PROBABILIDADE

Conceitos Iniciais

A Teoria da Probabilidade é o ramo da Estatística que estuda experimentos e fenômenos **aleatórios**, isto é, cujos resultados são **incertos**. Como exemplo, podemos citar:

- lançamentos de dados ou moedas;
- seleções feitas ao acaso (ou aleatoriamente), como de uma carta no baralho, de uma pessoa ou peça dentro de um grupo, etc.;
- fenômenos naturais, como chuva em determinado dia.

Embora os resultados sejam incertos, se tais experimentos ou fenômenos são **repetidos** muitas vezes, é possível encontrar certo **padrão** em seus resultados. Se lançarmos uma moeda comum muitas vezes esperamos que, em torno de metade das vezes, a face superior seja cara e, na outra metade, coroa.

Porém, para encontrar tal padrão, é necessário que os experimentos/fenômenos possam ser **repetidos indefinidamente**, sob **condições inalteradas**.

Um exemplo em que essa condição **não** é atendida é o lançamento de uma moeda próximo a um bueiro. Em algum lançamento, é possível que a moeda caia no bueiro, não sendo mais possível repetir o experimento. Para esse tipo de situação, **não** podemos utilizar todos os conceitos e cálculos da Teoria da Probabilidade que estudaremos aqui.

ESQUEMATIZANDO

Os Experimentos/Fenômenos aleatórios:

i) Podem ser **repetidos indefinidamente**, sob condições inalteradas;
ii) Apresentam **resultado incerto**, porém com um **padrão conhecido**.

Espaço Amostral

O Espaço Amostral de um experimento/fenômeno aleatório é o conjunto de **todos os resultados possíveis**. Podemos chamar o Espaço Amostral de **Universo** e denotá-lo por **U** ou **Ω**.

No lançamento de uma **moeda**, por exemplo, o Espaço Amostral é o conjunto:

$$U_M = \{CARA, COROA\}$$

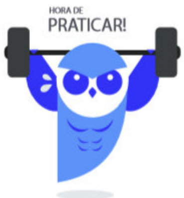
Para o lançamento de um **dado** (com 6 faces), o Espaço Amostral é o conjunto:

$$U_D = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Se o experimento for o lançamento de **2 moedas**, o Espaço Amostral é dado por:

$$U_{2M} = \{(CARA,CARA), (CARA,COROA), (COROA,CARA), (COROA,COROA)\}$$

Podemos, ainda, chamar **cada resultado possível** de ponto amostral. No lançamento de 2 moedas que acabamos de ver, por exemplo, há **4 pontos amostrais**.



(2017 – Secretaria de Educação/MG) Em Teoria das Probabilidades, um conceito importante ao se trabalhar com experimentos aleatórios é o conceito de Espaço Amostral. Assinale a alternativa que indica o correto significado deste conceito.

a) Conjunto de todos os resultados possíveis do experimento

b) Tamanho total da amostra

c) Proporção entre o tamanho da amostra tomada e o tamanho total da população

d) Intervalo no qual as probabilidades somadas ultrapassam 0,5

e) Somatória dos todos os possíveis resultados de um experimento

Comentários:

O Espaço Amostral de um experimento é o conjunto de todos os seus resultados possíveis.

Gabarito: A

Evento

Um evento é **todo** e **qualquer subconjunto do Espaço Amostral**.

No exemplo do lançamento de **2 moedas**, podemos chamar de evento A aquele em que ambas as moedas apresentam o **mesmo resultado** para a face superior. Portanto, o evento A é o subconjunto:

$$A = \{(CARA,CARA), (COROA,COROA)\}$$

Observamos que o evento A apresenta 2 elementos (ou 2 pontos amostrais). Denotamos o **número de elementos** do evento A por **n(A)**. Nesse exemplo, temos:

$$n(A) = 2$$

Considerando como experimento o lançamento de **2 dados**, podemos chamar de evento B aquele em que a **soma** das faces superiores dos dois dados é igual a **12**. O evento B é, portanto, o subconjunto:

$$B = \{(6,6)\}$$

Ou seja, temos **n(B) = 1** (isto é, um único ponto amostral). Nesse caso, dizemos que o evento é **simples** ou **elementar**.

E se disséssemos que o evento C corresponde ao subconjunto em que a soma das faces superiores dos dois dados é igual a 13? Nesse caso, **não há elemento algum** do Espaço Amostral que atenda a esse requisito (a soma máxima é 12). Por isso, esse evento é um **conjunto vazio** (simbolizamos o conjunto vazio por $\varnothing$):

$$C = \varnothing$$

Como não há elemento algum no subconjunto, temos **n(C) = 0**. Dizemos que esse evento é **impossível**!

Podemos ter, ainda, um evento que corresponda a **todo** o Espaço Amostral. Por exemplo, considerando o lançamento de um **único dado**, podemos chamar de evento D aquele em que o número indicado na face superior é menor que 7. Assim, o evento D corresponde ao subconjunto:

$$D = \{1,2,3,4,5,6\} = U_D$$

Note que, como ambos os conjuntos (D e U_D) são iguais, o número de elementos de ambos os conjuntos também é igual: **$n(D) = n(U_D)$**. Dizemos que esse evento é **certo**!

RESUMINDO

Evento **simples** ou **elementar** → n(B) = 1

Evento **impossível**: C = ∅ → n(C) = 0

Evento **certo**: D = U → n(D) = n(U)

HORA DE PRATICAR!

(2017 – Instituto de Previdência de João Pessoa) Sobre as afirmações a seguir, assinale a única correta no que diz respeito ao espaço amostral.

a) Se Ω é um espaço amostral do experimento, todo subconjunto A contido em Ω será chamado de evento, Ω é o evento certo, ϕ o evento impossível. Se o evento **ω** pertence a Ω, o evento {**ω**} é dito elementar

b) Se Ω é um espaço amostral do experimento, todo subconjunto A contido em Ω será chamado de subespaço amostral, Ω é o evento certo, ϕ o evento vazio. Se o evento **ω** pertence a Ω, o evento {**ω**} é dito elementar

c) Se Ω é um espaço amostral do experimento, todo subconjunto A contido em Ω será chamado de evento, Ω é o evento vazio, ϕ o evento neutro. Se o evento **ω** pertence a Ω o evento {**ω**} é dito elementar.

d) Se Ω é um espaço de probabilidades do experimento, todo subconjunto A contido em Ω será chamado de evento, Ω é o evento certo, ϕ o evento vazio. Se o evento **ω** pertence a Ω, o evento {**ω**} é dito único.

e) Se Ω é um espaço de probabilidades do experimento, todo subconjunto A contido em Ω será chamado de evento, Ω é o evento certo, ϕ o evento vazio. Se o evento **ω** pertence a Ω , o evento {**ω**} é dito unitário.

Comentários:

i) Podemos denotar por **Ω** um **Espaço Amostral** (não um espaço de probabilidades, como descrito nas alternativas "d" e "e");

ii) Todo **subconjunto do Espaço Amostral** é chamado de **evento** (não de subespaço amostral, como descrito na alternativa "b");

iii) O evento **igual ao Espaço Amostral** (Ω) é dito **certo** (não vazio, como descrito na alternativa "c");

iv) O evento que corresponde ao **conjunto vazio** (ϕ) é dito **impossível** (não neutro, como descrito na alternativa "c");

v) O evento com um **único elemento**, como é o caso de B = {(6, 6)} que vimos anteriormente, é dito **elementar**.

Gabarito: A

DEFINIÇÕES DE PROBABILIDADE

Definição Clássica

A probabilidade representa as **chances** de um evento ocorrer. Sendo U o Espaço Amostral, a **probabilidade** de ocorrer o evento A é (definição clássica):

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Ou seja, a probabilidade de um evento é a **razão** entre o **número de elementos do Evento**, $n(A)$, e o **número de elementos do Espaço Amostral**, $n(U)$.

Por exemplo, para o experimento de lançar **2 moedas**, vimos que o Espaço Amostral (U_{2M}) é:

U_{2M} = {(CARA,CARA), (CARA,COROA), (COROA,CARA), (COROA,COROA)}

$n(U_{2M}) = 4$

O evento A, em que ambas as moedas fornecem o **mesmo resultado**, é o subconjunto:

A = {(CARA,CARA), (COROA,COROA)}

n(A) = 2

Portanto, a **probabilidade** de o evento **A** ocorrer é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U_{2M})} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

Outra forma de dizer o **mesmo** é considerar que a probabilidade é a **razão** entre o **número de casos favoráveis ao evento** e o **número de casos totais**:

$$P = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ totais}$$

ESCLARECENDO!

Para utilizar a definição clássica, há uma **condição** crucial: todos os elementos do Espaço Amostral (ou seja, todos os pontos amostrais) devem ser **igualmente prováveis**.

Se isso **não for verdade**, **não** podemos utilizar a **definição clássica** de probabilidade. Por exemplo, se tivermos uma moeda viciada, em que a probabilidade de cair CARA é maior que a probabilidade de cair COROA, então **não** poderemos utilizar a definição clássica.

HORA DE PRATICAR!

(FGV/2019 – Prefeitura de Angra dos Reis/RJ) Uma pesquisa feita com os alunos de uma sala mostrou que 7 alunos torcem pelo Flamengo, 6 pelo Vasco, 5 pelo Fluminense, 4 pelo Botafogo e 3 não torcem por time nenhum. Escolhendo ao acaso um dos alunos dessa turma, a probabilidade de que ele seja torcedor do Vasco é de

a) 12%

b) 18%

c) 20%

d) 24%

e) 30%

Comentários:

A probabilidade de escolher um torcedor do Vasco equivale à razão entre o número de torcedores do Vasco (casos favoráveis) e o número de alunos (casos totais):

$$P = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ totais} = \frac{n(V)}{n(U)}$$

O número total de alunos é de:

$$n(U) = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 25$$

O número de torcedores do Vasco é n(V) = 6. Logo, a probabilidade desejada é:

$$P = \frac{6}{25} = 0{,}24 = 24\%$$

Gabarito: D.

(VUNESP/2020 – PM/SP) Em um pote, há 60 balas, todas de mesmo tamanho e formato, embaladas individualmente. Desse total, 25 são balas de leite com recheio de chocolate, 15 são balas de café sem recheio, e as demais são balas de frutas também com recheio de chocolate. Retirando-se aleatoriamente uma bala desse pote, a probabilidade de que ela tenha recheio de chocolate é de

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{5}$

Comentários:

A probabilidade de escolher uma bala com recheio de chocolate é a razão entre o número de balas com recheio de chocolate (casos favoráveis) e o número de balas no total (casos totais):

$$P = \frac{n(casos\ favoráveis)}{n(casos\ totais)} = \frac{n(RC)}{n(U)}$$

O enunciado informa que há 60 balas, logo, n(U) = 60.

As balas com recheio de chocolate são as balas de leite e as balas de frutas, ou seja, todas as balas **exceto** as balas de café. Sabendo que há 15 balas de café, o número de balas com recheio de chocolate é:

n(RC) = 60 – 15 = 45

Logo, a probabilidade desejada é:

$$P = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

Gabarito: B.

(FCC/2017 – Secretaria da Administração/BA) Uma sala de aula com 40 alunos fez uma pesquisa sobre a ocorrência de dengue no contexto familiar. A pesquisa consistia em tabular, no universo de 120 pessoas, se cada aluno e seus respectivos pais e mães já tiveram dengue, ou não. As respostas estão tabuladas abaixo.

	Teve dengue	Não teve dengue
Alunos	1	39
Pais dos alunos	2	38
Mães dos alunos	0	40

Sorteando-se ao acaso uma das 120 pessoas pesquisadas, a probabilidade de que ela tenha respondido na pesquisa que já teve dengue é igual a

a) 2,5%.

b) 2,3%.

c) 7,8%.

d) 3,8%.

e) 1,4%.

Comentários:

A probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos totais:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ totais} = \frac{n(D)}{n(U)}$$

Os casos favoráveis correspondem às pessoas que tiveram dengue. A tabela mostra que o número de pessoas que tiveram dengue é:

n(D) = 1 + 2 = 3

O enunciado informa que, no total, 120 pessoas participaram da pesquisa: n(U) = 120.

Assim, a probabilidade desejada é:

$$P(D) = \frac{3}{120} = \frac{1}{40} = 2{,}5\%$$

Gabarito: A.

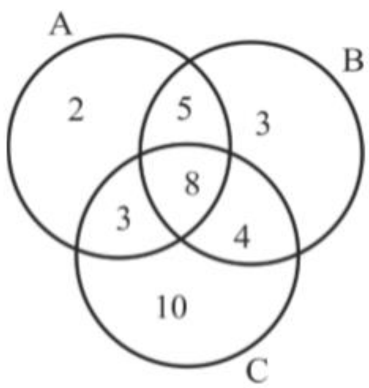
(CESPE/2018 – EBSERH) Uma pesquisa revelou característica da população de uma pequena comunidade composta apenas por casais e seus filhos. Todos os casais dessa comunidade são elementos do conjunto $A \cup B \cup C$, em que

A = {casais com pelo menos um filho com mais de 20 anos de idade};

B = {casais com pelo menos um filho com menos de 10 anos de idade};

C = {casais com pelo menos 4 filhos}.

Considerando que n(P) indique a quantidade de elementos de um conjunto P, suponha que $n(A) = 18$; $n(B) = 20$; $n(C) = 25$; $n(A \cap B) = 13$; $n(A \cap C) = 11$; $n(B \cap C) = 12$ e $n(A \cap B \cap C) = 8$. O diagrama a seguir mostra essas quantidades de elementos.



Com base nas informações e no diagrama precedentes, julgue o item a seguir.

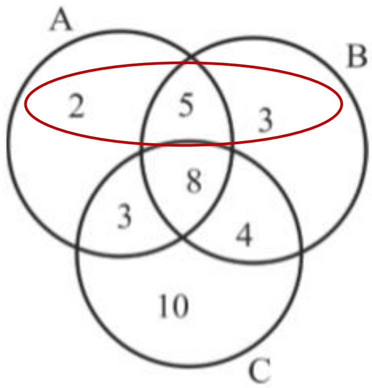
Se um casal dessa comunidade for escolhido ao acaso, então a probabilidade de ele ter menos de 4 filhos será superior a 0,3.

Comentários:

A probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos totais:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ totais} = \frac{n(E)}{n(U)}$$

Os casos favoráveis correspondem ao número de casais com menos de 4 filhos. Sabendo que C representa os casais com pelo menos 4 filhos, então os casais com menos de 4 filhos são aqueles que não estão em C, conforme indicado abaixo:



Assim, o número de casos favoráveis é:

$$n(E) = 2 + 5 + 3 = 10$$

E o número de casos totais é:

$$n(U) = 2 + 5 + 3 + 3 + 8 + 4 + 10 = 35$$

Logo, a probabilidade é:

$$P = \frac{10}{35} \cong 0{,}286$$

Ou seja, é inferior a 0,3.

Gabarito: Errado.

Vale pontuar que, em diversos casos, será necessário utilizar as técnicas de **análise combinatória**, para calcular o número de elementos do evento e/ou o número de elementos do Espaço Amostral.

EXEMPLIFICANDO

Vamos supor haja 5 peças amarelas e 6 peças verdes dentro de um saco e que teremos que retirar 2 peças sem olhar. Qual é a probabilidade de retirar 2 peças amarelas?

Sabemos que a probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos totais:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ totais} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Os **casos favoráveis** são as maneiras de retirar 2 peças, dentre as 5 peças amarelas. Como a ordem não importa, temos a combinação 2, dentre 5 elementos:

$$n(A) = C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Os **casos totais** são as maneiras de retirar 2 peças, de um total de 11 peças (entre amarelas e verdes), também sem importância de ordem:

$$n(U) = C_{11,2} = \frac{11!}{(11-2)! \times 2!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{9! \times 2!} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

Logo, a probabilidade de retirar 2 peças amarelas é: $P = \frac{10}{55}$

E se a ordem importasse?

EXEMPLIFICANDO

Vamos supor, então, que há 5 mulheres e 6 homens, dos quais 2 serão escolhidos para ocupar a posição de presidente e vice-presidente do grupo. Qual seria a probabilidade de escolher mulheres para ambos os cargos?

A probabilidade é calculada pela mesma razão:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ totais} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Os **casos favoráveis** são as maneiras de escolher 2 mulheres, dentre 5, sendo que a ordem importa, por serem cargos distintos:

$$n(A) = A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Os **casos totais** são as maneiras de escolher 2 mulheres, de um total de 11 pessoas (entre mulheres e homens), também com importância de ordem:

$$n(U) = A_{11,2} = \frac{11!}{(11-2)!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{9!} = 11 \times 10 = 110$$

Logo, a probabilidade de escolher 2 mulheres é: $P = \frac{20}{110} = \frac{10}{55}$

Esse é o **mesmo resultado** que obtivemos antes!

