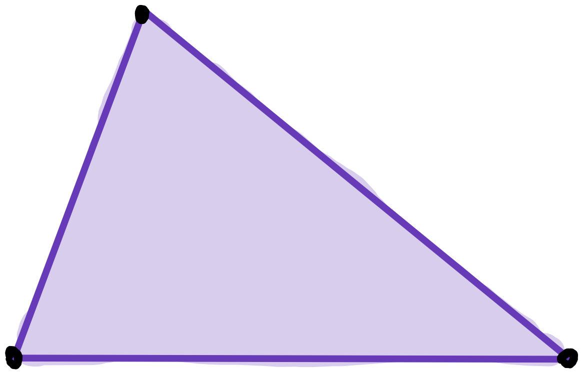
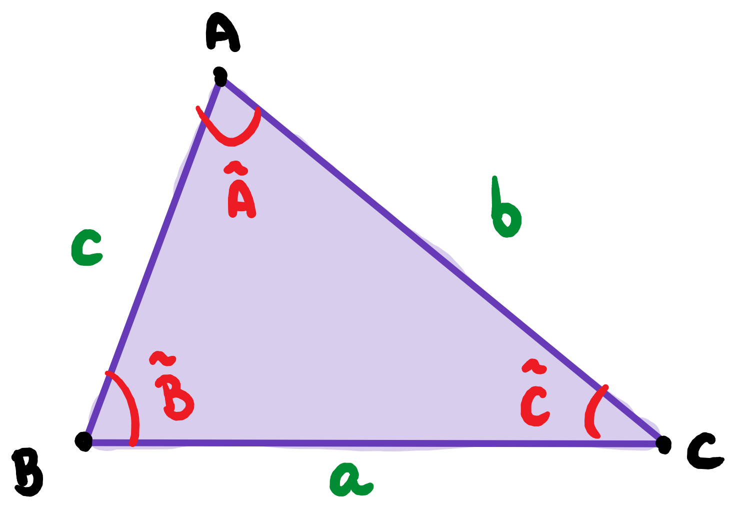
TRIÂNGULOS E PONTOS NOTÁVEIS

DEFINIÇÃO

UNIÃO DE TRÊS SEGMENTOS LIGANDO TRÊS PONTOS NÃO COLINEARES.



ELEMENTOS DO TRIÂNGULO



VÉRTICES: A, B, C

ÂNGULOS: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$

LADOS: a, b, c

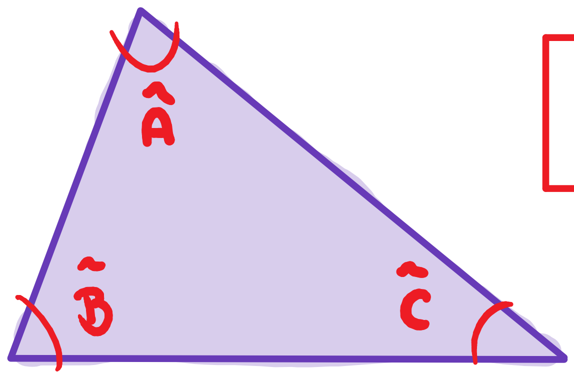
PERÍMETRO: $2p = a + b + c$

SEMI-PERÍMETRO: $p = \frac{a + b + c}{2}$

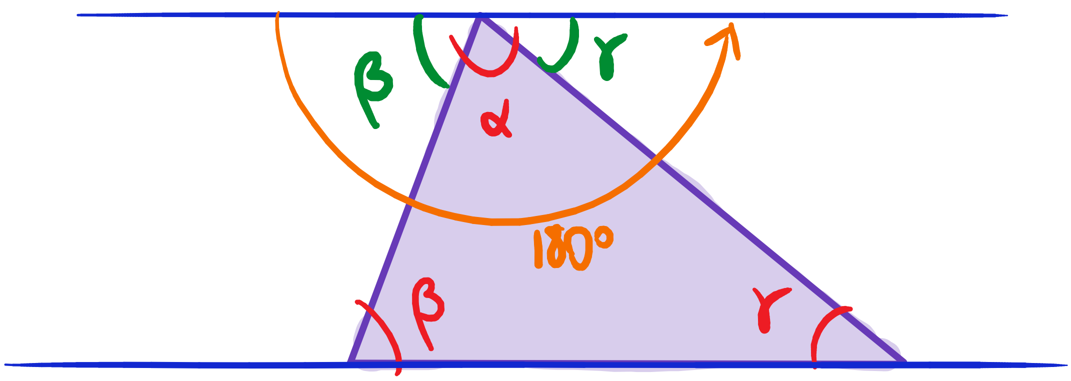
UNIVERSO NARRADO

ÂNGULOS NO TRIÂNGULO

SOMA DOS ÂNGULOS

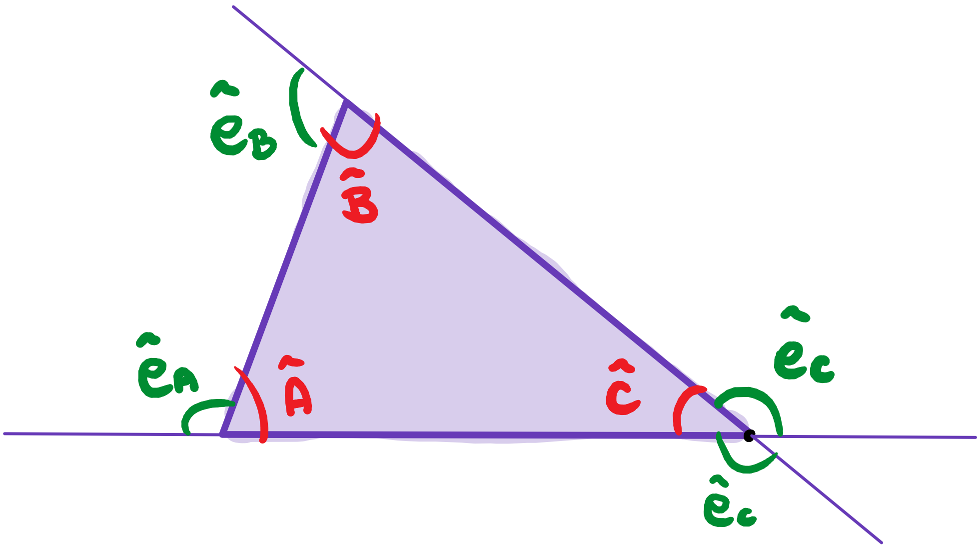


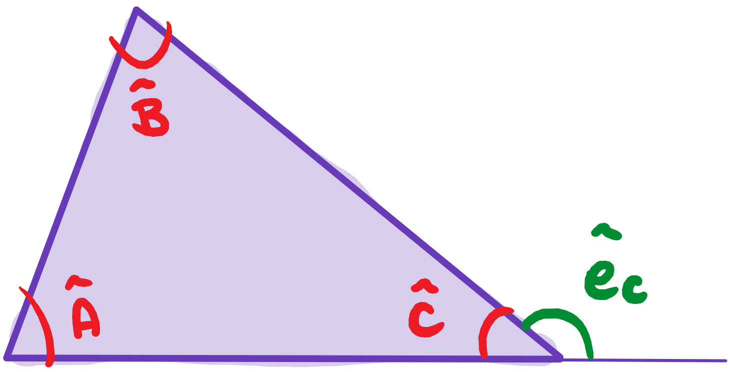
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

ÂNGULO EXTERNO

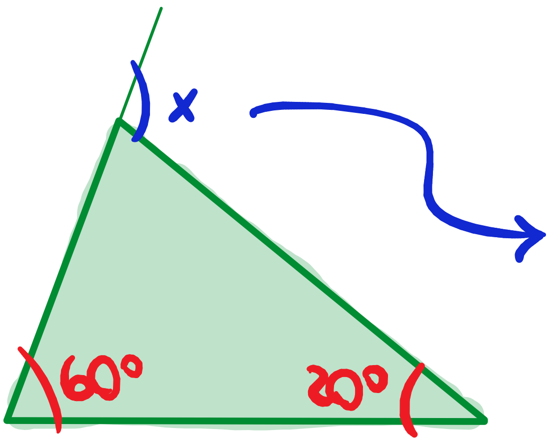




$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \\ \hat{e}_C + \hat{C} = 180° \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\hat{e}_C = \hat{A} + \hat{B}}$$

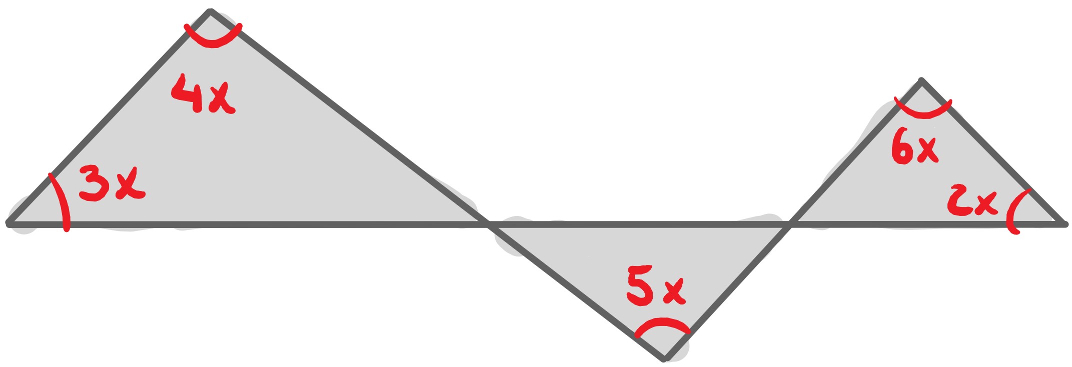


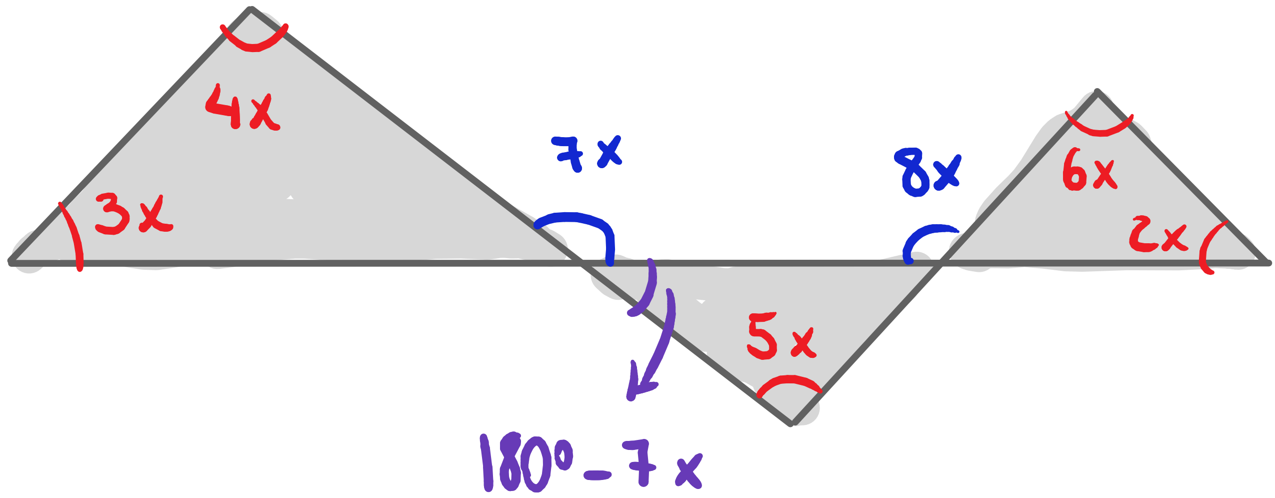
$$x = 60° + 20°$$

$$x = 80°$$

EXEMPLO

NA FIGURA ABAIXO, CALCULE O VALOR DE x.





$$8x = 5x + 180 - 7x$$

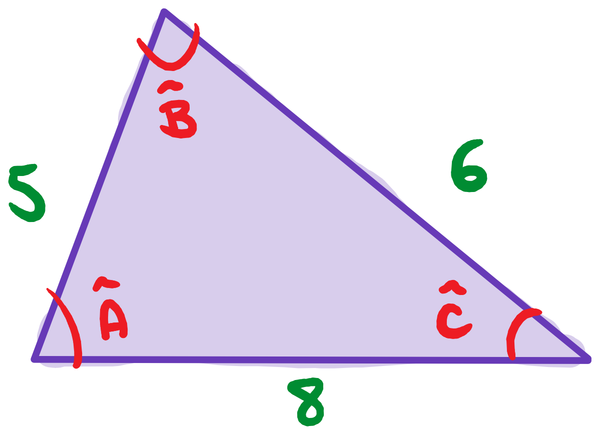
$$10x = 180°$$

$$x = 18°$$

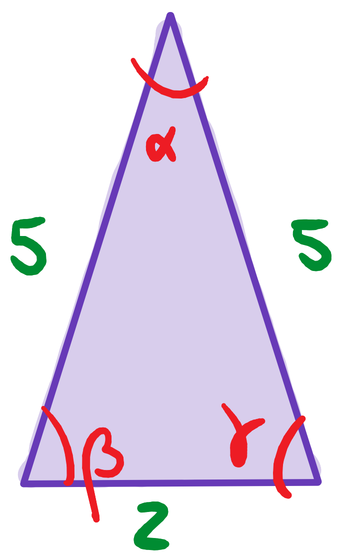
LADOS NO TRIÂNGULO

TEOREMA

O MAIOR LADO DE UM TRIÂNGULO ESTÁ OPOSTO AO MAIOR ÂNGULO E O MENOR LADO AO MENOR ÂNGULO.



$$\hat{C} < \hat{A} < \hat{B}$$



$$\alpha < \beta = \gamma$$

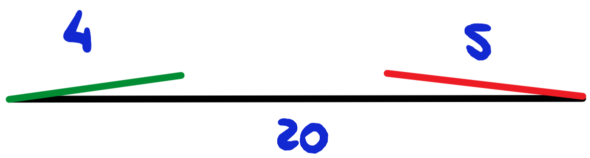
DESIGUALDADE TRIANGULAR

"CADA LADO DE UM TRIÂNGULO
É MENOR QUE
A SOMA DOS OUTROS DOIS."

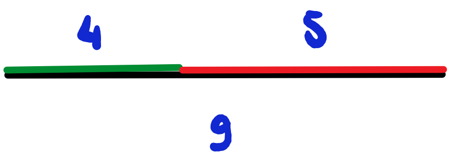
MAS PORQUE????

SENÃO O TRIÂNGULO NÃO FECHA!!!

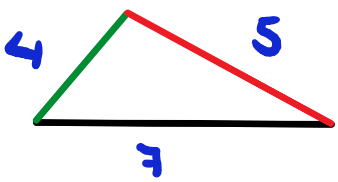
4, 5, 20

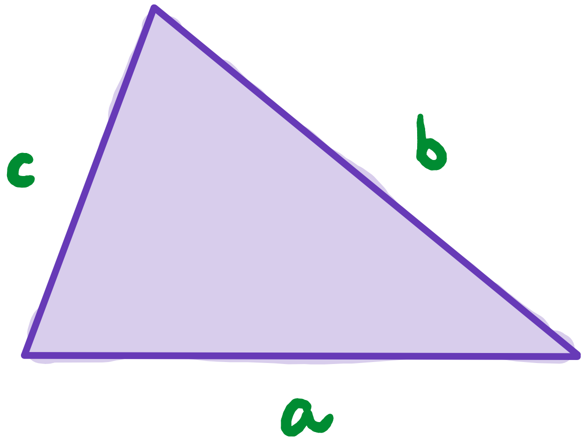


4, 5, 9



4, 5, 7





$$a < b + c$$

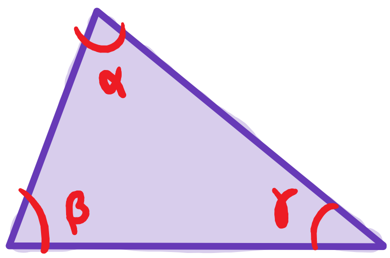
$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

Universo Narrado

CLASSIFICAÇÃO - ÂNGULOS

ACUTÂNGULO: 3 ÂNGULOS AGUDOS.

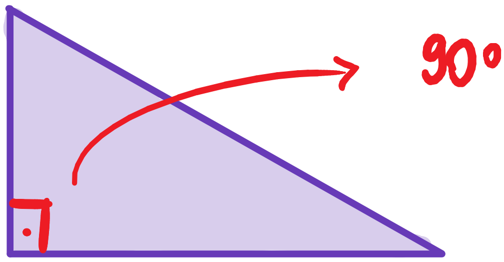


$\alpha < 90°$

$\beta < 90°$

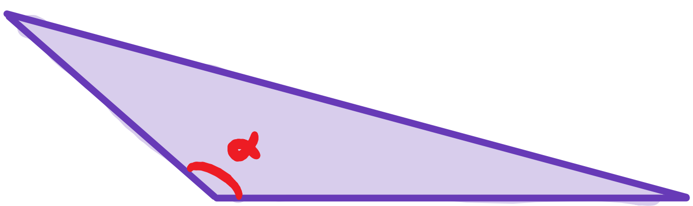
$\gamma < 90°$

RETÂNGULO: 1 ÂNGULO RETO.



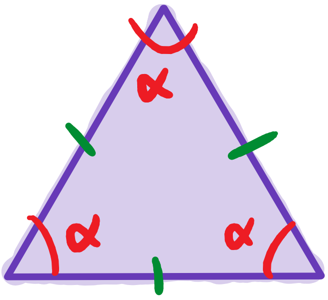
OBTUSÂNGULO: 1 ÂNGULO OBTUSO.

$\alpha > 90°$



CLASSIFICAÇÃO - LADOS

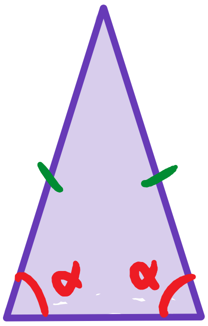
EQUILÁTERO: 3 LADOS IGUAIS.

