Aula 07

BNB - Raciocínio Lógico e Quantitativo - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

21 de Abril de 2023

Índice

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Introdução

Conjunto dos Naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$. Basicamente, esse conjunto compreenderá aqueles números que **surgem "naturalmente" da necessidade de contar**. Observe.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

A primeira coisa que você deve notar é que no conjunto dos números naturais **não vamos ter os famosos "números quebrados",** tais como "1,5", "2,81", "101,12"... Também não teremos os números negativos, tais como o "-1", '-105", "-56,15"...

É o conjunto mais simples e **possui uma quantidade infinita de elementos**. Uma notação importante é **o asterisco sobrescrito** ao símbolo do conjunto. **Ele vai indicar que o 0 está sendo excluído da lista**. Essa notação pode ser usada para qualquer conjunto que veremos.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

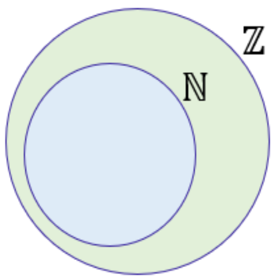
No estudo dos números naturais, podemos introduzir dois novos conceitos: **o antecessor e o sucessor** de um número. O antecessor de um número natural nada mais é do que **o número que vem antes dele**. Por exemplo, o antecessor do 5 é o 4, o antecessor do 100 é o 99, o antecessor do 12341 é o 12340.

Note que **o número 0 é o único natural que não possui antecessor natural**, pois **-1 pertence ao conjunto dos números inteiros,** como veremos posteriormente. O **sucessor de um número é o número que vem após ele**. Por exemplo, o sucessor do 5 é o 6 e o sucessor do 80 é o 81. Dessa vez, perceba que **todos os naturais possuem sucessores**.

Conjunto dos Inteiros ($\mathbb{Z}$)

Para obtermos o conjunto dos números inteiros, basta **pegar os naturais e adicionar os números negativos**!

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$



As primeiras informações que devemos ter em mente sobre o conjunto dos números inteiros é que ele **contém o conjunto dos números naturais**: $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$. Em outras palavras, **o conjunto dos números naturais é um subconjunto dos inteiros**.

Nesse contexto, note que **todos os números naturais são também números inteiros**. Portanto, é correto dizer que $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ **além de números naturais, são números inteiros**. Atenção ao fato de que, **os números negativos são números inteiros, mas não são números naturais**. Podemos utilizar o asterisco sobrescrito caso se queira tirar o 0 do conjunto.

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Nessa altura da aula, **é importante** definirmos duas classes especiais de números: **os números pares e os números ímpares**.

- **Número par**: todo número inteiro que pode ser escrito na forma $\boldsymbol{p = 2n}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- **Número ímpar**: todo número inteiro que pode ser escrito na forma $\boldsymbol{q = 2n + 1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

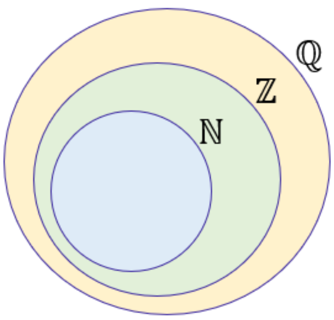
As definições acima podem parecer um pouco complicadas, normalmente, elas são utilizadas apenas para demonstrar propriedades desses números. Logo, podemos defini-los de uma maneira mais simplificada.

- **Número par:** todo número terminado em $0, 2, 4, 6$ e 8.
- **Número ímpar**: todo número terminado em $1, 3, 5, 7$ e 9.

A forma como conceituamos acima é **uma consequência da definição original**. É muito útil quando precisamos identificar se um número é par ou ímpar!

