07

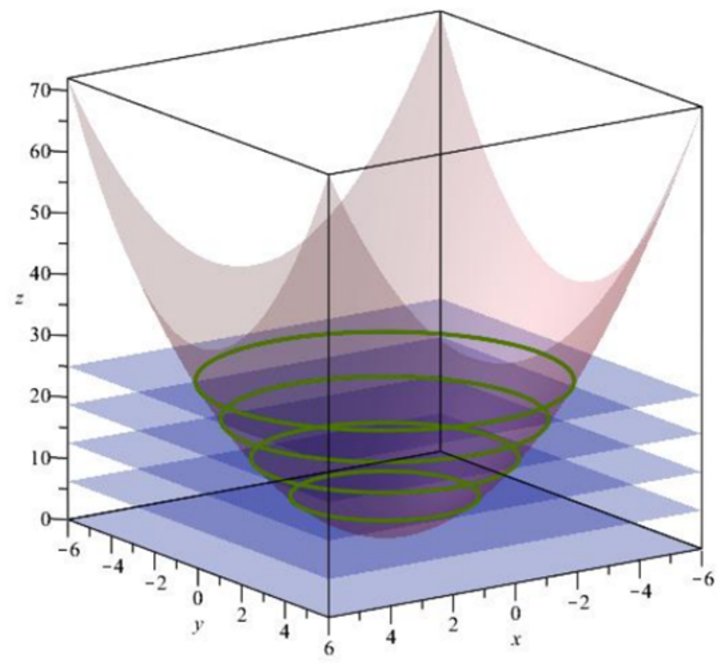
O que aprendemos?

Nesta aula, vimos o importante conceito de curvas de nível de uma função de diversas variáveis.

Começamos com exemplos no `R^2` .

As curvas de nível de uma função se referem ao lugar geométrico no domínio da função, onde o valor da função é constante.

As curvas de nível são muito importantes para a visualização da direção de máxima ou mínima variação de uma função de mais de uma variável.



Em seguida, nós aprendemos os conceitos de pontos críticos de uma função. Os pontos críticos de uma função são classificados em: pontos de mínimo, pontos de máximo ou pontos de sela.

No caso de um ponto de mínimo local, obtemos o ponto que minimiza a função, ou seja, a função não admite valores menores do que aquele, não importando a direção onde você visualiza o gráfico, ou seja, mesmo sob uma rotação em torno do eixo z, o valor do mínimo não muda. O mínimo é local no sentido de que não podemos encontrar valores menores da `f(x,y)` pelo menos para uma bola finita aberta ou fechada, em torno daquele ponto. Este conceito não impede que haja outro mínimo local, distante, cujo valor da `f(x,y)` seja ainda menor do que o primeiro, por isso chama-se mínimo local. Vimos que o mesmo conceito se aplica aos máximos locais, apenas que não podemos encontrar valores maiores para a função, em uma vizinhança pequena em torno do máximo local (x,y) que foi calculado.

Finalmente, nós vimos o que é um ponto de sela. O ponto de sela é um ponto que é máximo local para uma curva que passe por ele visto de uma certa direção e na direção perpendicular, este mesmo ponto se apresenta como um mínimo local. Quando esta perspectiva muda, desta forma, temos a presença de um ponto de sela. O gráfico de uma função com um ou mais pontos de sela é muito típico, pois ele se parece mesmo com a sela sobre um cavalo.

Em seguida, vimos que para calcularmos se um ponto é mínimo local, sela, máximo local ou indeterminado, temos que calcular o Hessiano da função, que é o determinante da matriz Hessiana. Veja o exemplo para 2D:

Para uma função de duas variáveis, o Hessiano é uma matriz 2 X 2 (se for uma função de três variáveis, obtemos uma matriz 3 X 3 e assim por diante):

A matriz Hessiana de `f(x,y)` é:

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

E o seu determinante é o Hessiano:

$$H(x,y) = det(M(x,y))$$

As condições de ótimo são:

a) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$,
local da $f(x,y)$.

b) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$,
local da $f(x,y)$.

c) Se $H(x_0, y_0) < 0$

d) Se $H(x_0, y_0) = 0$ nada se pode afirmar.

onde na figura acima:

a) é mínimo,

b) é máximo,

c) ponto de sela,

d) nada se pode afirmar.