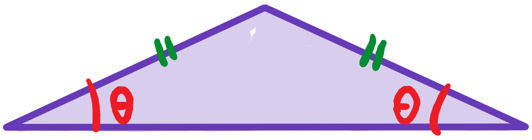


$$3\alpha = 180^\circ$$

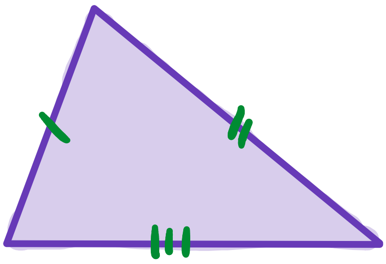
$$\alpha = 60^\circ$$

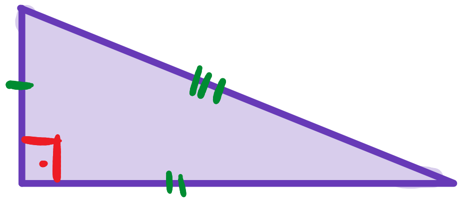
ISÓCELES: 2 LADOS IGUAIS.





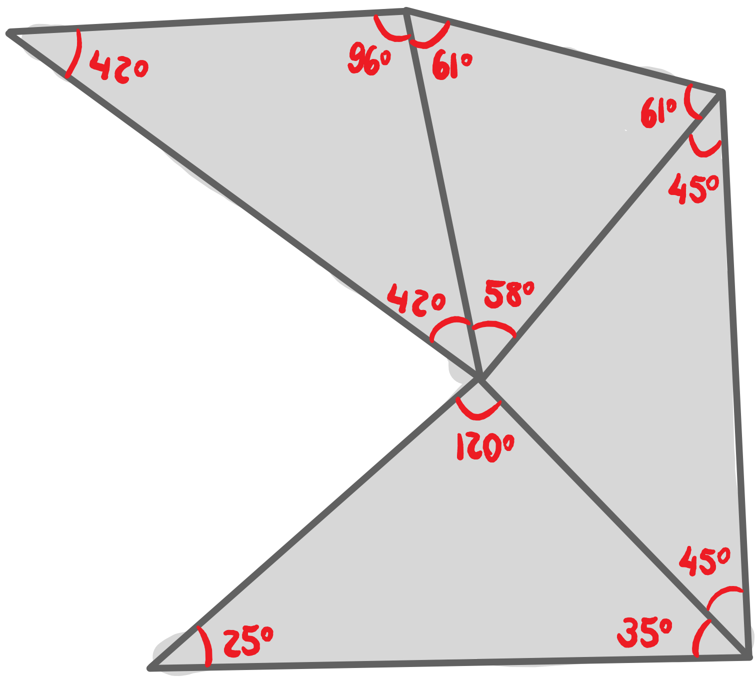
ESCALENO: 3 LADOS DIFERENTES.

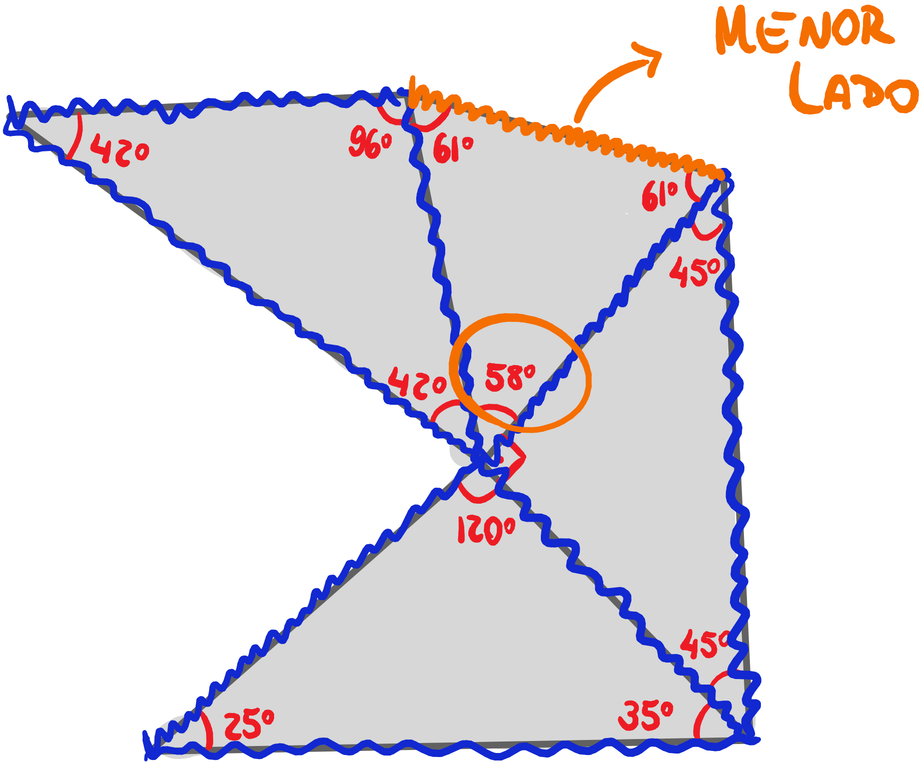




EXEMPLO

NA FIGURA ABAIXO, DETERMINE QUAL O ÂNGULO QUE É OPOSTO AO LADO DE MENOR COMPRIMENTO.

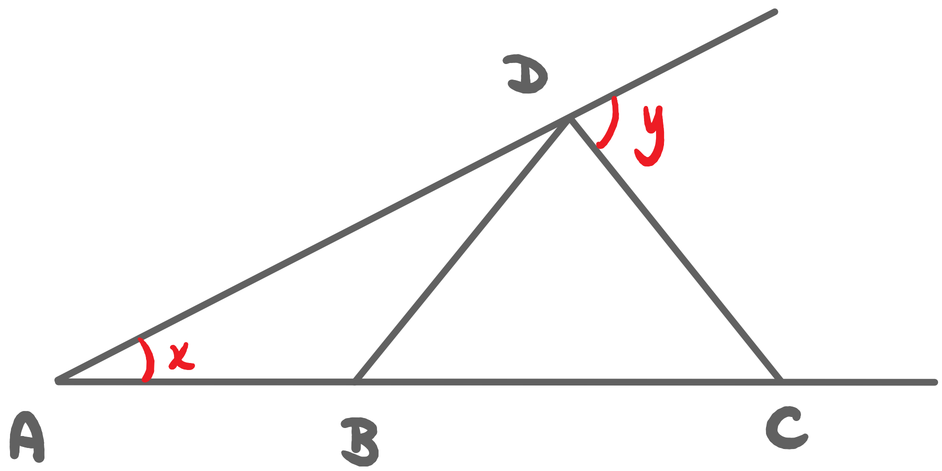



42º
96º
61º
61º
45º
MENOR
LADO
42º
58º
120º
45º
25º
35º

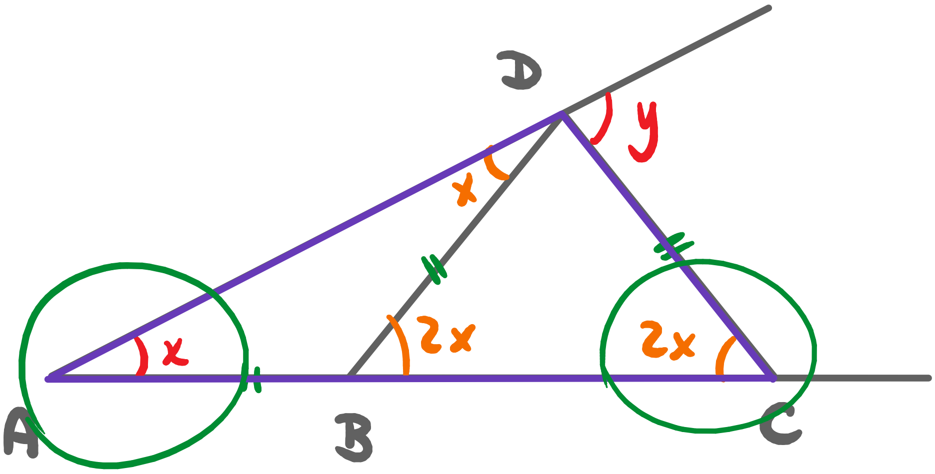
EXEMPLO

NA FIGURA ABAIXO, AB = BD = CD.

CALCULE A RAZÃO ENTRE y E x.



$$\frac{y}{x} = ?$$



$$y = x + 2x$$

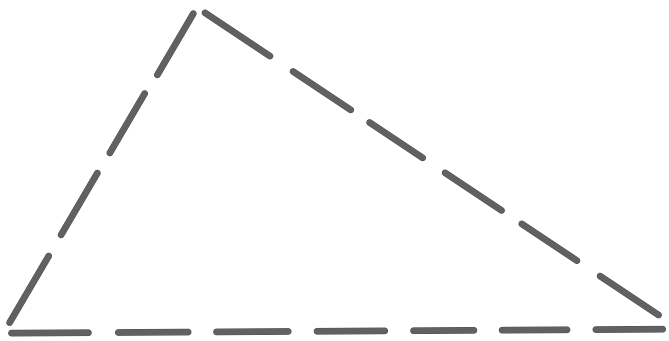
$$y = 3x$$

$$\boxed{\frac{y}{x} = 3}$$

EXEMPLO

UM PADAWAN DISPÕE DE INÚMEROS PALITOS IDÊNTICOS. ELE PRETENDE UTILIZÁ-LOS PARA FORMAR TRIÂNGULOS, ARRANJANDO-OS DE FORMA QUE CADA TRIÂNGULO SEJA FORMADO POR EXATAMENTE 17 PALITOS.

QUANTOS TRIÂNGULOS DISTINTOS ESSE PADAWAN CONSEGUIRÁ FORMAR?



(1, 8, 8) ; ~~(1, 9, 7)~~

$8 < 1 + 8$ ~~$9 < 1 + 7$~~

(2, 8, 7) ~~(2, 9, 6)~~

$8 < 7 + 2$ ~~$9 < 2 + 6$~~

(3, 7, 7) (3, 8, 6) ~~(3, 9, 5)~~

$7 < 7 + 3$ $8 < 6 + 3$ ~~$9 < 5 + 3$~~

(4, 7, 6) (4, 8, 5) ~~(4, 9, 4)~~

$7 < 6 + 4$ $8 < 4 + 5$ ~~$9 < 4 + 4$~~

(5, 6, 6) (5, 7, 5) (5, 8, 4)

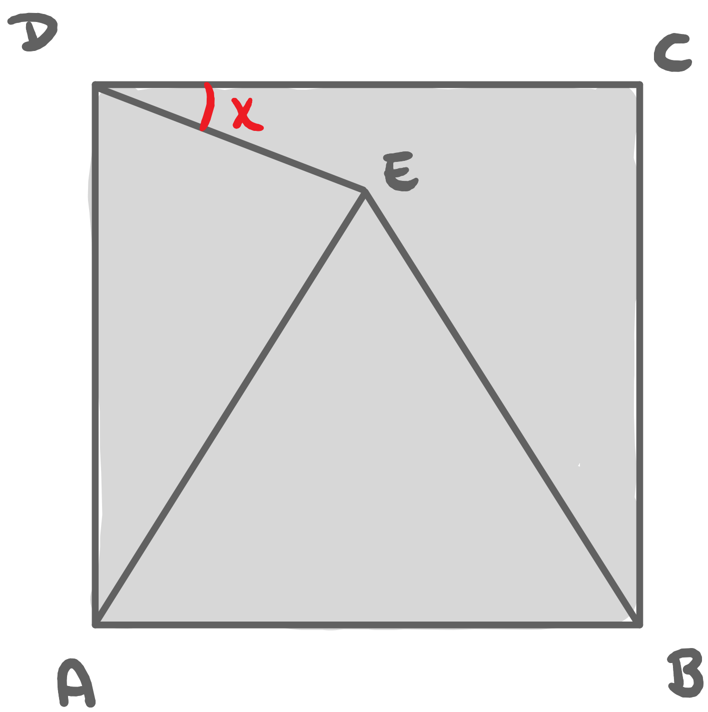
$6 < 6 + 5$ $7 < 5 + 5$ Rep

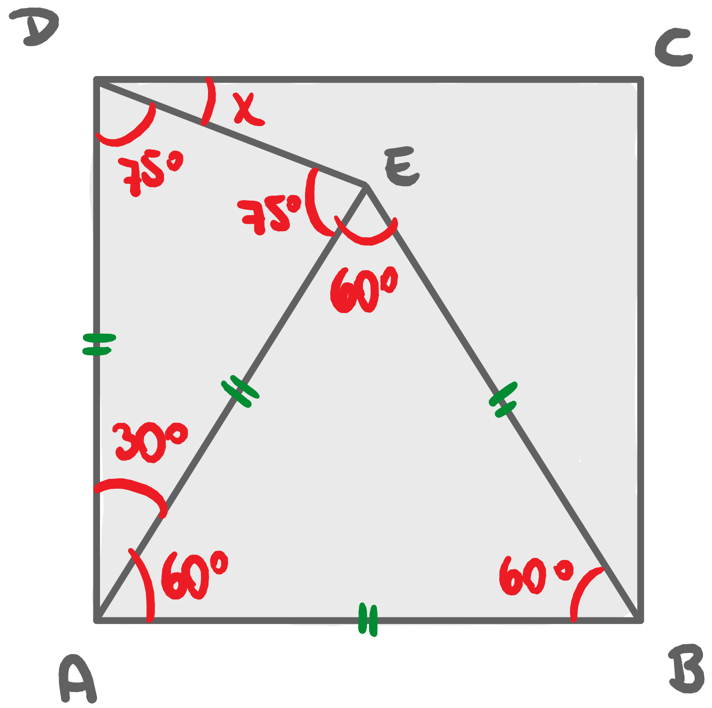
TOTAL : 8

EXEMPLO

NA FIGURA ABAIXO, ABCD É UM QUADRADO E ABE É UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO.

CALCULE A MEDIDA DO ÂNGULO x.





$$x + 75° = 90°$$

$$x = 15°$$

EXEMPLO

OS LADOS DE UM TRIÂNGULO SÃO DADOS, POR:

$x + 10 \quad ; \quad 2x + 4 \quad ; \quad 20 - 2x$

DETERMINE QUAIS VALORES x PODE ASSUMIR.

$$x + 10 < \cancel{2x} + 4 + 20 - \cancel{2x}$$

$$x < 14$$

$$2x + 4 < x + 10 + 20 - 2x$$

$$3x < 26$$

$$x < \frac{26}{3} \sim 8{,}666\ldots$$

$$20 - 2x < x + 10 + 2x + 4$$

$$6 < 5x$$

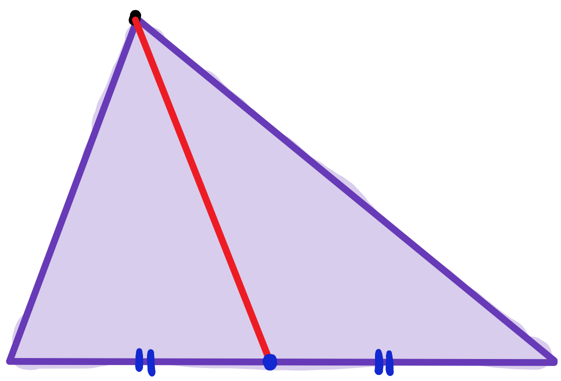
$$x > \frac{6}{5} = 1{,}2$$

$$\boxed{\frac{6}{5} < x < \frac{26}{3}}$$

PONTOS NOTÁVEIS

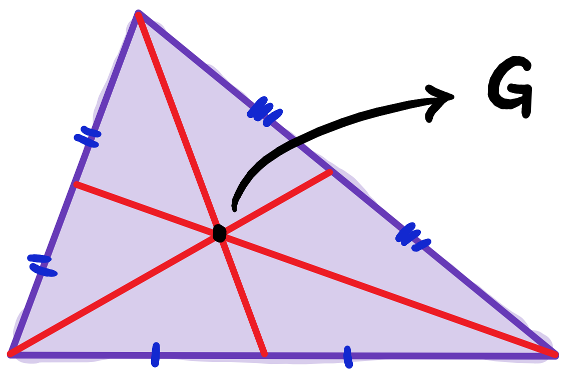
MEDIANA

SEGMENTO QUE LIGA O VÉRTICE DE UM TRI-
ÂNGULO AO PONTO MÉDIO DO LADO OPOSTO.



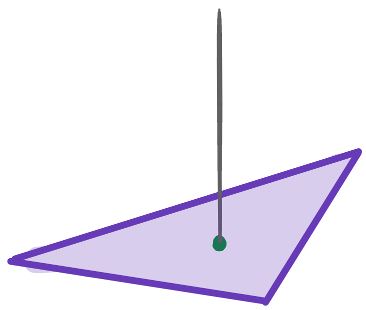
BARICENTRO

PONTO DE INTERSEÇÃO DAS MEDIANAS.

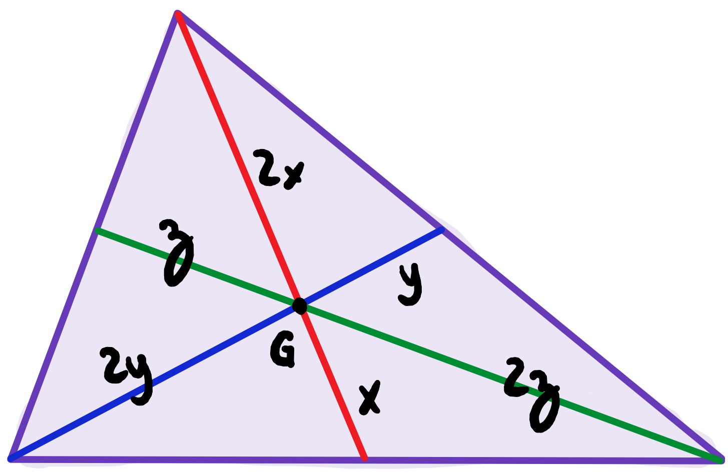


PROPRIEDADES

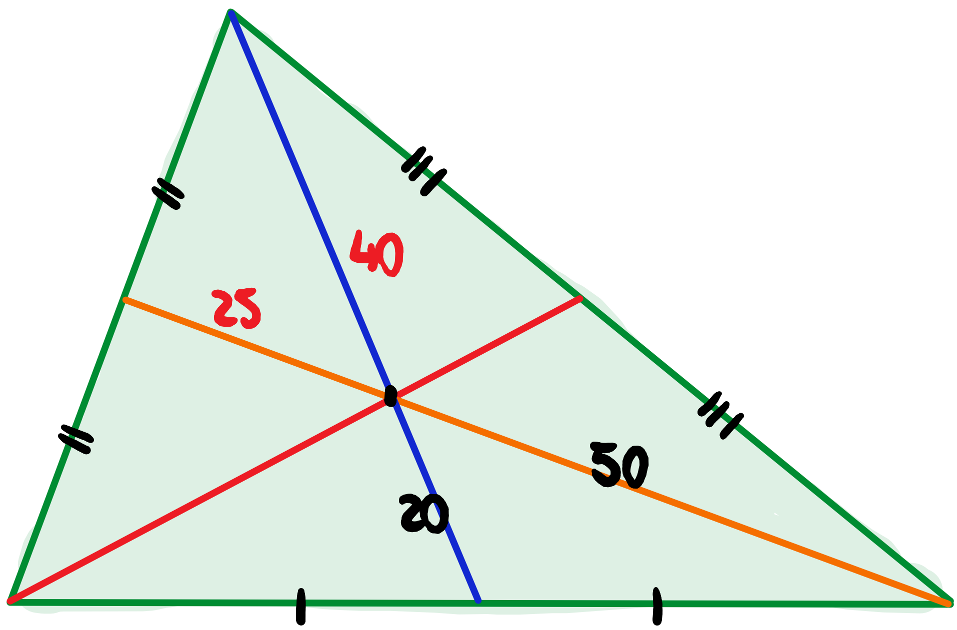
I- O BARICENTRO É O CENTRO DE GRAVIDADE DO TRIÂNGULO.