Conjunto dos Racionais ($\mathbb{Q}$)

Chegamos aos conjuntos dos números racionais! **O $\mathbb{Q}$ será formado pelo conjunto dos números inteiros mais os "números quebrados"!** Basicamente, dizemos que um número é racional se ele pode ser representado na **forma de fração**! Perceba, portanto, que o conjunto dos inteiros é um subconjunto dos racionais! $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



Isso significa que números como $\boldsymbol{1, 2\ ou\ 3}$ **além de serem naturais, são inteiros e também são racionais**. Mas vamos explicar melhor nossa definição de número racional, pois existe **mais uma condição que ele deve obedecer para ser considerado um número racional**. Logo, para um número ser racional precisamos que:

1. Ele possa ser representado em uma **forma fracionária de números inteiros**.

$$\frac{1}{1}=1 \quad ; \quad \frac{3}{2}=1{,}5 \quad ; \quad \frac{10}{2}=5 \quad ; \quad \frac{1}{10}=0{,}1 \quad ; \quad \frac{500}{3}=166{,}66\ldots$$

Todos os números acima são exemplos de números racionais.

2. Se ele tiver **uma representação decimal infinita**, para ser um racional, **ela também deve periódica**.

$$0{,}333\ldots \quad ; \quad 1{,}67676767\ldots ; \quad 100{,}123123123123\ldots \quad ; \quad 1{,}000100010001\ldots$$

Números com o formato acima são exemplos de números racionais pois, **apesar de possuírem uma representação decimal infinita, ela é periódica**. Esses números são **as famosas dízimas periódicas**! Estudaremos ela **com mais detalhes em um próximo momento**, quando daremos um foco especial no estudo das frações.

De antemão, eu quero que você grave: **dízimas periódicas são números racionais**! Elas podem ser convertidas em frações! Não se preocupe em entender as dízimas periódicas agora. **Dedicaremos um tempo na próxima aula exclusivamente para elas**! Guarde apenas que **são números racionais** e que **podemos transformá-las em frações**!

ESCLARECENDO!

Quando falamos da **representação decimal finita** de um número, estamos nos referindo a um número que possui uma **quantidade finita de algarismos**. Por exemplo, $100{,}003$ é um número com representação decimal finita. Já **o número $1{,}333\ldots$ é um exemplo de número com representação decimal infinita**. As reticências indicam que há muitos mais números a serem considerados. Nesse caso, esse número é formado por **infinitos "3" após a vírgula**. **Como o número 3 se repete**, dizemos ainda que possui uma representação decimal finita **e periódica**!

O que acontece se um número possuir uma **representação decimal infinita mas que não é periódica**? Nesses casos, **não poderemos escrever esses números em uma forma fracionária** e eles serão chamados de **números irracionais**!

Aposto que você conhece alguns números irracionais: $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots, \sqrt{3}=1{,}7320\ldots, \pi = 3{,}1415\ldots$. **Não ache** que todas as raízes são números irracionais. Veja, por exemplo, que $\sqrt{4}=2$, mas **2 é um número natural**.

Conjuntos dos Irracionais $(\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q})$

Normalmente, **representamos o conjunto dos irracionais como $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou simplesmente $\mathbb{I}$**. Lembre-se da operação "Diferença" que já conhecemos! Sendo assim, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ significa **o conjunto formado pelos números reais que não são números racionais**!

Mas o que seriam os números irracionais? Os números irracionais são todos os números que não podem ser representados pela fração de dois inteiros! Por exemplo, $\sqrt{2}$ e π são exemplos de números irracionais. Abaixo, vamos conhecer alguns números irracionais famosos!

