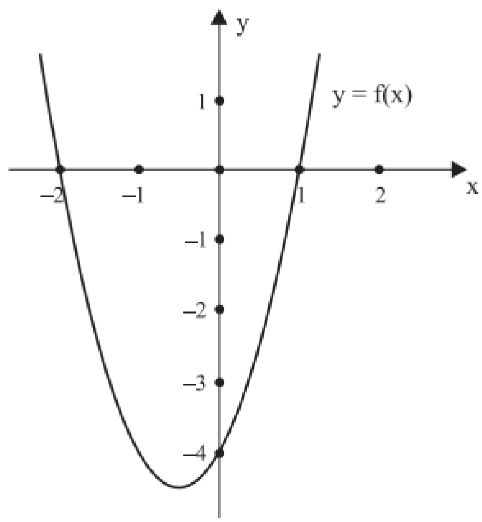
a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

11. (VUNESP / UNCISAL - 2009) A figura mostra o gráfico das funções $y = x^2$ e $y = a - x^2$, definidas no conjunto R, sendo a constante. Sabendo-se que o comprimento de $\overline{PQ}$ é 6, pode-se afirmar que o valor de a na função $y = a - x^2$, é



a) 18
b) 15
c) 12
d) 9
e) 6

12. (VUNESP / UNESP - 2006) A expressão que define a função quadrática f(x), cujo gráfico está esboçado, é:



a) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4.$
b) $f(x) = x^2 + 2x - 4.$
c) $f(x) = x^2 + x - 2.$
d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4.$
e) $f(x) = 2x^2 + 2x - 2.$

Gabarito

1. C
2. B
3. E
4. A
5. CERTO
6. E
7. E
8. C
9. C
10. D
11. A
12. D

LISTA DE QUESTÕES - BANCAS DIVERSAS

Raízes da Função do 2º Grau

1. (FUNDATEC / Pref. Flores da Cunha - 2022) Analise as informações descritas abaixo sobre a função $f(x) = 3x^2 - 14x + 8$:

I. $f(x)$ é uma função do 2º grau.

II. Se $x = 4$, então $f(4) = 0$.

III. Se $f(x) = 0$, a função possui apenas uma raiz real.

Quais estão corretas?

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas I e II.
e) I, II e III.

2. (AOCP / SANESUL - 2021) Se representarmos uma função de segundo grau da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ por meio de um gráfico e notarmos que há, na figura, dois interceptos com o eixo das abscissas, um intercepto com o eixo das ordenadas e a concavidade da parábola é voltada para baixo, então é correto afirmar que

a) $a > 0$ e $b^2 > 4ac$.
b) $a > 0$ e $b^2 < 4ac$.
c) $a > 0$ e $b^2 = 4ac$.
d) $a < 0$ e $b^2 < 4ac$.
e) $a < 0$ e $b^2 > 4ac$.

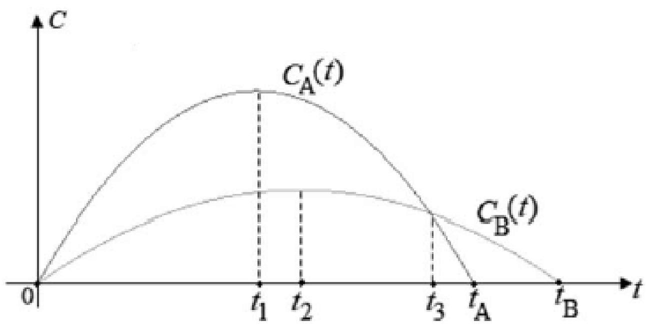
3. (VUNESP / Pref. Itapevi - 2019) Os organizadores de um evento perceberam que se baixassem o preço do ingresso poderiam obter maior lucro, uma vez que isso atrairia maior número de espectadores. Para tanto, contrataram uma empresa que fez toda a análise da situação e projetaram o lucro L, em milhares de reais, em função do desconto d, em reais, aplicado no valor do ingresso, utilizando a seguinte fórmula:

$$L = -0{,}4d^2 + 7d + 150$$

Após uma reunião, os organizadores decidiram que irão aplicar um desconto superior a R$ 5,00 no preço de ingresso, de forma a obterem um lucro igual a 165 mil reais, segundo a fórmula apresentada pela empresa. Nesse caso, o desconto aplicado no preço do ingresso será de