ESCLARECENDO!

Quando estivermos escolhendo o **mesmo número de elementos**, com o **mesmo critério** em relação à importância da ordem, tanto nos casos favoráveis, quanto nos casos totais, **não** faz diferença se consideramos que a ordem importa ou não!

Se a ordem importa, temos o arranjo, tanto para os casos favoráveis, quanto para os casos totais:

$$P = \frac{A_{n,p}}{A_{N,p}} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{\frac{N!}{(N-p)!}}$$

Para o nosso exemplo das 5 mulheres e 6 homens, a probabilidade de escolher 2 mulheres para cargos distintos foi calculada como:

$$P = \frac{A_{5,2}}{A_{11,2}} = \frac{\frac{5!}{(5-2)!}}{\frac{11!}{(11-2)!}}$$

Se a ordem não importa, temos a combinação:

$$P = \frac{C_{n,p}}{C_{N,p}} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!\times p!}}{\frac{N!}{(N-p)!\times p!}} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{\frac{N!}{(N-p)!}}$$

Para o nosso exemplo das 5 peças amarelas e 6 peças verdes, a probabilidade de escolher 2 peças amarelas, sem importância de ordem, foi calculada como:

$$P = \frac{C_{5,2}}{C_{11,2}} = \frac{\frac{5!}{(5-2)!\times 2!}}{\frac{11!}{(11-2)!\times 2!}} = \frac{\frac{5!}{(5-2)!}}{\frac{11!}{(11-2)!}}$$

Ou seja, o cálculo da probabilidade será o mesmo, independentemente de a ordem importar ou não!

(FGV/2019 – Prefeitura de Salvador/BA) Entre 6 deputados, 3 do Partido A e 3 do Partido B, serão sorteados 2 para uma comissão.

A probabilidade de os 2 deputados sorteados serem do Partido A é de:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{6}$

Comentários:

A probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos totais:

$$P = \frac{n(casos\ favoráveis)}{n(casos\ totais)} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Os casos totais são as maneiras de escolher 2 deputados, dentre todos os 6 (sem importância de ordem):

$$n(U) = C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Os casos favoráveis são as maneiras de escolher 2 deputados, dentre os 3 do Partido A (também sem importância de ordem):

$$n(A) = C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$$

Logo, a probabilidade desejada é:

$$P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Gabarito: D.

(CESPE/2017 – PM-MA) Uma operação policial será realizada com uma equipe de seis agentes, que têm prenomes distintos, entre eles André, Bruno e Caio. Um agente será o coordenador da operação e outro, o assistente deste; ambos ficarão na base móvel de operações nas proximidades do local de realização da operação. Nessa operação, um agente se infiltrará, disfarçado, entre os suspeitos, em reunião por estes marcada em uma casa noturna, e outros três agentes, também disfarçados, entrarão na casa noturna para prestar apoio ao infiltrado, caso seja necessário.

A respeito dessa situação hipotética, julgue o item seguinte.

Se os dois agentes que ficarão na base móvel forem escolhidos aleatoriamente, a probabilidade de André e Bruno serem os escolhidos será superior a 30%.

Comentários:

Para calcular a probabilidade, temos:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ totais} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Os casos totais correspondem a todas as maneiras de escolher um coordenador e um assistente, dentre 6 agentes. Considerando que os cargos são **distintos**, temos um **arranjo** de 2 elementos, dentre 6:

$$n(U) = A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 6 \times 5 = 30$$

Os casos favoráveis correspondem às maneiras de escolher André e Bruno como coordenador e assistente, em qualquer ordem. Podemos ter André como coordenador e Bruno como assistente OU Bruno como coordenador e Bruno como assistente. Logo, há 2 possibilidades: n(A) = 2.

Assim, a probabilidade é:

$$P = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \cong 6,7\%$$

Que é inferior a 30%.

Gabarito: Errado.

(FCC/2016 – Conselho Regional de Medicina/SP) Em dezembro serão vistoriados 10 estabelecimentos de saúde, sendo 2 hospitais, 1 pronto-socorro, 3 ambulatórios e 4 postos de saúde. Sorteando-se ao acaso a ordem de visita dos 10 estabelecimentos, a probabilidade de que os dois primeiros sejam postos de saúde é igual a

a) 2/15

b) 4/25

c) 2/25

d) 3/20

e) 3/25

Comentários:

Para calcular a probabilidade de 2 postos de saúde serem os primeiros vistoriados (evento A), utilizamos a definição clássica de probabilidade:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

O Espaço Amostral corresponde a todas as possibilidades de se ordenar 10 elementos:

$$n(U) = P_{10} = 10!$$

O evento A corresponde às possibilidades de se escolher 2 postos de saúde, dentre 4, sendo a ordem relevante (**arranjo**), E de escolher a ordem dos demais 8 elementos (**permutação**). Pelo princípio multiplicativo (análise combinatória), temos:

$$n(A) = A_{4,2} \times 8! = \frac{4!}{2!} \times 8! = 4 \times 3 \times 8!$$

A probabilidade do evento A é, portanto:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4 \times 3 \times 8!}{10!} = \frac{4 \times 3}{10 \times 9} = \frac{2}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$$

Gabarito: A

(FGV/2022 – PC/RJ) Treze cadeiras numeradas consecutivamente de 1 a 13 formam uma fila. Quatro pessoas devem sentar-se nelas e o número da cadeira em que cada uma deve se sentar será decidido por sorteio. Para as três primeiras pessoas foram sorteados os números 3, 8 e 11 e será feito o sorteio para a última cadeira a ser ocupada. A probabilidade de que a quarta pessoa NÃO se sente ao lado de nenhuma pessoa já sentada é:

a) 1/2

b) 1/4

c) 2/5

d) 7/10

e) 4/13

Comentários:

O enunciado informa que há 13 cadeiras e que três pessoas ocupam as cadeiras 3, 8 e 11; e pede a probabilidade de a quarta pessoa não se sentar ao lado de ninguém.

A probabilidade é a razão entre o número de eventos favoráveis e o número total de eventos possíveis:

$$P = \frac{eventos\ favoráveis}{eventos\ possíveis} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Os eventos possíveis correspondem às 10 cadeiras restantes:

$$n(U) = 10$$

E os eventos favoráveis correspondem às cadeiras que não estão ao lado de ninguém sentado, conforme ilustrado a seguir, em que P representa uma pessoa sentada e X representa uma cadeira ao lado de uma pessoa sentada:

	X	**P**	X			X	**P**	X	X	**P**	X	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Podemos observar que há 4 cadeiras que não estão ao lado de ninguém sentado (eventos favoráveis):

$$n(A) = 4$$

E a probabilidade é a razão:

$$P = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Gabarito: C

Probabilidade como Frequência Relativa ou Empírica

Agora, vamos supor que estejamos **observando os resultados** de um experimento, **repetidos $\boldsymbol{N}$ vezes**. Sabendo que um evento específico ocorreu **$\boldsymbol{n}$ vezes**, de um total **$\boldsymbol{N}$ repetições**. Nesse caso, podemos calcular a **frequência relativa** (ou **empírica**) do evento, dada por:

$$\boldsymbol{f} = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ observações\ do\ evento}{n^{\underline{o}}\ total\ de\ repetições} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{N}}$$

Vamos supor que estejamos observando os resultados de sucessivos lançamentos de uma moeda. A frequência da face COROA será a razão entre o número de vezes em que obtemos COROA, dividido pelo número de lançamentos efetuados:

$$f = \frac{n(COROA)}{n(Lançamentos)}$$

Para ilustrar esse experimento, vou utilizar o excel para gerar resultados aleatórios, considerando que 0 (zero) representa CARA e 1 representa para COROA.

Adotando esse procedimento para 100 células, ou seja, $N = 100$, obtive 48 vezes o número 1 (COROA), isto é, $n = 48$ (se você fizer esse procedimento, é possível que obtenha outro resultado). Portanto, temos a seguinte frequência relativa para COROA:

$$f = \frac{n}{N} = \frac{48}{100} = 48\%$$

Esse resultado é **próximo** da probabilidade de 50% que conhecemos, porém **diferente**. Para $N = 1.000$, obtive 505 vezes o número 1, portanto:

$$f = \frac{n}{N} = \frac{505}{1.000} = 50{,}5\%$$

Agora, o resultado ficou **mais próximo**. Em um último teste, com $N = 10.000$, obtive $n = 5016$:

$$f = \frac{n}{N} = \frac{5.016}{10.000} = 50{,}16\%$$

Observe que estamos nos aproximando cada vez mais do valor de 50%. Ou seja, não podemos dizer que a frequência é exatamente **igual** à probabilidade. Porém, quanto maior for o número de experimentos, mais a frequência relativa se **aproxima** da probabilidade.

INDO MAIS FUNDO!

Precisamente, são necessárias **infinitas repetições** para que a probabilidade seja igual à frequência relativa:

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N}$$

Essa definição de probabilidade pode ser utilizada para eventos **não igualmente prováveis**, em que a definição clássica **não** pode ser aplicada. Por exemplo, se para uma moeda não equilibrada, obtemos 1 face COROA a cada 4 lançamentos, então a probabilidade de obter COROA é:

$$p = f = \frac{n}{N} = \frac{1}{4}$$

HORA DE PRATICAR!

(2019 – Prefeitura de Candói/PR) Em uma obra foram entregues 8 milheiros de tijolos maciços. Sabe-se que, durante o transporte, em média 100 tijolos são danificados. Qual é a probabilidade de, ao acaso, selecionar um tijolo, e ele estar danificado?

a) 0,00125%

b) 0,0125%

c) 0,125%

d) 1,25%

e) 12,5%

Comentários:

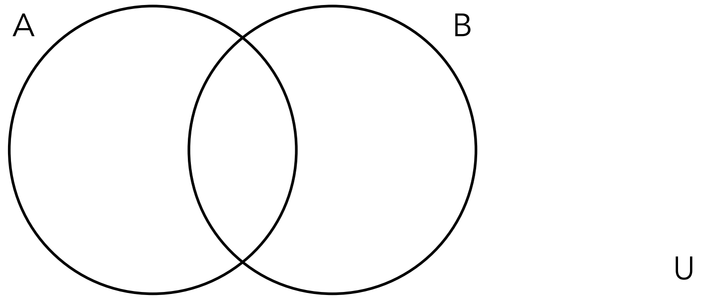
Para resolver essa questão, devemos calcular a probabilidade a partir da frequência relativa observada:

$$P = f = \frac{n}{N} = \frac{100}{8.000} = \frac{1}{80} = 0{,}0125 = 1{,}25\%$$

Gabarito: D

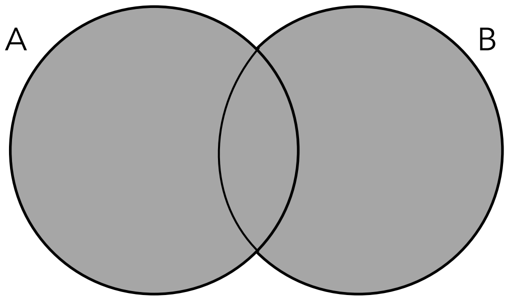
Combinações de Eventos

Nessa seção, veremos formas de **combinar** eventos. Para esse estudo, pode ser bastante proveitoso utilizar o **Diagrama de Venn**, ilustrado abaixo para dois eventos A e B quaisquer, dentro de um Espaço Amostral (U) qualquer.



Teorema da União e da Interseção

A **união** do evento A com o evento B, denotado por **A ∪ B**, é um novo evento, em que estão incluídos tanto os **elementos de A** quanto os **elementos de B**. Dizemos que, para ocorrer o evento união, pode ocorrer o evento A **ou** o evento B (ou ambos). A união corresponde a toda a região cinza indicada no diagrama abaixo.



Por exemplo, considerando o lançamento de um dado, se o evento A representa os resultados **menores que 4** e o evento B representa os resultados **maiores que 3**, então a **união** dos eventos corresponde aos valores menores que 4 **ou** maiores que 3. Temos, portanto, os seguintes subconjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Quando a **união** de eventos corresponde a **todo o Espaço Amostral**, dizemos que tais eventos são **exaustivos**.

Eventos A e B **Exaustivos: A ∪ B = U**

No exemplo que acabamos de ver, a união corresponde à **soma** dos elementos de A e os elementos de B. Agora vamos supor que o evento C corresponda aos resultados **menores que 5** e o evento D, aos resultados **maiores que 3**:

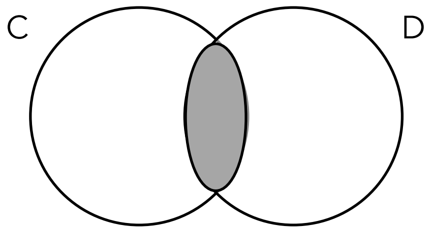
$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D = \{4, 5, 6\}$$

$$C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Nesse caso, somamos os elementos de C e os elementos de D, mas com atenção para **não duplicar** os elementos que constam em C **e** em D (nesse exemplo, o número 4).

Dizemos que os elementos que constam em **ambos** os eventos pertencem à interseção dos eventos, denotado por C ∩ D. Dizemos que, para ocorrer a interseção dos eventos, devem ocorrer o evento C **e** o evento D. A interseção corresponde à região cinza indicada no diagrama abaixo.



Nesse último exemplo, temos:

$$C \cap D = \{4\}$$

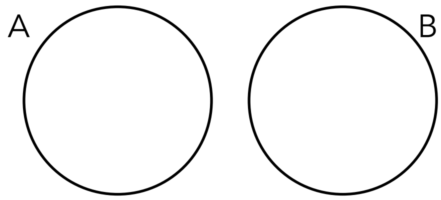
No exemplo anterior, em que A = {1, 2, 3} e B = {4, 5, 6}, não havia elementos que pertencessem tanto ao evento A, quanto ao evento B, ou seja, a interseção é um **conjunto vazio**:

$$A \cap B = \varnothing$$

TOME NOTA!

Quando a **interseção** de eventos é um **conjunto vazio**, dizemos que tais eventos são **mutuamente excludentes** (ou exclusivos). Podemos dizer, ainda, que os conjuntos são **disjuntos.**

Eventos A e B **Mutuamente Excludentes:** $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$

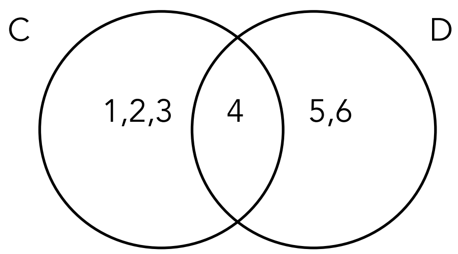


Para calcular o número de elementos na **união** de C e D, sem duplicarmos os elementos da interseção, fazemos:

$$n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$$

Temos que subtrair os elementos da interseção porque, pelo fato de pertencerem tanto ao evento C, quanto ao evento D, **seriam somados duas vezes**, se fizéssemos apenas n(C) + n(D).

Se preferir, utilize o Diagrama de Venn para resolver questões desse tipo, como ilustrado abaixo, para o nosso exemplo:



Sabendo que, pela definição clássica, a probabilidade de um evento qualquer é a razão entre o número de elementos do evento e o número de eventos do Espaço Amostral, $P(X) = \frac{n(X)}{n(U)}$, podemos dividir por n(U) toda a equação referente ao número de elementos da união:

P(C ∪ D) = P(C) + P(D) – P(C ∩ D)

Por exemplo, sendo C = {1, 2, 3, 4}, D = {4, 5, 6} e C ∩ D = {4}, as probabilidades dos eventos C, D e da interseção, considerando o Espaço Amostral U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, são, respectivamente:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{4}{6}, \qquad P(D) = \frac{n(D)}{n(U)} = \frac{3}{6}, \qquad P(C \cap D) = \frac{n(C \cap D)}{n(U)} = \frac{1}{6}$$

Com base nessas probabilidades, podemos calcular a probabilidade da união:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Para eventos **mutuamente excludentes**, isto é, que **não** possuem elementos em sua **interseção**, como no caso de A = {1, 2, 3} e B = {4, 5, 6}, a **probabilidade da interseção é zero**:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{0}{n(U)} = 0$$

Portanto, a probabilidade da **união** de eventos **mutuamente excludentes** é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{0}$$

P(A ∪ B) = P(A) + P(B)

Para o exemplo em que A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6}, as probabilidades dos eventos A e B, considerando o Espaço Amostral U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, são, respectivamente:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Como são eventos mutuamente excludentes, a probabilidade da união é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

RESUMINDO

Eventos A e B **Mutuamente Excludentes**: **P(A ∩ B) = P(∅) = 0**

Probabilidade da **União** (caso geral): **P(C ∪ D) = P(C) + P(D) – P(C ∩ D)**

Probabilidade da **União** de **Eventos Excludentes**: **P(A ∪ B) = P(A) + P(B)**

HORA DE PRATICAR!