- Pi (π)

$$\pi \approx 3{,}141592 \ldots$$

- Razão de Ouro (ou Proporção Áurea)

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618033 \ldots$$

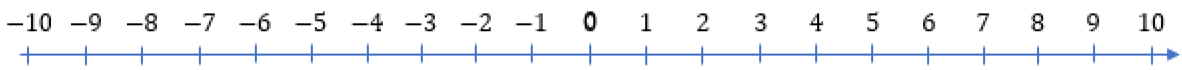
- Número de Euler (e)

$$e \approx 2{,}7182818 \ldots$$

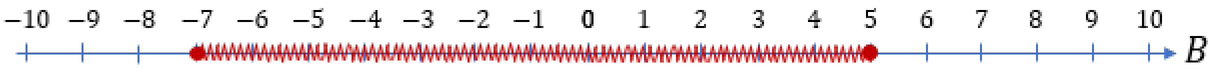
No momento, não vamos nos aprofundar muito em cada um dos números acima, teremos a oportunidade mais a frente! Para hoje, quero apenas que vocês **lembrem que tais números são irracionais**! Por fim, é importante saber que as raízes não exatas são também números irracionais. Por exemplo, temos $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$...

Conjunto dos Reais $(\mathbb{R})$

Chegamos ao conjunto dos números reais! Esse conjunto **engloba tanto o conjunto dos números racionais quanto os números irracionais!** Um número real é o conjunto de **todos os números que lidamos no nosso dia a dia...** Não importa se ele tem uma representação decimal finita tal como os números $\mathbf{1,5}$ e $\mathbf{10,354}$ ou uma representação decimal infinita como $\mathbf{1,6666}$ **...** . e $\mathbf{3,1415}$ **...** . Além de representar o conjunto dos números reais em um diagrama, também usamos uma reta! **É a chamada reta real**!



Esse tipo de representação vai ser usado principalmente **quando tivermos estudando inequações**! Lá, precisaremos definir um tipo de conjuntos que **chamaremos de intervalo**. Por exemplo, se quero representar um conjunto B formado por todos os números que estão entre -7 e 5, **com eles inclusos**, podemos fazer o seguinte esquema:



Conjunto dos Complexos ($\mathbb{C}$)

Aqui já estamos indo um pouquinho além! Vou comentar apenas brevemente, pessoal! É só a título de conhecimento! Os números complexos são estudados em uma aula própria! No entanto, quero que você saiba que eles existem! Eles são números na forma:

$$z = a + bi$$

Em que "a" e "b" são números reais e "i" é a chamada unidade imaginária.

$$i = \sqrt{-1}$$

Calma! Veremos tudo isso com mais detalhes em uma aula específica do curso, caso seu edital tenha previsto. Nesse momento, quero que você guarde **que todo número real é também um número complexo**. Veja que quando "b" é igual a zero, temos:

$$z = a + 0 \cdot i \qquad \rightarrow \qquad z = a$$

Ressalta-se que o inverso não é verdadeiro, ou seja, não é verdade que todo complexo é um real! Por exemplo, $z = 2 + i$ é um número complexo, mas não é um real.

- Um número complexo é um número "z" que possui a forma:

$$z = a + bi \qquad a, b \in \mathbb{R} \;\; e \;\; i = \sqrt{-1}$$

- Todo número real é um número complexo, mas nem todo complexo é um número real.

- O conjunto dos reais está contido no conjunto dos complexos.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Problemas envolvendo Conjuntos Numéricos

Nessa parte da aula, falaremos um pouco mais sobre **as operações** dentro dos conjuntos numéricos. O foco não será propriamente em como realizar essas operações, mas sim **em algumas propriedades que estão sempre aparecendo nas provas**.

Vamos responder os seguintes tipos de questionamentos: *a soma de números inteiros será sempre um número inteiro? E a multiplicação de números irracionais será sempre um número irracional? Fique atento e vamos nessa*!

Soma

Para a soma, devemos guardar as seguintes propriedades:

- A soma de números naturais é sempre um número natural;
- A soma de números inteiros é sempre um número inteiro;
- A soma de números racionais é sempre um número racional;
- A soma de números reais é sempre um número real.