a) R$ 7,50
b) R$ 10,00
c) R$ 12,50
d) R$ 15,00
e) R$ 20,00

4. (CESPE / IBGE - 2021) Considere que os gráficos C_A e C_B apresentados representam, respectivamente, as quantidades mensais de clientes de dois mercados concorrentes A e B, desde o instante da sua inauguração simultânea, em $t = 0$, até os instantes em que esses mercados encerraram suas atividades, respectivamente, nos instantes t_A e t_B, em que t é dado em meses. Considere, ainda, que $C_A(t) = 300t - 3t^2$ e que $C_B(t) = 120t - t^2$.



Considerando-se as informações do texto, é correto afirmar que, após o encerramento das atividades comerciais do mercado A, o mercado B ainda permaneceu em atividade comercial por

a) 10 meses
b) 20 meses
c) 30 meses
d) 40 meses
e) 50 meses

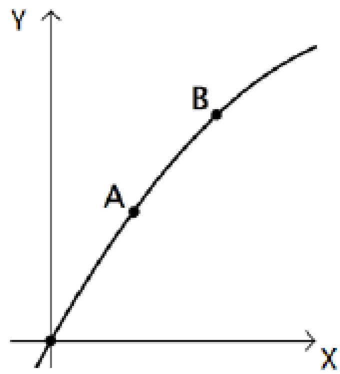
5. **(VUNESP / PM SP - 2019) Um míssil, posicionado em um ponto A e inclinado a determinado ângulo com o solo horizontal, foi programado para percorrer uma trajetória modelada por uma função f, definida por**

$$f(x) = -\frac{1}{10.000}x^2 + \frac{1}{4}x$$

com o objetivo de atingir um ponto B. Fixando-se como $(0, 0)$ as coordenadas do ponto A em um sistema de coordenadas cartesianas, cujo eixo das abscissas, com unidade em metros, representaria o referido solo, a ordenada do ponto B seria igual a zero, e a abscissa desse ponto seria igual a

a) 1.000
b) 1.500
c) 2.000
d) 2.500
e) 3.000

6. **(FGV / SEE PE - 2016) A figura a seguir mostra um uma parte do gráfico de uma função quadrática.**



Dois pontos do gráfico são dados: A = (2, 15) e B = (4, 26).

O gráfico encontrará novamente o eixo X no ponto de abscissa

a) 16
b) 17
c) 18
d) 19
e) 20

7. (VUNESP / UNESP - 2008) Na Volta Ciclística do Estado de São Paulo, um determinado atleta percorre um declive de rodovia de 400 metros e a função

$$d(t) = 0{,}4t^2 + 6t$$

fornece, aproximadamente, a distância em metros percorrida pelo ciclista, em função do tempo t, em segundos. Pode-se afirmar que a velocidade média do ciclista (isto é, a razão entre o espaço percorrido e o tempo) nesse trecho é

a) superior a 15 m/s.
b) igual a 17 m/s.
c) inferior a 14 m/s.
d) igual a 15 m/s.
e) igual a 14 m/s.

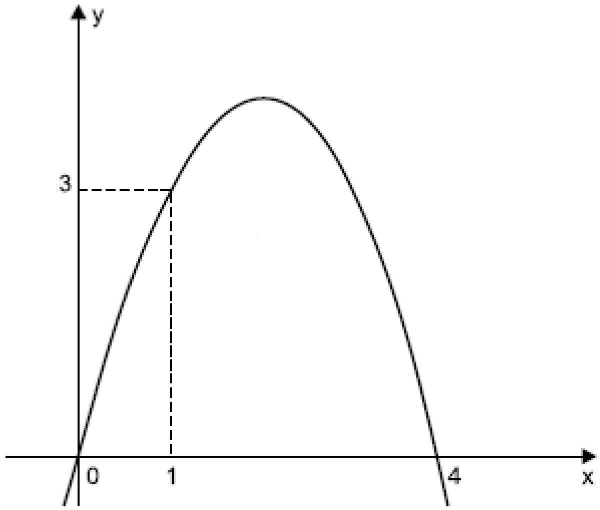
Gabarito

1. D
2. E
3. D
4. B
5. D
6. B
7. A

LISTA DE QUESTÕES - BANCAS DIVERSAS

Forma Fatorada

1. **(VUNESP / Pref. Peruíbe - 2019) O gráfico da figura é de uma função quadrática f(x).**