(FGV/2018 – ALE/RO) Dois eventos A e B ocorrem, respectivamente, com 40% e 30% de probabilidade. A probabilidade de que A ocorra ou B ocorra é 50%. Assim, a probabilidade de que A e B ocorram é igual a

a) 10%

b) 20%

c) 30%

d) 40%

e) 50%

Comentários:

A probabilidade de A OU B ocorrer corresponde à **união** desses eventos, dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

O enunciado informa que:

- P(A) = 40%
- P(B) = 30%
- $P(A \cup B)$ = 50%

Substituindo esses valores na equação da união, temos:

$$50\% = 40\% + 30\% - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 70\% - 50\% = 20\%$$

Gabarito: B

(CESPE/2018 – BNB) Um tabuleiro quadrado e quadriculado, semelhante a um tabuleiro de xadrez, com 12 linhas e 12 colunas, e, portanto, com $12 \times 12 = 144$ quadradinhos pintados: 54, na cor azul; 30, na cor marrom; 40, na cor amarela; e 20, na cor verde. A cada quadradinho é associado um cartão com dois números, que indicam a posição do quadradinho no tabuleiro; o primeiro número corresponde ao número da linha, e o segundo corresponde ao número da coluna. Por exemplo, o cartão com os números 5,10 corresponde ao quadradinho posicionado na linha 5 e na coluna 10. Esses cartões estão em uma urna, da qual podem ser retirados aleatoriamente.

A respeito desse tabuleiro e desses cartões, julgue o item a seguir.

A probabilidade de retirar dessa caixa, de maneira aleatória, um cartão correspondente a um quadrado pintado na cor amarela ou na cor verde é superior a 0,44.

Comentários:

A probabilidade de retirar um cartão da cor amarela **ou** na cor verde corresponde à probabilidade da **união** desses eventos. Considerando que não há interseção entre esses eventos (não existem quadrados amarelos E verdes), então a probabilidade da união é dada por:

$$P(A \cup V) = P(A) + P(V)$$

Sabendo que há 40 quadrados amarelos e 144 quadrados no total, a probabilidade de retirar um cartão amarela é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{40}{144} = \frac{10}{36}$$

Considerando que há 20 quadrados verdes, a probabilidade de retirar um cartão verde é:

$$P(V) = \frac{n(V)}{n(U)} = \frac{20}{144} = \frac{5}{36}$$

A probabilidade de retirar um cartão amarelo ou verde é, então:

$$P(A \cup V) = \frac{10}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \cong 0{,}42$$

Ou seja, é inferior a 0,44.

Gabarito: Errado.

(FCC/2019 – Secretaria de Estado da Fazenda/BA) Uma sala contém 20 homens e 30 mulheres em que todos são funcionários de uma empresa. Verifica-se que metade desses homens e metade dessas mulheres possuem nível superior. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa dessa sala para realizar uma tarefa, a probabilidade de ela ser mulher ou possuir nível superior é igual a

a) 2/3.

b) 3/10.

c) 5/6.

d) 3/4.

e) 4/5.

Comentários:

Essa questão envolve a união entre os eventos ser mulher (M) com possuir nível superior (S), cuja probabilidade é calculada por:

$$P(M \cup S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S)$$

A questão informa que o número de mulheres é n(M) = 30.

Sabendo que além dessas 30 mulheres, há 20 homens, então o total de pessoas é:

$$n(U) = 30 + 20 = 50$$

Logo, a probabilidade de escolher uma **mulher** é:

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(U)} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{50}}$$

A questão informa que metade de todas as pessoas possui nível superior. Logo o número de pessoas com nível superior é:

$$n(S) = \frac{50}{2} = 25$$

Assim, a probabilidade de escolher uma pessoa com nível superior é:

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(U)} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{50}}$$

Por fim, o sabemos que metade das 30 mulheres possui nível superior. Então o número de mulheres com nível superior (interseção entre os eventos) é:

$$n(M \cap S) = \frac{30}{2} = 15$$

Logo, a probabilidade associada à interseção dos eventos é:

$$P(M \cup S) = \frac{n(M \cap S)}{n(U)} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{50}}$$

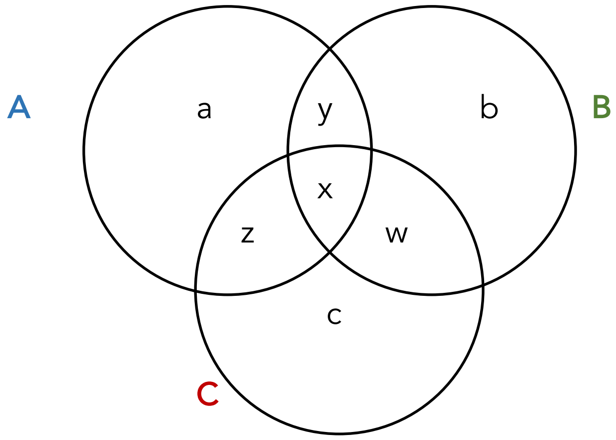
Substituindo os valores que calculamos na equação da probabilidade da união, temos:

$$P(M \cup S) = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{50}} + \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{50}} - \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{50}} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

Gabarito: E.

União de 3 Eventos

A união de 3 eventos, A, B e C, pode ser representada pelo seguinte Diagrama de Venn:



A união corresponde à **soma de todos os elementos** indicados no diagrama acima:

$$n(A \cup B \cup C) = a + z + \overbrace{y + x + b + w}^{n(B)} + c$$

$n(A)$ $n(C)$

E a probabilidade da união pode ser calculada como:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{n(A \cup B \cup C)}{n(U)}$$

Podemos observar que há diversos elementos que se **repetiriam** se simplesmente somássemos os elementos de A, de B e de C para encontrar n(A ∪ B ∪ C). Na verdade, estaríamos somando duas vezes os elementos das interseções, 2 a 2. Porém, ao subtrairmos esses elementos, estaríamos deixando de fora os elementos da interseção de todos os 3 eventos. Por isso, precisamos somá-los novamente.

A união de 3 eventos é dada por:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Dividindo todos os termos por n(U), obtemos a fórmula da probabilidade da união de 3 eventos:

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

Mas você não precisa decorar a fórmula. Se preferir, utilize o diagrama de Venn.

EXEMPLIFICANDO

Vamos supor que tenhamos as seguintes informações, a respeito das probabilidades dos eventos A, B e C:

- $P(A) = 1/2$
- $P(B) = 5/8$
- $P(A \cap B) = 1/4$
- $P(A \cap C) = 5/16$
- $P(B \cap C) = 3/8$
- $P(A \cap B \cap C) = 3/16$
- $P(A \cup B \cup C) = 1$

Com essas informações, podemos calcular P(C). Para isso, vamos primeiro utilizar a fórmula da probabilidade da união e substituir as informações do enunciado:

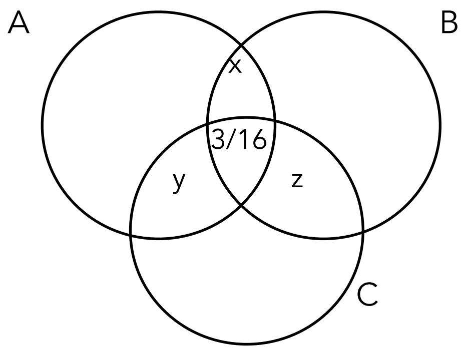
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} + P(C) - \frac{1}{4} - \frac{5}{16} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16}$$

$$1 = P(C) + \frac{8+10-4-5-6+3}{16} = P(C) + \frac{6}{16}$$

$$P(C) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Alternativamente, podemos utilizar o diagrama de Venn, preenchendo os valores fornecidos pelo enunciado, começando pela interseção de 3 eventos:



O valor de x corresponde à probabilidade dos elementos da **interseção** de A e B, $A \cap B$, que **não** estão na **interseção de todos os 3 eventos**, $A \cap B \cap C$, isto é, a diferença entre $P(A \cap B)$ e $P(A \cap B \cap C)$:

$$x = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{4-3}{16} = \frac{1}{16}$$

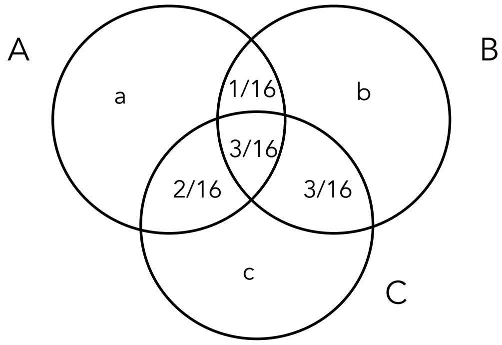
O valor de y corresponde à probabilidade dos elementos da **interseção** de A e C, A ∩ C, que **não** estão na **interseção de todos os 3 eventos**, A ∩ B ∩ C, isto é, a diferença entre P(A ∩ C) e P(A ∩ B ∩ C):

$$x = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = \frac{5}{16} - \frac{3}{16} = \frac{2}{16}$$

O valor de z corresponde à probabilidade dos elementos da **interseção** de B e C, B ∩ C, que **não** estão na **interseção de todos os 3 eventos**, A ∩ B ∩ C, isto é, a diferença entre P(B ∩ C) e P(A ∩ B ∩ C):

$$x = P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{8} - \frac{3}{16} = \frac{6-3}{16} = \frac{3}{16}$$

Inserindo esses valores no diagrama de Venn, temos:



O valor de a corresponde à probabilidade dos elementos de A que **não** pertencem a **qualquer interseção** com os demais eventos:

$$a = P(A) - x - y - P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} - \frac{2}{16} - \frac{3}{16} = \frac{8-6}{16} = \frac{2}{16}$$

O valor de b corresponde à probabilidade dos elementos de B que **não** pertencem a **qualquer interseção** com os demais eventos:

$$b = P(B) - x - z - P(A \cap B \cap C) = \frac{5}{8} - \frac{1}{16} - \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = \frac{10-7}{16} = \frac{3}{16}$$

Assim, o valor de c pode ser calculado como a diferença entre a probabilidade da **união dos 3 eventos** P(A ∪ B ∪ C) e **todos os demais campos**.

Em vez de subtrair todos os campos separadamente, podemos simplesmente subtrair P(A), $b = \frac{3}{16}$ e $z = \frac{3}{16}$, como fazemos a seguir. Isso porque P(A) já engloba os campos $a = \frac{2}{16}, x = \frac{1}{16}, y = \frac{2}{16}$ e $P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{16}$.

$$c = P(A \cup B \cup C) - P(A) - b - z = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = \frac{16-8-6}{16} = \frac{2}{16}$$

Logo, o valor de P(C) é a soma de $c = \frac{2}{16}$, $y = \frac{2}{16}$, $z = \frac{3}{16}$ e $P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{16}$:

$$P(C) = c + y + z + P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

(FCC/2018 – SEPLAG de Recife/PE) Em um censo realizado em uma cidade em que são consumidos somente os sabonetes de marca X, Y e Z, verifica-se que:

I. 40% consomem X.

II. 40% consomem Y.

III. 47% consomem Z.

IV. 15% consomem X e Y.

V. 5% consomem X e Z.

VI. 10% consomem Y e Z.

VII. qualquer elemento da população consome pelo menos uma marca de sabonete.

Então, escolhendo aleatoriamente um elemento dessa população, a probabilidade de ele consumir uma e somente uma marca de sabonete é igual a

a) 79%.

b) 70%.

c) 60%.

d) 80%.

e) 76%.

Comentários:

Como toda a população consome alguma marca, então vamos aplicar a fórmula da probabilidade da união, que vimos, para calcular a interseção de todos os eventos:

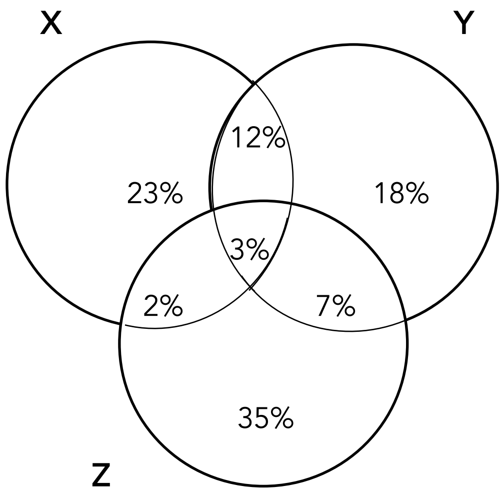
$$P(X \cup Y \cup Z) = P(X) + P(Y) + P(Z) - P(X \cap Y) - P(X \cap Z) - P(Y \cap Z) + P(X \cap Y \cap Z) = 100\%$$

$$40\% + 40\% + 47\% - 15\% - 5\% - 10\% + P(X \cap Y \cap Z) = 100\%$$

$$P(X \cap Y \cap Z) = 100\% - 97\% = 3\%$$

Agora, vamos utilizar o diagrama de Venn.

Começamos preenchendo P(X ∩ Y ∩ Z). Em seguida, inserimos as **interseções dois a dois**, **subtraindo-se o valor de P(X ∩ Y ∩ Z).** Por fim, inserimos os valores correspondentes a cada marca, individualmente, subtraindo-se todas as interseções.



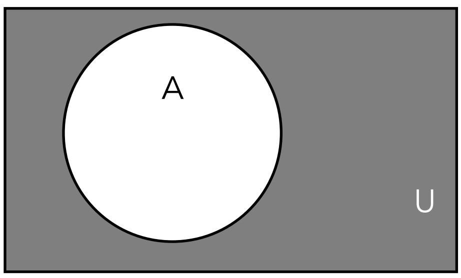
Portanto, a probabilidade de o elemento consumir apenas uma marca é:

23% + 18% + 35% = 76%

Gabarito: E

Teorema do Evento Complementar

O complementar de um evento corresponde a **todos os elementos do Espaço Amostral** que **não** pertencem a tal evento, como representado abaixo (a região em cinza corresponde ao complementar de A).



No exemplo do lançamento de um dado, em que C = {1, 2, 3, 4}, o evento complementar de C, indicado por $\bar{C}$, corresponde ao seguinte subconjunto:

$$\bar{C} = \{5, 6\}$$

Por definição, o número de elementos do **evento** somado ao número de elementos do **complementar** é **igual ao total de elementos**:

$$n(C) + n(\bar{C}) = n(U)$$

Dividindo toda a equação por $n(U)$, podemos calcular a probabilidade do evento complementar:

$$\frac{n(C)}{n(U)} + \frac{n(\bar{C})}{n(U)} = \frac{n(U)}{n(U)}$$

$$P(C) + P(\bar{C}) = 1$$

$$\boldsymbol{P(\bar{C}) = 1 - P(C)}$$

Para o exemplo do lançamento do dado, em que C = {1, 2, 3, 4} e o Espaço Amostral é $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a probabilidade do evento C é:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

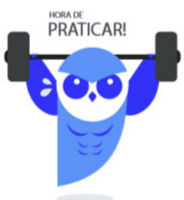
Pelo **Teorema do Evento Complementar**, a probabilidade do seu complementar é:

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

De fato, sabemos que o evento complementar é $\bar{C} = \{5, 6\}$. Pela **definição clássica** de probabilidade, temos:

$$P(\bar{C}) = \frac{n(\bar{C})}{n(U)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Que é justamente o resultado que encontramos aplicando o Teorema do Evento Complementar.



(2019 – Prefeitura de Palhoça/SC) Uma urna tem dez bolas vermelhas, três azuis e duas pretas. Qual é probabilidade de sortearmos uma bola que não seja da cor vermelha?

a) 33,33%

b) 45,66%

c) 38,23%

d) 25,45%

Comentários:

A probabilidade do evento complementar é:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

A probabilidade de sortear uma bola vermelha, sabendo que há 10 bolas vermelhas e 15 bolas no total, é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{10}{15}$$

Assim, a probabilidade de não sortear uma bola vermelha é:

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{10}{15} = \frac{15 - 10}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \cong 33{,}33\%$$

Gabarito: A

(CESPE/2018 – BNB) Um tabuleiro quadrado e quadriculado, semelhante a um tabuleiro de xadrez, com 12 linhas e 12 colunas, e, portanto, com 12 × 12 = 144 quadradinhos pintados: 54, na cor azul; 30, na cor marrom; 40, na cor amarela; e 20, na cor verde. A cada quadradinho é associado um cartão com dois números, que indicam a posição do quadradinho no tabuleiro; o primeiro número corresponde ao número da linha, e o segundo corresponde ao número da coluna. Por exemplo, o cartão com os números 5,10 corresponde ao quadradinho posicionado na linha 5 e na coluna 10. Esses cartões estão em uma urna, da qual podem ser retirados aleatoriamente.