Note que deixamos apenas um conjunto de números fora da nossa lista: **os irracionais**. Como já abordamos em uma questão feita no capítulo anterior, **a soma de números irracionais nem sempre será um número irracional**. Para mostrar isso, imagine o seguinte exemplo: considere os números irracionais $5+\sqrt{2}$ e $5-\sqrt{2}$. Vamos somá-los?

$$S=(5+\sqrt{2})+(5-\sqrt{2})$$
$$S=5+\sqrt{2}+5-\sqrt{2}$$
$$S=10$$

Perceba que a soma dos dois número irracionais que escolhemos **resultou em um número racional**. Logo, muito atenção com esse tipo de **generalização acerca dos números irracionais**! Além disso, podemos ainda comentar a soma de números pares e ímpares.

- $\text{PAR} \pm \text{PAR} = \text{PAR}$
- $\text{ÍMPAR} \pm \text{ÍMPAR} = \text{PAR}$
- $\text{ÍMPAR} \pm \text{PAR} = \text{ÍMPAR}$

Subtração

- A subtração de números inteiros é um outro número inteiro.
- A subtração de números racionais é um outro número racional.

- A subtração de números reais é um outro número real.

Dessa vez, deixamos dois conjuntos de fora: **o conjunto de números naturais e dos irracionais**. Observe que 10 e 100 são dois números naturais, vamos subtraí-los?

$$D = 10 - 100 \quad \rightarrow \quad D = -90$$

A subtração do 10 por 100 resulta em -90. Logo, tivemos **dois números naturais que subtraídos forneceram um número inteiro**. Isso sempre acontecerá quando subtraímos um número maior de um menor. É por esse motivo que **<u>não podemos dizer</u> que a subtração de dois números naturais é um outro número natural**.

Analogamente, para os números irracionais, vamos **escolher dois números para mostrar que essa propriedade não vale para eles**. Por exemplo, considere os seguintes números irracionais: π e $\pi + 2$. Vamos subtraí-los? Note que **o resultado será um número racional.**

$$D = (\pi + 2) - \pi \quad \rightarrow \quad D = 2$$

(PREF. ARARANGUÁ/2016) Assinale a alternativa INCORRETA:

A) A diferença entre dois números naturais pode não ser um número natural.

B) O produto entre dois números racionais é sempre um número racional.

C) A soma entre dois números irracionais é sempre um número irracional.

D) $0{,}845$ e $1{,}7454545\ldots$ são números racionais.

E) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ e π são números irracionais.

Comentários:

A) A diferença entre dois números naturais pode não ser um número natural.

Correto. Acabamos de ver na teoria que, em algumas situações, **a subtração de dois números naturais poderá dar um número negativo** (que é um número inteiro).

B) O produto entre dois números racionais é sempre um número racional.

Correto. Se temos dois números racionais, então eles podem ser escritos na forma de uma fração de números inteiros. O **produto dessas frações será uma outra fração** também de números inteiros e, portanto, um número racional.

C) A soma entre dois números irracionais é sempre um número irracional.

Errado. É a alternativa procurada. Vimos também na teoria que a soma entre dois números irracionais nem sempre dará um outro número irracional. **Algumas vezes, poderemos obter um número racional**.

D) $0{,}845$ e $1{,}7454545\ldots$ são números racionais.
Correto. Observe que o número **$0,845$ possui uma representação decimal finita**, sendo assim, é facilmente convertido em uma fração de números inteiros, veja:

$$0{,}845 = \frac{845}{1000}$$

Além disso, $1{,}7454545\ldots$ é uma dízima periódica e vimos que **toda dízima periódica é um número racional**.

E) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ e π são números irracionais.
Correto. São exemplos clássicos de números irracionais. Observe eles expandidos:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379\ldots$$

$$\sqrt[3]{4} = 1{,}5874010519681994747517056392723082603914933278998530098082857618\ldots$$

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923\ldots$$

Gabarito: Letra C

Multiplicação

- A multiplicação de dois números naturais é sempre um número natural.
- A multiplicação de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
- A multiplicação de dois números racionais é sempre um número racional.
- A multiplicação de dois números reais é sempre um número real.