II- O BARICENTRO DIVIDE AS MEDIANAS NA PROPORÇÃO 2 : 1.

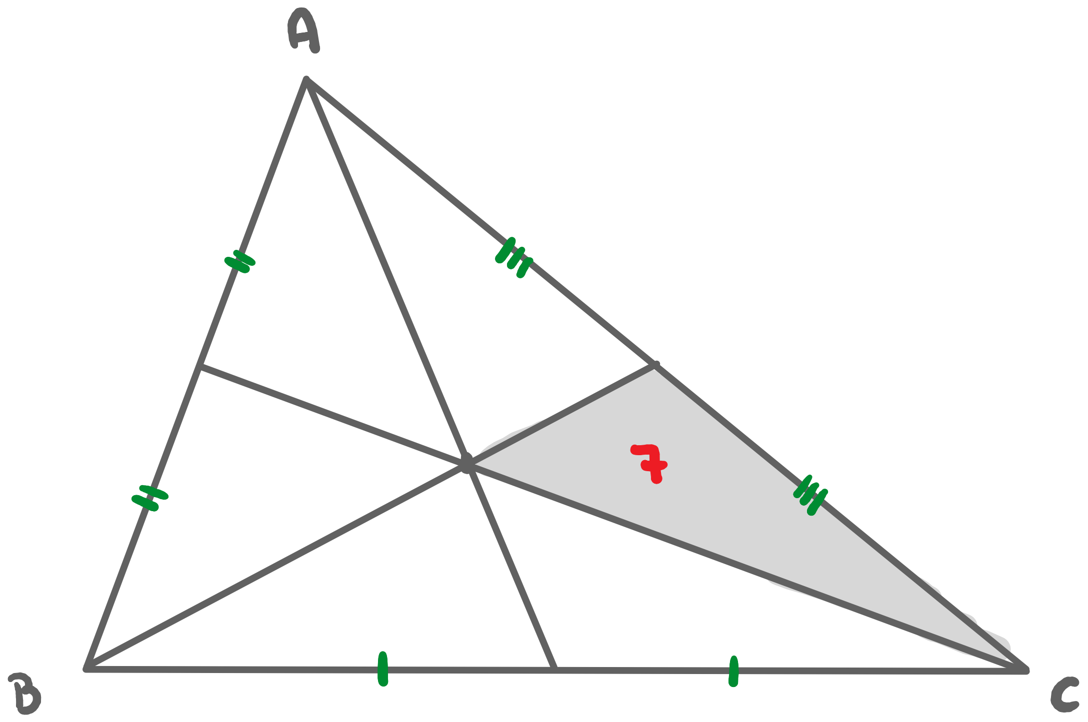


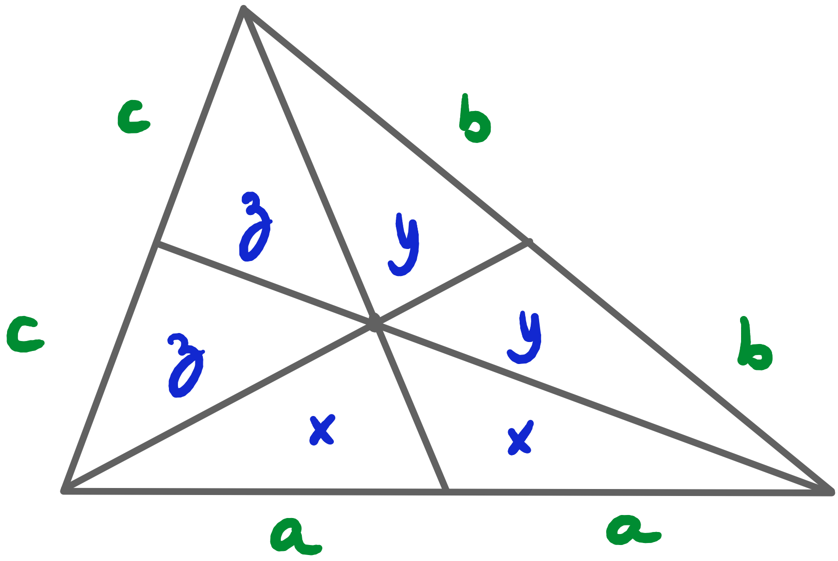
UNIVERSO NARRADO


40
25
50
20

EXEMPLO

SABENDO QUE A ÁREA DESTACADA NO TRIÂNGULO ABAIXO É 7, CALCULE A ÁREA DO TRIÂNGULO ABC.



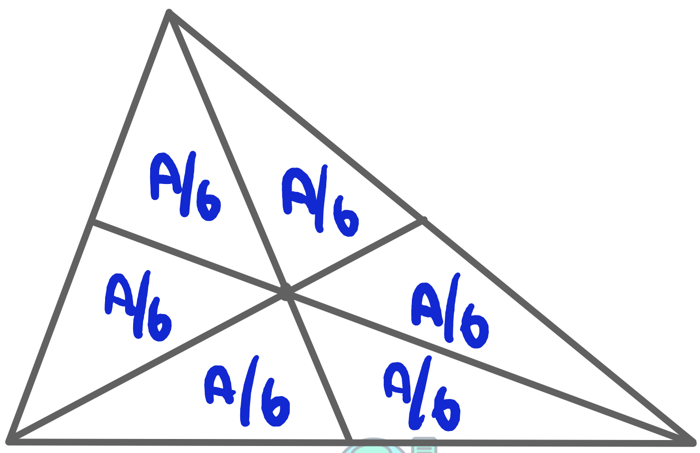


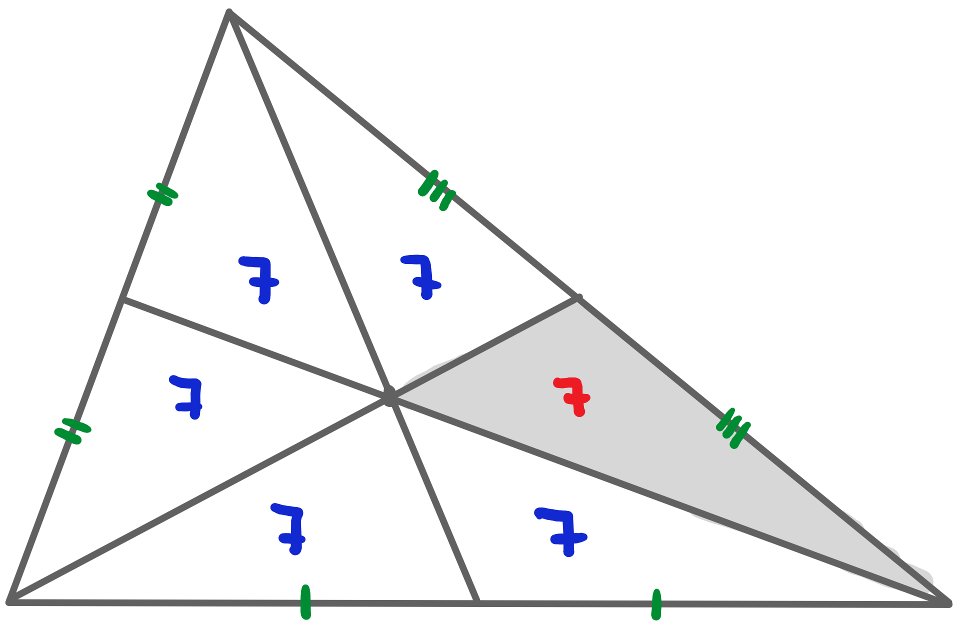
$$\cancel{x} + 2z = \cancel{x} + 2y \qquad \cancel{y} + 2x = \cancel{y} + 2z$$

$$2z = 2y \qquad 2x = 2z$$

$$z = y \qquad x = z$$

$$x = y = z$$





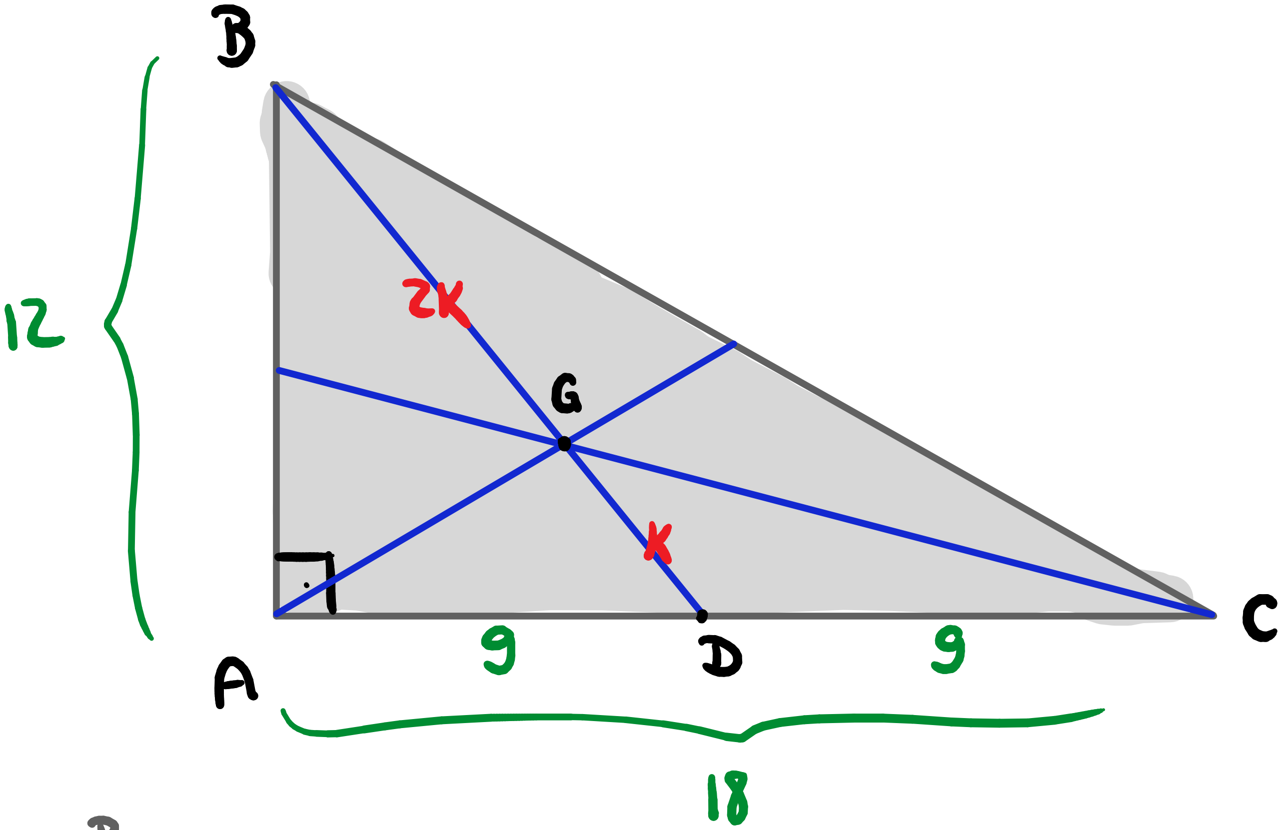
$$A_T = 7 \cdot 6$$

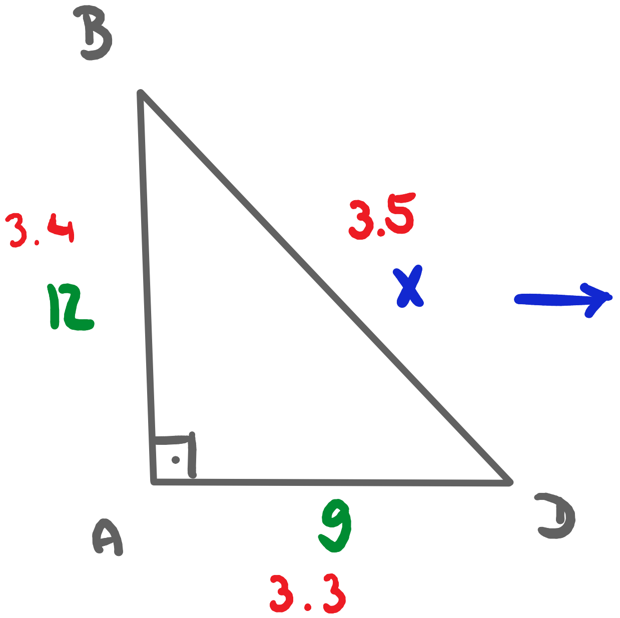
$$A_T = 42$$

EXEMPLO

SEJA O TRIÂNGULO ABC, RETÂNGULO EM A, COM AB = 12 E AC = 18. SEJA G O BARICENTRO DE ABC.

CALCULE O COMPRIMENTO DE BG.





$\rightarrow \quad x = 15$

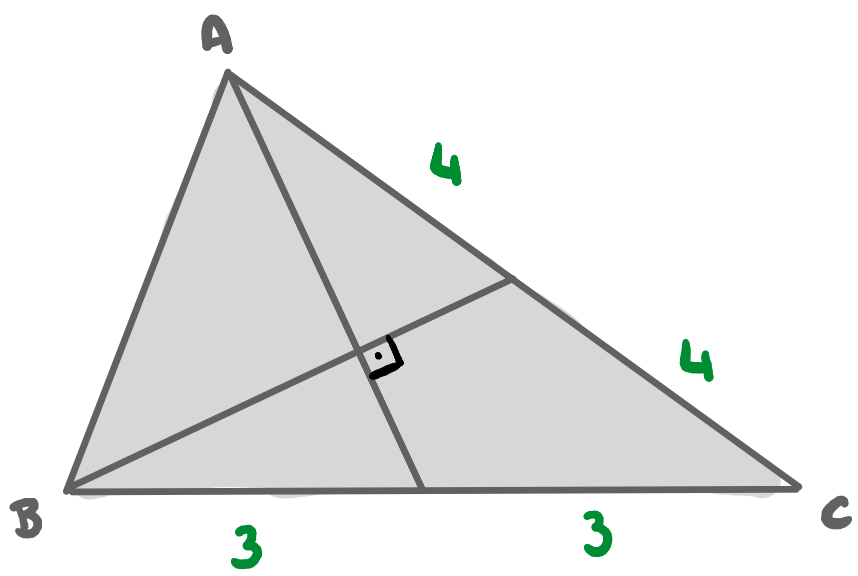
$3K = 15$

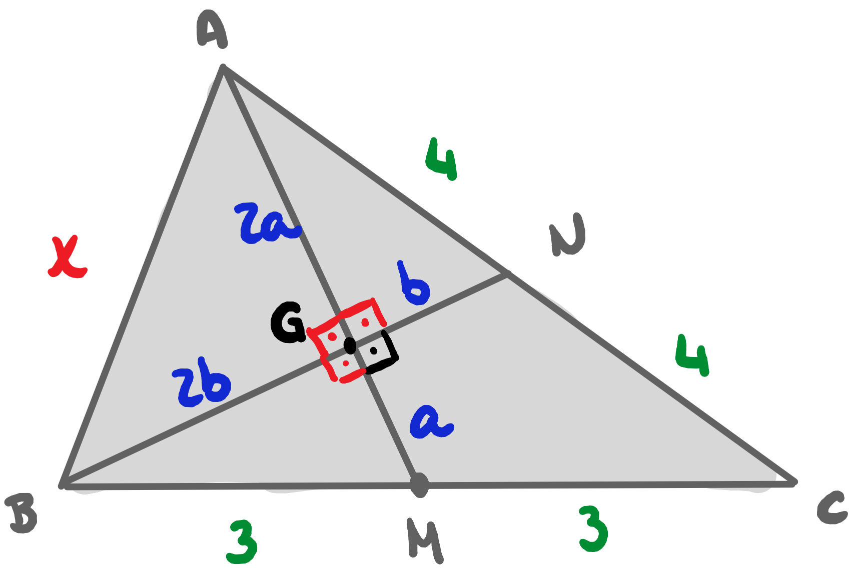
$K = 5$

$BG = 10$

EXEMPLO

CALCULE O COMPRIMENTO DO LADO AB DO TRIÂNGULO ABAIXO.





$$\Delta ABG: \quad x^2 = (2a)^2 + (2b)^2$$

$$x^2 = 4(a^2 + b^2)$$

$$\Delta AGN: \quad 4^2 = (2a)^2 + b^2 \rightarrow 4a^2 + b^2 = 16$$

$$\Delta BGM: \quad 3^2 = a^2 + (2b)^2 \rightarrow a^2 + 4b^2 = 9$$

$$\begin{cases} 4a^2 + b^2 = 16 \\ a^2 + 4b^2 = 9 \end{cases}$$

$$5a^2 + 5b^2 = 25$$

$$a^2 + b^2 = 5$$

$$x^2 = 4(a^2 + b^2)$$

$$x^2 = 4(5)$$

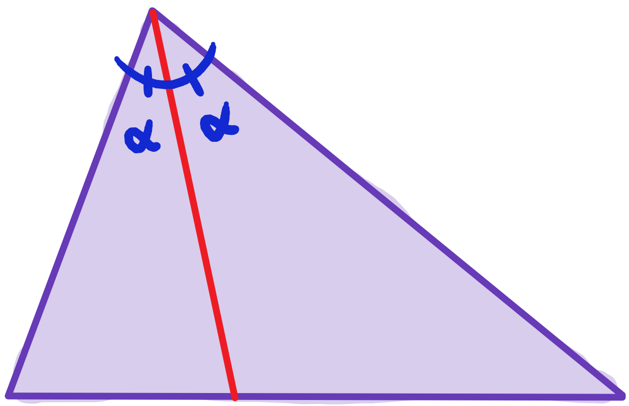
$$x^2 = 20$$

$$x = \sqrt{20}$$

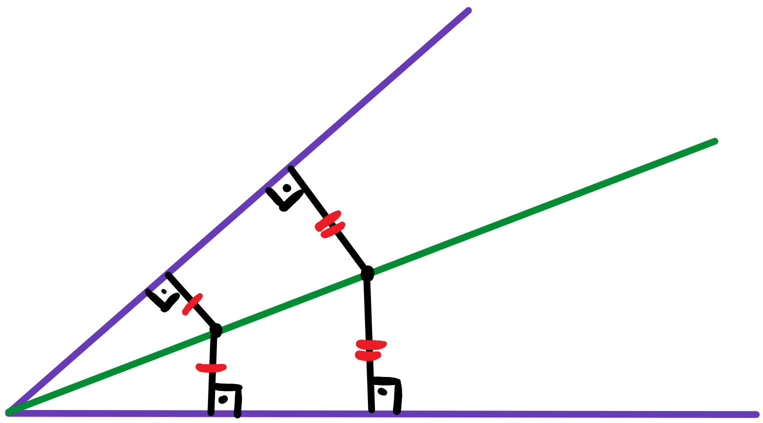
$$x = 2\sqrt{5}$$

BISSETRIZ

BISSETRIZ INTERNA É O SEGMENTO QUE DIVIDE O ÂNGULO DE UM TRIÂNGULO AO MEIO.