A respeito desse tabuleiro e desses cartões, julgue o item a seguir.

A probabilidade de retirar dessa caixa, de maneira aleatória, um cartão correspondente a um quadrado que não tenha sido pintado na cor marrom é inferior a 0,72.

Comentários:

A probabilidade de retirar um cartão que **não** seja marrom pode ser calculada pelo teorema do evento **complementar**:

$$P(\bar{M}) = 1 - P(M)$$

A probabilidade de retirar um cartão marrom é a razão entre o número de cartões marrons e o número de cartões no total:

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(U)}$$

O enunciado informa que há:

- 144 quadrados, logo, n(U) = 144; e

- 30 quadrados marrons, logo n(M) = 30

Assim, a probabilidade de retirar um cartão marrom é:

$$P(M) = \frac{30}{144} = \frac{15}{72}$$

A probabilidade de retirar um cartão **não** marrom é complementar:

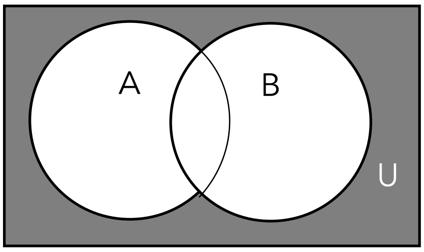
$$P(\bar{M}) = 1 - \frac{15}{72} = \frac{72 - 15}{72} = \frac{57}{72} \cong 0{,}79$$

Que é superior a 0,72.

Gabarito: Errado.

O **Teorema do Evento Complementar** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ pode ser aplicado, mesmo quando o evento A for resultado de uma **combinação** de eventos, como a união e a interseção.

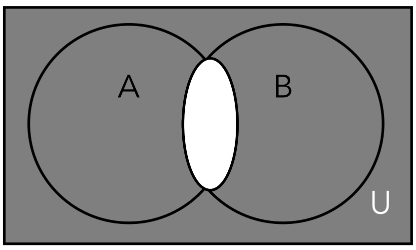
O **complementar da união** está representado pela região cinza indicada no diagrama abaixo:



Pelo Teorema que acabamos de ver, a **probabilidade do complementar da união** é dada por:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Já o **complementar da interseção** está representado pela região cinza indicada a seguir:



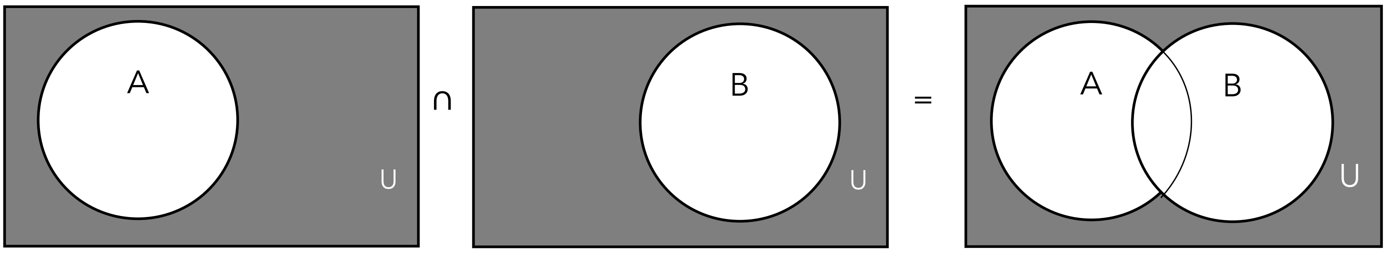
Pelo Teorema que acabamos de ver, a **probabilidade do complementar da interseção** é:

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

Vale pontuar, ainda, as seguintes relações:

1. $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ **então P($\bar{A} \cap \bar{B}$) = P($\overline{A \cup B}$) = 1 – P($A \cup B$)**

A **interseção** entre o **complementar de A** e o **complementar de B** é igual ao **complementar da união** do evento A com o evento B, como ilustrado a seguir.



De fato, a situação do tipo "**nem A nem B**" significa a interseção dos complementares:

não A E não B

Essa situação implica que **não** temos qualquer elemento de **A ou B**, ou seja, o **complementar da união**. E já sabemos calcular a probabilidade do complementar da união:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Por exemplo, em um lançamento do dado, em que o Espaço Amostral é U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, vamos supor que o evento A corresponda a todos os números pares: A = {2, 4, 6} e o evento B corresponda aos números menores que 4: B = {1, 2, 3}.

A união dos eventos é A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 6} e sua probabilidade é, pela definição clássica:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{5}{6}$$

Aplicando a fórmula, podemos calcular a probabilidade de **não** ocorrer o evento A **nem** o evento B (**não** A **E não** B):

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

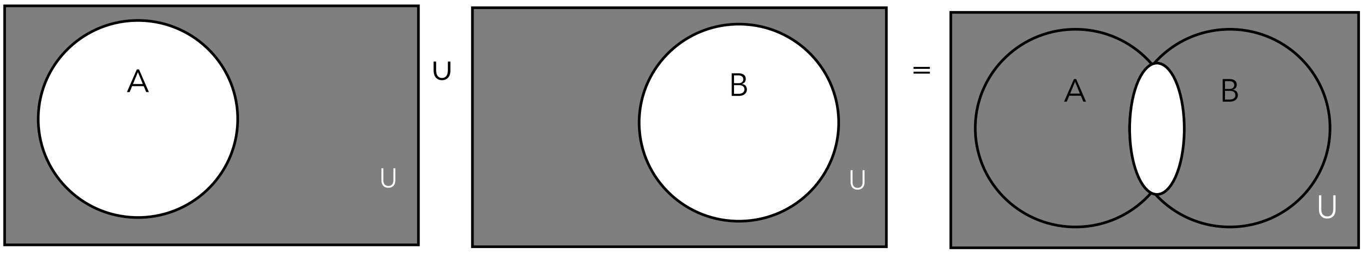
De fato, podemos observar que o elemento que não pertence ao evento A e nem ao evento B é $\bar{A} \cap \bar{B} = \{5\}$, cuja probabilidade é, pela definição clássica:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{n(\bar{A} \cap \bar{B})}{n(U)} = \frac{1}{6}$$

Que é justamente o resultado que obtivemos aplicando a fórmula $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$.

2. $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$ então $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

A **união** do **complementar de A** com o **complementar de B** é igual ao **complementar da interseção** de A e B, como ilustrado abaixo.



Para ilustrar essa equação, vamos supor que em um restaurante haja x pessoas que estejam comendo e bebendo, c pessoas que estejam só comendo e b pessoas que estejam só bebendo.

Primeiro, pedimos que as pessoas que não estejam comendo se levantem (as b pessoas que estão somente bebendo se levantarão). Em seguida, pedimos que as pessoas que não estejam bebendo também se levantem (as c pessoas que estão somente comendo se levantarão).

Ao final, estarão em pé as c pessoas que estavam somente comendo e as b pessoas que estavam somente bebendo, isto é, todos menos as x pessoas que estavam fazendo as duas coisas (complementar da interseção) – essas pessoas permanecerão sentadas.

Considerando o exemplo anterior do lançamento do dado, em que A = {2, 4, 6} e B = {1, 2, 3}, a interseção dos eventos é A ∩ B = {2} e sua probabilidade é, pela definição clássica:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{1}{6}$$

Aplicando a fórmula, podemos calcular de **não** ocorrer o evento A **OU não** ocorrer o evento B, que equivale à probabilidade de **não** ocorrer a **interseção** $A \cap B$:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

De fato, os elementos que não pertencem ao conjunto A são $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ e os elementos que não pertencem ao conjunto B são $\bar{B} = \{4, 5, 6\}$. Assim, a união desses dois eventos complementares é $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, que contém todos os elementos exceto a interseção A ∩ B = {2}. Podemos calcular a probabilidade da união $\bar{A} \cup \bar{B}$ pela definição clássica:

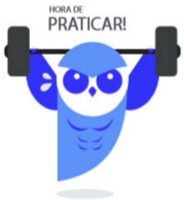
$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{n(\bar{A} \cup \bar{B})}{n(U)} = \frac{5}{6}$$

Que é justamente o resultado que obtivemos aplicando a fórmula $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$.

Esses casos podem ser extrapolados para diversos eventos. Para três eventos A, B e C, por exemplo, temos:

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C} \rightarrow \boldsymbol{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)}$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \overline{A \cap B \cap C} \rightarrow \boldsymbol{P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C)}$$



(FGV/2017 – SEPOG/RO) A probabilidade de que certo evento A ocorra é de 20%, a probabilidade de que o evento B ocorra é de 30% e a probabilidade de que A e B ocorram é de 10%.

Assim, a probabilidade de que nem A nem B ocorra é igual a:

a) 30%

b) 40%

c) 50%

d) 60%

e) 70%

Comentários:

A probabilidade de que nem A nem B ocorra corresponde à interseção dos complementares, que, por sua vez, equivale ao complementar da união:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

A probabilidade da união é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

O enunciado informa que:

- P(A) = 20%
- P(B) = 30%
- $P(A \cap B)$ = 10%

Substituindo esses valores na equação da união, temos:

$$P(A \cup B) = 20\% + 30\% - 10\% = 40\%$$

O complementar da união, que a questão exige, é, portanto:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 100\% - 40\% = 60\%$$

Gabarito: D

(2019 – Fundação Santo André/SP) Considere: Num campeonato de futebol descobriu-se que dos 1000 torcedores, 440 torciam para o time A, 320 torciam para o time B. Ao escolher uma pessoa no estádio, ao acaso, assinale a alternativa correta quanto à probabilidade dessa pessoa não torcer para nenhum desses times.

a) 24%

b) 76%

c) 27%

d) 32%

Comentários:

A interseção dos complementares (não torcer para A e não torcer para B) equivale ao complementar da união:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Nesse caso, os eventos são mutuamente excludentes ($A \cap B = \emptyset$), pois, ninguém torce para mais de um time. Por isso, a probabilidade da união é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

A probabilidade de uma pessoa torcer para A é a razão entre o número de torcedores de A, que é n(A) = 440, e o número total de torcedores, que é n(U) = 1000. Logo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{440}{1000} = 44\%$$

A probabilidade de uma pessoa torcer para B é a razão entre o número de torcedores de B, que é n(B) = 320, e o número total de torcedores:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{320}{1000} = 32\%$$

Portanto, a probabilidade da união é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 44\% + 32\% = 76\%$$

Dessa forma a probabilidade de uma pessoa não torcer para A e nem para B é:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 100\% - 76\% = 24\%$$

Gabarito: A

(CESPE/2013 – CBM/CE) Uma pessoa que possua sangue classificado como O– é considerada doadora universal pelo fato de seu sangue poder, em tese, ser ministrado a qualquer pessoa de qualquer tipo sanguíneo. A pessoa que possua sangue classificado como AB+ é considerada receptora universal pelo fato de poder receber, em tese, sangue proveniente de doador de qualquer tipo sanguíneo. Dentro de um mesmo grupo sanguíneo, os de fator Rh– podem doar aos de fator Rh+. O sangue O+ pode ser doado para qualquer pessoa que possua sangue com fator Rh+. A tabela abaixo apresenta a distribuição do tipo sanguíneo e do fator Rh de membros de uma corporação.

fator Rh	grupo sanguíneo				total
	A	B	AB	O	
Rh^+	12	15	18	21	66
Rh^-	16	11	6	1	34
Total	28	26	24	22	100

Tendo como referência essas informações e a tabela acima, julgue o item que se segue.

Escolhendo-se aleatoriamente um membro dessa corporação, a probabilidade de ele não ser nem receptor universal nem doador universal é superior à probabilidade de um membro dessa mesma corporação ter o fator Rh+.

Comentários:

A probabilidade de um membro não ser nem receptor universal (AB_+) nem doador universal (O_-) corresponde à interseção dos complementares, que, por sua vez, equivale ao complementar da união desses eventos.

$$P(\overline{AB_+} \cap \overline{O_-}) = P(\overline{AB_+ \cup O_-}) = 1 - P(AB_+ \cup O_-)$$

A probabilidade de um membro ser receptor universal (AB_+) é dada pela razão entre a proporção de receptores universais e o total. Pela tabela, observamos que $n(AB_+) = 18$ e $n(U) = 100$. Assim, a probabilidade de um membro ser receptor universal é:

$$P(AB_+) = \frac{n(AB_+)}{n(U)} = \frac{18}{100} = 18\%$$

A probabilidade de um membro ser doador universal (O_-) é dada pela razão entre a proporção de doadores universais e o total. Pela tabela, observamos que $n(O_-) = 1$. Assim, a probabilidade de um membro ser doador universal é:

$$P(O_-) = \frac{n(O_-)}{n(U)} = \frac{1}{100} = 1\%$$

Considerando que não há interseção entre esses eventos (são eventos mutuamente exclusivos), então a probabilidade da união é dada por:

$$P(AB_+ \cup O_-) = P(AB_+) + P(O_-) = 18\% + 1\% = 19\%$$

Assim, a probabilidade de a pessoa **não** ser doadora universal ou receptora universal é dada pelo Teorema do Evento Complementar:

$$P(\overline{AB_+ \cup O_-}) = 1 - P(AB_+ \cup O_-) = 100\% - 19\% = 81\%$$

Por outro lado, para calcular a probabilidade de uma pessoa ter Rh+, precisamos do número de pessoas com Rh+: n(+) = 66. Logo, essa probabilidade é:

$$P(+) = \frac{66}{100} = 66\%$$

Como 81% é maior que 66%, então a probabilidade de a pessoa não ser doadora ou receptora universal é, de fato, maior que a probabilidade de ela ter Rh+.

Gabarito: Certo.

(2018 – Conselho Regional de Medicina Veterinária/ES) Em uma pesquisa feita com 200 usuários de uma pasta de dente, verificou-se o seguinte:

- 76 usam a pasta de dente A

- 86 usam a pasta de dente B

- 140 usam a pasta de dente C

- 68 usam a pasta de dente A e B

- 34 usam a pasta de dente A e C

- 48 usam a pasta de dente B e C

- 30 usam a pasta de dente A, B e C

Marque a probabilidade que, em um sorteio ao acaso de todos os usuários entrevistados, é sorteado aquele que não utiliza nenhuma das três pastas apresentada.

a) 18%

b) 9%

c) 12%

d) 21%

e) 15%

Comentários:

A probabilidade de o sorteado não utilizar qualquer pasta, A, B e nem C, é:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

Vimos na seção anterior que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

O enunciado informa que a pesquisa foi feita com **200** usuários e que:

- 76 usam a pasta de dente A, logo $P(A) = \frac{76}{200}$
- 86 usam a pasta de dente B, logo $P(B) = \frac{86}{200}$
- 140 usam a pasta de dente C, logo $P(C) = \frac{140}{200}$
- 68 usam a pasta de dente A e B, logo $P(A \cap B) = \frac{68}{200}$
- 34 usam a pasta de dente A e C, logo $P(A \cap C) = \frac{34}{200}$
- 48 usam a pasta de dente B e C, logo $P(B \cap C) = \frac{48}{200}$
- 30 usam a pasta de dente A, B e C, logo $P(A \cap B \cap C) = \frac{30}{200}$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{76}{200} + \frac{86}{200} + \frac{140}{200} - \frac{68}{200} - \frac{34}{200} - \frac{48}{200} + \frac{30}{200}$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{182}{200}$$

Nota: se preferir, utilize o Diagrama de Venn para encontrar o número de elementos na união. Depois, basta dividir pelo total (200) para encontrar a probabilidade da união.

Assim:

$$P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

$$P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \frac{182}{200} = \frac{18}{200} = 9\%$$

Gabarito: B

AXIOMAS DE PROBABILIDADE

Em matemática, os axiomas são verdades tão básicas que dispensam qualquer demonstração. A partir dos axiomas, são desenvolvidas as propriedades, equações matemáticas, teoremas, etc.

Em probabilidade, temos os **Axiomas de Kolmogorov**, que veremos a seguir.

1. $\boldsymbol{P(A) \geq 0}$

   A probabilidade de qualquer evento é **maior ou igual a 0**, ou seja, **não** há **probabilidade negativa**.