Mais uma vez, **os números irracionais ficaram de fora** da nossa lista. Para provar porque estão de fora, vamos considerar dois números irracionais:

$$\sqrt{5} = 2.2360679774997896964091736687312\ldots$$

$$\sqrt{20} = 4.4721359549995793928183473374\,6\ldots$$

Quando multiplicamos os dois: $\boldsymbol{\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10}$. Note que, **nesse exemplo**, o produto de dois números irracionais **resultou em um número racional**.

Divisão

- A divisão de dois números racionais será sempre um racional.
- A divisão de dois números reais será sempre um número real.

Observe que é a nossa menor lista até agora. **Divisão de números naturais não necessariamente fornecerá um outro número natural**, isso vale igualmente **para os números inteiros e irracionais**. Observe.

➤ Considere **os números naturais $\mathbf{1}$ e $\mathbf{2}$**. Vamos dividi-los?

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ora, **$0,5$ não é um número natural**, é um número racional.

➤ Considere **os números inteiros $-\mathbf{5}$ e $\mathbf{2}$**. Vamos dividi-los?

$$-\frac{5}{2} = -2{,}5$$

$-2,5$ não é um número inteiro, é um número racional.

➤ Considere **os números irracionais $\sqrt{\mathbf{1000}}$ e $\sqrt{\mathbf{10}}$**. Vamos dividi-los?

$$\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{10}} = \sqrt{100} = 10$$

10 não é um irracional, é um número racional.

Muito cuidado com **as generalizações envolvendo divisões (quocientes).** Esse cuidado maior deve-se ao fato de que **os conjuntos de números naturais e inteiros não abrigam os famosos "números quebrados"** e, quando dividimos um número pelo outro, é muito fácil obter esse tipo número.

QUESTÕES COMENTADAS - CEBRASPE

Problemas

1. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Acerca das operações com números reais e suas propriedades, julgue o item a seguir.

A soma de dois números irracionais positivos é sempre um número irracional.

Comentários:
Errado, moçada! O CESPE gosta bastante dessas questões com números irracionais. Nelas, é sempre bom procurarmos por contraexemplos para provar que o item está errado.

Considere os **dois números irracionais positivos** abaixo:

$$a = 10 + \sqrt{2} \qquad b = 10 - \sqrt{2}$$

Agora, vamos somá-los!

$$a + b = \left(10 + \sqrt{2}\right) + \left(10 - \sqrt{2}\right)$$

$$a + b = 10 + 10 \quad \rightarrow \quad a + b = 20$$

Observe que somamos dois números irracionais positivos e obtivemos um número natural! Logo, o que o enunciado afirma **não é sempre verdade**.

Gabarito: ERRADO.

2. (CESPE/SEDUC-AL/2021) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e, cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = ln\, x = log_e\, x$ tem inúmeras aplicações científicas. A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

O número de Euler é menor que o número racional 2,72.

Comentários:
Essa questão é bem direta! O próprio enunciado nos forneceu o número de Euler.

$$e \approx 2{,}718 \ldots$$

Note que $2{,}71 < 2{,}72$. Com isso, o número de Euler realmente é menor do que 2,72.

Gabarito: CERTO.

3. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Acerca das operações com números reais e suas propriedades, julgue o item a seguir.

Se o cubo de um número inteiro é ímpar, então esse número deve ser, necessariamente, ímpar.

Comentários:

Pessoal, vamos chamar esse número ímpar de "n". Se **"n" é ímpar**, então podemos escrevê-lo na forma:

$$n = 2k + 1$$

Vamos elevar "n" ao cubo.

$$n^3 = (2k + 1)^3$$

Nesse ponto, podemos multiplicar (2k+1) três vezes, usando a **propriedade distributiva**. No entanto, também podemos usar a seguinte **identidade**:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Fazendo isso, ficamos com:

$$n^3 = 8k^3 + 3 \cdot (2k)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2k) \cdot 1^2 + 1^3$$

$$n^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$$

Reescrevendo de uma forma mais conveniente:

$$n^3 = 2 \cdot (4k^3 + 5k^2 + 3k) + 1$$

Chamando $k' = 4k^3 + 5k^2 + 3k$, podemos reescrever:

$$\boxed{\boldsymbol{n^3 = 2k' + 1}}$$

Com esse resultado, podemos concluir que **n³ é um número ímpar também**, necessariamente.

