MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES

A **média aritmética simples** está muito presente em nosso cotidiano, seja no **consumo médio de combustível**, na **temperatura média** ou na **renda per capita**. Essa medida é definida como **o quociente entre a soma de todos os elementos e o número deles**. **A propriedade principal da média é preservar a soma dos elementos de um conjunto de dados.**

Podemos adotar o seguinte raciocínio para encontrarmos a fórmula da média aritmética. Dada uma lista de n números, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, a soma de seus termos é igual a:

$$\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}_{n\ fatores}.$$

A média aritmética dessa lista é um número $\bar{x}$, tal que, se todos os elementos forem substituídos por $\bar{x}$, a soma da lista permanecerá preservada. Assim, substituindo todos os elementos por $\bar{x}$, teremos uma nova lista, $\{\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}\}$, cuja soma é:

$$\underbrace{\bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x}}_{n\ fatores} = n \times \bar{x}$$

Como as somas das duas listas são iguais, temos:

$$n \times \bar{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Portanto, a média aritmética é:

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}}$$

Reparem que no numerador somamos todos os elementos, ao passo que no denominador temos a quantidade de elementos somados (n).

EXEMPLIFICANDO

Calcule a média aritmética dos números 8, 16, 26 e 30.

Para responder a essa questão, somaremos os quatro números e, em seguida, dividiremos o resultado por quatro:

$$\bar{x} = \frac{8 + 16 + 26 + 30}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Portanto, 20 é o valor da média aritmética dos números 8, 16, 26 e 30.

Repare que a soma dos números da lista é $8 + 16 + 26 + 30 = 80$. Se os quatro números forem substituídos por 20, a soma também será $20 + 20 + 20 + 20 = 80$. Por isso, dizemos que **a média aritmética preserva a soma dos números.**

FIQUE ATENTO!

Sempre que a questão não especificar qual o tipo de média, faremos o cálculo da média aritmética.

RESUMINDO

Sobre a média aritmética, podemos afirmar que:

I – ela preserva a soma dos elementos da lista de números;

II – ela é obtida pelo quociente entre a soma de todos os elementos de um conjunto e quantidade de elementos nele existentes $\left(\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$.

DESPENCA NA PROVA!

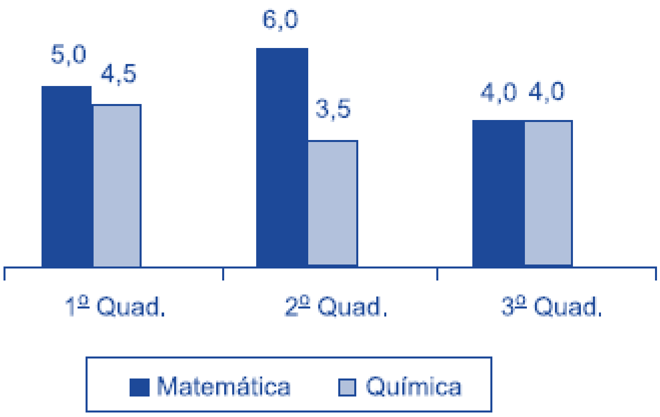
A soma total de um conjunto de dados é dada pela multiplicação entre a média do conjunto e a quantidade de termos. Isso decorre da própria definição de média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{soma}{n} \Longrightarrow soma = n \times \bar{x}$$

Trata-se da mesma fórmula apresentada anteriormente, tendo apenas o termo "n" passado para o outro lado da igualdade, multiplicando a média.

HORA DE PRATICAR!

(VUNESP/FITO/2020) O gráfico apresenta as notas de um aluno, nas disciplinas de matemática e química, nos três quadrimestres de 2019.



A média das notas de matemática desse aluno corresponde, da média das notas de química, a

a) 120%

b) 125%

c) 130%

d) 135%

e) 140%

Comentários:

A média aritmética é definida pelo quociente entre a soma dos valores de um determinado conjunto e a quantidade de valores nele existentes. Pelos valores dados no enunciado, a média das notas de matemática é:

$$\bar{x}_{mat} = \frac{5+6+4}{3}$$
$$\bar{x}_{mat} = \frac{15}{3}$$
$$\bar{x}_{mat} = 5$$

Já a média das notas de química é:

$$\bar{x}_{quím} = \frac{4{,}5+3{,}5+4}{3}$$
$$\bar{x}_{quím} = \frac{12}{3}$$
$$\bar{x}_{quím} = 4$$

Com isso, em termos percentuais, a média das notas de matemática desse aluno corresponde, da média das notas de química, a:

$$\frac{5}{4} = 1{,}25 = 125\%$$

Gabarito: B.