Assim, $f(0{,}5)$ é igual a

a) 1,75
b) 1,5
c) 1,25
d) 1
e) 0,75

GABARITO

1. A

Questões Comentadas - Bancas Diversas

Raízes por soma e produto

1. (AOCP / IPE Prev. - 2022) O lucro $L(t)$ obtido com a venda de uma apólice de seguro, em um período de t dias, é dado por:

$$L(t) = t^2 + 90.t - 1000 \ , \ \text{em que } t > 0.$$

Com base no exposto, o lucro com a venda dessa apólice será nulo em

a) 100 dias.
b) 110 dias.
c) 90 dias.
d) 55 dias.
e) 10 dias.

2. (FUNDATEC / Pref. Vacaria - 2021) A soma e o produto das raízes da equação do segundo grau $2x^2 + 4x - 6 = 0$ são, respectivamente:

a) -2 e -3
b) -3 e -2
c) 2 e 3
d) 3 e 2
e) 2 e -6

3. (CETREDE / Pref. Icapuí - 2021) Se $y = x^2 + 7x + 12$, então as raízes que satisfazem y serão:

a) 3 e 4.
b) -3 e 3.
c) 3 e -4.
d) -3 e -4.
e) 3 e 3.

Gabarito

1. E
2. A
3. D

Lista de Questões - Bancas Diversas

Vértice da Parábola

1. **(CESPE / TELEBRAS - 2022) A respeito das funções e suas propriedades, julgue o item subsecutivo.**

O vértice da função quadrática $q(x) = x^2 + x - 7/4$ ocorre no ponto $V = (-1/2, -2)$.

2. **(FUNDATEC / Pref. Flores da Cunha - 2022) Em uma determinada empresa, o lucro é dado pela função $L(x) = -x^2 + 50x + 104$, onde x expressa o número de peças produzidas por semana. Nessa situação, quantas peças essa empresa deverá produzir para alcançar o lucro máximo?**

a) 10.
b) 15.
c) 20.
d) 25.
e) 50.

3. **(AOCP / SEAD GO - 2022) Seja $f: R \to R$ uma função polinomial do 2º grau que satisfaz às seguintes condições relativas ao gráfico de f:**

• intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0\,,3)$;

• tem vértice $(-2\,,5/2)$

Nessas condições, o valor de $f(4)$ é

a) 9/2
b) 5
c) 11/2
d) 7
e) 17/2

4. **(CESPE / PM AL - 2021) Com relação a tópicos de matemática, julgue o item que se segue.**

Durante uma caminhada, uma pessoa que segurava na mão uma pequena bola de gude tropeçou em um obstáculo fixo no solo, o que fez a bola ser lançada para frente e cair no chão. A trajetória percorrida pela bola — da mão da pessoa até o chão, suposto plano e horizontal — segue a função espacial $y(x) = -x^2 + x + 1$, em que as distâncias consideradas estão todas em metros e x é não negativo. Nesse caso, considerando-se que $x = 0$ corresponda à localização do obstáculo, conclui-se que a maior altura alcançada pela bola durante o voo é igual a 1,25 metro e que a distância do ponto do tropeço até o ponto em que a bola atingiu o chão é superior a 1 metro.

5. **(FUNDEP / IPREMU - 2021) Uma agência do INSS fez um estudo para entender o comportamento de seus usuários. Após analisar o horário de chegada de cada cidadão no período de um mês, concluiu-se que a quantidade média de usuários presentes na agência ao longo do dia é dada pela função $n(t) = -10t^2 + 60t + 160$, em que n é número de usuários dentro da agência a cada tempo t, que é dado em horas após a abertura do expediente, que vai das 8 horas da manhã até as 15 horas. Qual é o momento em que há mais usuários na agência e quantos são estes?**

a) às 8h, 160 usuários.
b) às 11h, 250 usuários.
c) às 13h, 570 usuários.
d) às 15h, 1280 usuários.