2. $\boldsymbol{P(U) = 1}$

   A probabilidade associada a todo o **Espaço Amostral**, ou seja, a todos os eventos possíveis, é igual a **1** (100%). Podemos visualizar esse axioma, a partir da definição clássica, embora ele seja válido em qualquer caso, mesmo quando não pudermos aplicar tal definição:

$$P(U) = \frac{n(U)}{n(U)} = 1$$

   Por exemplo, considerando o lançamento de um dado, qual é a probabilidade de ocorrer um dos resultados 1, 2, 3, 4, 5 ou 6? Sabemos que, com certeza, teremos algum desses resultados. Ou seja, a probabilidade de ocorrer algum desses eventos é 100% = 1.

3. Se A e B são **mutuamente excludentes** ($A \cap B = \varnothing$), então a probabilidade da união desses eventos corresponde à soma das probabilidades dos eventos:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Com base nesses três axiomas, é possível deduzir as **propriedades** de probabilidade, dentre as quais cabe destacar:

i) Evento **impossível**: Sendo A um evento impossível, a sua **probabilidade** é igual a **zero**:

$$\text{Se } A = \varnothing, \text{ então } P(A) = 0$$

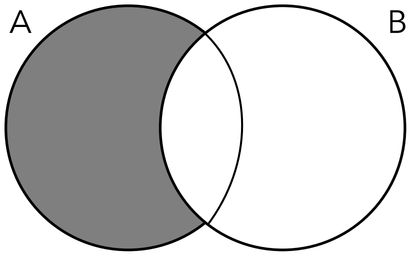
ii) Sendo A um evento qualquer, a sua **probabilidade** está **entre 0 e 1**:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

iii) Sendo A e B eventos quaisquer, então a probabilidade de **ocorrer A e não ocorrer B**, indicado por P(A – B) ou P(A \ B), é a **diferença** entre a **probabilidade de A** e a **probabilidade da interseção**:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Para facilitar o entendimento, ilustramos o evento A – B a seguir:



iv) Se A e B são eventos tais que **A implica B**, isto é, **A está contido em B (A ⊆ B)**, então a probabilidade de A é **menor ou igual** à probabilidade de B.

$$P(A) \leq P(B)$$

Também são propriedades decorrentes dos Axiomas de Kolmogorov, a Probabilidade da **União** de eventos quaisquer (não necessariamente excludentes) e a Probabilidade do **Evento Complementar**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

ESQUEMATIZANDO

Axiomas

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(U) = 1$
3. Se A e B são **mutuamente excludentes** então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propriedades

i) Se $A = \emptyset$, então $P(A) = 0$
ii) $0 \leq P(A) \leq 1$
iii) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
iv) Se A ⊆ B, então $P(A) \leq P(B)$
v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)$
vi) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(VUNESP/2016 – Prefeitura de Alumínio/SP – *Adaptada*) Uma moeda é viciada de modo que a probabilidade de sair cara é 4 vezes a de sair coroa. A probabilidade de sair cara em um lançamento qualquer é

a) 50%

b) 25%

c) 20%

d) 75%

e) 80%

Comentários:

Para calcular a probabilidade de sair CARA/COROA em um lançamento de uma moeda **viciada**, **não** podemos utilizar a **definição clássica de probabilidade**, pois os resultados **não são equiprováveis**.

Nesse caso, podemos calcular as probabilidades dos resultados utilizando o axioma P(U) = 1, combinado com o dado do enunciado de que a probabilidade de sair CARA é 4 vezes maior que a probabilidade de sair COROA.

Chamando a probabilidade de sair COROA de p, então a probabilidade de sair CARA é $4p$. Logo:

$$P(U) = 4p + p = 1$$

$$p = \frac{1}{5}$$

Logo, a probabilidade de sair CARA é:

$$4p = \frac{4}{5} = 80\%$$

Resposta: E

(FCC/2019 – Sociedade de Abastecimento de Água e Saneamento Campinas/SP) O número de ocorrências diárias de um determinado evento foi registrado por um funcionário de uma empresa durante um longo período. Esse trabalho permitiu, com o objetivo de análise, elaborar a distribuição de probabilidade conforme tabela abaixo, sabendo-se que o evento nunca ocorre mais que 5 vezes em um dia.

Número de ocorrências diárias	0	1	2	3	4	5
Probabilidade de ocorrência	0,20	p	2p	3p	2p	p

A probabilidade de que, em 1 dia, o evento ocorra, pelo menos, uma vez, mas não mais que 3 vezes, é igual a

a) 2/9

b) 1/3

c) 5/12

d) 4/5

e) 8/15

Comentários:

Primeiro, precisamos calcular o valor de p. Sabendo que a tabela corresponde a todo o Espaço Amostral, uma vez que o evento nunca ocorre mais que 5 vezes no dia, temos:

$$0{,}20 + p + 2p + 3p + 2p + p = 1$$

$$9p = 0{,}8$$

$$p = \frac{8}{90}$$

A probabilidade de ocorrer pelo menos 1 vez e não mais de 3 vezes é:

$$P(1) + P(2) + P(3) = p + 2p + 3p = 6p = 6 \times \frac{8}{90} = \frac{8}{15}$$

Gabarito: E

(FCC/2017 – Companhia de Saneamento Básico/SP) Em um grupo de 100 pessoas, 80 possuem telefone celular, 50 possuem telefone fixo, e 10 não possui telefone celular nem telefone fixo. Sorteando-se ao acaso uma dessas 100 pessoas, a probabilidade de que ela tenha telefone fixo mas não tenha telefone celular é de

a) 50%.

b) 5%.

c) 1%.

d) 20%.

e) 10%.

Comentários:

A questão informa que, de um total de 100 pessoas, 10 não possuem nem celular, nem fixo. Portanto, 90 pessoas possuem celular **ou** fixo:

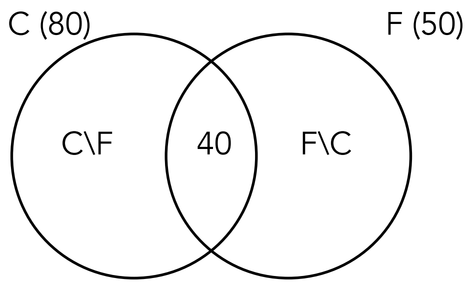
$$n(C) + n(F) - n(C \cap F) = 90$$

Além disso, o enunciado informa que n(C) = 80 e n(F) = 50. Substituindo esses valores, temos:

$$80 + 50 - n(C \cap F) = 90$$

$$n(C \cap F) = 40$$

Ou seja, 40 pessoas possuem celular **e** fixo, conforme representado a seguir.



Portanto, o número de pessoas que têm fixo, mas não têm celular (evento $F\backslash C$) é:

$$n(F\backslash C) = n(F) - n(F \cap C) = 50 - 40 = 10$$

Sabendo que há n(U) = 100 pessoas no total, a probabilidade do evento $F\backslash C$ é:

$$P(F\backslash C) = \frac{n(F\backslash C)}{n(U)} = \frac{10}{100} = 10\%$$

Gabarito: E

Probabilidade Condicional

A probabilidade condicional trabalha com a probabilidade de um evento ocorrer, **sabendo que outro já ocorreu**.

Por exemplo, vamos supor que, em um auditório, existam enfermeiros e dentistas, tanto homens quanto mulheres. Podemos calcular a probabilidade de uma pessoa escolhida aleatoriamente ser enfermeiro, **dado** que é homem.

O fato de sabermos que a pessoa escolhida é homem corresponde a uma **redução do universo de possibilidades** – não estamos mais considerando todo o auditório, mas apenas os homens nesse auditório. Com esse "novo" universo, calculamos a probabilidade de esse homem ser enfermeiro.

Para ilustrar melhor, vamos atribuir números a esse exemplo, conforme tabela abaixo:

	Homens	Mulheres	**Totais**
Enfermeiros	40	50	**90**
Dentistas	80	30	**110**
Totais	**120**	**80**	**200**

Nesse caso, o "novo" universo são os 120 homens, ao invés de todas as 200 pessoas no auditório. Assim, a probabilidade de ser um enfermeiro é a razão entre os casos favoráveis (número de enfermeiros) e os casos possíveis (número de homens):

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ possíveis} = \frac{n(A)}{n(U')}$$

$$P = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

Aqui, utilizamos U', ao invés de U, para diferenciar os casos possíveis (do "novo" universo) e os casos totais.

O que fizemos foi dividir os elementos da interseção entre os eventos "enfermeiro" (que vamos representar por E) e "homens" (que vamos representar por H), pelos elementos de H:

$$P = \frac{n(E \cap H)}{n(H)}$$

Dividindo tanto o numerador quanto o denominador pelo número de elementos do Espaço Amostral n(U), obtemos a fórmula da **probabilidade de condicional** do evento E, dado o evento H, denotada por P(E|H):

$$\boxed{\boldsymbol{P(E|H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}}}$$

Neste exemplo, sabíamos que a pessoa selecionada era um homem, ou seja, sabíamos que o evento H já havia ocorrido. O evento que **sabemos ter ocorrido** é chamado de evento a **priori** (ocorre antes). O outro evento é aquele cuja probabilidade queremos calcular, no nosso exemplo, o fato de a pessoa selecionada ser um enfermeiro (evento E). Esse evento é chamado de evento a **posteriori** (ocorre depois).

É possível que a **interseção** dos eventos seja equivalente ao próprio evento a **posteriori**. Por exemplo, suponha que, dos 40 enfermeiros homens indicados na tabela, 10 tenham mais de vinte anos de profissão. Agora, vamos calcular a probabilidade de ter sorteado um enfermeiro com mais de vinte anos de profissão (X), sabendo que foi sorteado um enfermeiro homem. Essa probabilidade é dada por:

$$P(X|E) = \frac{P(X \cap E)}{P(E)}$$

Ora, todos os enfermeiros com mais de vinte anos de profissão (X) pertencem ao grupo dos enfermeiros (E). Assim, a interseção $X \cap E$ corresponde ao próprio evento X, logo:

$$P(X|E) = \frac{P(X)}{P(E)} = \frac{n(X)}{n(E)}$$

$$P(X|E) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

FIQUE ATENTO!

Podemos efetuar as **mesmas operações** de combinação de eventos com a probabilidade condicional. Por exemplo, a probabilidade condicional **complementar** é:

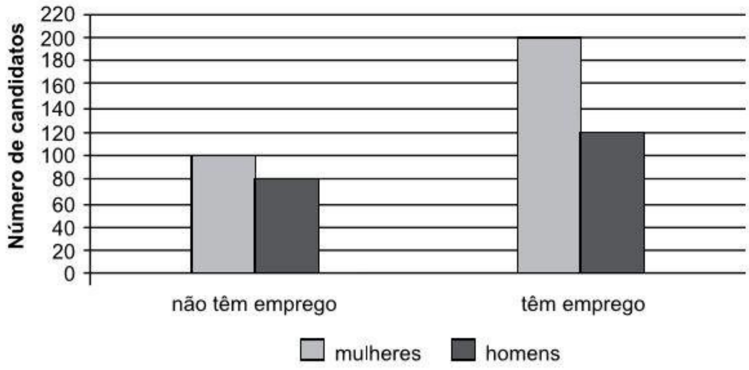
$$P(\bar{E}|H) = 1 - P(E|H)$$

Isso significa que, **sabendo que o evento H ocorreu**, a probabilidade de o evento E **não** ocorrer é **complementar** da probabilidade de o evento E ocorrer. Ou seja, sabendo que o evento H ocorreu, a probabilidade de E ocorrer somada à probabilidade de E não ocorrer é igual a 1.

Para o nosso exemplo, temos $P(E|H) = \frac{1}{3}$. Então, dado que foi selecionado um homem, a probabilidade de a pessoa selecionada não ser um enfermeiro, é:

$$P(\bar{E}|H) = 1 - P(E|H) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(VUNESP/2019 – Prefeitura da Estância Balneária de Peruíbe/SP) O gráfico a seguir apresenta dados referentes a homens e mulheres que se inscreveram para prestar um concurso para trabalhar em uma instituição pública. Entre os candidatos, alguns já tinham emprego.



Um desses candidatos foi escolhido aleatoriamente. Sabendo-se que esse candidato não tem emprego, a probabilidade de que ele seja homem é:

a) 2/9

b) 4/9

c) 2/5

d) 1/5

e) 3/8

Comentários:

A questão pede a probabilidade de o candidato ser homem, **dado que não tem emprego** (probabilidade condicional). Essa probabilidade pode ser calculada pela razão clássica entre os eventos favoráveis e os eventos totais, restringindo-os aos candidatos que não têm emprego (universo conhecido):

$$P = \frac{n(Homens\ sem\ emprego)}{n(Candidatos\ sem\ emprego)}$$

Obs.: Se preferir, considere a definição de probabilidade condicional para calcular a probabilidade de o candidato ser homem (H), dado que não tem emprego ($\bar{E}$):

$$P(H|\bar{E}) = \frac{P(H \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{n(H \cap \bar{E})}{n(\bar{E})}$$

Pelo gráfico, observamos que o número de homens sem emprego é:

$$n(H \cap \bar{E}) = n(Homens\ sem\ emprego) = 80$$

O gráfico informa também que o número de mulheres sem emprego é de 100. Logo, o número total de candidatos sem emprego é:

$$n(\bar{E}) = n(Candidatos\ sem\ emprego) = 80 + 100 = 180$$

Assim, a probabilidade desejada é:

$$P(H|\bar{E}) = \frac{80}{180} = \frac{4}{9}$$

Gabarito: B.

(CESPE/2018 – ABIN) Como forma de melhorar a convivência, as famílias Turing, Russell e Gödel disputaram, no parque da cidade, em um domingo à tarde, partidas de futebol e de vôlei. O quadro a seguir mostra os quantitativos de membros de cada família presentes no parque, distribuídos por gênero.

família	masculino	feminino
Turing	5	7
Russell	6	5
Gödel	5	9

A partir dessa tabela, julgue o item subsequente.

Considere que, em eventual sorteio de brindes, um nome tenha sido retirado, ao acaso, do interior de uma urna que continha os nomes de todos os familiares presentes no evento. Nessa situação, sabendo-se que o sorteado não é uma mulher da família Gödel, a probabilidade de ser uma mulher da família Russel será superior a 20%.

Comentários:

A questão indaga sobre probabilidade condicional. Podemos calcular essa probabilidade, utilizando a fórmula da probabilidade clássica, porém **restringindo** os casos considerados ao evento que sabemos ter ocorrido, no caso, o fato de **não ser uma mulher da família Gödel**:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ possíveis} = \frac{n(A)}{n(U')}$$

Obs.: Se preferir, considere a definição de probabilidade condicional para calcular a probabilidade de o sorteado ser uma mulher da família Russel (M_R), dado que não é uma mulher da Gödel ($\overline{M_G}$):

$$P(M_R|\overline{M_G}) = \frac{P(M_R \cap \overline{M_G})}{P(\overline{M_G})}$$

Perceba que a interseção entre as mulheres da família Russel e as pessoas que **não** são mulheres da família Gödel, $M_R \cap \overline{M_G}$, equivale exatamente às mulheres da família Russel, M_R, logo:

$$P(M_R|\overline{M_G}) = \frac{P(M_R)}{P(\overline{M_G})} = \frac{n(M_R)}{n(\overline{M_G})}$$

Ou seja, sabendo que o sorteado não é uma mulher da família Gödel, então os casos possíveis correspondem a todos os familiares exceto as mulheres dessa família:

$$n(\overline{M_G}) = n(U') = 5 + 7 + 6 + 5 + 5 = 28$$

Os casos favoráveis correspondem ao número de mulheres da família Russel:

$$n(M_R) = \text{n(A)} = 5$$

Logo, a probabilidade é dada por:

$$P = \frac{5}{28} \cong 18\%$$

Ou seja, é inferior a 20%.

Gabarito: Errado.

(FCC/2018 – Banrisul/RS) Em uma empresa com 400 funcionários, 30% ganham acima de 5 Salários Mínimos (S.M.). O quadro de funcionários dessa empresa é formado por 180 homens e 220 mulheres, sendo que 160 mulheres ganham no máximo 5 S.M. Escolhendo aleatoriamente 1 funcionário dessa empresa e verificando que é homem, a probabilidade de ele ganhar mais do que 5 S.M. é igual a

a) 1/2.

b) 3/20.

c) 1/3.

d) 3/11.

e) 3/10.

Comentários:

A probabilidade de a pessoa ganhar mais que 5SM, **dado que é homem**, pode ser calculada como:

$$P(G|H) = \frac{P(G \cap H)}{P(H)} = \frac{n(G \cap H)}{n(H)}$$

A questão informa que n(H) = 180, que representa o “novo Universo”.