Gabarito: CERTO.

4. (CESPE/SEDUC-AL/2021) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e, cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = \ln x = \log_e x$ tem inúmeras aplicações científicas. A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

Se $r = 2{,}718718718...$ é uma dízima periódica, então a diferença $(r - e)$ é um número racional.

Comentários:

Ora, se "r" é uma dízima periódica, então temos que **"r" é um número <u>racional</u>**. Agora, guarde a seguinte informação:

A diferença (ou soma) entre dois números, sendo um deles racional e o outro irracional, **será um número irracional**. Por exemplo, se você subtrai π de 1, o resultado será $1 - \pi$, que é um número irracional.

Com isso, $(r - e)$ **é um número irracional.**

Gabarito: ERRADO.

5. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Considerando as propriedades e as operações fundamentais dos números inteiros, racionais, irracionais e reais, julgue o item a seguir:

O produto de dois números racionais é sempre um número racional. O mesmo é válido para números irracionais: o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

Comentários:

De maneira simplificada, podemos conceituar um número racional como **todo número que pode ser escrito na forma de fração**. De fato, como vimos na teoria, **a multiplicação de dois números racionais será um racional**, mas **<u>o produto</u>** de dois números irracionais **nem sempre será irracional**.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

Gabarito: ERRADO.

6. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Considerando as propriedades e as operações fundamentais dos números inteiros, racionais, irracionais e reais, julgue o item a seguir:

Todo conjunto não vazio de números inteiros positivos possui um menor elemento, isto é, se S é um conjunto de números inteiros positivos, não vazio, então existe $s \in S$ tal que $s \leq x$, para todo $x \in S$. Essa mesma propriedade é também válida para conjuntos não vazios de números reais positivos.

Comentários:

Queremos saber se sempre em um **conjunto não vazio de números inteiros positivos,** vamos ter um valor que será menor que qualquer outro que pertença a esse conjunto. Por exemplo,

$$A = \{\mathbf{5}, 102, 532, 1023\}$$

$$B = \{100, \mathbf{20}, 50, 123, 999\}$$

$$C = \{34212, 23122, \mathbf{7237}, 12831, 23812\}$$

Perceba que **não importa que conjunto montamos com números inteiros positivos**, sempre haverá um elemento que será menor (ou igual) que qualquer outro elemento desse conjunto. Esse fato é conhecido como **Princípio da Boa Ordenação ou Princípio da Boa Ordem**, cuja demonstração foge do escopo do nosso curso. De toda forma, **é um princípio bastante intuitivo**.

Acontece que, tal princípio **é apenas válido para os números naturais (ou números inteiros positivos).** Imagine o intervalo (10,15). Como o 10 não está contido no conjunto, **você pode chegar tão próximo dele quanto se queira**. Sempre haverá um número menor. Por exemplo, se você diz que o menor número do intervalo (10, 15) é 10,000000000001, isso não é verdade pois 10,0000000000000000001 também é um elemento dele.

Nessas situações, **em que o limite inferior do intervalo é aberto**, sempre encontraremos um número menor, **não importa o quão pequeno seja o número que estamos pensando**. Logo, **o item se encontra errado pois o Princípio da Boa Ordenação não é válido para o conjunto dos reais**, conforme exemplo ilustrado acima.

Gabarito: ERRADO.

7. (CESPE/SEDF/2017) O resultado da soma dos números reais a e b será um número racional se, e somente se, cada um dos números a e b for um número racional.