6. **(CESGRANRIO / BB - 2021) Para os seis primeiros meses de um investimento, a evolução, em milhares de reais, de um certo investimento de $R\$\ 3.000,00$ é expressa pela fórmula $M(x) = -1/4(x-4)^2 + 7$, onde $M(x)$ indica quantos milhares de reais a pessoa poderá retirar após x meses desse investimento. Um cliente pretende deixar esse investimento por seis meses.**

Nesse caso, de quanto será a sua perda, em reais, em relação ao máximo que ele poderia ter retirado?

a) 1.000
b) 3.000
c) 4.000
d) 5.000
e) 6.000

7. **(CESPE / UB - 2021) Determinada clínica ofereceu um programa radical de emagrecimento de 60 dias para um grupo de pessoas com obesidade. A média de peso de seus integrantes era de 150 kg no início do programa. O resultado do programa foi descrito pela função**

$$P(t) = 150 - \frac{33t}{10} + \frac{t^2}{25}$$

em que $P(t)$ indica o peso médio das pessoas desse grupo no dia t, com t variando no intervalo $[0,60]$.

De acordo com essa função, o menor valor do peso médio dos integrantes desse grupo ocorreu

a) entre o 28.º dia e o 31.º dia.
b) entre o 32.º dia e o 35.º dia.
c) entre o 36.º dia e o 39.º dia.
d) entre o 40.º dia e o 43.º dia.
e) entre o 44.º dia e o 50.º dia.

8. (INEP / ENEM - 2021) Considere que o modelo matemático utilizado no estudo da velocidade V, de uma partícula de um fluido escoando em um tubo, seja diretamente proporcional à diferença dos quadrados do raio R da secção transversal do tubo e da distância x da partícula ao centro da secção que a contém. Isto é, $V(x) = K^2(R^2 - x^2)$, em que K é uma constante positiva. O valor de x, em função de R, para que a velocidade de escoamento de uma partícula seja máxima é de

a) 0
b) R
c) $2R$
d) KR
e) K^2R^2

9. (AOCP / SANESUL - 2021) Um funcionário representou os valores do lucro da empresa em que trabalha de acordo com o número de meses trabalhados com a seguinte função:

$$y = -x^2 + 12x - 32,$$

em que x é o número de meses e y é o lucro em milhões de reais. Sendo assim, assinale a alternativa que apresenta após quantos meses essa empresa obteve o lucro máximo e qual seria esse lucro.

a) $x = 3$ meses e $y = 2$ milhões
b) $x = 4$ meses e $y = 6$ milhões
c) $x = 5$ meses e $y = 1$ milhões
d) $x = 6$ meses e $y = 4$ milhões
e) $x = 8$ meses e $y = 8$ milhões

10. (FCC / IBMEC - 2019) A empresa de Paulo fabrica e vende um produto cuja quantidade vendida Q depende do preço unitário P cobrado no mercado, de acordo com a expressão $Q = 100 - 2P$. Sabe-se que o custo unitário de fabricação deste produto é de R$ 3,00. Então, o preço unitário que Paulo deve cobrar pelo produto, de modo que a empresa tenha o maior lucro (faturamento das vendas menos custos totais) possível, é

a) R$ 30,00
b) R$ 24,00
c) R$ 26,50
d) R$ 21,00
e) R$ 36,00

11. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) Um estudo revelou que o valor da variável $y = f(x)$, em milhares de reais, em função da variável x, em milhares de peças, é dado pela função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com x variando de 0 a 400. Considere que $f(0) = 800$, e $f(100) = f\ (300) = 1.400$.

Assim, o valor máximo que y pode assumir, em milhões de reais, é igual a:

a) 1,2
b) 1,4
c) 1,6
d) 1,8
e) 2,0

12. (VUNESP / Pref. Cerquilho - 2019) Sobre a função $f: R \to R$, cuja representação algébrica é $y = f(x) = x^2 - 144$, é correto afirmar que o vértice de sua representação gráfica é um ponto

a) de máximo e tem coordenadas $(-144, 0)$.
b) de mínimo e tem coordenadas $(-144, 0)$.
c) de máximo e tem coordenadas $(0, -144)$.
d) de mínimo e tem coordenadas $(0, -144)$.
e) de máximo e tem coordenadas $(0, 144)$.