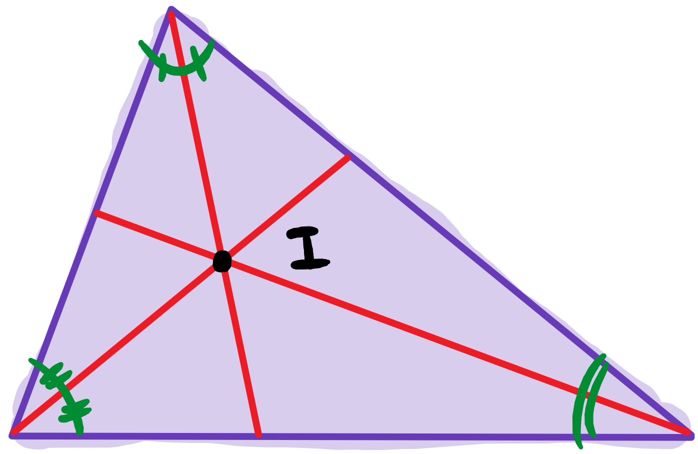


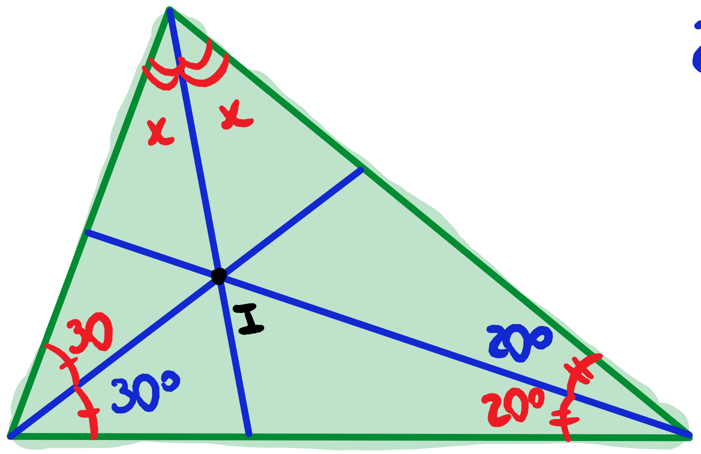
BISSETRIZ TAMBÉM É O CONJUNTO DE PONTOS EQUIDISTANTES DAS RETAS QUE FORMAM O ÂNGULO.



INCENTRO

INCENTRO É O PONTO DE INTERSEÇÃO DAS BISSETRIZES DE UM TRIÂNGULO.





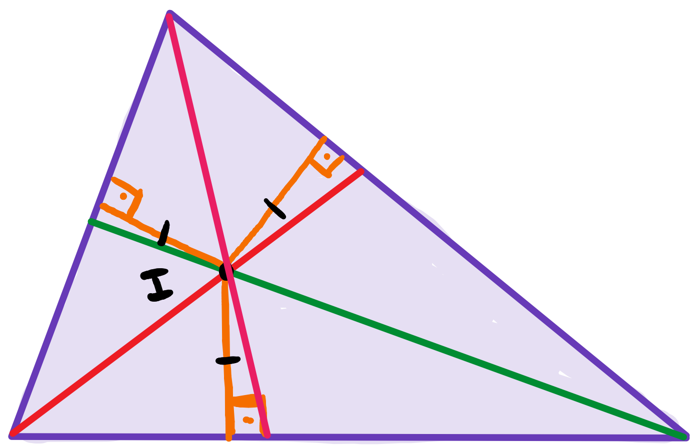
$$2x + 60° + 40° = 180°$$

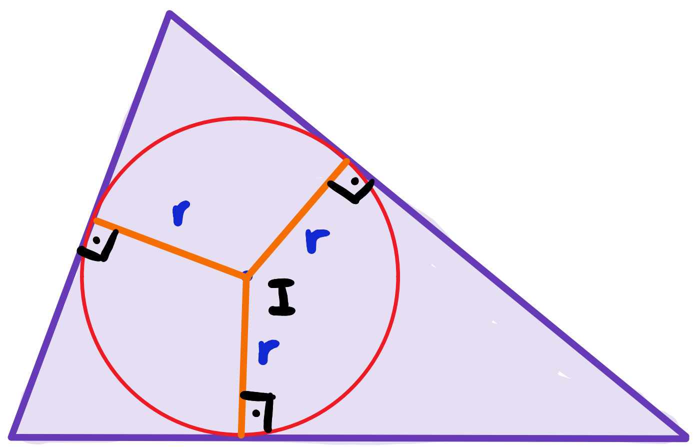
$$x = 40°$$

PROPRIEDADE

O INCENTRO ESTÁ SOBRE CADA UMA DAS BISSETRIZES DO TRIÂNGULO, LOGO, É EQUIDISTANTE DOS LADOS DO TRIÂNGULO.

PORTANTO O INCENTRO É O CENTRO DA CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA AO TRIÂNGULO.





UNIVERSO NARRADO

EXEMPLO

NA FIGURA, TEM-SE

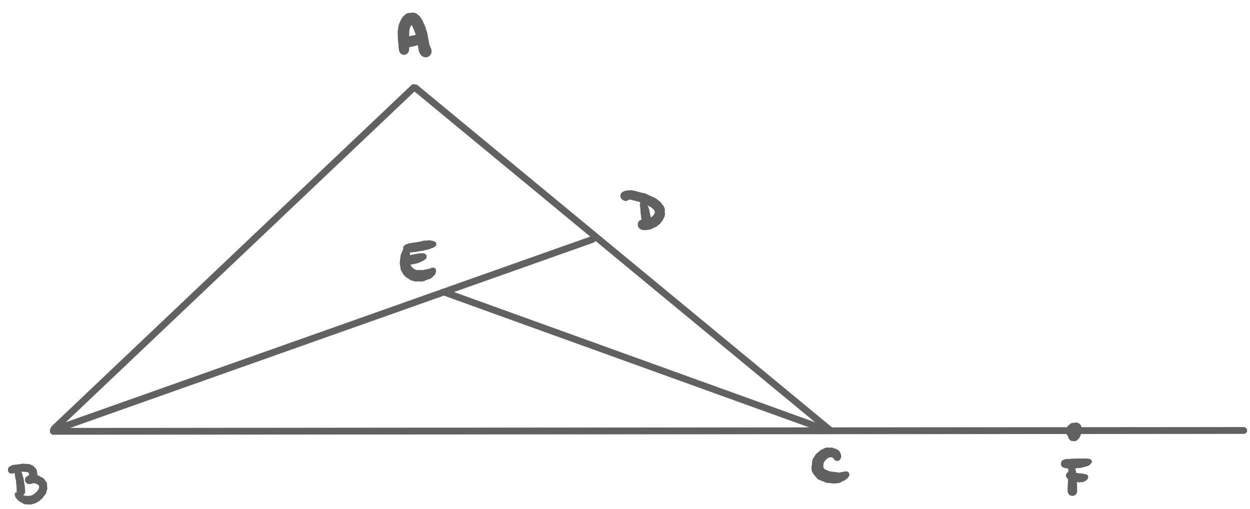
AB = AC

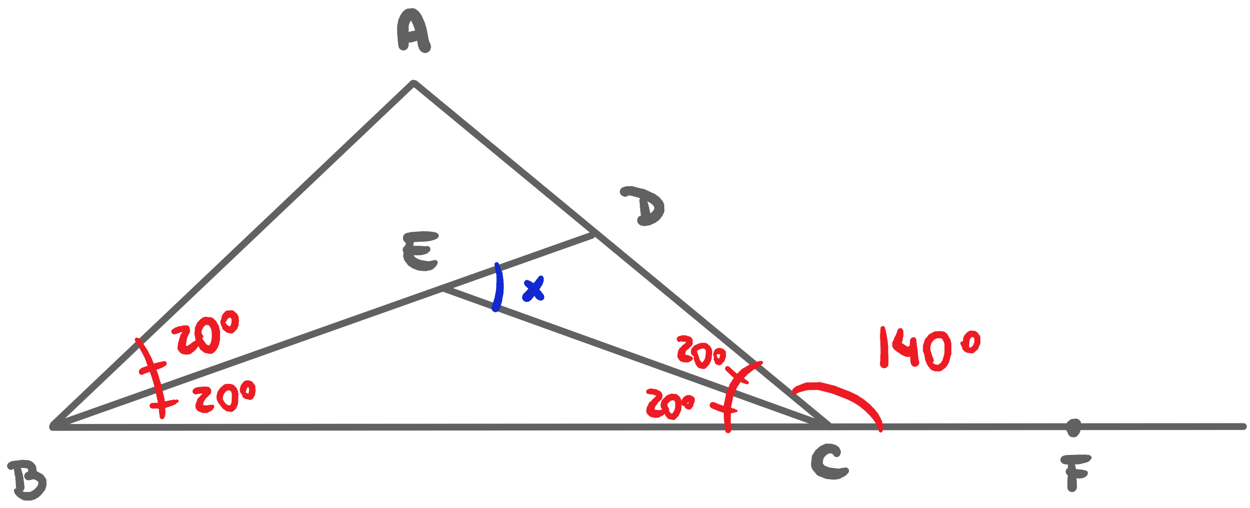
BD É BISSETRIZ DO ÂNGULO B

CE É BISSETRIZ DO ÂNGULO C

$A\hat{C}F = 140°$

CALCULE A MEDIDA DO ÂNGULO $D\hat{E}C$.





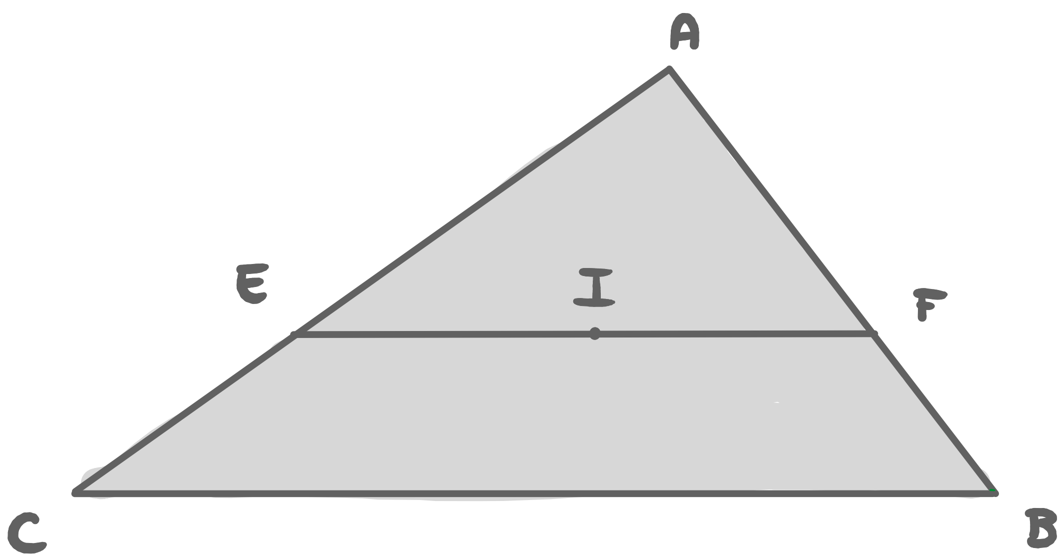
$$x = 20° + 20°$$

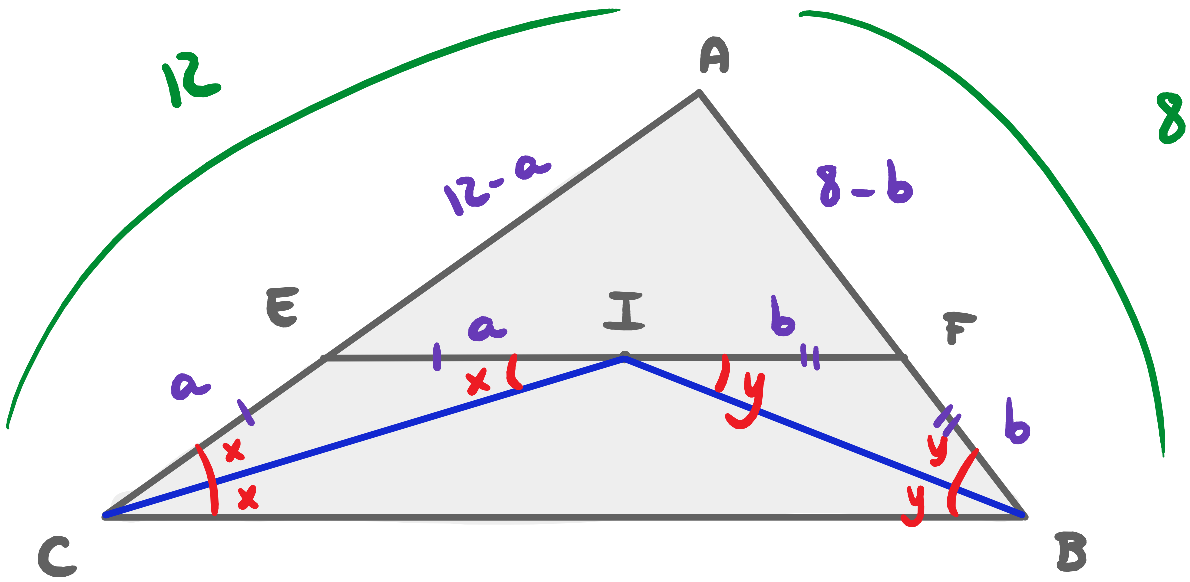
$$x = 40°$$

EXEMPLO

NA FIGURA, I É O INCENTRO DO TRIÂNGULO ABC, E O SEGMENTO $\overline{EF}$ É PARALELO A $\overline{BC}$.

SE AC = 12 E AB = 8, QUAL O PERÍMETRO DO TRIÂNGULO AEF?





$$Per(\Delta AEF) = 12 - \cancel{a} + 8 - \cancel{b} + \cancel{a} + \cancel{b}$$

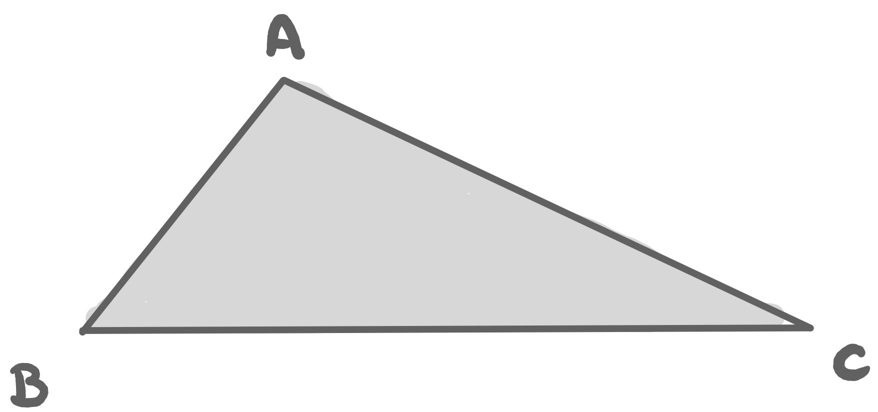
$$= \underline{20}$$

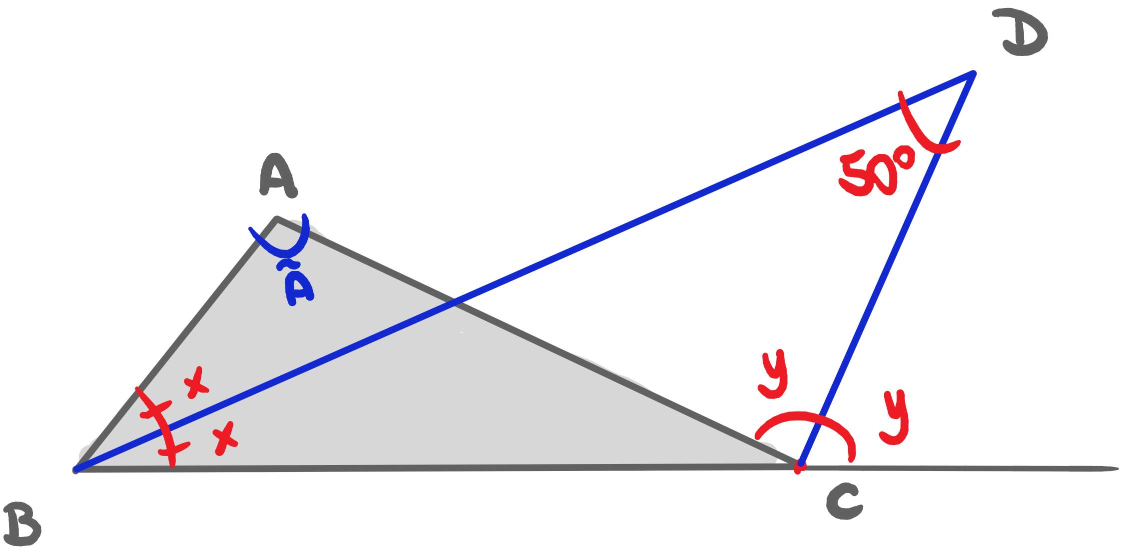
EXEMPLO

SEJA O TRIÂNGULO ABC DA FIGURA.