(CESPE/UNCISAL/2019) A crise mundial tem contribuído para o aumento da entrada de estrangeiros no Brasil. A maior parte vem de países vizinhos, a exemplo do Paraguai. A tabela a seguir apresenta, de acordo com dados do Ministério da Justiça, a quantidade de paraguaios que vieram para o Brasil nos anos de 2009, 2011 e 2012.

Ano	Paraguaios
2009	11000
2010	?
2011	19000
2012	27300

Disponível em: http://reporterbrasil.org.br. Acesso em: 9 nov. 2018 (adaptado).

Se a média anual de imigrantes paraguaios para o Brasil, no período de 2009 a 2012, foi de 17 600, então, quantos paraguaios imigraram para o Brasil em 2010?

a) 13 100

b) 14 325

c) 15 000

d) 15 840

e) 17 600

Comentários:

A questão informa que a média anual de imigrantes paraguaios no Brasil, no período de 2009 a 2012, foi de 17.600. Como sabemos, a média é dada pela soma dos dados dividida pelo número de observações. Então, se considerarmos que o número de imigrantes em 2010 foi x, teremos:

$$\bar{x} = \frac{11000 + x + 19000 + 27300}{4}$$

$$17600 = \frac{57300 + x}{4}$$

$$4 \times 17600 = 57300 + x$$

$$70400 = 57300 + x$$

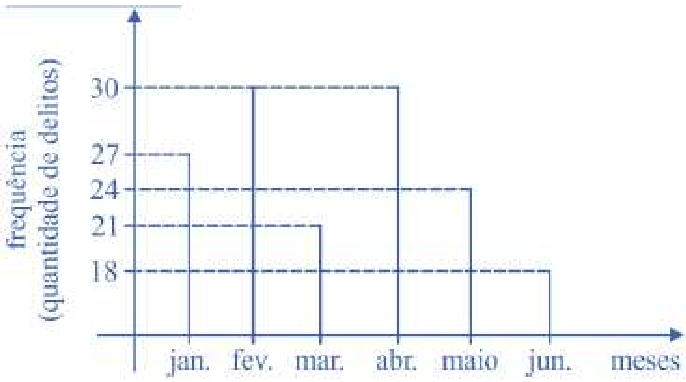
$$x = 70400 - 57300$$

$$x = 13.100$$

Gabarito: A.

(CESPE/PM AL/2018*)* Acerca de análise de dados, julgue o próximo item.

O gráfico a seguir mostra a distribuição de frequência de delitos ocorridos em determinado bairro nos seis primeiros meses de 2018.



Nesse caso, a média dos delitos ocorridos no semestre considerado foi superior à média dos delitos ocorridos no segundo trimestre.

Comentários:

Precisamos calcular duas médias: do segundo trimestre e do semestre inteiro.

Conforme o gráfico, para o segundo trimestre, temos:

$$\begin{cases} abril = 30 \; delitos \\ maio = 24 \; delitos \\ junho = 18 \; delitos \end{cases}$$

A média é dada pela soma de todos os valores dividida pelo número de meses. Logo:

$$\bar{x} = \frac{30 + 24 + 18}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{72}{3} = 24$$

Para o semestre, temos:

$$\begin{cases} janeiro = 27\ delitos \\ fevereiro = 30\ delitos \\ março = 21\ delitos \\ segundo\ trimestre = 72\ delitos \end{cases}$$

Logo:

$$\bar{x} = \frac{27 + 30 + 21 + 72}{6}0$$

$$\bar{x} = \frac{150}{6} = 25$$

Então, podemos concluir que o número de delitos no semestre foi maior que no segundo trimestre.

Gabarito: Certo.

Propriedades da Média Aritmética

Nessa seção, vamos estudar algumas propriedades importantes sobre a média aritmética.

TOME NOTA!

<u>1ª Propriedade:</u> Dado um conjunto com $n \geq 1$ elementos, a média aritmética sempre existirá e será única.

Desde que o conjunto tenha pelo menos um elemento, podemos afirmar que a média aritmética sempre existe, pois sempre conseguiremos calcular o quociente entre a soma dos elementos e o número deles. Além disso, como o somatório dos elementos resulta em um único número, o valor da média também sempre será único.

TOME NOTA!