Comentários:

Um jeito rápido de julgar esse item é **buscar um contraexemplo**. Considere os seguintes números reais:

$$a = 2 + \sqrt{3}$$

$$b = 2 - \sqrt{3}$$

Note que **ambos são números irracionais**. Vamos somá-los e ver que número obtemos.

$$N = a + b$$

$$N = \left(2+\sqrt{3}\right) + \left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$N = 4$$

Ora, **somamos dois números irracionais e <u>obtivemos um número racional</u>**! Logo, para a soma de dois números ser um número racional, **<u>não é necessário</u> que os dois sejam racionais**.

Gabarito: ERRADO.

8. (CESPE/MDIC/2014) Lúcio, Breno, Cláudia e Denise abriram a loja virtual Lik, para a qual, no ato de abertura, Lúcio contribuiu com R$ 10.000,00; Breno, com R$ 15.000,00; Cláudia, com R$ 12.000,00; e Denise, com R$ 13.000,00. Os lucros obtidos por essa loja serão distribuídos de forma diretamente proporcional à participação financeira de cada um dos sócios no ato de abertura da loja. A partir dessas informações, julgue o item a seguir:

Se M for a quantidade média de acessos por minuto ao sítio eletrônico da loja Lik e $M^2 = 0{,}8$, então M será um número irracional menor que 0,8.

Comentários:

Como **M é um número positivo**, podemos dizer que $M = \sqrt{0{,}8}$. Sabemos que **raízes de números menores do que um produzem resultados maiores do que o radicando**. Por exemplo, lembre-se:

$$\sqrt{0{,}64} = 0{,}8 \qquad (0{,}8 > 0{,}64)$$

$$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \qquad (0{,}5 > 0{,}25)$$

Nesse raciocínio, M, que é a **raiz quadrada positiva de 0,8**, **<u>é maior do que 0,8</u>** e não menor.

Gabarito: ERRADO.

9. (CESPE/SECTI-DF/2014) Acerca das propriedades dos conjuntos numéricos, julgue o item a seguir.

O número $\sqrt{12+6\sqrt{3}} + \sqrt{12-6\sqrt{3}}$ é um número irracional.

Comentários:

Questão bem sacana, pessoal! O aluno fica muito tentado a marcar o item como correto!

Reconheço que a resolução dessa questão vai envolver alguns conhecimentos que não estudamos ainda, como **produtos notáveis**. Por isso, caso não tenha visto ainda, **não se desespere**! Muito certamente a resolução fará mais sentido lá na frente! Inicialmente, vamos chamar esse número de "x".

$$x = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$$

Agora, vamos **elevar os dois lados ao quadrado**.

$$x^2 = \left(\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}\right)^2$$

Para desenvolver esse quadrado, vamos usar o produto notável: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$x^2 = \left(\sqrt{12 + 6\sqrt{3}}\right)^2 + 2\sqrt{(12 + 6\sqrt{3})(12 - 6\sqrt{3})} + \left(\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}\right)^2$$

$$x^2 = (12 + \cancel{6\sqrt{3}}) + 2\sqrt{(12 + 6\sqrt{3})(12 - 6\sqrt{3})} + (12 - \cancel{6\sqrt{3}})$$

$$x^2 = 24 + 2\sqrt{(12 + 6\sqrt{3})(12 - 6\sqrt{3})}$$

Agora, para note que esse produto dentro da raiz é um **produto da soma pela diferença**. Com isso, podemos usar que: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$x^2 = 24 + 2\sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2}$$

$$x^2 = 24 + 2\sqrt{144 - 108}$$

$$x^2 = 24 + 2\sqrt{36}$$

$$x^2 = 24 + 2 \cdot 6 \quad \rightarrow \quad x^2 = 24 + 12 \quad \rightarrow \quad x^2 = 36 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{36}$$

$$\boxed{x = \pm 6}$$

Note que "x" é uma soma de números positivos, logo, **ele só pode ser um número positivo também**. O sinal de **"menos"** que obtivemos apareceu por causa das nossas manipulações (mais precisamente, quando elevamos os dois lados ao quadrado), por isso, **não devemos considerá-lo**. Com isso,

$$\boldsymbol{x = 6}$$

Professor, então o senhor está me dizendo que $\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{12-6\sqrt{3}}=6$ *????*

Isso mesmo, meu caro aluno! Logo, $\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ é um número **racional**.