A BISSETRIZ INTERNA DO VÉRTICE B FORMA COM A BISSETRIZ EXTERNA DO VÉRTICE C UM ÂNGULO DE 50°.

DETERMINE A MEDIDA DO ÂNGULO Â.





Âng. Ext. Δ BCD

$$y = x + 50° \longrightarrow y - x = 50°$$

Âng. Ext. Δ ABC

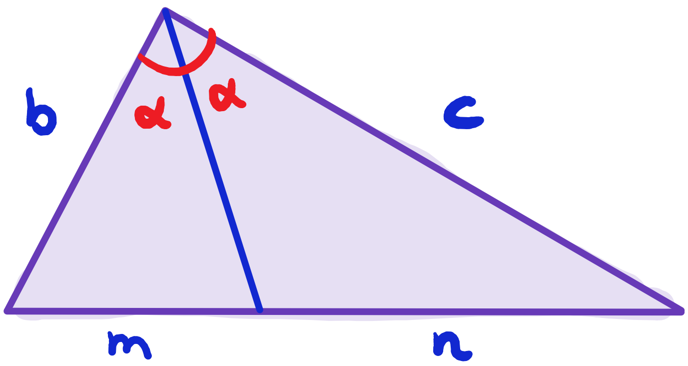
$$2y = \hat{A} + 2x \longrightarrow \hat{A} = 2\overbrace{(y - x)}^{50}$$

$$\downarrow$$

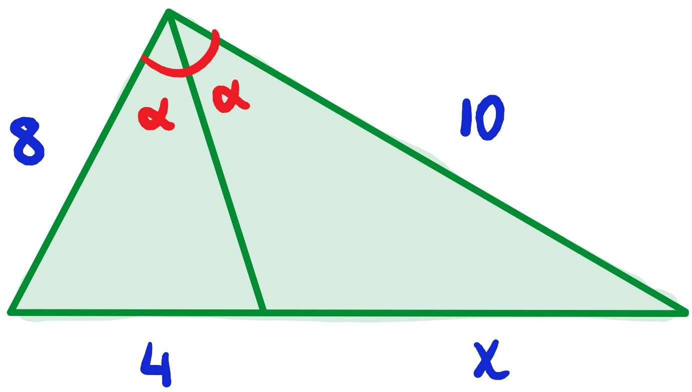
$$\hat{A} = 2 \cdot 50°$$

$$A = 100°$$

TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

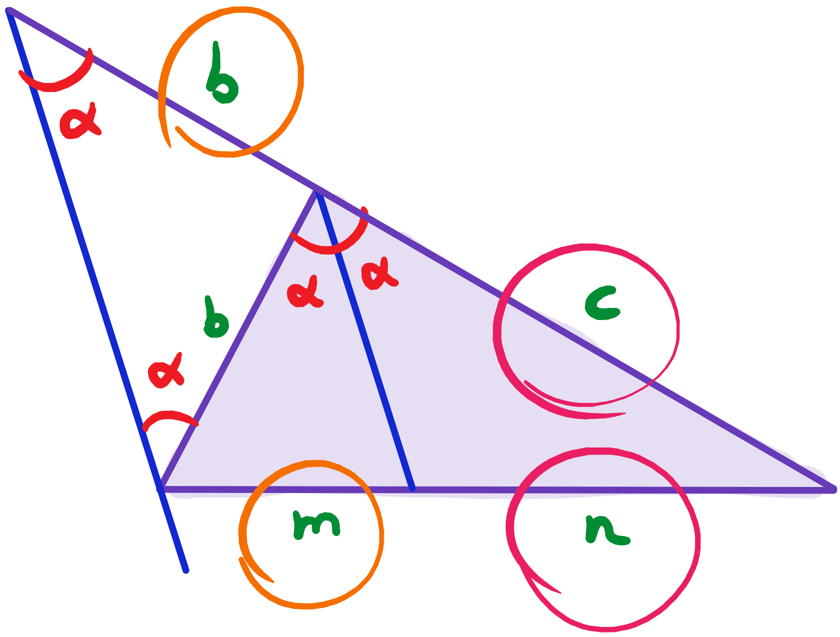


$$\frac{b}{m} = \frac{c}{n}$$

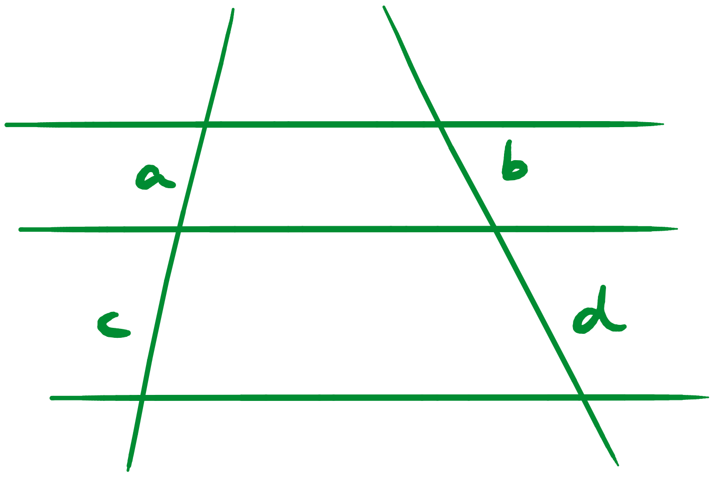


$$\frac{8}{4} = \frac{10}{x}$$

$$x = 5$$

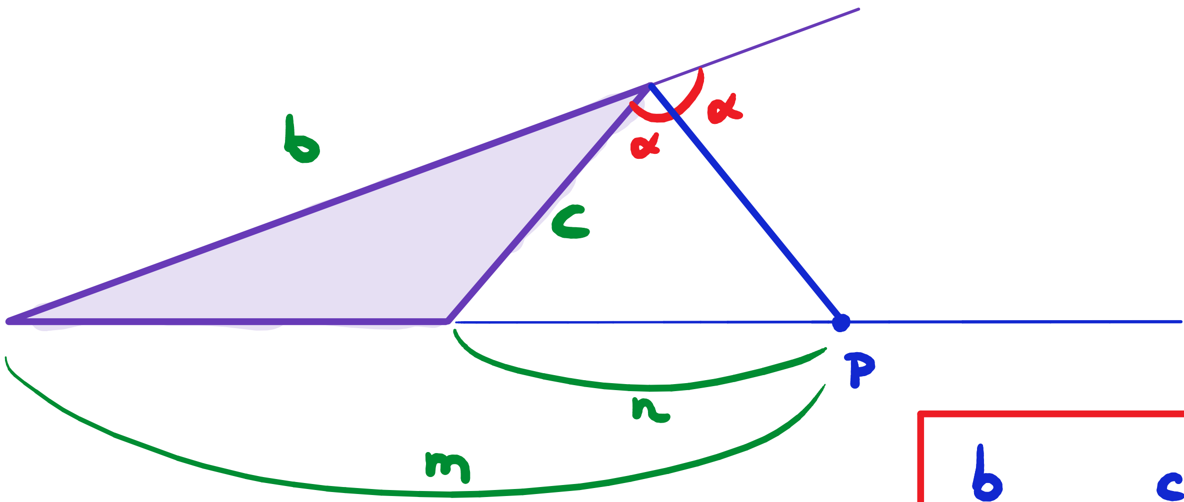


$$\frac{b}{m} = \frac{c}{n}$$

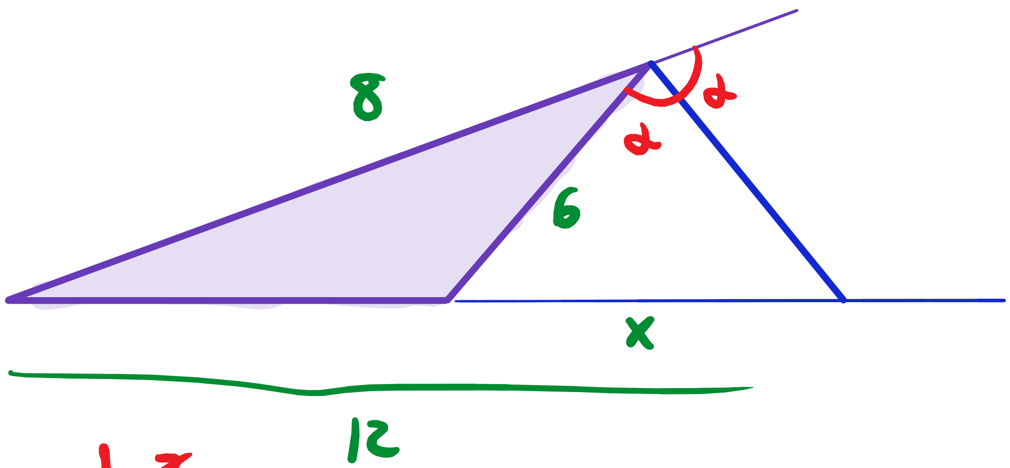


$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

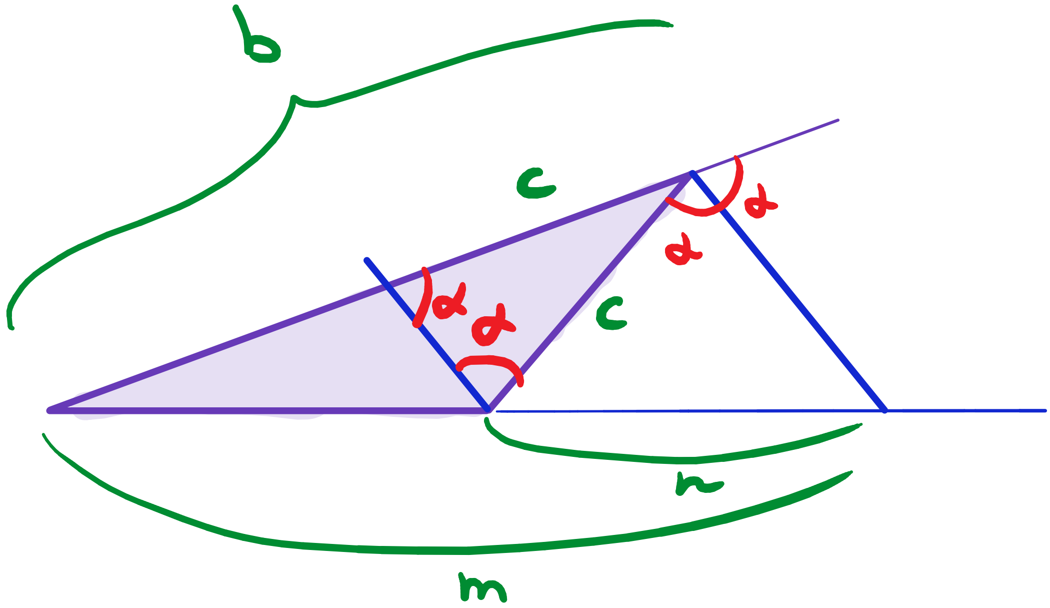
TEOREMA DA BISSETRIZ EXTERNA



$$\frac{b}{m} = \frac{c}{n}$$



$$\frac{8}{12} = \frac{6}{x} \rightarrow x = 9$$

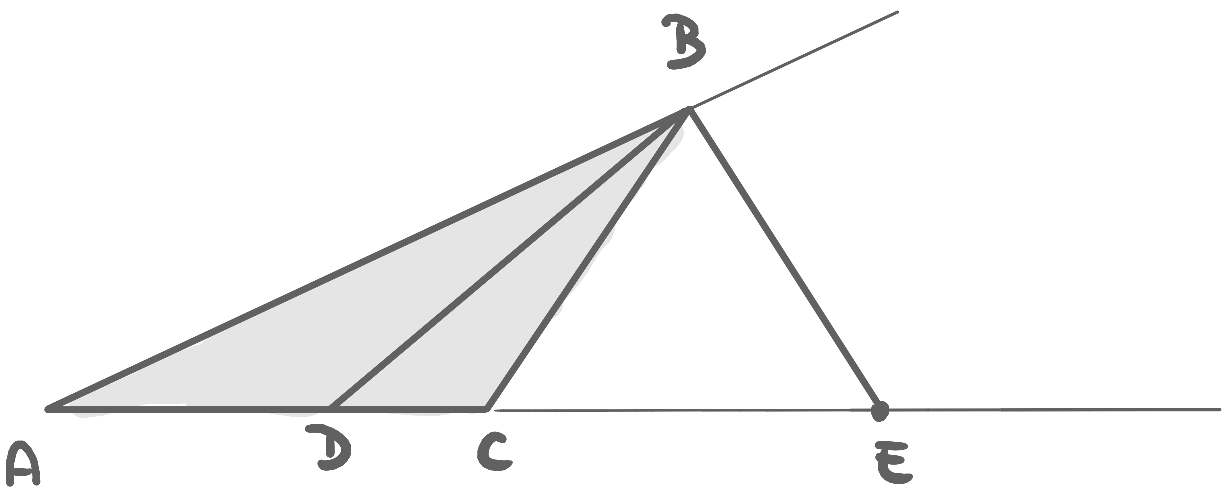


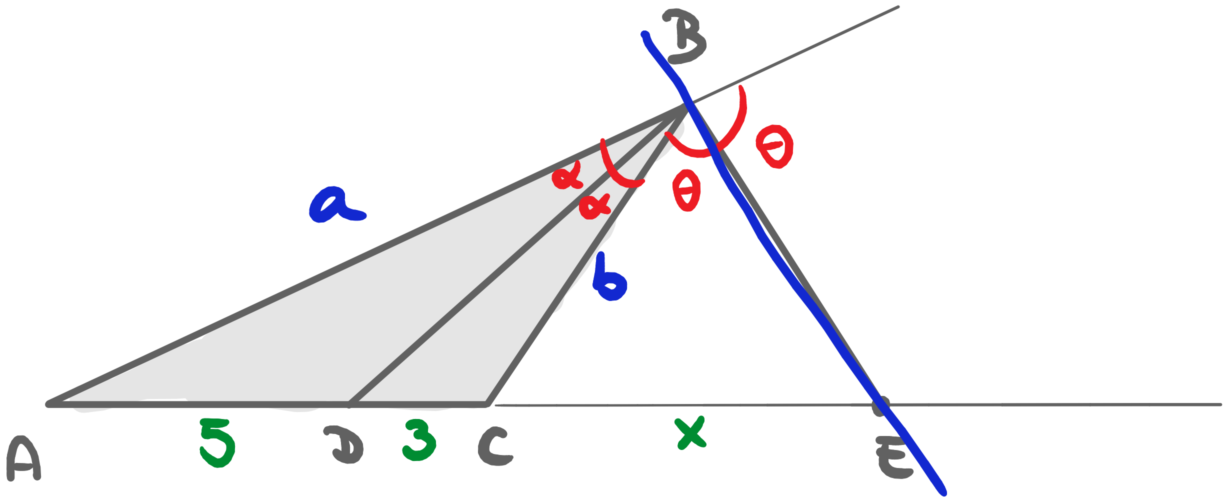
$$\frac{b}{m} = \frac{c}{n}$$

EXEMPLO

NO TRIÂNGULO ABC, BD E BE SÃO BISSETRIZES INTERNA E EXTERNA, RESPECTIVAMENTE.

SE AD = 5 E DC = 3, CALCULE CE.





T.B.I : $\dfrac{a}{5} = \dfrac{b}{3} \rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{3}$

T.B.E : $\dfrac{a}{x+8} = \dfrac{b}{x} \rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{x+8}{x}$

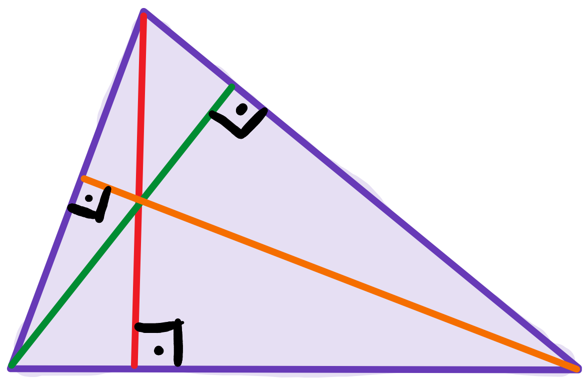
$$\frac{x+8}{x} = \frac{5}{3} \rightarrow 3x + 24 = 5x$$

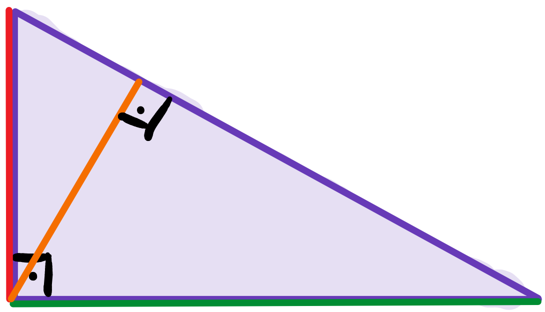
$$2x = 24$$

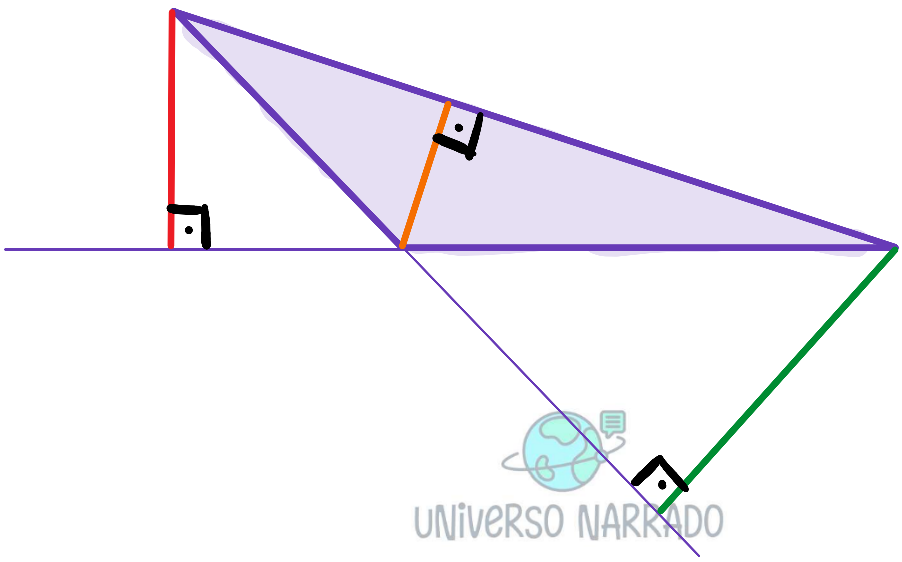
$$x = 12$$

ALTURA

ALTURA DE UM TRIÂNGULO É O SEGMENTO QUE LIGA UM VÉRTICE À RETA SUPORTE DO LADO OPOSTO.