2ª Propriedade: **A média aritmética $\bar{x}$ de um conjunto de dados satisfaz a expressão $m \leq \bar{x} \leq M$, em que m e M são, respectivamente, os elementos que representam o valor mínimo e o valor máximo desse conjunto.**

$$\boldsymbol{mínimo \leq \bar{x} \leq Máximo}$$

Essa propriedade diz respeito ao fato de a média aritmética sempre se encontrar entre os números mínimo e máximo de um conjunto.

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com média $\bar{x} = 3$.

Reparem que o valor mínimo desse conjunto é 1 e o máximo é 5. Portanto, a média encontrada satisfaz a 2ª propriedade:

$$1 \leq \bar{x} \leq 5$$

Se a sequência fosse $\{y_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, teríamos como média:

$$\bar{y} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

Assim, o valor mínimo seria 1 e o máximo 9. Novamente a propriedade continuaria válida, pois:

$$1 \leq \bar{x} \leq 9$$

Essa propriedade sempre será válida, seja qual for a sequência escolhida.

Alguns alunos costumam me pedir para demonstrar as propriedades apresentadas na aula, pois sentem mais facilidade de assimilar o conteúdo dessa maneira. Entendo, porém, que essa informação não é relevante para a maioria. Por isso, sempre que a demonstração for um pouco mais complexa, colocarei a dedução em uma seção “indo mais fundo!”. Vamos lá!

Se m e M são os valores mínimo e máximo de um conjunto, então, necessariamente, todos os elementos desse conjunto serão maiores ou iguais a m e menores ou iguais a M, ou seja, $m \leq x_i \leq M$, para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. Assim, podemos fazer:

$$m \leq x_1 \leq M$$

$$m \leq x_2 \leq M$$

$$\vdots$$

$$m \leq x_n \leq M$$

Somando as n inequações, obtemos:

$$n \times m \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n \times M$$

Agora, dividindo tudo por n, temos:

$$m \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq M$$

Portanto, concluímos que a média está sempre entre os valores mínimo e máximo de um conjunto:

$$\boldsymbol{m \leq \bar{x} \leq M}$$

TOME NOTA!

<u>3ª Propriedade:</u> Somando-se (ou subtraindo-se) uma constante c de todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica aumentada (ou diminuída) dessa constante.

$$\overline{y} = \overline{x} + c \quad \text{ou} \quad \overline{y} = \overline{x} - c$$

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com média $\bar{x} = 3$.

Se adicionarmos uma constante 5 a cada um de seus números, vamos obter uma nova lista $\{x_n + 5\} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, cuja média é:

$$\overline{x + 5} = \frac{6 + 7 + 8 + 9 + 10}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Veja que, como acrescentamos 5 a cada um dos números da lista, a média também aumentou 5 unidades, de 3 foi para 8.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos como demonstrar a propriedade para a adição de uma constante. Esse mesmo raciocínio pode ser seguido para a subtração de uma constante.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números:

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Seja $\{y_n\}$ uma sequência de números formada pela adição de uma constante c a cada um dos termos de $\{x_n\}$:

$$\{y_n\} = \{x_n + c\} = \{x_1 + c, x_2 + c, \cdots, x_n + c\},$$

e $\bar{y}$ a média aritmética dos termos dessa nova sequência:

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + c) + (x_2 + c) + \cdots + (x_n + c)}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + \overbrace{(c + c + \cdots + c)}^{n\ termos}}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n \times c}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} + \frac{n \times c}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} + c$$

Portanto, ao adicionarmos uma constante c aos elementos de um conjunto, a média do novo conjunto foi aumentada em c:

$$\bar{y} = \bar{x} + c$$

TOME NOTA!

<u>4ª Propriedade:</u> Multiplicando-se (ou dividindo-se) uma constante c de todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica multiplicada (ou dividida) por esta constante.

$$\bar{y} = \bar{x} \times c \quad \textbf{ou} \quad \bar{y} = \bar{x} \div c$$

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com média $\bar{x} = 3$.