Também é informado que 30% dos funcionários ganham mais que 5SM: n(G) = 30% x 400 = 120.

Sabendo que 160 mulheres ganham menos que 5SM, então 220 – 160 = 60 mulheres ganham mais que 5SM. Então, o número de homens que ganham mais que 5SM é:

$$n(G \cap H) = n(G) - n(G \cap \overline{H}) = 120 - 60 = 60$$

Portanto:

$$P(G|H) = \frac{n(G \cap H)}{n(H)} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$$

Gabarito: C

(FGV/2022 – SEFAZ/ES) As probabilidades de dois eventos A e B são P[A] = 0,5, P[B] = 0,8. A probabilidade condicional de A ocorrer dado que B ocorre é P[A|B] = 0,6. Assim, a probabilidade de que A ou B ocorram é igual a

a) 0,56

b) 0,60

c) 0,76

d) 0,82

e) 0,94

Comentários:

O enunciado informa a probabilidade dos eventos A e B, bem como a probabilidade condicional de A, dado B, a qual corresponde à razão entre a probabilidade da interseção e a probabilidade do evento a priori, no caso, o evento B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Sabendo que $P(B) = 0{,}8$ e que $P(A|B) = 0{,}6$, podemos calcular a probabilidade da interseção:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{0{,}8} = 0{,}6$$

$$P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$$

Conhecendo as probabilidades $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}8$ e $P(A \cap B) = 0{,}48$, podemos calcular a probabilidade da união (A OU B):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}8 - 0{,}48 = 0{,}82$$

Gabarito: D

Teorema da Multiplicação

O Teorema da Multiplicação pode ser visto como uma forma diferente de escrever a fórmula da **probabilidade condicional**. Como vimos, a probabilidade condicional é:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

O Teorema da Multiplicação fornece a probabilidade da interseção, a partir da probabilidade condicional:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)}}$$

Ou seja, a probabilidade da interseção de dois eventos é o **produto** da probabilidade do evento a priori (no caso, A) pela **probabilidade condicional** do evento a posteriori (no caso B).

Para o nosso exemplo anterior, vimos que a probabilidade de ter sido selecionado um enfermeiro, sabendo que foi homem é:

$$\boldsymbol{P(E|H)} = \frac{1}{3}$$

Assim, conhecendo a probabilidade de selecionar um homem do grupo **P(H)**, podemos calcular a probabilidade de selecionar um enfermeiro homem **P(E ∩ H)**. Para isso, vejamos novamente a tabela desse exemplo:

	Homens	Mulheres	**Totais**
Enfermeiros	40	50	**90**
Dentistas	80	30	**110**
Totais	**120**	**80**	**200**

A probabilidade de selecionar um homem é, pela definição clássica:

$$P(H) = \frac{n(H)}{n(U)} = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$$

Agora, podemos calcular **P(E ∩ H)** pelo Teorema da Multiplicação:

$$\boldsymbol{P(E \cap H) = P(E|H) \times P(H)} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

De fato, se fôssemos aplicar a definição clássica de probabilidade, utilizando-se a tabela, teríamos:

$$P(E \cap H) = \frac{n(E \cap H)}{n(U)} = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$$

Observe que podemos aplicar o Teorema da Multiplicação, **invertendo-se os eventos a priori e a posteriori**. Se, em vez de $P(E|H)$, conhecêssemos $P(H|E)$, poderíamos calcular a probabilidade da interseção $P(E \cap H)$ como:

$$\boldsymbol{P(E \cap H) = P(H|E) \times P(E)}$$

Já conhecemos a probabilidade da interseção, mas vamos efetuar os cálculos com essa **inversão**? A probabilidade condicional de a pessoa selecionada ser homem, dado que é enfermeiro (homem ou mulher) é, pela tabela:

$$P(H|E) = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ possíveis} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$$

E a probabilidade de selecionar um enfermeiro é, pela tabela (definição clássica):

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(U)} = \frac{90}{200} = \frac{9}{20}$$

Com $P(H|E)$ e $P(E)$, podemos calcular $P(E \cap H)$, aplicando-se o Teorema da Multiplicação:

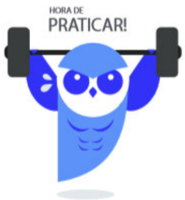
$$P(E \cap H) = P(H|E) \times P(E) = \frac{4}{9} \times \frac{9}{20} = \frac{1}{5}$$

Esse é o resultado que obtivemos antes!

Para **3 eventos**, a interseção é dada por:

$$\boldsymbol{P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B)}$$

Ou seja, é a probabilidade do evento a priori (A), multiplicada pela probabilidade condicional do primeiro evento a posteriori (B|A), multiplicada pela probabilidade condicional do segundo evento a posteriori (C|A∩B).



(VUNESP/2016 – Prefeitura de Alumínio/SP – *Adaptada*) Um estudante resolve uma prova com apenas questões em forma de testes de múltipla escolha, com 4 alternativas cada teste. Ele sabe 75% da matéria da prova. Quando ele sabe a matéria da questão ele acerta e, quando não sabe, escolhe a alternativa ao acaso. A probabilidade de o aluno acertar uma questão qualquer por acaso é igual a

a) 6,25%

b) 8,5%

c) 15%

d) 17,25%

e) 18,75%

Comentários:

A probabilidade de o aluno acertar uma questão qualquer por acaso corresponde à interseção dos eventos "não saber a matéria" (que podemos chamar de $\bar{S}$) E "acertar a questão" (que podemos chamar de A) é:

$$P(\bar{S} \cap A)$$

Considerando que a probabilidade de o aluno acertar a questão depende do evento saber ou não a matéria, temos eventos **dependentes**. Assim, a probabilidade da interseção é dada por:

$$P(\bar{S} \cap A) = P(\bar{S}) \times P(A|\bar{S})$$

O enunciado informa que:

- O aluno sabe 75% da matéria da prova: P(S) = 0,75

Logo, o aluno **não sabe** o restante da matéria (evento **complementar**):

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,75 = 0,25$$

- O aluno escolhe a alternativa ao acaso, se ele não souber a matéria.

Sabendo que há 4 alternativas, a probabilidade de o aluno **acertar a questão**, **dado que não sabe** a respectiva matéria é:

$$P(A|\bar{S}) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Substituindo esses valores na equação da probabilidade da interseção, obtemos a probabilidade de o aluno acertar uma questão qualquer por acaso é:

$$P(\bar{S} \cap A) = 0{,}25 \times 0{,}25 = 0{,}0625 = 6{,}25\%$$

Gabarito: A

(VUNESP/2019 – Prefeitura de Campinas/SP) Ao operar em um turno de trabalho, uma linha de produção se interrompe totalmente se uma máquina M1 falhar. Para diminuir o risco de interrupção, ligou-se ao sistema uma máquina M2 programada para entrar imediatamente em funcionamento caso M1 falhe, fazendo com que o sistema prossiga. A probabilidade de M1 falhar é de 1/20 e a probabilidade de M2 falhar é também de 1/20. A probabilidade de que o sistema não se interrompa durante um turno de trabalho após a inclusão de M2 é de

a) 99,75%

b) 95%

c) 99%

d) 90,25%

e) 97,5%

Comentários:

A probabilidade de o sistema não se interromper pode ser calculada pelo complementar de ele se interromper:

$$P(\bar{I}) = 1 - P(I)$$

Para o sistema se interromper, é necessários que a M1 falhe E a M2 falhe. Logo, temos a interseção desses eventos:

$$P(I) = P(F1) \times P(F2|F1)$$

Note que representamos a falha da M2 como F2|F1, pois a máquina atua somente se a M1 falhar.

O enunciado informa que a probabilidade de tanto uma quanto outra falhar é de 1/20:

$$P(I) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{400} = 0{,}0025$$

Assim, a probabilidade de o sistema não interromper é complementar:

$$P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975 = 99{,}75\%$$

Gabarito: A.

(FGV/2018 – ALE/RO) Uma urna I contém inicialmente 4 bolas azuis e 6 bolas vermelhas; nessa ocasião, a urna II contém 5 bolas azuis e 4 bolas vermelhas, e a urna III, 2 azuis e 7 vermelhas. Uma bola é sorteada da urna I e colocada na urna II. Em seguida, uma bola é sorteada da urna II e colocada na urna III. Por fim, uma bola é sorteada da urna III. A probabilidade de que a bola sorteada da urna III seja azul é igual a

a) 0,166

b) 0,182

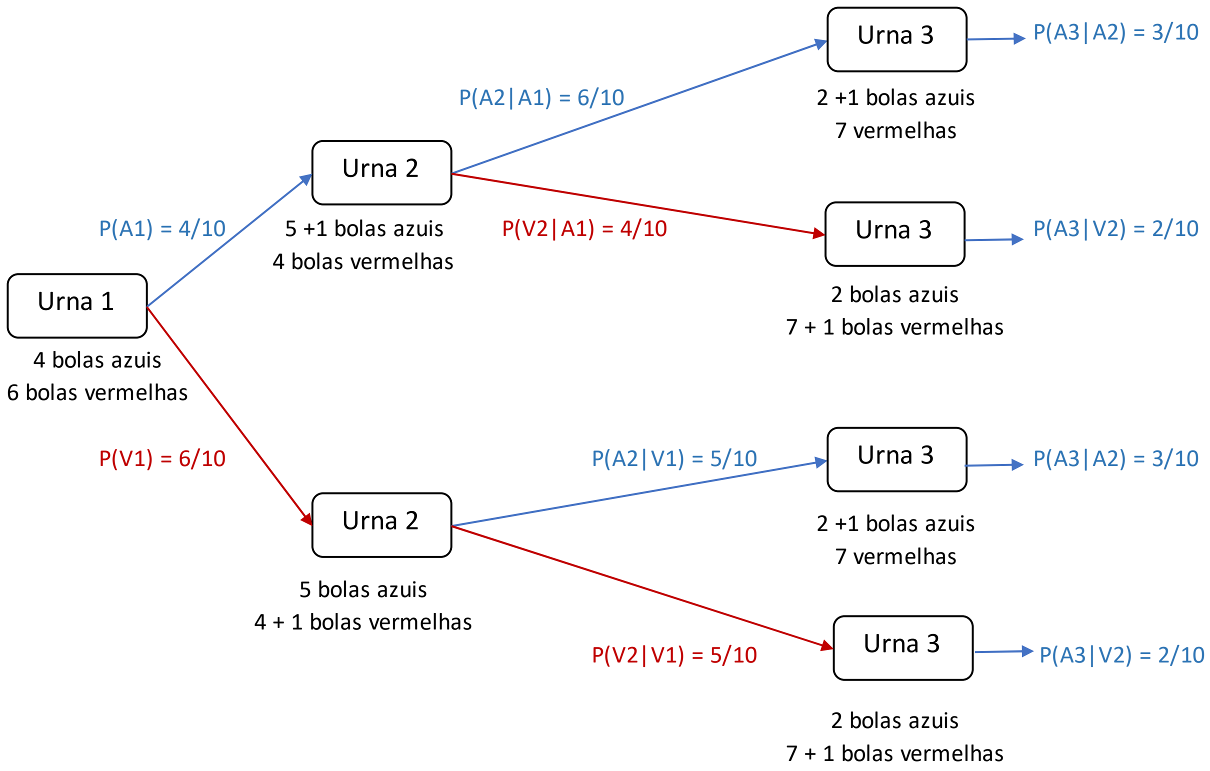
c) 0,254

d) 0,352

e) 0,368

Comentários:

A probabilidade de retirar uma bola azul da urna III depende de qual bola é retirada da urna II, que, por sua vez, depende de qual bola é retirada da urna I, conforme ilustrado abaixo:



Na ilustração, inserimos as quantidades de bolas nas urnas em cada caso, o que nos permite calcular a probabilidade de retirar uma bola azul ou vermelha, em cada etapa.

Para encontrar a probabilidade de tirar uma bola azul, precisamos da interseção dos eventos subsequentes (retirada da urna 1, da urna 2 e da urna 3) e da união das possibilidades alternativas (isto é, dos diferentes caminhos).

A probabilidade do primeiro caminho (superior) é dada por:

$$P(A1 \cap A2 \cap A3) = P(A1) \times P(A2|A1) \times P(A3|A2) = 0{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}072$$

A probabilidade do segundo caminho é:

$$P(A1 \cap V2 \cap A3) = P(A1) \times P(V2|A1) \times P(A3|V2) = 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}032$$

A probabilidade do terceiro caminho é dada por:

$$P(V1 \cap A2 \cap A3) = P(V1) \times P(A2|V1) \times P(A3|A2) = 0{,}6 \times 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}09$$

A probabilidade do quarto caminho (inferior) é dada por:

$$P(V1 \cap V2 \cap A3) = P(V1) \times P(V2|V1) \times P(A3|V2) = 0{,}6 \times 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}06$$

A probabilidade de retirar uma bola azul, considerando todas essas possibilidades (mutuamente exclusivas) é:

$$P(A3) = P(A1 \cap A2 \cap A3) + P(A1 \cap V2 \cap A3) + P(V1 \cap A2 \cap A3) + P(V1 \cap V2 \cap A3)$$

$$P(A3) = 0{,}072 + 0{,}032 + 0{,}09 + 0{,}06 = 0{,}254$$

Gabarito: C

Independência de Eventos

Eventos independentes são aqueles que **não influenciam uns nos outros**. Por exemplo, o resultado do lançamento de um dado em nada influencia o resultado de outro lançamento.

Como fica a **probabilidade condicional** desses eventos, então?

Vamos supor que o resultado de um lançamento de um dado tenha sido o número 3: A = {3}. Sabendo disso, qual é a probabilidade de um novo lançamento do dado ser B = {4}?

Bem, o resultado do 1º lançamento (evento A) em nada influencia o 2º lançamento (evento B). Portanto, a probabilidade de o 2º lançamento ser 4 é a **mesma** (P = 1/6), **independentemente** do resultado do 1º lançamento.

Isso quer dizer que, sendo A e B eventos independentes, a probabilidade condicional de B, sabendo que o evento A ocorreu, é igual à probabilidade de B (e vice-versa):

$$\boxed{P(B|A) = P(B)}$$

Vamos a mais uma pergunta: sabendo que o resultado do 1º lançamento foi A = {3}, qual é a probabilidade de **não** sair 4 no 2º lançamento (evento $\bar{B}$)?

Sabendo que a probabilidade de sair 4 no 2º lançamento é a mesma, independente do resultado do 1º lançamento, então a probabilidade de **não** sair 4 **também** é **independente** do 1º lançamento.

De forma geral, **se A e B são independentes**, então os **complementares também são independentes**. Isso implica nas seguintes igualdades:

$$\boldsymbol{P(B|\bar{A}) = P(B)}$$

Por exemplo, a probabilidade de sair 4 no 2º lançamento (evento B), **dado** que o resultado do 1º lançamento **não** foi 3 (evento $\bar{A}$), é a mesma (P = 1/6), **independentemente** do resultado do 1º lançamento.

$$\boldsymbol{P(\bar{B}|A) = P(\bar{B})}$$

Por exemplo, a probabilidade de **não** sair 4 no 2º lançamento (evento $\bar{B}$), **dado** que o resultado do 1º lançamento foi 3 (evento A), é a mesma (P = 5/6), **independentemente** do resultado do 1º lançamento.

$$\boldsymbol{P(\bar{B}|\bar{A}) = P(\bar{B})}$$

Por exemplo, a probabilidade de **não** sair 4 no 2º lançamento (evento $\bar{B}$), **dado** que o resultado do 1º lançamento **não** foi 3 (evento $\bar{A}$), é a mesma (P = 5/6), **independentemente** do resultado do 1º lançamento.

E como fica o teorema da multiplicação para **eventos independentes**?

Bem, para eventos **quaisquer**, temos:

$$P(A \cap B) = P(B|A).P(A)$$

Considerando que $P(B|A) = P(B)$ para eventos independentes, então:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B) \times P(A)}}$$

Ou seja, a probabilidade de obter 3 no 1º lançamento (evento A), com probabilidade P(A) = 1/6 **E** de obter 4 no 2º lançamento (evento B), com probabilidade P(B) = 1/6, é calculada como:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Essa propriedade é de "**ida e volta**". Ou seja, se A e B são independentes, então temos a identidade $P(A \cap B) = P(A).P(B)$; e, se tivermos a identidade $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, então **podemos concluir** que A e B são **independentes**.

Então, sem conhecer os eventos A e B, se soubermos que $P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$, então **podemos concluir** que A e B são **independentes**.

(CESPE/2015 – Telebras) Nas chamadas de suporte de uma empresa de telecomunicações, o funcionário Pedro resolve o problema do cliente em duas de cada três vezes em que é solicitado, enquanto Marcos resolve em três de cada quatro chamadas.