13. (CESPE / TJ PA - 2020) Considere que, em determinado dia, um computador seja ligado às 5 horas e desligado às 19 horas e que, nesse intervalo de tempo, a porcentagem da memória desse computador que esteja sendo utilizada na hora x seja dada pela expressão

$$P(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 30x - 100$$

Nessa situação, no intervalo de tempo considerado, na hora em que a memória do computador estiver sendo mais demandada, a porcentagem utilizada será igual a

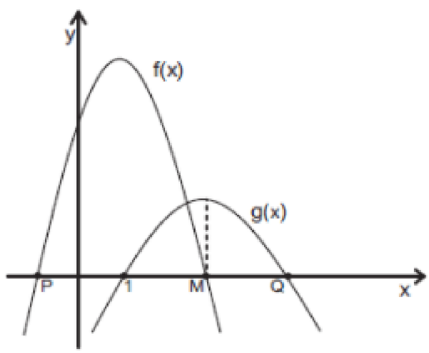
a) 12%

b) 20%
c) 70%
d) 80%
e) 100%

14. (VUNESP / Pref. Dois Córregos - 2019) Sobre a função $f: R \to R$ dada por $y = f(x) = (10 - x)(50 + x)$, é correto afirmar que ela tem como ponto

a) de máximo o ponto $V(-20, 900)$.
b) de máximo o ponto $V(-20, 1\,700)$.
c) de mínimo o ponto $V(-20, 900)$.
d) de mínimo o ponto $V(-20, 1\,700)$.
e) de mínimo o ponto $V(20, 100)$.

15. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2012) Sejam $f(x) = -2x^2 + 4x + 16$ e $g(x) = ax^2 + bx + c$ funções quadráticas de domínio real, cujos gráficos estão representados abaixo. A função $f(x)$ intercepta o eixo das abscissas nos pontos $P(x_P, 0)$ e $M(x_M, 0)$, e $g(x)$, nos pontos $(1, 0)$ e $Q(x_Q, 0)$.



Se g(x) assume valor máximo quando $x = x_M$, conclui-se que x_Q é igual a

a) 3
b) 7
c) 9
d) 11
e) 13

16. (VUNESP / Pref. Ribeirão Preto - 2019) A representação gráfica de uma função quadrática, dada por $y = g(x) = -x^2 + bx + c$, tem como máximo o ponto de coordenadas $(0, 5)$. Logo, $b + c$ é igual a

a) -5
b) -3
c) 0
d) 3
e) 5

17. (FCC / TRE AC - 2010) Para repor o estoque de sua loja, Salma compra certo artigo ao preço de R$ 28,00 a unidade. Suponha que Salma estime que, se cada artigo for vendido ao preço unitário de x reais, ela conseguirá vender $(84 - x)$ unidades. De acordo com essa estimativa, para que seja obtido o maior lucro possível, o número de artigos que deverão ser vendidos é

a) 84
b) 70
c) 56
d) 42
e) 28

18. (VUNESP / Pref. São Paulo - 2019) A função dada por $P = f(x) = x^2 - 3,5x$, com $0 \leq x \leq 7/2$, em que P corresponde à profundidade, ao nível do mar, e x corresponde ao deslocamento, ambos em metros, é a que melhor modela a curva feita por um mergulhador em um dos seus mergulhos. A maior profundidade que esse nadador atingiu, ao nível do mar, em metros, foi, aproximadamente,

a) 4,5
b) 3,0
c) 2,5
d) 3,5
e) 4,0

19. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2012) A raiz da função $f(x) = 2x - 8$ é também raiz da função quadrática $g(x) = ax^2 + bx + c$.

Se o vértice da parábola, gráfico da função $g(x)$, é o ponto $V(-1, -25)$, a soma $a + b + c$ é igual a:

a) -25
b) -24
c) -23
d) -22
e) -21

20. (VUNESP / IPMS SJC - 2018) Uma pequena fábrica produz pelo menos 4 canetas por dia. O custo y (em reais) para a produção de um número x de canetas é dado pela equação $y = -x^2 + 10x + 20$. Certo dia, o custo de produção das canetas foi de $R\$\ 36,00$. No dia seguinte, o custo de produção das canetas foi de $R\$\ 20,00$. A diferença, em reais, entre o custo unitário da produção dessas canetas, nesses dias, é igual a

a) 1,80
b) 2,10
c) 2,50
d) 2,90
e) 3,20

21. (CESPE / TJ PR - 2019) Uma instituição alugou um salão para realizar um seminário com vagas para 100 pessoas. No ato de inscrição, cada participante pagou R$ 80 e se comprometeu a pagar mais R$ 4 por cada vaga não preenchida.