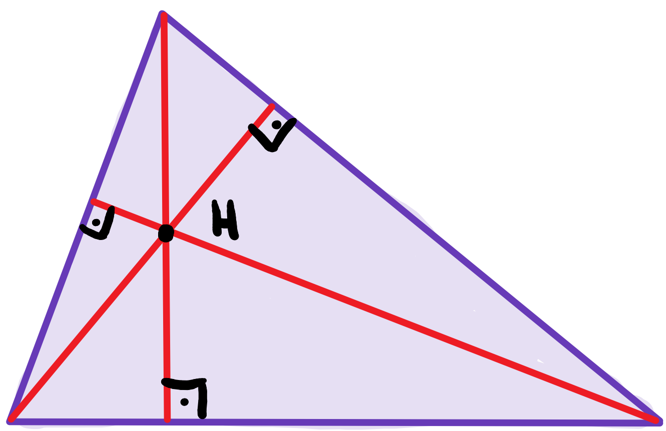


ORTOCENTRO

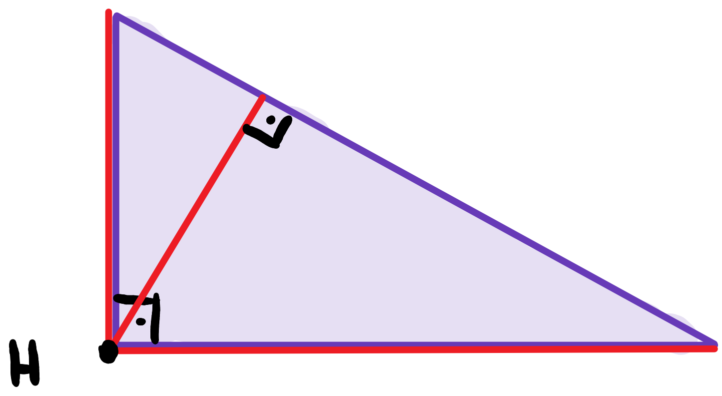
ORTOCENTRO É O PONTO DE INTERSEÇÃO DAS ALTURAS DE UM TRIÂNGULO.

POSIÇÃO DO ORTOCENTRO

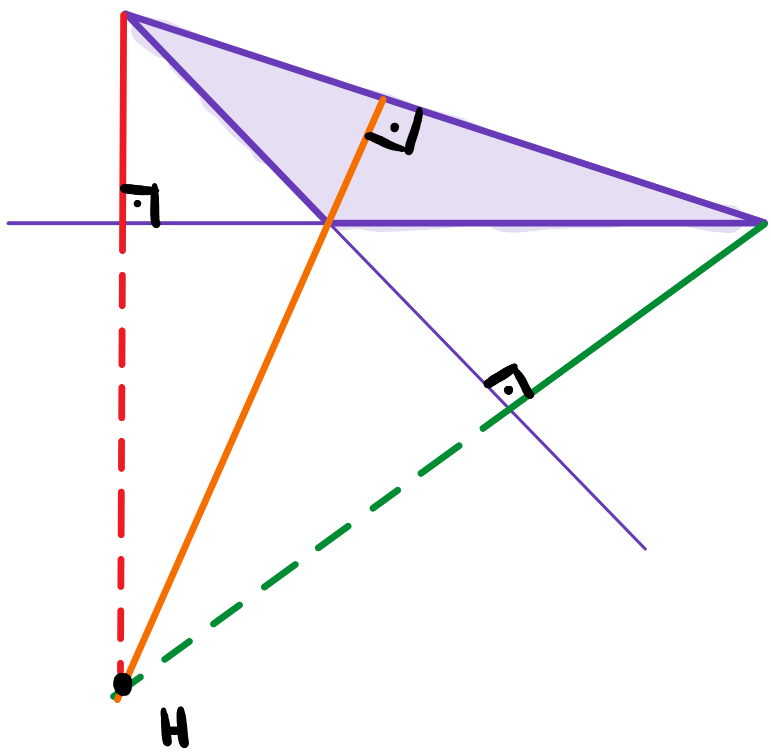
TRIÂNGULO ACUTÂNGULO



TRIÂNGULO RETÂNGULO



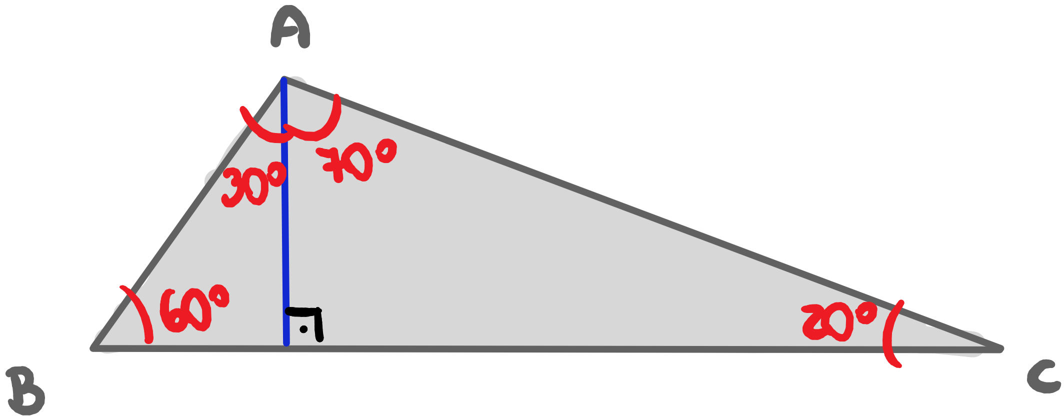
TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO

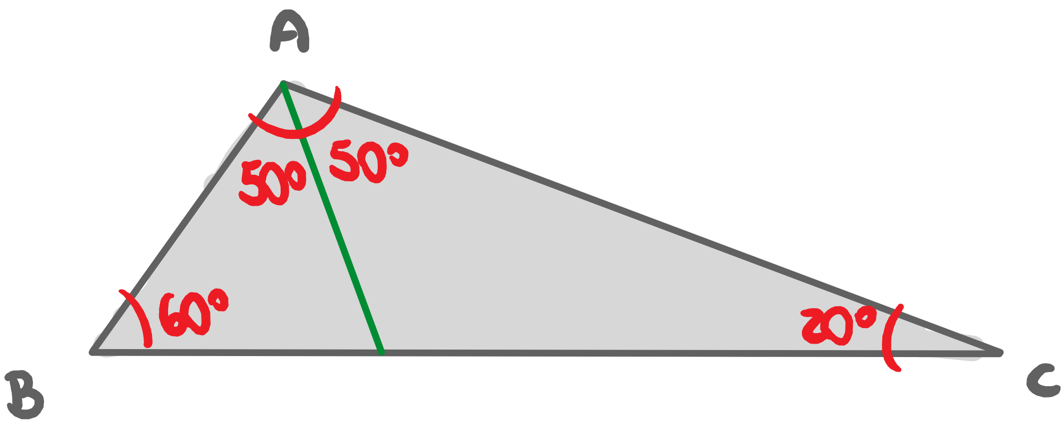


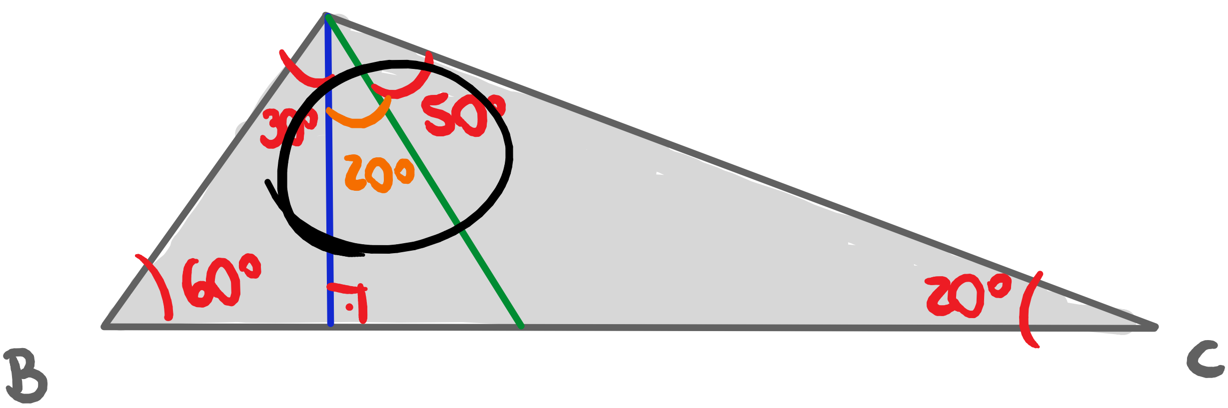
EXEMPLO

ABC É UM TRIÂNGULO NO QUAL B = 60° E C = 20°.

CALCULE O ÂNGULO FORMADO PELA ALTURA RELATIVA AO LADO BC E A BISSETRIZ INTERNA DO ÂNGULO Â.

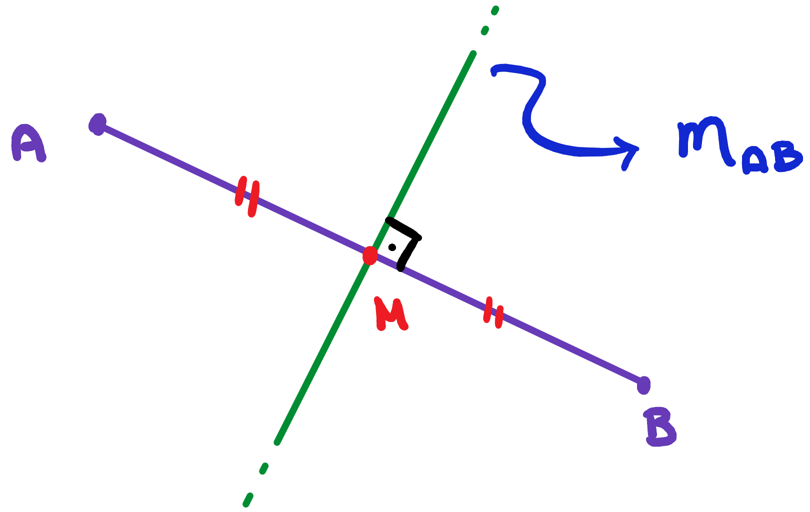

A
70°
30°
60°
20°
B
C


A
50°
50°
60°
20°
B
C

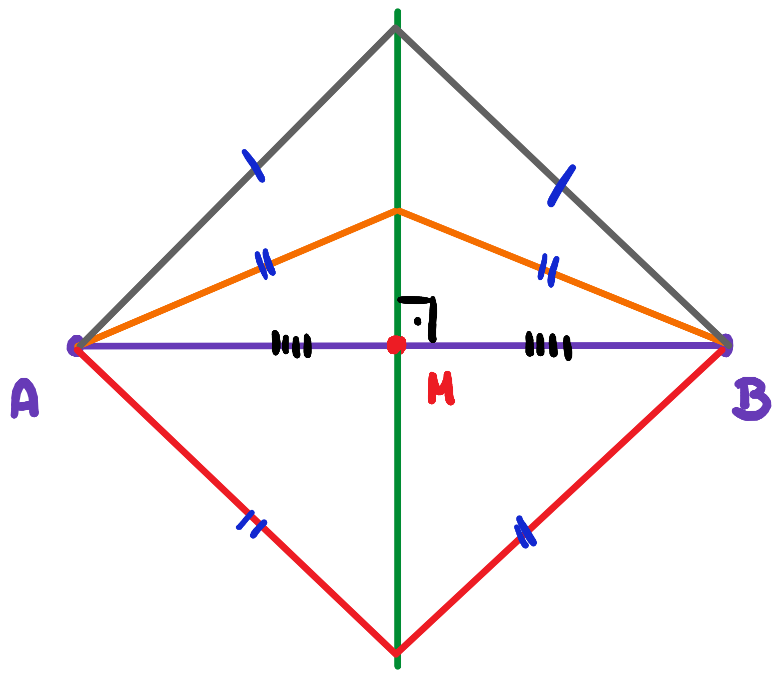

30°
50°
20°
60°
20°
B
C

MEDIATRIZ

MEDIATRIZ É A RETA QUE PASSA PERPENDICULARMENTE A UM SEGMENTO NO SEU PONTO MÉDIO.



MEDIATRIZ É TAMBÉM O CONJUNTO DE PONTOS DO PLANO EQUIDISTANTES A DOIS PONTOS DADOS.



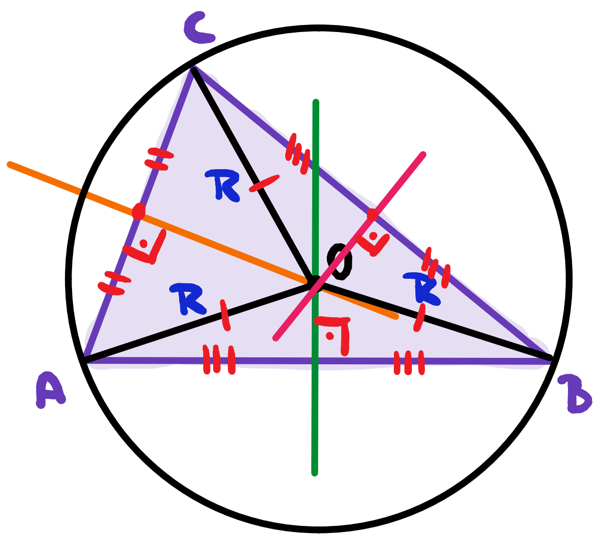
CIRCUNCENTRO

CIRCUNCENTRO É O PONTO DE INTERSEÇÃO DAS MEDIATRIZES DE UM TRIÂNGULO.

PROPRIEDADE

O CIRCUNCENTRO ESTÁ SOBRE CADA UMA DAS MEDIATRIZES DE UM TRIÂNGULO. LOGO, ELE É EQUIDISTANTE DOS VÉRTICES DO TRIÂNGULO.

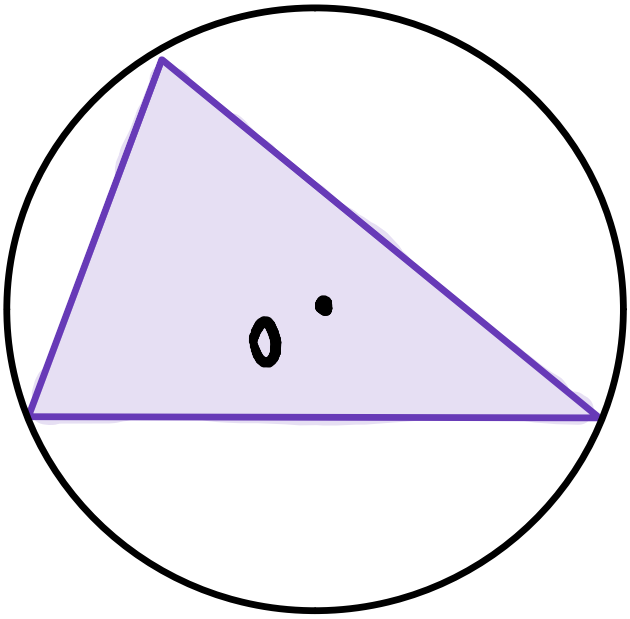
PORTANTO, O CIRCUNCENTRO É O CENTRO DA CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA AO TRIÂNGULO.