Gabarito: ERRADO.

10. (CESPE/SEDUC-AL/2013) Sabendo que os números racionais são, precisamente, as dízimas periódicas, julgue o item seguinte acerca de números e dízimas periódicas e não periódicas.

O produto de dois números irracionais é um número irracional.

Comentários:
Errado, pessoal! Fizemos vários exemplos na teoria para mostrar que isso não é verdade! Por exemplo, considere $\sqrt{5}$ e $\sqrt{20}$! São **dois números irracionais** cujo produto é:

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}=\sqrt{100}=10$$

Logo, acabamos de mostrar dois números irracionais em que o produto deles é um **número racional**.

Gabarito: ERRADO.

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Problemas

1. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Acerca das operações com números reais e suas propriedades, julgue o item a seguir.

A soma de dois números irracionais positivos é sempre um número irracional.

2. (CESPE/SEDUC-AL/2021) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e, cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = ln\, x = log_e\, x$ tem inúmeras aplicações científicas. A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

O número de Euler é menor que o número racional 2,72.

3. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Acerca das operações com números reais e suas propriedades, julgue o item a seguir.

Se o cubo de um número inteiro é ímpar, então esse número deve ser, necessariamente, ímpar.

4. (CESPE/SEDUC-AL/2021) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e, cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = ln\, x = log_e\, x$ tem inúmeras aplicações científicas. A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

Se $r = 2{,}718718718...$ é uma dízima periódica, então a diferença $(r - e)$ é um número racional.

5. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Considerando as propriedades e as operações fundamentais dos números inteiros, racionais, irracionais e reais, julgue o item a seguir:

O produto de dois números racionais é sempre um número racional. O mesmo é válido para números irracionais: o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

6. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Considerando as propriedades e as operações fundamentais dos números inteiros, racionais, irracionais e reais, julgue o item a seguir:

Todo conjunto não vazio de números inteiros positivos possui um menor elemento, isto é, se S é um conjunto de números inteiros positivos, não vazio, então existe $s \in S$ tal que $s \leq x$, para todo $x \in S$. Essa mesma propriedade é também válida para conjuntos não vazios de números reais positivos.

7. (CESPE/SEDF/2017) O resultado da soma dos números reais a e b será um número racional se, e somente se, cada um dos números a e b for um número racional.

8. (CESPE/MDIC/2014) Lúcio, Breno, Cláudia e Denise abriram a loja virtual Lik, para a qual, no ato de abertura, Lúcio contribuiu com R$ 10.000,00; Breno, com R$ 15.000,00; Cláudia, com R$ 12.000,00; e Denise, com R$ 13.000,00. Os lucros obtidos por essa loja serão distribuídos de forma diretamente proporcional à participação financeira de cada um dos sócios no ato de abertura da loja. A partir dessas informações, julgue o item a seguir:

Se M for a quantidade média de acessos por minuto ao sítio eletrônico da loja Lik e $M^2 = 0{,}8$, então M será um número irracional menor que 0,8.

9. (CESPE/SECTI-DF/2014) Acerca das propriedades dos conjuntos numéricos, julgue o item a seguir.

O número $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ é um número irracional.

10. (CESPE/SEDUC-AL/2013) Sabendo que os números racionais são, precisamente, as dízimas periódicas, julgue o item seguinte acerca de números e dízimas periódicas e não periódicas.

O produto de dois números irracionais é um número irracional.

Gabarito

1. ERRADO
2. CERTO
3. CERTO
4. ERRADO
5. ERRADO
6. ERRADO
7. ERRADO
8. ERRADO
9. ERRADO
10. ERRADO

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.