A partir dessa situação hipotética, julgue o item seguinte, considerando que os funcionários sejam suficientemente experientes para que a tentativa de resolução do problema de qualquer chamada não esteja subordinada a tentativas anteriores.

Se Pedro não resolver o problema de um cliente, considerando-se que nenhuma informação a respeito da tentativa é repassada a Marcos, a probabilidade de que este também não resolva o referido problema será inferior a 20%.

Comentários:

A questão pede a probabilidade de Marcos não resolver o problema, dado que Pedro não resolveu (probabilidade condicional), que podemos representar por $P(\overline{R_M}|\overline{R_P})$.

O item esclarece que nenhuma informação a respeito da tentativa é repassada a Marcos, indicando que são eventos independentes. Para esses eventos, a probabilidade condicional é igual à probabilidade não condicional:

$$P(\overline{R_M}|\overline{R_P}) = P(\overline{R_M})$$

O enunciado informa que Marcos resolve o problema em 3 de 4 ligações, logo a probabilidade de Marcos resolver é 3/4 e a probabilidade de Marcos não resolver é o complementar:

$$P(\overline{R_M}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Que é superior a 20%.

Gabarito: Errado.

(CESPE/2019 – TJ/AM) Em um espaço de probabilidades, as probabilidades de ocorrerem os eventos independentes A e B são, respectivamente, P(A) = 0,3 e P(B) = 0,5.

Nesse caso, P(A⋂B) = 0,15.

Comentários:

Sendo A e B eventos independentes, a probabilidade da **interseção** (conectivo **E**) é dada pelo **produto** das probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Sendo P(A) = 0,3 e P(B) = 0,5, então:

$$P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$$

Gabarito: Certo.

(FGV/2019 – Prefeitura de Angra dos Reis/RJ) Peter é um ótimo lançador de dardos. A cada lançamento, a probabilidade de Peter acertar o alvo é de 90% e independe de Peter ter acertado ou não o alvo em lançamentos anteriores. Após fazer dois lançamentos em sequência, a probabilidade de Peter ter acertado o alvo nos dois lançamentos é de

a) 180%

b) 90%

c) 81%

d) 72%

e) 160%

Comentários:

O enunciado informa que os lançamentos são eventos independentes. Portanto, a probabilidade de acertar os dois lançamentos, que corresponde à **interseção** dos eventos (A_1 **E** A_2) é dada pelo **produto** das probabilidades:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2)$$

A probabilidade de acerto é 90%, ou seja, $P(A_1) = P(A_2) = 90\%$. Portanto, a probabilidade da interseção é:

$$P(A_1 \cap A_2) = 90\% \times 90\% = 81\%$$

Gabarito: C

(FGV/2018 – ALE/RO) A urna A tem dois cartões vermelhos e três amarelos e, a urna B, três cartões vermelhos e dois amarelos. Retira-se, aleatoriamente, um cartão de cada urna. A probabilidade de os dois cartões retirados serem amarelos é

a) $\frac{6}{25}$

b) $\frac{5}{25}$

c) $\frac{4}{25}$

d) $\frac{3}{25}$

e) $\frac{2}{25}$

Comentários:

A probabilidade de retirar 2 cartões amarelos, isto é, retirar um cartão amarelo da urna A **E** um cartão amarelo da urna B, corresponde à **interseção** desses eventos. Considerando que esses eventos (que podemos chamar por A e B) são **independentes**, então a interseção é dada pelo produto das probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Considerando que há 3 cartões amarelos, de um total de 5 cartões, na urna A, a probabilidade de retirar um cartão de A é:

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

Considerando que há 2 cartões amarelos, de um total de 5 cartões, na urna B, a probabilidade de retirar um cartão de A é:

$$P(B) = \frac{2}{5}$$

Assim, a probabilidade de retirar 2 cartões amarelos é:

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

Gabarito: A.

(FGV/2019 – DPE/RJ – *Adaptada*) A partir dos axiomas da Teoria das Probabilidades, algumas proposições podem ser estabelecidas. Para quaisquer eventos não vazios, julgue as seguintes proposições.

I) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) - P(A).P(B)$

II) Se $P(A \cap B) = P(A).P(B) \rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}).P(\bar{B})$

Comentários:

Em relação ao item I, a probabilidade da união é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se A e B fossem independentes, teríamos $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Porém, essa **não** é uma condição **dada pelo enunciado**. Logo, é possível que os eventos sejam dependentes e, consequentemente, termos:

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

Pontue-se que não é possível afirmar qual das duas probabilidades é maior. Sabendo que a probabilidade da interseção pode ser diferente do produto das probabilidades, então a probabilidade da união pode ser diferente de:

$$P(A \cup B) \neq P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

Logo, o item I está errado.

Em relação ao item II, o item informa que:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Isso nos permite concluir que A e B são eventos **independentes**. Consequentemente, os eventos **complementares** também são **independentes**. Assim, a interseção dos eventos complementares (conectivo **E**) é dada pelo **produto** das probabilidades:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$$

Logo, o item II está correto.

Resposta: item I errado; item II certo.

FIQUE ATENTO!

Assim como tivemos questões de combinatória do tipo "pelo menos um", em que era mais fácil resolver, subtraindo-se os casos contrários do total, aqui também temos uma situação parecida. A questão pode pedir a probabilidade do tipo "**pelo menos um**" ou da **união** de eventos, em que será mais simples calcular o **complemento**. Vejamos uma dessas questões.

HORA DE PRATICAR!

(CESPE/2015 – DEPEN) Considerando que, entre a população carcerária de um presídio, a probabilidade de um detento contrair tuberculose seja igual a 0,01; que dois detentos sejam selecionados aleatoriamente dessa população carcerária; e que as ocorrências de tuberculose entre esses detentos sejam eventos independentes, julgue o próximo item.

A probabilidade de pelo menos um detento na amostra contrair tuberculose será superior a 0,01 e inferior a 0,03.

Comentários:

A probabilidade de **pelo menos um** detento, dentre os 2 detentos da amostra, contrair tuberculose pode ser calculada como o **complementar** da probabilidade de **nenhum dos 2** detentos contrair a doença.

A probabilidade de um detento qualquer não contrair a doença é o complementar da probabilidade de ele contraí-la:

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

A probabilidade de nenhum dos 2 detentos contrair a doença é a interseção da probabilidade de cada um contraí-la. Como os eventos são independentes, basta multiplicar as probabilidades:

$$P_{nenhum} = P(\overline{D}) \times P(\overline{D}) = 0{,}99 \times 0{,}99 \cong 0{,}98$$

Assim, a probabilidade de pelo menos um dos 2 detentos contrair a doença é o complementar:

$$P_{pelo\ menos\ 1} = 1 - P_{nenhum} \cong 1 - 0{,}98 = 0{,}02$$

Esse resultado é, de fato, superior a 0,01 e inferior a 0,03.

Gabarito: Certo

(FGV/2021 – FEMPAR) Suponha que cada dose de certa vacina, ao ser aplicada em uma população específica, garanta a imunização contra uma doença, de metade daqueles que não estão imunizados. Inicialmente, toda essa população estava não imunizada e todos os seus indivíduos foram submetidos a duas doses consecutivas dessa vacina. Sorteando-se, ao acaso, um indivíduo dessa população, a probabilidade de que esteja imunizado contra a doença é de

a) 100%

b) 87,5%

c) 75%

d) 50%

e) 25%

Comentários:

Segundo o enunciado, quando uma dose de vacina é aplicada em uma população não imunizada, metade ficará imunizada. Em outras palavras, há 50% de uma pessoa não imunizada se tornar imunizada com uma dose de vacina. E a questão afirma que foram aplicadas 2 doses em uma população inicialmente não imunizada.

Vamos calcular a probabilidade de uma pessoa estar imunizada pelo seu complemento, qual seja de não estar imunizada:

$$P(imunizado) = 1 - P(não\ imunizado)$$

Para isso, é necessário que ela não tenha sido imunizada na primeira dose, com probabilidade de 50%, E não ter sido imunizada na segunda dose, também com probabilidade de 50%. Assim, temos a interseção de eventos independentes, cuja probabilidade é dada pelo produto:

$$P(não\ imunizado) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$$

E a probabilidade complementar é:

$$P(imunizado) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 = 75\%$$

Gabarito: C

Independência de Três Eventos

Quando há três eventos independentes, a situação é sutilmente diferente de quando há apenas dois eventos. Se os eventos A, B e C são independentes, então temos **todas** as situações a seguir:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A).P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B).P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$$

Dessa forma, os três eventos são considerados independentes somente se **todos forem independentes entre si,** tanto quando comparados dois a dois, quanto para todos os 3.

Ou seja, se os eventos são independentes, então podemos concluir que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$$

Por exemplo, lançando-se três moedas equilibradas, e sendo os eventos A = {CARA na 1ª moeda}, B = {COROA na 2ª moeda} e C = {CARA na 3ª moeda}, então a probabilidade $P(A \cap B \cap C)$ é dada por:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Porém, o **contrário não é verdadeiro**, ou seja, **não** podemos concluir que os eventos são independentes a partir desta identidade somente.

Por exemplo, **sem conhecer** os eventos A, B e C, mas sabendo que:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(C) = \frac{1}{2}, \qquad P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$$

não podemos, com base apenas nessas informações, concluir que A, B e C são eventos independentes.

Além disso, é possível que todos os eventos sejam **independentes 2 a 2**, porém os **3 eventos** **não** serem independentes. Ou seja, sabendo que A e B são independentes, B e C são independentes, A e C são independentes, ainda assim, **não** podemos concluir que os 3 eventos são independentes.

Também é possível que A e B sejam independentes e que B e C sejam independentes. Com base nessas informações, **não** podemos concluir que A e C são independentes.

Por exemplo, suponha que o 1º e 2º lançamentos serão de moedas equilibradas. Suponha que, se o resultado do 1º lançamento for CARA, o 3º lançamento será de uma moeda desequilibrada, cuja probabilidade de sair CARA é **maior** que a de sair COROA. Caso contrário, o 3º lançamento será de uma moeda equilibrada.

Suponha os mesmos eventos A = {CARA na 1ª moeda}, B = {COROA na 2ª moeda} e C = {CARA na 3ª moeda}.

Nesse exemplo, os eventos A e B são **independentes** (2 lançamentos separados) e os eventos B e C são **independentes**, pois o resultado do 2º lançamento em nada influencia no resultado do 3º lançamento. Porém, os eventos A e C **não são independentes**, pois o resultado do 1º lançamento afeta o resultado do 3º lançamento.

Essa relação pode ser expandida. Para n eventos independentes, vale a relação:

$$\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n)}$$

Porém, o contrário não é verdadeiro, ou seja, não podemos concluir que os eventos são independentes, ao constatar que vale essa identidade.

(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Em um prova de múltipla escolha de língua chinesa, cada uma das 5 questões tem 4 alternativas. A probabilidade de uma pessoa acertar todas as questões, sem conhecer a língua, e escolhendo, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão, é

a) $\frac{1}{1024}$

b) $\frac{1}{512}$

c) $\frac{1}{256}$

d) $\frac{1}{20}$

e) $\frac{1}{4}$

Comentários:

A probabilidade de acertar todas as questões, escolhendo aleatoriamente as respostas, corresponde à **interseção** de acertar cada uma das questões.

Sabendo que há 4 alternativas, a probabilidade de acertar uma questão é:

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Assim, a probabilidade de acertar as 5 questões, considerando que são eventos independentes, é dada pelo **produto**:

$$P(A1 \cap A2 \cap A3 \cap A4 \cap A5) = P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{1024}$$

Gabarito: A.

(VUNESP/2018 – UNICAMP/SP) Dentre os bebedores de cerveja, sabe-se que 1/3 preferem a marca A. Se três deles são escolhidos ao acaso, a probabilidade de que nenhum deles preferem a marca A é

a) $\frac{1}{27}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{8}{27}$

d) $\frac{2}{9}$

e) $\frac{2}{3}$

Comentários:

Sabendo que $\frac{1}{3}$ dos bebedores preferem a marca A, então a probabilidade de escolher um bebedor que não prefira é complementar:

$$P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Considerando que a escolha de um bebedor **independe** da escolha de outro, então, escolhendo 3 bebedores ao acaso, a probabilidade de que nenhum dos 3 bebedores prefira a marca A corresponde à **interseção** dos eventos (**produto** das probabilidades):

$$P \times P \times P = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

Gabarito: C.

(FGV/2017 – TJ/AL) Os eventos A, B e C de um espaço amostral são tais que A é independente de B, e B é independente de C. Sabe-se ainda que os três têm probabilidade não nula de ocorrência.

Com tais informações, é correto afirmar que:

a) A é independente de C;

b) A, B e C são mutuamente independentes;

c) A e C são mutuamente exclusivos;

d) B é independente do complementar de C;

e) $P(A).P(B).P(C) = P(A \cap B|C)$.

Comentários:

Sabendo que A é independente de B e que B é independente de C, não podemos afirmar nada a respeito da dependência entre A e C, muito menos a respeito da dependência dos 3 eventos. Por esses motivos, as alternativas A e B estão incorretas.

Por outro lado, podemos afirmar que os complementares dos eventos apresentam a mesma relação de independência dos respectivos eventos. Logo, a afirmativa D está correta.

Em relação à alternativa C, o conceito de exclusividade envolve a interseção entre eventos. Ou seja, se 2 eventos são mutuamente exclusivos, a sua interseção é nula. O enunciado não disse nada a respeito da interseção, logo nada podemos afirmar sobre a exclusividade: alternativa C incorreta.

Em relação à alternativa E, pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

Como não sabemos se A, B e C são independentes e considerando que o enunciado não forneceu elementos que nos permitem calcular a interseção dos 3 eventos, não podemos fazer a afirmação indicada na alternativa E: alternativa E incorreta.

Gabarito: D

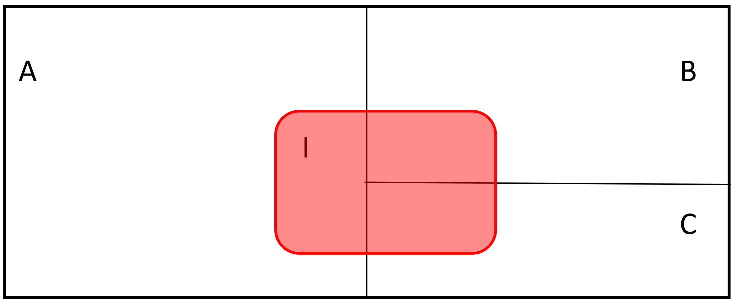
Teorema da Probabilidade Total

O Teorema da Probabilidade Total permite calcular a probabilidade de um evento B, quando conhecemos as **probabilidades condicionais** desse evento.

Por exemplo, suponha que, em um banco, o nível de inadimplência dos pagadores do grupo A (melhores pagadores) seja 1%; o nível de inadimplência dos pagadores do grupo B seja 5%; e o nível de inadimplência dos pagadores do grupo C seja de 10%.

Além disso, suponha que o grupo A represente 50% dos pagadores; o grupo B represente 30%; e o grupo C represente 20%. Com base nesses valores, podemos calcular a **probabilidade total** de inadimplência, ou seja, a probabilidade de inadimplência de um cliente qualquer, sem saber a que grupo ele pertence.

Para isso, consideramos que a probabilidade do evento I (inadimplência) está "espalhada" nos três grupos, ou seja, temos os inadimplentes do grupo A, os inadimplentes do grupo B e os inadimplentes do grupo C, como representado a seguir.