Se multiplicarmos cada um de seus elementos por uma constante 5, vamos obter uma nova lista $\{x_n \times 5\} = \{5, 10, 15, 20, 25\}$, cuja média é:

$$\overline{x \times 5} = \frac{5 + 10 + 15 + 20 + 25}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

Veja que, como multiplicamos cada um dos números da lista por 5, a média também foi multiplicada por 5, aumentando de 3 para 15.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos como demonstrar a propriedade para a multiplicação por uma constante. Esse mesmo raciocínio pode ser seguido para a divisão por uma constante.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números:

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Seja $\{y_n\}$ uma sequência de números formada pela multiplicação de cada um dos termos de $\{x_n\}$ por uma constante c:

$\{y_n\} = \{x_n \times c\} = \{x_1 \times c, x_2 \times c, \cdots, x_n \times c\},$

e $\bar{y}$ a média aritmética dos termos dessa nova sequência:

$$\bar{y} = \frac{(x_1 \times c) + (x_2 \times c) + \cdots + (x_n \times c)}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \times c}{n}$$

$$\bar{y} = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \times c$$

Portanto, ao multiplicarmos os elementos de um conjunto por uma constante c, a média do novo conjunto também foi multiplicada por c:

$$\bar{y} = \bar{x} \times c$$

TOME NOTA!

5ª Propriedade: A soma algébrica dos desvios em relação à média é nula.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, com média $\bar{x} = 4$.

O desvio em relação à média é a diferença entre cada elemento da sequência e a média aritmética. Como a sequência possui 7 elementos, teremos o mesmo número de desvios para calcular. Logo, basta encontrarmos a diferença entre cada elemento e a média:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 1 - 4 = -3$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 2 - 4 = -2$$

$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 3 - 4 = -1$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 4 - 4 = 0$$

$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 5 - 4 = 1$$

$$d_6 = x_6 - \bar{x} = 6 - 4 = 2$$

$$d_7 = x_7 - \bar{x} = 7 - 4 = 3$$

Agora, somaremos todos esses desvios:

$$\sum_{i=1}^{7} d_i = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i = (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i = 0$$

Portanto, não importa qual a sequência de números, a soma dos desvios em relação à média é sempre igual a zero.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos como demonstrar essa propriedade.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números:

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \bar{x} \times n$$

A soma dos desvios em relação à média é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}$$

A média é um valor constante para essa sequência de números, portanto, podemos tirá-la do somatório:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} \times \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} \times n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - \bar{x} \times n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \bar{x} \times n - \bar{x} \times n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

TOME NOTA!

<u>6ª Propriedade:</u> A soma dos quadrados dos desvios da sequência de números $\{x_i\}$, em relação a um número a, é mínima se a for a média aritmética dos números.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \geq \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Essa propriedade afirma que, caso os desvios sejam calculados com relação a um número diferente da média, e os resultados de tais desvios sejam elevados ao quadrado e somados, teremos um número necessariamente maior do que obteríamos caso a mesma operação fosse realizada utilizando-se a média.

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como exemplo a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, com média $\bar{x} = 4$. Já calculamos os desvios desses números em relação à média, vamos relembrar:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 1 - 4 = -3$$
$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 2 - 4 = -2$$
$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 3 - 4 = -1$$
$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 4 - 4 = 0$$
$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 5 - 4 = 1$$
$$d_6 = x_6 - \bar{x} = 6 - 4 = 2$$
$$d_7 = x_7 - \bar{x} = 7 - 4 = 3$$

Na propriedade anterior, vimos que a soma dos desvios é sempre igual a zero. Agora, calcularemos a soma dos quadrados desses desvios. Em outras palavras, vamos elevar cada um deles ao quadrado e somar todos os resultados:

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2 + d_7^2$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = 28$$

A propriedade nos garante que, para essa sequência numérica, o valor 28 é o menor valor possível. Isto é, se encontrarmos os desvios em relação a outro número (diferente da média) e, em seguida, calcularmos a soma dos quadrados dos desvios, o valor obtido será maior que 28.

Vamos ver o que acontece ao calcularmos o desvio em relação ao número 6:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 1 - 6 = -5$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 2 - 6 = -4$$

$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 3 - 6 = -3$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 4 - 6 = -2$$

$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 5 - 6 = -1$$

$$d_6 = x_6 - \bar{x} = 6 - 6 = 0$$

$$d_7 = x_7 - \bar{x} = 7 - 6 = 1$$

Agora, calcularemos a soma dos quadrados desses números:

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = (-5)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = 25 + 16 + 9 + 4 + 1 + 0 + 1 = 56$$

Como esperávamos, o resultado foi maior do que 28.