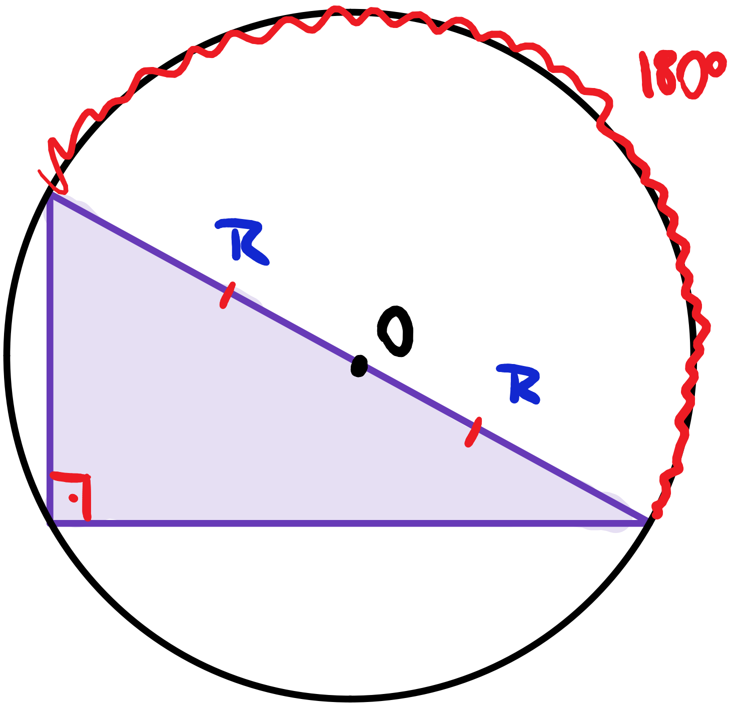
UNIVERSO NARRADO

POSIÇÃO DO CIRCUNCENTRO

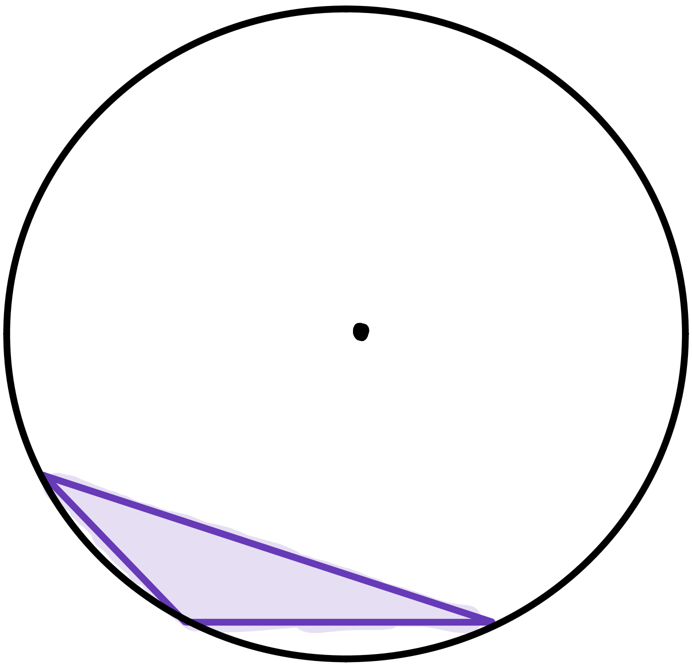
TRIÂNGULO ACUTÂNGULO



TRIÂNGULO RETÂNGULO



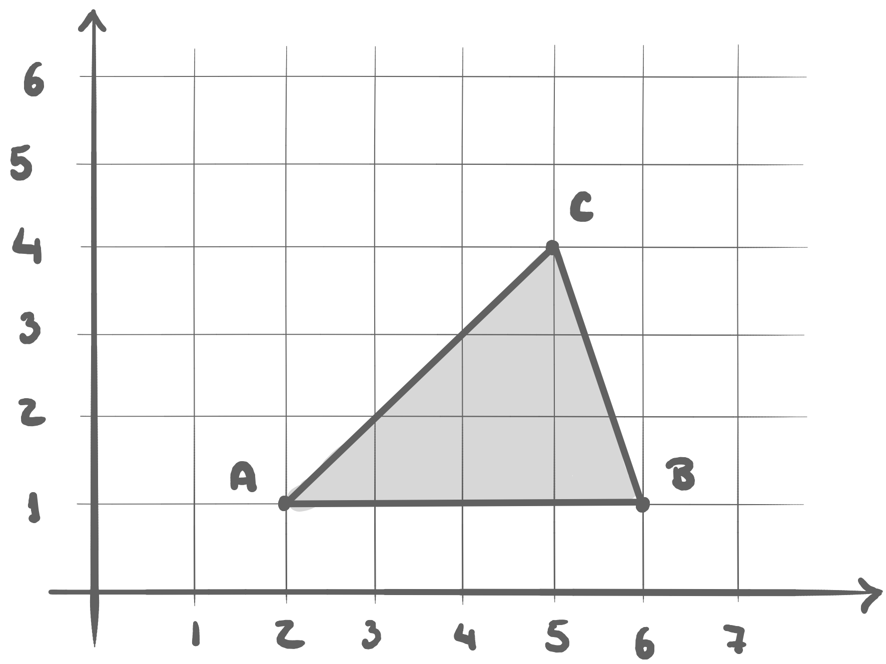
TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO

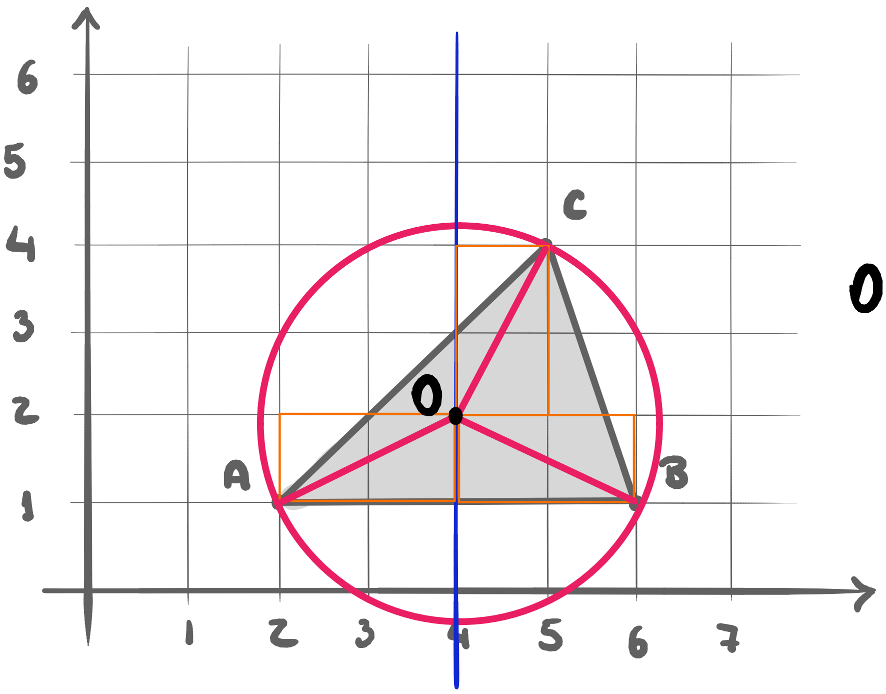


UNIVERSO NARRADO

EXEMPLO

NA FIGURA ABAIXO, CALCULE AS COORDENADAS DO CIRCUNCENTRO DO TRIÂNGULO ABC.



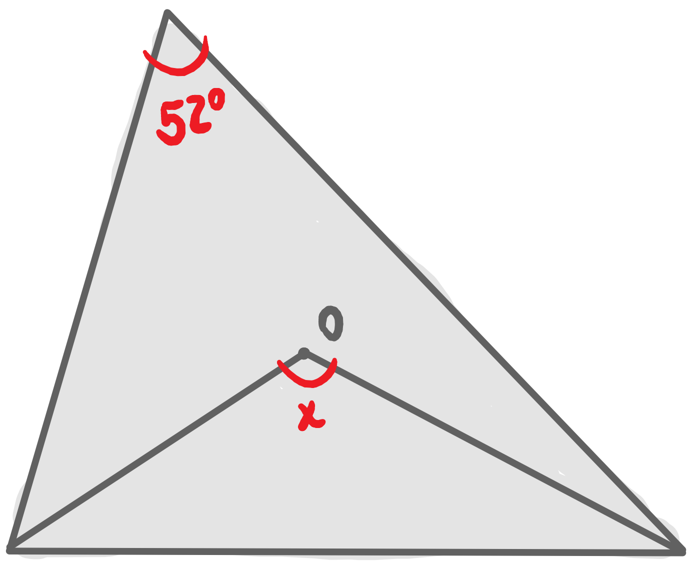


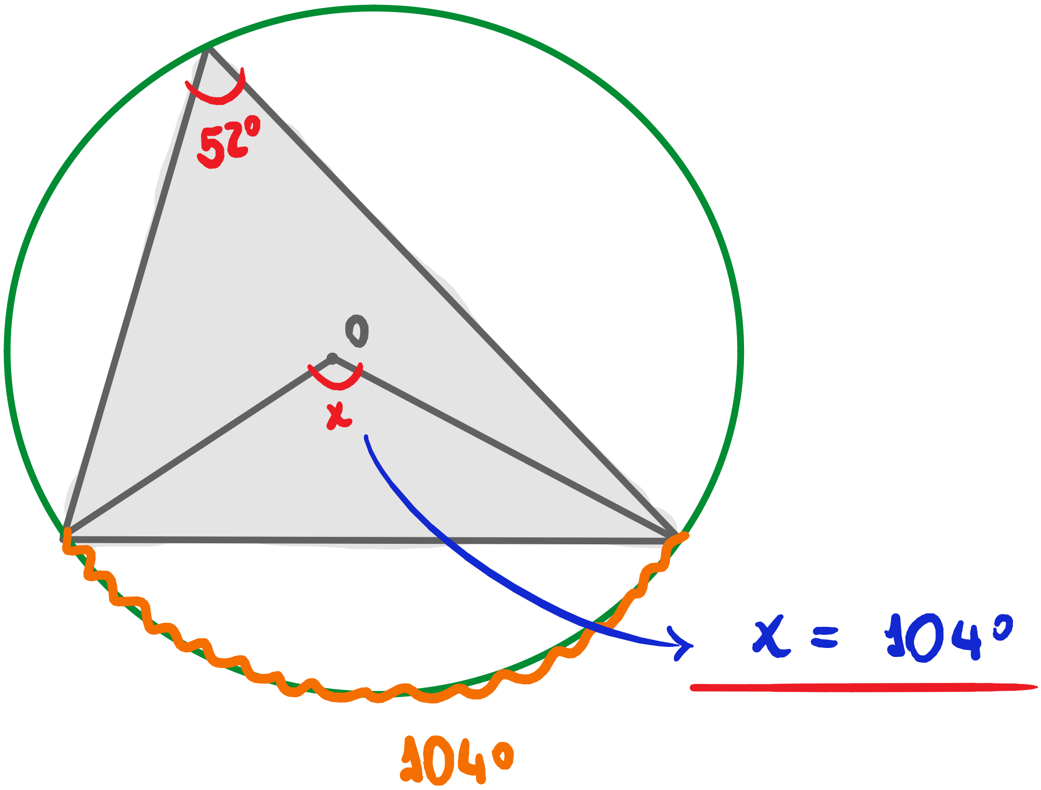
$O(4,2)$

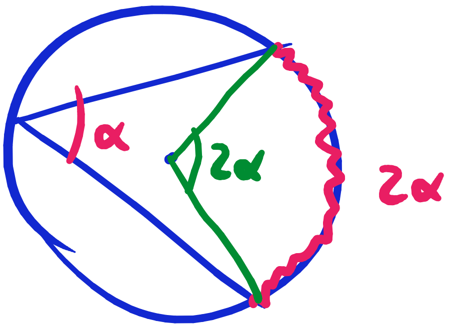
EXEMPLO

NA FIGURA ABAIXO, O É O CIRCUNCENTRO DO TRIÂNGULO ABC.

CALCULE A MEDIDA DO ÂNGULO x.