Assim, a probabilidade total de inadimplência é a soma dos inadimplentes de cada grupo, ou seja, a soma das interseções de I com os grupos A, B e C:

$$\boldsymbol{P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap B) + P(I \cap C)}$$

Pelo **Teorema da Multiplicação**, substituímos as interseções pelos produtos das probabilidades:

$$\boxed{\boldsymbol{P(I) = P(I|A) \times P(A) + P(I|B) \times P(B) + P(I|C) \times P(C)}}$$

Nesse exemplo, temos P(A) = 0,5, P(B) = 0,3, P(C) = 0,2, P(I|A) = 0,01, P(I|B) = 0,05 e P(I|C) = 0,1. Logo, a probabilidade de um cliente qualquer ser inadimplente é:

$$P(I) = 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}05 + 0{,}2 \times 0{,}1$$

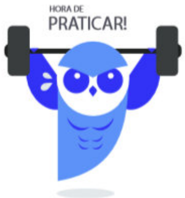
$$P(I) = 0{,}005 + 0{,}015 + 0{,}02 = 0{,}04 = 4\%$$

Essa relação vale para qualquer número de eventos. Havendo **apenas 2 eventos a priori,** A e $\bar{A}$, a probabilidade total $P(B)$ é dada por:

$$\boxed{\boldsymbol{P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})}}$$

Generalizando, com n eventos A_i e conhecendo $P(B|A_i)$, temos $P(B)$ dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{P(B) = P(B|A_1) \times P(A_1) + P(B|A_2).P(A_2) + \cdots + P(B|A_n).P(A_n)}}$$



(CESPE/2015 – Departamento Penitenciário Nacional – Área 4) As probabilidades dos eventos aleatórios A = “o infrator é submetido a uma pena alternativa” e B = “o infrator reincide na delinquência” são representadas, respectivamente, por P(A) e P(B). Os eventos complementares de A e B são denominados, respectivamente, por $\bar{A}$ e $\bar{B}$. Considerando que P(A) = 0,4, e que as probabilidades condicionais $P(B|\bar{A}) = 0{,}3$ e $P(B|A) = 0{,}1$, julgue o item a seguir.

P(B) ≤ 0,2.

Comentários:

A questão trata da **probabilidade total** de B, dada por:

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

O enunciado informa que $P(A) = 0{,}4$; $P(B|A) = 0{,}1$ e $P(B|\bar{A}) = 0{,}3$. Sabendo que $P(A) = 0{,}4$, o seu complementar é:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

Substituindo esses valores, temos:

$$P(B) = 0{,}1 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}04 + 0{,}18 = 0{,}22$$

Esse resultado é **maior** que 0,2: $P(B) > 0{,}2$.

Gabarito: Errado.

(FGV/2019 – DPE/RJ) 10% das lâmpadas fabricadas pela empresa A queimam antes de 1000h de funcionamento. Das fabricadas pela empresa B, 5% queima antes de 1000h de funcionamento. Das fabricadas pela empresa C, 1% queima antes de 1000h de funcionamento. Em uma grande loja de varejo, 20% das lâmpadas em estoque são da marca A, 30% são da marca B e 50% são da marca C. Uma lâmpada é escolhida ao acaso do estoque dessa loja.

A probabilidade de que ela não queime antes de 1000h de funcionamento é igual a.

a) 0,76

b) 0,84

c) 0,92

d) 0,96

e) 0,98

Comentários:

A questão trabalha com o Teorema da Probabilidade Total, pois informa as probabilidades quanto à durabilidade, condicionadas aos fabricantes, e pede a probabilidade quanto à durabilidade, não condicionada.

A probabilidade de a lâmpada **não queimar** antes de 1000h é **complementar** à probabilidade de ela **queimar** antes de 1000h:

$$P(\bar{Q}) = 1 - P(Q)$$

O enunciado informa que:

- 10% das lâmpadas fabricadas por A queimam antes de 1000h: P(Q|A) = 0,1;
- 5% das lâmpadas fabricadas por B queimam antes de 1000h: P(Q|B) = 0,05;
- 1% das lâmpadas fabricadas por C queimam antes de 1000h: P(Q|C) = 0,01;
- 20% do estoque de lâmpadas são fabricadas por A: P(A) = 0,2;
- 30% do estoque de lâmpadas são fabricadas por B: P(B) = 0,3;
- 50% do estoque de lâmpadas são fabricadas por C: P(C) = 0,5.

Pelo Teorema da Probabilidade Total, temos:

$$P(Q) = P(Q|A) \times P(A) + P(Q|B) \times P(B) + P(Q|C) \times P(C)$$

Substituindo os valores fornecidos, temos:

$$P(Q) = 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}05 \times 0{,}3 + 0{,}01 \times 0{,}5 = 0{,}02 + 0{,}015 + 0{,}005 = 0{,}04$$

Portanto, a probabilidade de a lâmpada não queimar é complementar:

$$P(\bar{Q}) = 1 - P(Q) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$$

Gabarito: D

(FCC/2016 – Analista Judiciário do TRT 11ª Região) Um determinado órgão público recebe mensalmente processos que devem ser analisados por 2 analistas: A e B. Sabe-se que esses dois analistas recebem a mesma proporção de processos para a análise. Sabe-se que 20% de todos os processos encaminhados para A são analisados no mês de recebimento e que 10% são indeferidos. Sabe-se também que 40% dos processos encaminhados para B são analisados no mês de recebimento e que 20% são indeferidos.

Um processo recebido em determinado mês é selecionado ao acaso. A probabilidade de ele ser deferido naquele mesmo mês é igual a

a) 0,245

b) 0,350

c) 0,500

d) 0,420

e) 0,250

Comentários:

Pela probabilidade total, a probabilidade de um processo ser **deferido** no mesmo mês é:

$$P(D) = P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B)$$

Sabemos que P(A) = P(B). Como P(A) + P(B) = 1, então P(A) = P(B) = 0,5.

Além disso, sabemos que a probabilidade de o processo ser **deferido** no mesmo mês é o **complementar** de ele ser **indeferido** no mesmo mês.

O enunciado informa que:

- 20% dos processos de A são analisados no mês e 10% são **indeferidos**. Ou seja, 90% dos processos analisados no mês são **deferidos**:

$$P(D|A) = 0{,}2 \times 0{,}9 = 0{,}18$$

- 40% dos processos de B são analisados no mês e 20% são **indeferidos**. Ou seja, 80% dos processos analisados no mês são **deferidos**:

$$P(D|B) = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32$$

Inserindo esses valores no Teorema da Probabilidade Total, temos:

$$P(D) = 0{,}18 \times 0{,}5 + 0{,}32 \times 0{,}5 = 0{,}09 + 0{,}16 = 0{,}25$$

Gabarito: E

Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes é usado quando conhecemos as probabilidades condicionais da forma P(B|A), e queremos calcular a probabilidade condicional da forma P(A|B). Ou seja, conhecemos as probabilidades com o evento B, a **posteriori**, e desejamos conhecer as probabilidades para esse evento a **priori**.

No exemplo da inadimplência que vimos antes, conhecemos as probabilidades de **inadimplência para cada grupo**, isto é, com a **inadimplência** sendo o evento a **posteriori** e os **grupos** A, B e C sendo os eventos a **priori**:

- P(**I**|A) = 0,01
- P(**I**|B) = 0,05
- P(**I**|C) = 0,1.

Mas, podemos calcular a probabilidade de um cliente **pertencer a um dos grupos** (por exemplo ao grupo A), **sabendo que ele foi inadimplente**, ou seja, tendo a **inadimplência** como evento a **priori**:

- P(A|**I**) = ?

Para isso, vamos utilizar a fórmula da **probabilidade condicional**:

$$\boldsymbol{P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)}}$$

Pelo **Teorema da Multiplicação**, podemos escrever o **numerador** em função da probabilidade condicional P(I|A), que **conhecemos**, isto é, com o evento **inadimplência a posteriori**:

$$P(A \cap I) = P(I|A) \times P(A)$$

Pelo **Teorema da Probabilidade Total**, podemos escrever o denominador como:

$$P(I) = P(I|A) \times P(A) + P(I|B) \times P(B) + P(I|C) \times P(C)$$

Dessa forma, a fórmula do **Teorema de Bayes** para esse exemplo é:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A|I) = \frac{P(I|A)\times P(A)}{P(I|A)\times P(A)+P(I|B)\times P(B)+P(I|C)\times P(C)}}}$$

Para o nosso exemplo, já calculamos o denominador, que corresponde à probabilidade de um cliente ser inadimplente, dada pela probabilidade total:

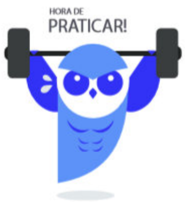
$$P(I) = P(A).P(I|A) + P(B).P(I|B) + P(C).P(I|C) = 0{,}04$$

Também sabemos que P(I|A) = 0,01 e P(A) = 0,5, portanto, a probabilidade de um cliente inadimplente ser do grupo A é:

$$P(A|I) = \frac{0{,}01 \times 0{,}5}{0{,}04} = \frac{0{,}005}{0{,}04} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$$

De maneira geral, com n eventos A_i e conhecendo $P(B|A_i)$, então a probabilidade de algum evento A_m, condicionada ao evento B, $P(A_m|B)$, é:

$$\boldsymbol{P(A_m|B) = \frac{P(B|A_m).P(A_m)}{P(B|A_1).P(A_1) + P(B|A_2).P(A_2) + \cdots + P(B|A_n).P(A_n)}}$$



(FGV/2019 – DPE/RJ) A abrangência do atendimento da Defensoria Pública depende da condição econômica do cidadão e também do tipo de causa envolvida. Sabe-se que 80% das demandas surgem em função da hipossuficiência econômica, e os outros 20% devem-se a causas no âmbito criminal. Entre aqueles que não dispõem de recursos, 90% têm suas necessidades atendidas, enquanto entre os envolvidos em ações criminais, só 40% são beneficiados com a gratuidade.

Suponha que um indivíduo do cadastro dos que procuram a Defensoria seja sorteado ao acaso, verificando-se tratar-se de alguém atendido gratuitamente.

Então, a probabilidade de que o sorteado seja um dos que procuraram a Defensoria por causa de questões criminais é igual a:

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{2}{10}$

c) $\frac{6}{10}$

d) $\frac{7}{10}$

e) $\frac{9}{10}$

Comentários:

A questão trabalha com o Teorema de Bayes, pois informa as probabilidades de gratuidade condicionadas aos tipos de situação e pergunta pela probabilidade do tipo de situação, condicionada à gratuidade, isto é, inverte os eventos a priori e a posteriori.

O enunciado informa que:

- 80% das demandas surgem por hipossuficiência econômica: P(H) = 0,8;
- Os outros 20% das demandas surgem por causas criminais: P(C) = 0,2;
- 90% das demandas de hipossuficiência econômica conseguem gratuidade: P(G|H) = 0,9
- 40% das demandas por causas criminais conseguem gratuidade: P(G|C) = 0,4

Assim, a probabilidade de a demanda ser por causas criminais, sabendo que conseguiu gratuidade, P(C|G), é dada pela fórmula de Bayes:

$$P(C|G) = \frac{P(G|C) \times P(C)}{P(G|C) \times P(C) + P(G|H) \times P(H)}$$

Substituindo os valores do enunciado, temos:

$$P(C|G) = \frac{0,4 \times 0,2}{0,4 \times 0,2 + 0,9 \times 0,8} = \frac{0,08}{0,08 + 0,72} = \frac{0,08}{0,80} = \frac{1}{10}$$

Gabarito: A

(FCC/2018 – Analista Judiciário do TRT 14ª Região) Uma cidade sede do interior possui três varas trabalhistas. A 1ª Vara comporta 50% das ações trabalhistas, a 2ª Vara comporta 30% e a 3ª Vara as 20% restantes. As porcentagens de ações trabalhistas oriundas da atividade agropecuária são 3%, 4% e 5% para a 1ª, 2ª e 3ª Varas, respectivamente. Escolhe-se uma ação trabalhista aleatoriamente e constata-se ser originária da atividade agropecuária. A probabilidade dessa ação ser da 1ª Vara trabalhista é, aproximadamente:

a) 0,5312.

b) 0,3332.

c) 0,1241.

d) 0,4909.

e) 0,4054.

Comentários:

O enunciado fornece as proporções das ações de atividade agropecuária para cada uma das varas (ou seja, tendo as ações de atividade agropecuária como probabilidade a **posteriori**) e exige a probabilidade uma ação de ser da 1ª Vara, sabendo que ela trata atividade agropecuária (ou seja, tendo as ações de atividade agropecuária como evento a **priori**).

Pelo Teorema de Bayes, $P(V_1|A)$ é dado por:

$$P(V_1|A) = \frac{P(A|V_1) \times P(V_1)}{P(A|V_1) \times P(V_1) + P(A|V_2) \times P(V_2) + P(A|V_3) \times P(V_3)}$$

A questão informa que:

- A 1ª Vara comporta 50% das ações: $P(V_1) = 0,5$;
- A 2ª Vara comporta 30% das ações: $P(V_2) = 0,3$;
- A 3ª Vara comporta 20% das ações: $P(V_3) = 0,2$;
- As percentagens das ações de atividade agropecuária para as Varas 1, 2 e 3 são, respectivamente, 3%, 4% e 5%: $P(A|V_1) = 0,03$, $P(A|V_2) = 0,04$ e $P(A|V_3) = 0,05$.

Substituindo esses valores na fórmula do Teorema de Bayes, temos:

$$P(V_1|A) = \frac{0,03 \times 0,5}{0,03 \times 0,5 + 0,04 \times 0,3 + 0,05 \times 0,2} = \frac{0,015}{0,015 + 0,012 + 0,01} = \frac{0,015}{0,037} \cong 0,4054$$

Gabarito: E.

(CESPE/2019 – TJ/AM) Se Carlos estiver presente na aula ministrada pela professora Paula, a probabilidade de ele aprender o conteúdo abordado é de 80%; se ele estiver ausente, essa probabilidade cai para 0%. Em 25% das aulas da professora Paula, Carlos está ausente.

Com relação a essa situação hipotética, julgue o item seguinte.

Se Carlos não aprendeu o conteúdo ministrado na aula da professora Paula, então a probabilidade de ele ter estado presente na aula é inferior a 50%.

Comentários:

O enunciado informa que:

- Se Carlos estiver presente na aula, a probabilidade de aprender o conteúdo é de 80%: $P(Ap|P) = 0{,}8$, em que Ap corresponde ao aprendizado e P corresponde à presença;
- Se Carlos estiver ausente, a probabilidade de aprender é 0%: $P(Ap|\bar{P}) = 0$, em que $\bar{P}$ corresponde à não presença, isto é, à ausência;
- Carlos está ausente em 25%: $P(\bar{P}) = 0{,}25$.

Para calcular a probabilidade de Carlos ter estado presente, sabendo que ele não aprendeu o conteúdo, isto é, $P(P|\overline{Ap})$, em que $\overline{Ap}$ corresponde ao não aprendizado, utilizamos a fórmula de Bayes:

$$P(P|\overline{Ap}) = \frac{P(\overline{Ap}|P) \times P(P)}{P(\overline{Ap}|P) \times P(P) + P(\overline{Ap}|\bar{P}) \times P(\bar{P})}$$

Sabemos que a probabilidade de Carlos **aprender**, dado que esteve presente, é $P(Ap|P) = 0{,}8$. Assim, a probabilidade de Carlos **não aprender**, dado que esteve presente, corresponde à probabilidade do evento **complementar**:

$$P(\overline{Ap}|P) = 1 - P(Ap|P) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

Sabemos ainda que a probabilidade de Carlos **não** estar presente é $P(\bar{P}) = 0{,}25$. Logo, a probabilidade de Carlos estar presente corresponde à probabilidade do evento **complementar**:

$$P(P) = 1 - P(\bar{P}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

Por fim, sabemos que a probabilidade de Carlos **aprender**, dado que **não** esteve **presente**, é $P(Ap|\bar{P}) = 0$. Logo, a probabilidade de Carlos **não aprender**, dado que **não** esteve **presente**, corresponde à probabilidade do evento complementar:

$$P(\overline{Ap}|\bar{P}) = 1 - P(Ap|\bar{P}) = 1 - 0 = 1$$

Substituindo esses valores na fórmula de Bayes, temos:

$$P(P|\overline{Ap}) = \frac{0{,}2 \times 0{,}75}{0{,}2 \times 0{,}75 + 1 \times 0{,}25} = \frac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}25} = \frac{0{,}15}{0{,}4} = 37{,}5\%$$

Ou seja, a probabilidade de Carlos estar presente, sabendo que ele não aprendeu é inferior a 50%

Gabarito: Certo.

Resumo da Aula

Definição clássica de probabilidade

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ totais} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Probabilidade da União – caso geral

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade da União – eventos mutuamente excludentes: $P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Teorema do Evento Complementar

Vale também para combinação de eventos (união e interseção) e para probabilidades condicionais

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Axiomas/Propriedades de Probabilidade

$$P(U) = 1$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Probabilidade Condicional – quando sabemos que o evento A ocorreu

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$$

Eventos Independentes – o resultado de um não influencia o resultado do outro

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$$

Teorema da Probabilidade Total: probabilidade do todo, a partir das probabilidades condicionais

$$P(I) = P(I|A) \times P(A) + P(I|B) \times P(B) + P(I|C) \times P(C)$$

Teorema de Bayes: quando a questão inverte os eventos a priori e a posteriori

$$P(A|I) = \frac{P(I|A) \times P(A)}{P(I|A) \times P(A) + P(I|B) \times P(B) + P(I|C) \times P(C)}$$