Vejamos como demonstrar essa propriedade.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números:

$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,

e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \bar{x} \times n$$

A soma dos quadrados dos desvios em relação a um número $\boldsymbol{a}$ é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)]^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n} [2 \times (x_i - \bar{x}) \times (\bar{x} - a)] + \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - a)^2$$

O valor de $(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a})$ é uma constante, portanto, podemos simplificar essa expressão:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + 2 \times (\bar{x} - a) \times \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)^2 \sum_{i=1}^{n} 1$$

Pela propriedade anterior, sabemos que o somatório dos desvios em relação à média é zero, logo:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + 2 \times (\bar{x} - a) \times 0 + (\bar{x} - a)^2 \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + n \times (\bar{x} - a)^2$$

Para que o valor da soma seja mínimo, é necessário que $(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a})^2 = \mathbf{0}$. Para qualquer valor diferente disso, teremos um valor maior que o mínimo. Logo, para que a soma dos quadrados tenha valor mínimo, obrigatoriamente, teremos $a = \bar{x}$.

MÉDIA PONDERADA

Muitas vezes, certos elementos de um conjunto de dados possuem relevância maior que os demais. Nessa situação, para calcular a média de tais conjuntos, devemos encontrar uma média ponderada. **Uma média ponderada é a média de um conjunto de dados cujos valores possuem pesos variados.** Ela é calculada pela igualdade a seguir, em que p é o peso de cada valor de x:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \times p_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}}$$

Observe que no numerador cada valor será multiplicado pelo seu respectivo peso, enquanto no denominador teremos a soma de todos os pesos.

Suponha que um candidato tenha prestado um concurso público para o cargo de Auditor Fiscal, alcançando as seguintes notas:

Disciplina	Nota (x_i)
Língua Portuguesa	4,0
Direito Administrativo	4,0
Direito Constitucional	4,0
Direito Tributário	7,0
Legislação Tributária	7,0
Contabilidade	8,0
Auditoria	8,0

Considere, também, que o edital desse concurso previa que algumas disciplinas teriam importância maior do que outras, por isso foram atribuídos pesos diferentes às várias disciplinas. Digamos que os pesos tenham sido distribuídos da seguinte forma:

Disciplina	Peso (p_i)
Língua Portuguesa	1
Direito Administrativo	2
Direito Constitucional	2
Direito Tributário	3
Legislação Tributária	3

Contabilidade	3
Auditoria	3

Agora, admita que o candidato deveria alcançar uma nota 7,0 ou superior na prova objetiva para que fosse convocado para a etapa discursiva. Se você fosse um dos avaliadores desse concurso, você consideraria o candidato aprovado na prova objetiva?

Para responder a esse questionamento, devemos calcular a média aritmética ponderada desse candidato, levando em consideração os pesos de cada disciplina. Dessa forma, devemos multiplicar cada nota pelo seu respectivo peso, somar esses produtos e dividir pela soma dos pesos.

Disciplina	Nota (x_i)	Peso (p_i)	$x_i \times p_i$
Língua Portuguesa	4,0	1	4,0 x 1 = 4,0
Direito Administrativo	4,0	2	4,0 x 2 = 8,0
Direito Constitucional	4,0	2	4,0 x 2 = 8,0
Direito Tributário	6,0	3	6,0 x 3 = 18,0
Legislação Tributária	6,0	3	6,0 x 3 = 18,0
Contabilidade	7,0	3	7,0 x 3 = 21,0
Auditoria	7,0	3	7,0 x 3 = 21,0

Nesse ponto, temos uma lista contendo todos os produtos de notas e pesos. Então, a média aritmética ponderada é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

$$\bar{x} = \frac{4{,}0 + 8{,}0 + 8{,}0 + 18{,}0 + 18{,}0 + 21{,}0 + 21{,}0}{1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3} = \frac{98}{15} \cong 6{,}53$$

Veja que, com essas notas, o candidato não seria convocado para a etapa discursiva.

(VUNESP/AVAREPREV/2020) Uma loja trabalha com produtos que são classificados em apenas três tipos. Na tabela, constam os preços de venda de cada tipo do produto:

Tipo do produto	Preço unitário de venda
A	R$ 10,00
B	R$ 12,00
C	R$ 15,00

No último dia útil de funcionamento, foram vendidos produtos dos três tipos, sendo que, do total de unidades vendidas, $\frac{1}{4}$ foi de produtos do tipo A, $\frac{2}{5}$ foi de produtos do tipo B, e o restante, de produtos do tipo C. Naquele dia, o preço médio unitário de venda dos produtos vendidos foi de

a) R$ 11,95.

b) R$ 12,30.

c) R$ 12,55.

d) R$ 13,50.

e) R$ 13,95.

