

## REPRESENTAÇÃO

- Matriz  $m \times n$  = tabela retangular formada por números reais distribuídos em:

- $m$  linhas
- $n$  colunas

$$\begin{bmatrix} a & b & \dots & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & \dots & \dots & j \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a & b & \dots & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & \dots & \dots & j \end{bmatrix}} \right\} m \\ \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a & b & \dots & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & \dots & \dots & j \end{bmatrix}} \right\} n \end{matrix}$$

- Elemento =  $a_{ij}$

$$\mathcal{M} = (a_{ij}) . m \times n \text{ (Linha } i \text{ coluna } j)$$

## MATRIZES ESPECIAIS

### RETANGULAR

$$= m \neq n$$

### QUADRADA

$$= m = n \rightarrow \text{matriz quadrada de ordem } n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

Traço = soma dos elementos da diagonal principal

### LINHA

$$= m = 1$$

$$\begin{bmatrix} a & b & \dots & z \end{bmatrix}$$

$n$

### COLONA

$$= n = 1$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ k \end{bmatrix}$$

$m$

# matrizes

## MATRIZES ESPECIAIS

### DIAGONAL

- = matriz quadrada cujos elementos que **não** pertencem à **diagonal principal** são **nulos**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

### IDENTIDADE

- = matriz **diagonal** cujos elementos da **diagonal principal** são 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$I_n = \text{matriz identidade de ordem } n$

### ESCALAR

- = matriz **diagonal** cujos elementos da **diagonal principal** são **iguais**

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

### NULA

- = **todos** seus elementos são **nulos**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## MATRIZES ESPECIAIS

(continuação)

# MATRIZES

### MATRIZ SIMÉTRICA

- = Matriz quadrada de ordem  $n$  tal que  $a_{ij} = a_{ji}$ , para todo  $i$  e todo  $j$
- A **diagonal** principal atua como um **eixo de simetria** (não há restrição aos elementos da diagonal principal)

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

### MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA

- = Matriz quadrada de ordem  $n$  tal que  $a_{ij} = -a_{ji}$ , para todo  $i$  e todo  $j$
- A **diagonal** principal deve ser formada por **zeros**

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ -3 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

### MATRIZ OPOSTA

- = Quando a soma das duas matrizes resulta em uma **matriz nula**
- $A + B = \text{Matriz Nula}$
- $a_{ij} = -b_{ij}$
- A matriz oposta de **A** é **-A**

### TRIANGULAR SUPERIOR

- = Matriz quadrada em que todos os elementos **abaixo** da diagonal principal são **nulos** ( $a_{ij}=0$ , para  $i > j$ )

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### TRIANGULAR INFERIOR

- = Matriz quadrada em que todos os elementos **acima** da diagonal principal são **nulos** ( $a_{ij}=0$ , para  $i < j$ )

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

# MATRIZES

## ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

- Só se dá entre matrizes do **mesmo tipo** (Mesmo número de linhas e colunas)
- O resultado também é uma matriz do **mesmo tipo**

$$C = A + B$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Faz-se a operação termo a termo

## PROPRIEDADES

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + B = B + A$
- É o equivalente para a **subtração**

$$C = A - B$$

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

• Ex.:

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 4 \\ 11 & 6 & 7 \\ 2 & 14 & 5 \end{bmatrix}$$

## PRODUTO DE UM NÚMERO POR MATRIZ

- Para **multiplicar** uma matriz A por um número real **k**, basta multiplicar **todos os elementos** de A ( $a_{ij}$ ) por k

• Ex.:

$$k=3$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow k \cdot A =$$

$$= 3 \cdot \begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 24 & 0 \\ 24 & 12 & 21 \\ 0 & 21 & 3 \end{bmatrix}$$

## MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

- Para multiplicar duas matrizes A, B, é necessário que o número de **colunas de A** seja igual ao de **linhas de B**

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p}$$

as dimensões do meio devem coincidir

**ATENÇÃO!** Nem sempre é possível multiplicar duas matrizes

## DIMENSÕES DA MATRIZ RESULTANTE

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

As dimensões das extremidades vão para a matriz resultante

•Ex.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} 15 & 28 & 39 \\ 1 & 21 & 28 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Calculation for the element 28 (row 2, column 2):  
 $= 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 4$   
 $= 1 + 0 + (-6) + 20 = 15$

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} \cdot a_{rj}$$

matrizes

## PROPRIEDADES

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  (Associativa)
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$  (Distributiva em relação à adição)
- $(kA) \cdot B = A(kB) = k \cdot (A \cdot B)$
- $I \cdot A = A \cdot I = A$  (Sendo A uma matriz quadrada)

→ A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes quadradas

## POTENCIALIZAÇÃO DE MATRIZES

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \dots A}_{n \text{ fatores}} \quad \begin{aligned} &\bullet A^1 = A \\ &\bullet A = 0 \end{aligned}$$

# MATRIZES

## MATRIZ TRANSPOSTA

- Seja  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , sua transposta será  $A^t_{n \times m}$  a matriz que se obtém **trocando** as **linhas** pelas **colunas**

- Ex.:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}}_A \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}}_{A^t}$$

## PROPRIEDADES DECORE!

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$  (Sendo A e B matrizes do mesmo tipo)
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
- $(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$  (Sendo A e B matrizes que podem ser multiplicadas)
- Matriz simétrica:  $A^t = A$
- Matriz antissimétrica:  $A^t = -A$

## MATRIZES INVERSAS

- Seja  $A$  uma matriz **quadrada** de ordem  $n$ , e  $B$  sua inversa:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

$(B = A^{-1})$

- Se  $A$  **não** é inversível = matriz **singular**

## PROPRIEDADES

(Sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem e inversíveis)

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

- MATRIZ ORTOGONAL** → se a inversa da matriz é igual a sua transposta.  $(A^{-1} = A^t)$  