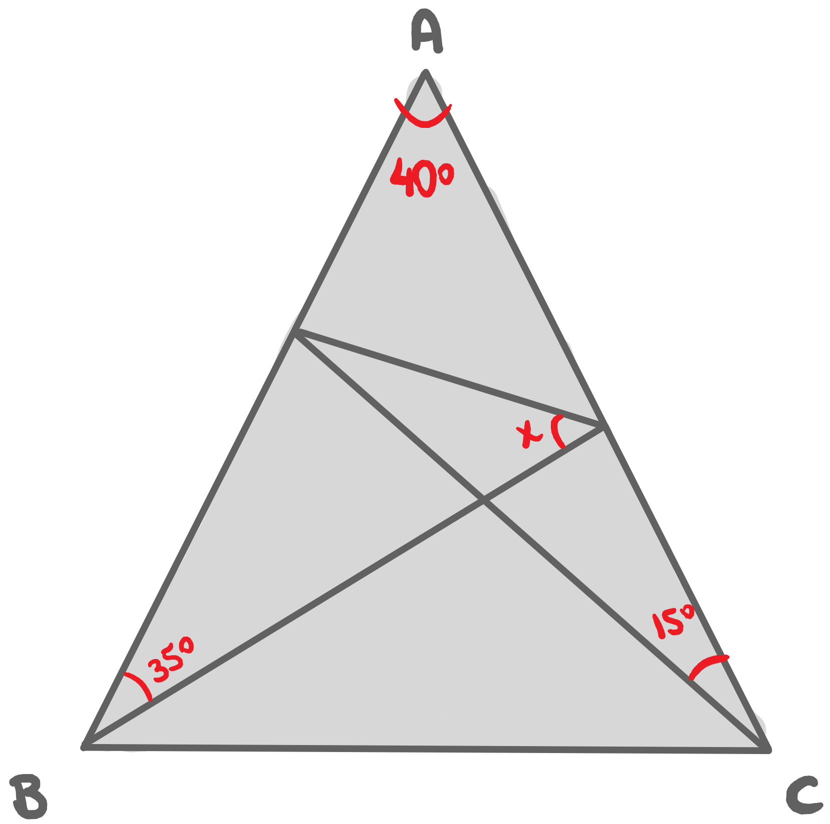

52°
O
x
x = 104°
104°

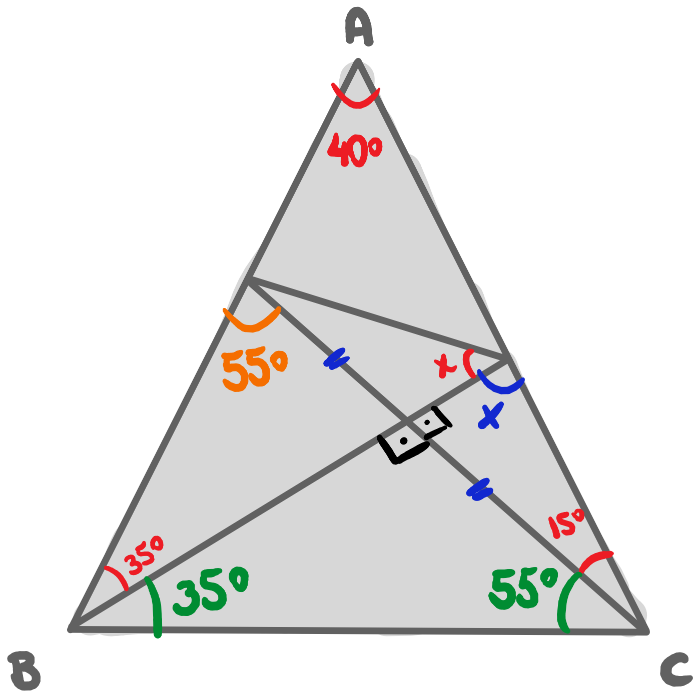

α
2α
2α

Miscelânea

EXEMPLO

CALCULE O VALOR DO ÂNGULO x SABENDO QUE AB = AC



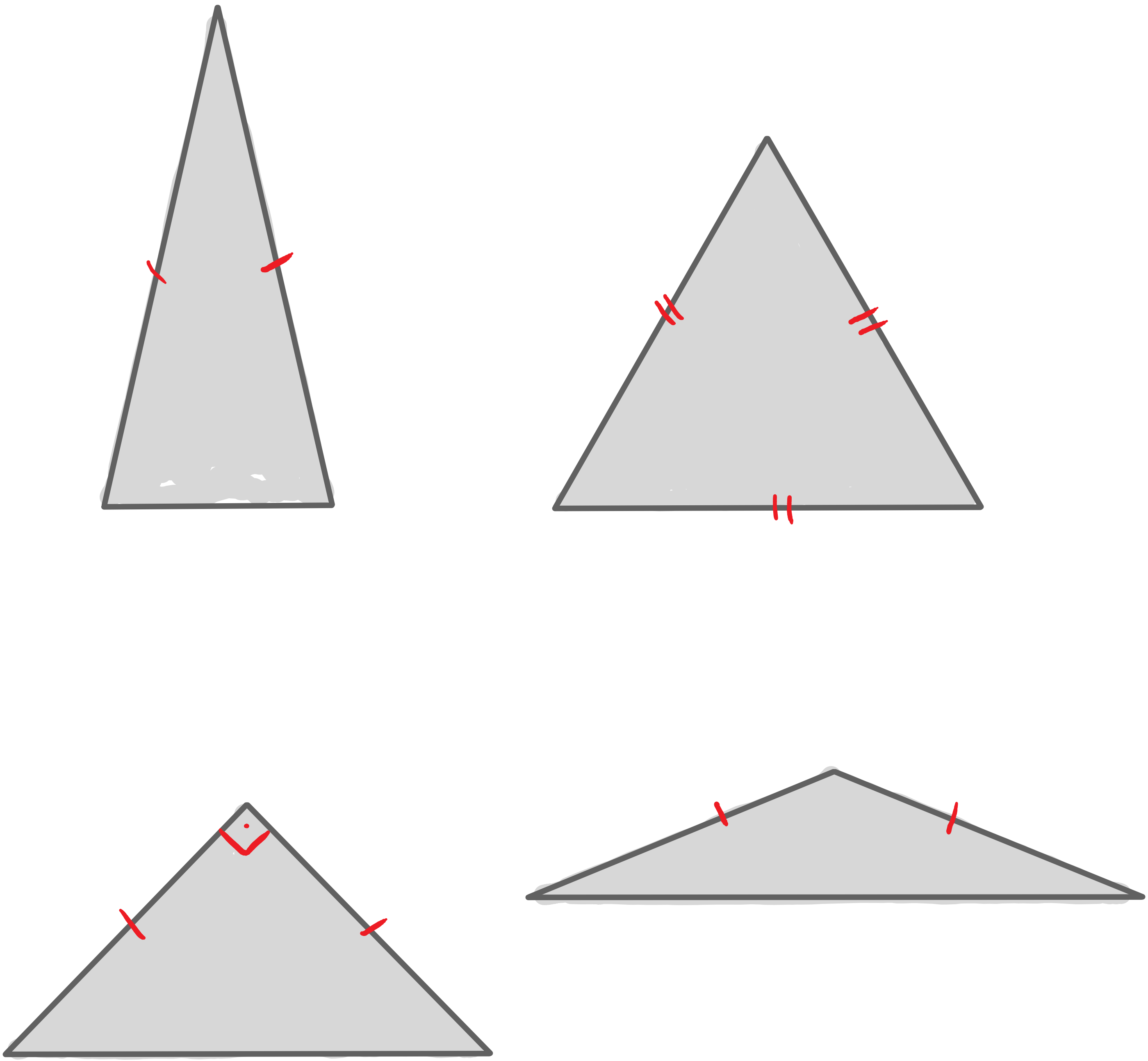


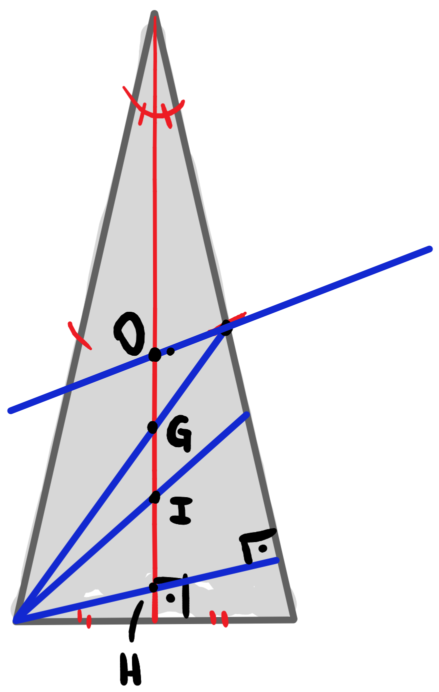
$$x + 15° = 90$$

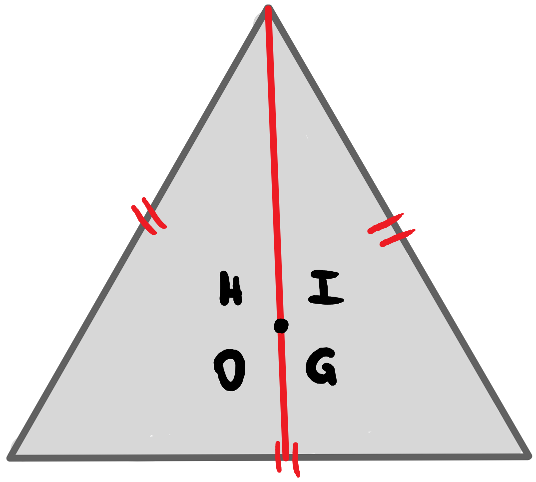
$$x = 75°$$

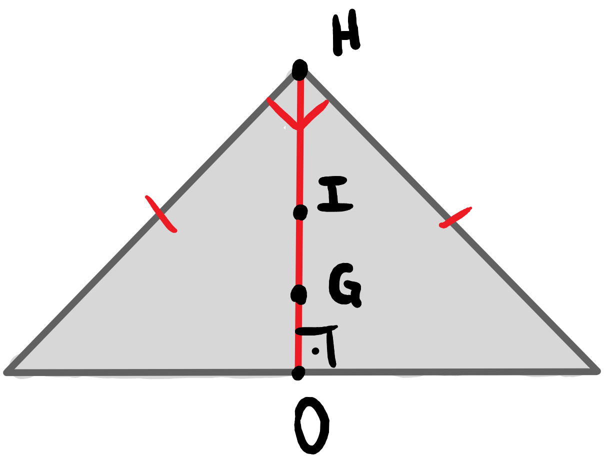
EXEMPLO

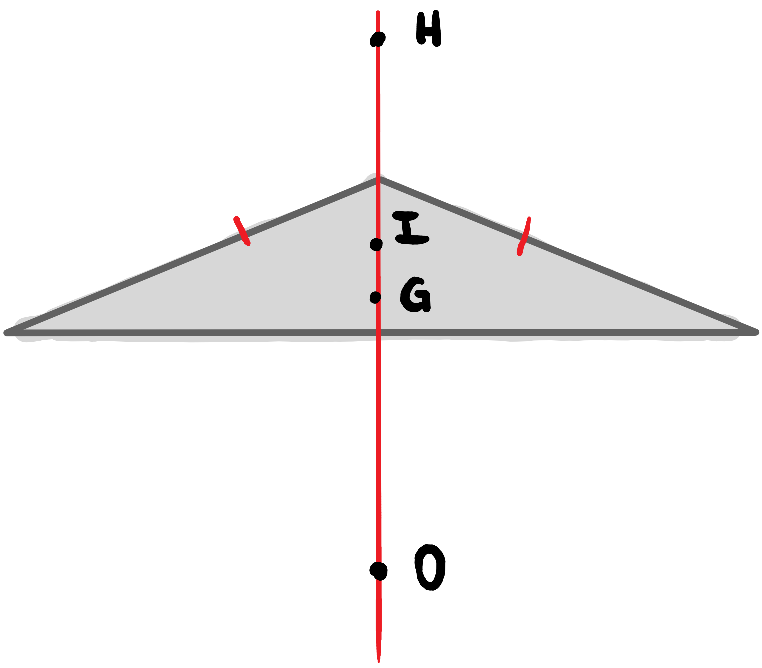
FAÇA UM ESBOÇO DE TODOS OS PONTOS NOTÁVEIS NOS TRIÂNGULOS ISÓCELES ABAIXO.




O
G
I
H


H
I
O
G


H
I
G
O

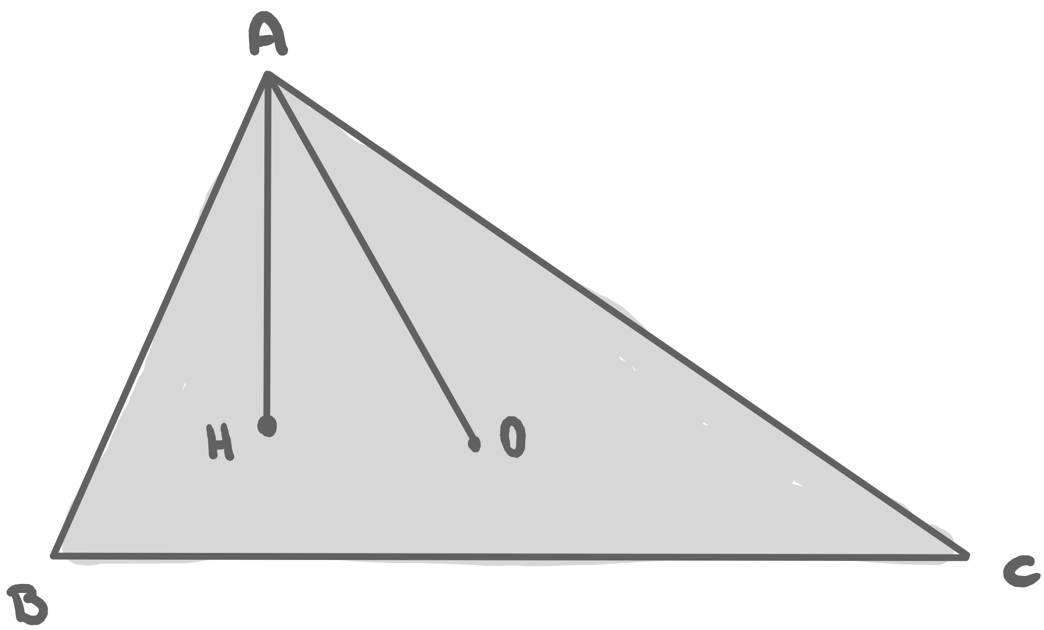

H
I
G
O

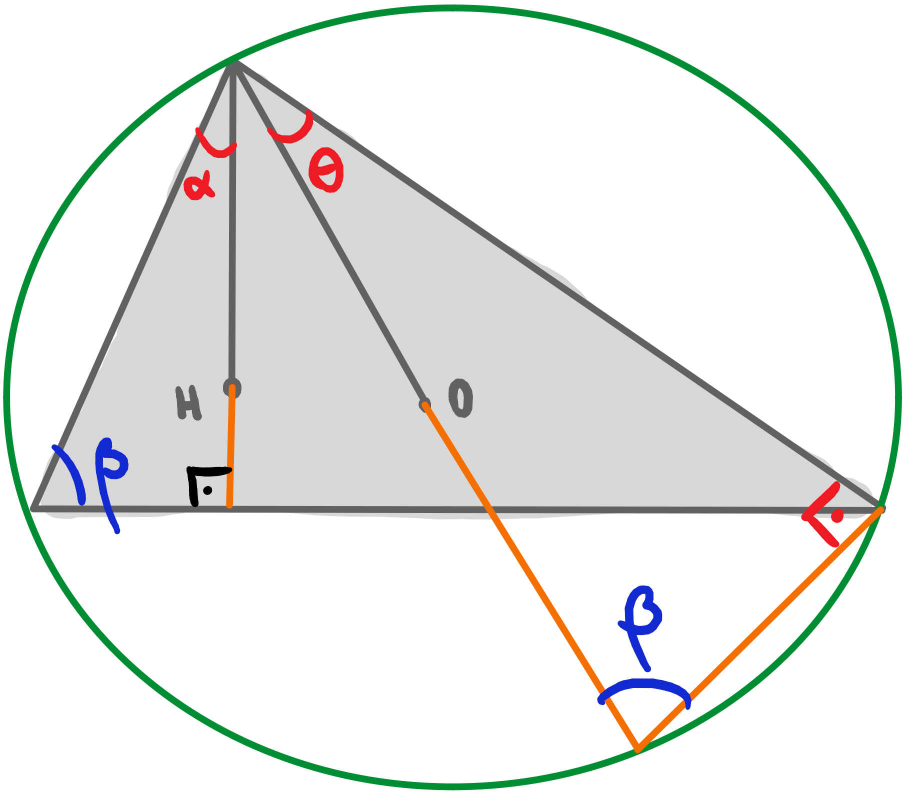
EXEMPLO

SEJA O TRIÂNGULO ABC ABAIXO.

H É O ORTOCENTRO E O É O CIRCUNCENTRO.

MOSTRE QUE HÂB = OÂC.





$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \theta + \beta = 90^\circ \end{cases}$$

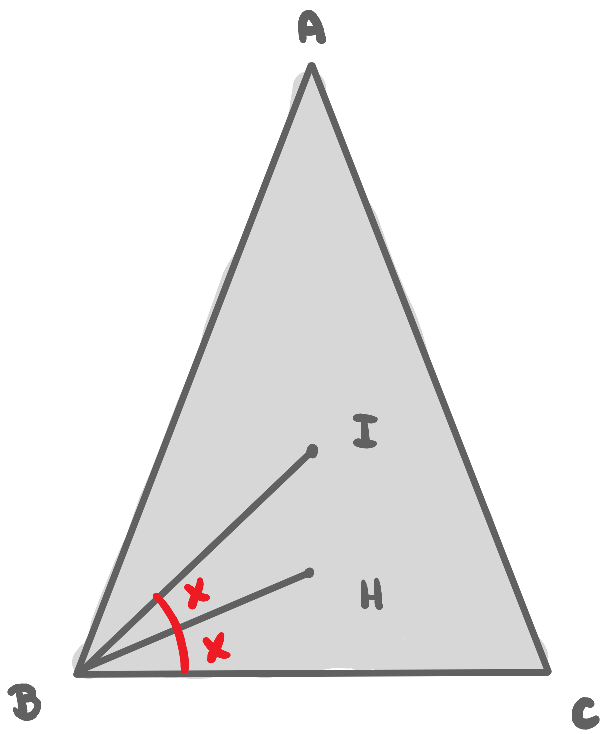
$$\alpha - \theta = 0$$

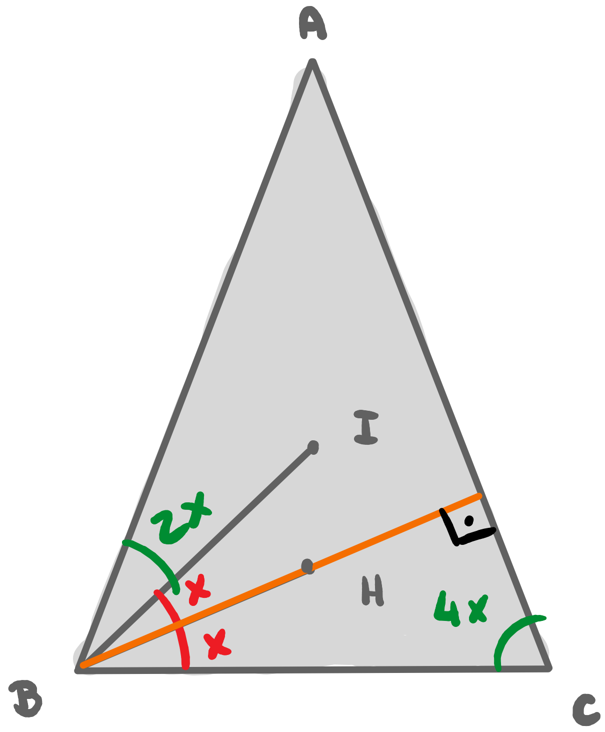
$$\alpha = \theta$$

EXEMPLO

SEJAM I O INCENTRO E H O ORTOCENTRO DO TRIÂNGULO ISÓCELES ABC.

CALCULE O VALOR DE x.





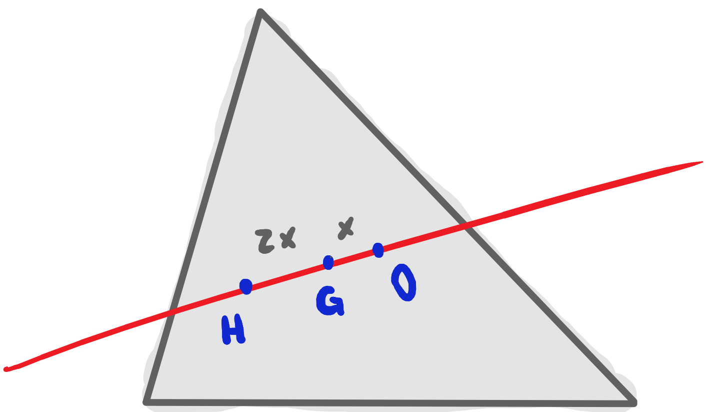
$$5x = 90^\circ$$

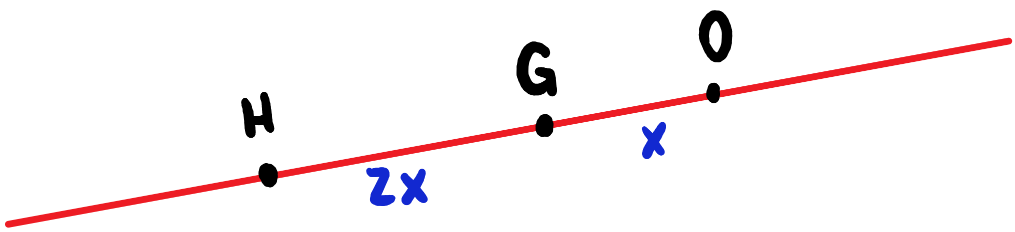
$$x = 18^\circ$$

UNIVERSO NARRADO

RETA DE EULER

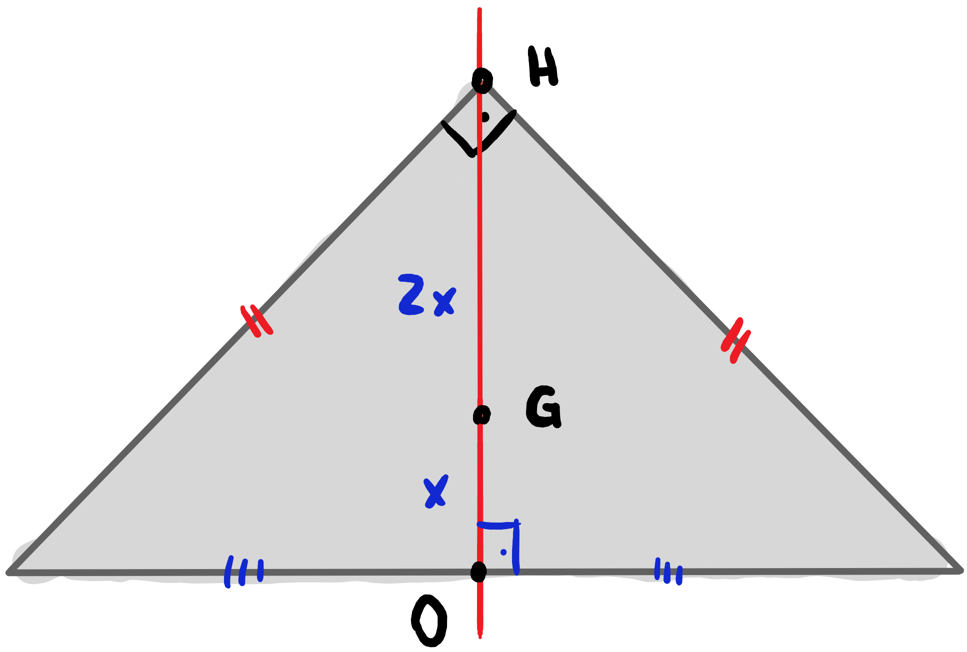
EM QUALQUER TRIÂNGULO,
O CIRCUNCENTRO (O),
O BARICENTRO (G), E O ORTO CENTRO (H)
ESTÃO SEMPRE ALINHADOS,
SOBRE A FAMIGERADA,
RETA DE EULER.





COMO LEMBRAR?

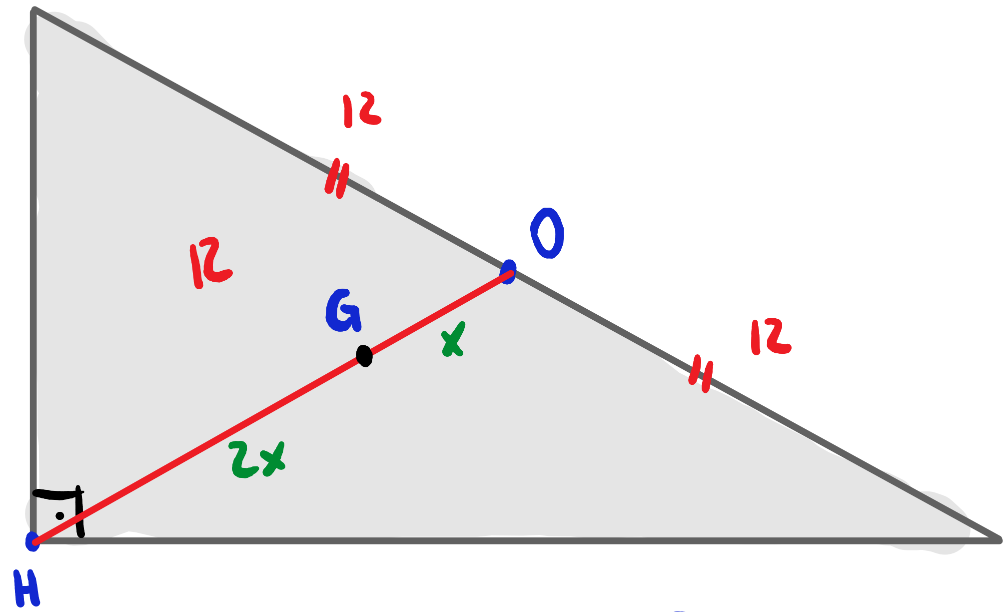
TRIÂNGULO RETÂNGULO ISÓCELES!



EXEMPLO

A HIPOTENUSA DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO MEDE 24.

CALCULE A DISTÂNCIA DO ORTOCENTRO AO BARICENTRO DESSE TRIÂNGULO.



$$3x = 12$$
$$x = 4$$
$$GH = 2x = 8$$