Comentários:

Segundo o enunciado, temos que:

- total de produtos do tipo A vendidos: $\frac{1}{4} = 25\%$;
- total de produtos do tipo B vendidos: $\frac{2}{5} = 40\%$;
- total de produtos do tipo C vendidos: $100\% - 25\% - 40\% = 35\%$.

Portanto, o preço médio unitário de venda será definido como uma média ponderada, em que os pesos serão as porcentagens acima. Nesse sentido, devemos lembrar que a média ponderada é o somatório dos produtos de cada valor por seu respectivo peso, dividido pela soma dos pesos.

Logo,

$$\bar{x} = \frac{10 \times 25\% + 12 \times 40\% + 15 \times 35\%}{25\% + 40\% + 35\%}$$

$$\bar{x} = \frac{10 \times 25\% + 12 \times 40\% + 15 \times 35\%}{100\%}$$

$$\bar{x} = 10 \times 0{,}25 + 12 \times 0{,}40 + 15 \times 0{,}35$$

$$\bar{x} = 2{,}5 + 4{,}8 + 5{,}25$$

$$\bar{x} = R\$\ 12{,}55$$

Gabarito: C.

(CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) A tabela seguinte mostra a distribuição das idades dos 30 alunos da turma A do quinto ano de uma escola de ensino fundamental.

Idade (em anos)	9	10	11	12	13	14
Quantidade de estudantes	6	22	0	1	0	1

A partir dessa tabela, julgue o item.

Se, em outra turma B, as frequências das idades fossem respectivamente iguais ao dobro das frequências da turma A, então a média aritmética das idades da turma B seria igual ao dobro da média da turma A.

Comentários:

A média das idades da turma A é uma média ponderada, em que os pesos são representados pelas quantidades de alunos. Assim, a média resulta da divisão entre o somatório dos produtos de idades e quantidades de estudantes e o total de estudantes:

$$\bar{x} = \frac{9 \times 6 + 10 \times 22 + 11 \times 0 + 12 \times 1 + 13 \times 0 + 14 \times 1}{6 + 22 + 0 + 1 + 0 + 1}$$

$$\bar{x} = \frac{300}{30}$$

$$\bar{x} = 10$$

Na turma B, teremos que duplicar as frequências. Dessa forma, a média da turma B será dada por:

$$\bar{x} = \frac{9 \times 12 + 10 \times 44 + 11 \times 0 + 12 \times 1 + 13 \times 0 + 14 \times 2}{12 + 44 + 0 + 2 + 0 + 2}$$

$$\bar{x} = \frac{600}{60}$$

$$\bar{x} = 10$$

Com isso, percebemos que a média não mudará o seu valor.

Gabarito: Errado.

(CESPE/IFF/2018) No registro das quantidades de filhos de 200 casais, verificaram-se os valores mostrados na tabela seguinte.

Quantidade de filhos	1	2	0	3	4	5	6
Quantidade de casais	50	40	40	30	25	10	5

Nesse caso, a quantidade média de filhos para esse grupo de casais é igual a

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 2,5.

e) 3.

Comentários:

A quantidade média de filhos é uma média ponderada, em que os pesos são representados pelas quantidades de casais. Portanto, a média é resultado da divisão entre o somatório dos produtos de quantidades de filhos e quantidades de casais, dividido pelo total de casais:

$$\bar{x} = \frac{1 \times 50 + 2 \times 40 + 0 \times 40 + 3 \times 30 + 4 \times 25 + 5 \times 10 + 6 \times 5}{200}$$

$$\bar{x} = \frac{50 + 80 + 90 + 100 + 50 + 30}{200}$$

$$\bar{x} = \frac{400}{200}$$

$$\bar{x} = 2$$

Gabarito: C.

MÉDIA GEOMÉTRICA

A **média geométrica** é uma medida estatística muito utilizada em situações de **acumulação de percentuais**, fato muito comum em problemas financeiros. Também é encontrada na **geometria plana**, quando, por exemplo, devemos fazer com que a área de um quadrado seja igual à área de um retângulo.

Essa medida é definida, para o conjunto de números positivos, como a raiz n-ésima do produto de n elementos de um conjunto de dados. A propriedade principal dessa média é preservar o produto dos elementos de um conjunto de dados.