Nessa situação hipotética, a maior arrecadação da instituição ocorrerá se a quantidade de inscrições for igual a

a) 95
b) 90
c) 84
d) 60
e) 50

22. (VUNESP / CM Mogi das Cruzes - 2017) As emissoras de televisão têm sua audiência medida em pontos, que correspondem, de modo simplificado, ao conjunto de pessoas que estão assistindo ao programa.

Aos domingos, os principais programas de uma emissora são exibidos entre meio-dia e meia-noite, de modo que a média dos seus pontos de audiência para um determinado horário é descrita pela fórmula $P = -\frac{1}{3}(t^2 - 12t - 36)$, sendo P a média dos pontos de audiência, e t o número de horas após o meio-dia.

Em seu horário de maior audiência aos domingos, a emissora atinge, em média, 24 pontos, o que, segundo a fórmula descrita anteriormente, ocorre às

a) 15:00
b) 16:00
c) 18:00
d) 22:00
e) 23:00

23. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) O valor máximo da função de variável real $f(x) = 4(1+x)(6-x)$ é

a) 44
b) 46
c) 48
d) 49
e) 50

24. (VUNESP / UNESP - 2017) Uma função quadrática f é dada por $f(x) = x^2 + bx + c$, com b e c reais. Se $f(1) = -1$ e $f(2) - f(3) = 1$, o menor valor que $f(x)$ pode assumir, quando x varia no conjunto dos números reais, é igual a

a) -12
b) -6
c) -10
d) -5
e) -9

25. (VUNESP / AMLURB - 2016) A quantidade Q de bicicletas produzidas por ano, em função do tempo t, é dada pela fórmula $Q = -t^2 + 17t + 60$, sendo que t representa o total de anos decorridos desde 1995, ano em que foram produzidas 60 bicicletas. Por exemplo, no ano 2005, t é igual a 10, e Q é igual a 130. Esse modelo prevê que, em algum momento, nenhuma bicicleta será produzida e, a partir de então, terá sua produção interrompida. O último ano em que essas bicicletas serão produzidas será

a) 2010
b) 2012
c) 2009

d) 2014
e) 2015

26. (VUNESP / CM Poá - 2016) Uma empresa adquiriu um novo forno para ampliar sua produção, porém, antes de utilizá-lo, é necessário que este seja aquecido até atingir uma temperatura de $1.100\ ºC$, estabilizando-se logo em seguida. Durante o aquecimento, a temperatura (T) do forno é descrita em função das horas (h) de funcionamento pela lei $T = 4(h^2 + 3h + 5)$. Sendo assim, se o forno começou a ser aquecido às 6:00h da manhã, então ele atingirá a temperatura necessária para poder ser utilizado às

a) 13:00h
b) 15:00h
c) 18:00h
d) 21:00h
e) 23:00h

27. (FGV / CODEBA - 2010) Seja g uma função de $R \rightarrow R$ tal que $g(x) = 2x^2 - 7x + 3$. O valor mínimo que g pode ter é

a) -66/8
b) -7/4
c) 7/4
d) 25/8
e) -25/8

28. (VUNESP / PM SP - 2014) A função $f: R \rightarrow R$, dada por $f(x) = ax^2 - 16x + c$, tem um valor máximo e admite duas raízes reais e iguais. Nessas condições, e sabendo-se que $c = a$, é correto afirmar que o par ordenado que representa o vértice dessa parábola é

a) (–2,0).
b) (–1,0).
c) (1,0).
d) (2,0).
e) (3,0).