O raciocínio para encontrarmos a fórmula da média geométrica é análogo ao adotado para a média aritmética. Dada uma lista de n números, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, o produto de seus termos é igual a:

$$\underbrace{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}_{n\ fatores}.$$

A média geométrica dessa lista é um número G, tal que, se todos os elementos forem substituídos por G, o produto da lista permanecerá preservado. Assim, substituindo todos os elementos por G, teremos uma nova lista, $\{G, G, \cdots, G\}$, cujo produto é:

$$\underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{n\ fatores} = G^n$$

Como os produtos das duas listas são iguais, temos:

$$G^n = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$$

Portanto, temos que:

$$\boxed{\boldsymbol{G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}}}$$

Repare que a raiz varia de acordo com a quantidade de elementos da lista de números, isto é, se a lista contém dois números, teremos uma raiz quadrada; se a lista contém três números, teremos uma raiz cúbica.

EXEMPLIFICANDO

Vejamos um exemplo numérico: qual a média geométrica dos números 4, 20 e 100?

Para responder a essa questão, primeiro, calcularemos o produto dos três números e, em seguida, a raiz cúbica dele:

$$G = \sqrt[3]{4 \times 20 \times 100} = \sqrt[3]{8000} = 20$$

Extrair a raiz cúbica de um número, contudo, nem sempre é tão trivial. Na hora da prova, é mais fácil adotarmos o processo de fatoração:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Vocês lembram como fazemos para fatorar um número? Primeiro, dividimos esse número pelo seu menor divisor primo $(2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots)$. Em seguida, dividimos o quociente obtido pelo seu menor divisor primo. Depois, fazemos isso de forma sucessiva até obtermos o valor 1.

Por meio da fatoração, concluímos que:

$$4 = 2 \times 2 = 2^2$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$$

$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$$

Levando essa informação para a fórmula da média geométrica, temos que:

$$G = \sqrt[3]{4 \times 20 \times 100}$$

$$G = \sqrt[3]{(2^2) \times (2^2 \times 5^1) \times (2^2 \times 5^2)}$$

E agora? Vocês lembram como fazemos multiplicação de potências de mesma base? Sim, é isso mesmo, repetiremos as bases e somaremos os expoentes. Assim, $2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^6$ e $5^1 \times 5^2 = 5^3$. Portanto, ficaremos com:

$$G = \sqrt[3]{2^6 \times 5^3}$$

Agora, por ser uma raiz cúbica, devemos dividir cada um dos expoentes por 3:

$$G = 2^{6/3} \times 5^{3/3}$$

$$G = 2^2 \times 5^1 = 4 \times 5 = 20$$

Portanto, 20 é o valor da média geométrica dos números 4, 20 e 100.

Reparem que o produto dos números da lista é $4 \times 20 \times 100 = 8000$. Se os três números forem substituídos por 20, o produto também será $20 \times 20 \times 20 = 8000$. Por isso, dizemos que a média geométrica preserva o produto dos números.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos algumas situações em que empregamos a média geométrica:

1) no setor financeiro: o preço de um produto, nos últimos 3 meses, sofreu aumentos de, respectivamente, 3%, 8%, 9%. Qual foi o aumento médio percentual nesse período?

$$j = \sqrt[3]{3 \times 8 \times 9}$$
$$j = \sqrt[3]{3 \times 2^3 \times 3^2}$$
$$j = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3} = 6\%$$

2) na geometria espacial: um prisma de base retangular possui o mesmo volume que um cubo. Se as dimensões do prisma são 4 cm x 10 cm x 25 cm, qual é o valor do lado do cubo em centímetros?

$$l^3 = 4 \times 10 \times 25$$

$$l = \sqrt[3]{4 \times 10 \times 25}$$

$$l = \sqrt[3]{2^2 \times 2 \times 5 \times 5^2}$$

$$l = \sqrt[3]{2^3 \times 5^3} = 10cm$$

RESUMINDO

Sobre a média geométrica, podemos afirmar que:

I – ela preserva o produto dos elementos de uma lista de números;

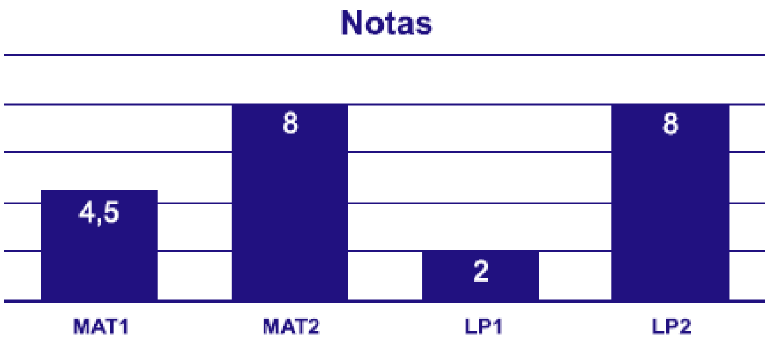
II – ela é obtida por meio da raiz n-ésima do produto de n elementos de um conjunto, $\boldsymbol{G} = \sqrt[n]{\boldsymbol{x_1} \times \boldsymbol{x_2} \times \cdots \times \boldsymbol{x_n}}$.

ESCLARECENDO!

Somente definimos a média geométrica para números não-negativos. Assim, evitamos situações em que a média geométrica não existe. Por exemplo, não conseguiríamos calcular a média geométrica de 1 e -1, pois a raiz quadrada de -1 não existe no campo dos números reais.

HORA DE PRATICAR!

(VUNESP/Pref. de Sertãozinho/2018) O gráfico a seguir mostra as notas das duas provas obtidas por um aluno em matemática e as duas notas obtidas em língua portuguesa, nesse bimestre.



Seus professores afirmaram que, nesse bimestre, a média de matemática e de língua portuguesa será a raiz quadrada do produto de Mat1 x Mat2e a raiz quadrada do produto de LP1 e LP2. Dessa forma, a média de matemática desse aluno será maior que sua média de língua portuguesa em

a) 0,5 ponto.

b) 1,0 ponto.

c) 1,5 ponto.

d) 2,0 pontos.

e) 2,5 pontos.

Comentários:

Do gráfico, extraímos que:

$$\begin{cases} Mat_1 = 4{,}5 \\ Mat_2 = 8{,}0 \end{cases} e \begin{cases} LP_1 = 2{,}0 \\ LP_2 = 8{,}0 \end{cases}.$$

Como a média de matemática será calculada pela raiz quadrada do produto de $Mat_1 \times Mat_2$, então a média desse aluno em matemática será de:

$$\sqrt{Mat_1 \times Mat_2} = \sqrt{4{,}5 \times 8} = \sqrt{36} = 6{,}0\ pontos$$

A média de língua portuguesa, por sua vez, será dada pela raiz quadrada de $LP_1 \times LP_2$. Assim, a média desse aluno em português será de:

$$\sqrt{LP_1 \times LP_2} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4{,}0\ pontos$$

Portanto, a média de matemática desse aluno será maior que sua média de língua portuguesa em:

$$6{,}0 - 4{,}0 = 2{,}0\ pontos$$

Gabarito: D.

(AOCP/Pref. de Pinhais/2017) Sejam a, b, e c três números reais e positivos tais que:

• A média aritmética entre a e b é igual a 15;

• A média aritmética entre b e c é igual a 11;

• A média aritmética entre a e c é igual a 5.

Dessa forma, a média geométrica entre a, b, e c será igual a

a) $3\sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[2]{7}$

c) $7\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[2]{3}$

e) $\sqrt[2]{189}$

Comentários:

Por definição, a média aritmética é a soma total dos termos dividida pelo número total dos termos.

Pelos dados apresentados, sabemos que:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 15 \\ \frac{b+c}{2} = 11 \\ \frac{a+c}{2} = 5 \end{cases}$$

De forma equivalente, temos que:

$$\begin{cases} a + b = 30 \\ b + c = 22 \\ a + c = 10 \end{cases}$$

Temos um sistema de equações lineares formado por três equações e três incógnitas. Para resolvê-lo, podemos utilizar a técnica de substituição de incógnitas. Pela primeira equação, temos que:

$$a = 30 - b$$

Isolando a incógnita c na segunda equação, teremos:

$$c = 22 - b$$

Agora, vamos substituir o valor na terceira equação:

$$a + c = 10$$

$$(30 - b) + (22 - b) = 10$$

$$52 - 2b = 10$$

$$52 - 10 = 2b$$

$$42 = 2b$$

$$b = 21$$

Dessa forma, teremos:

$$a = 30 - b = 30 - 21 = 9$$

$$c = 22 - b = 22 - 21 = 1$$

Logo, ao resolver o sistema, descobrimos que $a = 9$, $b = 21$ e $c = 1$. Assim, sendo a média geométrica a raiz cúbica do produto desses números, então:

$$G = \sqrt[3]{a \times b \times c}$$

$$G = \sqrt[3]{9 \times 21 \times 1}$$

$$G = \sqrt[3]{3^2 \times (3 \times 7) \times 1}$$

$$G = \sqrt[3]{3^3 \times 7}$$

$$G = 3 \times \sqrt[3]{7}$$

Gabarito: A.