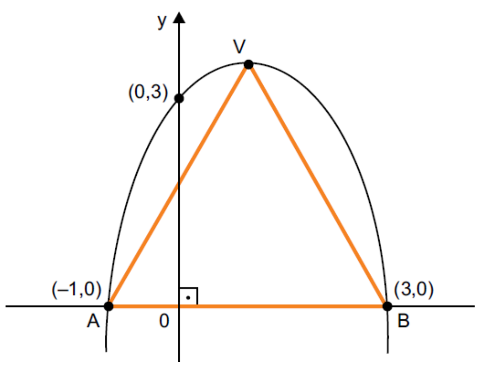
29. (VUNESP / FAMERP - 2014) Em um estudo controlado de uma nova medicação contra dor, pesquisadores acompanharam um grupo de pessoas submetidas à administração desse medicamento durante alguns dias. A cada novo dia de tratamento, as pessoas tinham que atribuir um número inteiro, de 1 a 10, para o nível de dor que sentiam (1 significando "dor desprezível" e 10 significando "dor insuportável"). A tabela indica a média dos resultados da pesquisa nos primeiros dias, já sugerindo uma modelagem matemática para o estudo.

dia de tratamento	nível médio de dor do grupo
1.º	$\frac{1}{80}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 1 + 9 = 8{,}5125$
2.º	$\frac{1}{80}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 2 + 9 = 8{,}0500$
3.º	$\frac{1}{80}\cdot 3^2 - \frac{1}{2}\cdot 3 + 9 = 7{,}6125$
4.º	$\frac{1}{80}\cdot 4^2 - \frac{1}{2}\cdot 4 + 9 = 7{,}2000$
⋮	⋮

Supondo que nenhum outro fator intervenha no estudo e utilizando a modelagem matemática sugerida, o menor nível médio de dor do grupo foi dado no

a) 18.º dia.
b) 16.º dia.
c) 15.º dia.
d) 20.º dia.
e) 22.º dia.

30. (VUNESP / PM SP 2013) Na figura, tem-se o gráfico de uma parábola.

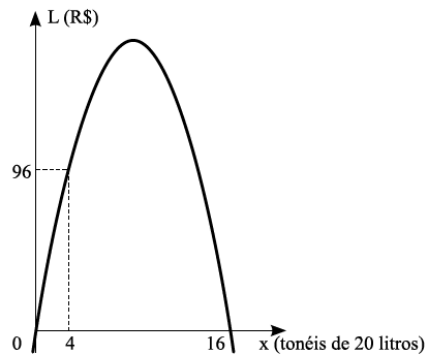


Os vértices do triângulo AVB estão sobre a parábola, sendo que os vértices A e B estão sobre o eixo das abscissas e o vértice V é o ponto máximo da parábola.

A área do triângulo AVB, cujas medidas dos lados estão em centímetros, é, em centímetros quadrados, igual a

a) 8
b) 9
c) 12
d) 14
e) 16

31. (VUNESP / Pref. Aluminio - 2011) A parábola representa a variação do lucro L em reais em função da produção diária x de tonéis de 20 litros de vinho proveniente de uma vinícola.



O lucro máximo obtido é de

a) R$ 192,00.
b) R$ 175,00.
c) R$ 142,00.
d) R$ 128,00.
e) R$ 117,00.

32. (VUNESP / PM SP - 2010) Um avião com 100 lugares foi fretado para uma excursão. O valor pago por cada passageiro foi estabelecido como sendo R$ 400,00 mais R$ 5,00 por cada assento não ocupado. A receita máxima que a empresa conseguirá é

a) R$ 40.000,00.
b) R$ 40.350,00.

c) R$ 40.500,00.
d) R$ 41.000,00.
e) R$ 42.000,00.

33. (VUNESP / UNESP - 2009) A proprietária de uma banca de artesanatos registrou, ao longo de dois meses de trabalho, a quantidade diária de guardanapos bordados vendidos (g) e o preço unitário de venda praticado (p). Analisando os dados registrados, ela observou que existia uma relação quantitativa entre essas duas variáveis, a qual era dada pela lei:

$$p = \frac{-25}{64}g + \frac{25}{2}$$

O preço unitário pelo qual deve ser vendido o guardanapo bordado, para que a receita diária da proprietária seja máxima, é de

a) R$ 12,50.
b) R$ 9,75.
c) R$ 6,25.
d) R$ 4,25.
e) R$ 2,00.

GABARITO

1. CERTO
2. D
3. D
4. CERTO
5. B
6. A
7. D
8. A
9. D
10. C
11. C
12. D
13. D
14. A
15. B
16. E
17. E
18. B
19. E
20. C
21. D
22. C
23. D
24. D
25. D
26. D
27. E
28. B
29. D
30. A
31. D
32. C
33. C

LISTA DE QUESTÕES - BANCAS DIVERSAS

Domínio e Imagem

1. **(FUNDATEC / Pref. Candelária - 2021) A imagem da função de 2º grau $y = C(x) = 2x^2 - 180x + 9000$ representa o custo de manutenção de x horas de trabalho de uma equipe de agentes de combate a endemias é:**

a) $\mathbb{R}$.
b) $\{y \in \mathbb{R}, y \geq 4950\}$.
c) $\{y \in \mathbb{R}, y \geq 9000\}$.
d) $\{y \in \mathbb{R}, y < 4950\}$.
e) $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 4500\}$.

2. **(INDEC / Pref. Mauá - 2021) Denotamos por R o conjunto dos números reais. Assinale dentre as alternativas abaixo a que corresponde à imagem da função g definida por $g(t) = 2t^2 + 3t + 1$.**

a) $y \in R : y \geq -1/8$
b) $y \in R : y \leq -1/8$
c) $y \in R : y \geq -3/4$
d) $y \in R : y \geq 0$

3. **(FUNDATEC / Pref. Bom Jesus - 2021) A função quadrática de R em R é definida por: $f(x) = x^2 + 2x + 8$. Determine o elemento do domínio cuja imagem é igual a 56.**

a) 5.
b) 6.
c) 7.
d) 8.
e) 9.

4. **(SELECON / SEDUC MT - 2021) O conjunto imagem da função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ é o intervalo real $]-\infty, t]$. O valor de t é igual a:**

a) 4
b) 3
c) 2

d) -4

5. **(AOCP / SANESUL - 2021) A lei da oferta e da procura, uma empresa encontrou uma fórmula que acreditava ser capaz de determinar a relação entre o preço "x" da mercadoria e a quantidade "y" de milhões de unidades vendidas da mesma mercadoria. Tal expressão era caracterizada algebricamente por $y = f(x) = -x^2 + 10x - 16$ e permitia, através do domínio e do conjunto imagem da função, determinar a relação entre preço e quantidade, apontando, inclusive, a maior quantidade de unidades vendidas.**

Assinale a alternativa em que figura a representação precisa do conjunto imagem da função.

a) $y > 9$
b) $y < 9$
c) $y \leq 9$
d) $0 \leq y \leq 9$
e) $0 < y < 9$

6. **(Pref. Panambi - 2020) Qual o valor da imagem da $f(5)$ na seguinte função de segundo grau: $x^2 + 8x - 20$?**

a) 45
b) 40
c) 35
d) 30
e) 25

7. **(CM Tapejara - 2019) O conjunto imagem da função de segundo grau $f(x) = x^2 - 1$ é:**

a) $[-1, +\infty)$
b) $(-1, +\infty)$
c) $(-\infty, -1]$
d) $(-\infty, -1)$
e) $(-\infty, +\infty)$

8. **(FUNDATEC / Pref. Imbé - 2021) A alternativa que mostra o domínio da função $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$ é**

a) $(-\infty, 3)$
b) $(3, +\infty)$

c) $(-6,9)$
d) $(3,9)$
e) $(-\infty, +\infty)$

9. (VUNESP / Pref. Serrana - 2018) Na função quadrática cuja representação algébrica é $y = f(x) = x^2 - 144$, o maior conjunto que pode ser fixado como imagem da função e os zeros da função são, correta e respectivamente,

a) $IR; -144\ e\ 144$
b) $\{y \in IR \mid y \leq 12\}; 144\ e\ 144$
c) $\{y \in IR \mid y \leq -144\}; -12\ e\ 12$
d) $\{y \in IR \mid y \geq -144\}; -12\ e\ 12$
e) $\{y \in IR \mid y \geq 12\}; -144\ e\ 144$

10. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Na função $f(x) = -x^2 + 3x - 1$, a imagem de -1 é

a) -5
b) -3
c) 0
d) +1
e) +3

Gabarito

1. B
2. A
3. B
4. A
5. C
6. A
7. B
8. E
9. D
10. A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:

PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.