09

O que aprendemos?

Nesta aula nós começamos com o conceito de limite. Mostramos que a derivada é a taxa de mudança de uma função quando sua variável muda de valor.

Mas, como as funções agora dependem de mais de uma variável, uma variável muda, ou a outra, ou ambas mudam.

Nesse caso, como calculamos as derivadas da função?

Primeiro, vimos que o limite de uma função de duas variáveis (ou mais) é um pouco mais complexo do que no caso de funções de uma variável: para que o limite sobre uma função de duas variáveis exista, é essencial que, ao nos aproximar do ponto `(x,y)` , o limite em si tenha um valor bem definido, e este valor não pode depender do caminho escolhido para se aproximar do ponto `(x,y)` .

Agora, o caso é um pouco mais complexo, pois existem infinitos caminhos em 2D.

Use o Maxima para calcular alguns limites em 2D e compare com o caso 1D. Faça o seguinte teste no Maxima:

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Calcule agora o limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Vamos escolher dois caminhos, tender a zero por `x` e depois `y` e em seguida tender a zero por `y` e depois por `x` , ou seja:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = ?$$

e:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = ?$$

Agora, abra o Maxima e calcule:

(%i1) f(x,y):=x/(x^2+y^2);

(%o1) $f(x,y):=\frac{x}{x^2+y^2}$

Calculando os dois limites acima, no Maxima, obtém-se:

(%i5) limit(limit(f(x,y), y, 0),x,0);
(%o5) *infinity*

(%i6) limit(limit(f(x,y),x,0),y,0);
(%o6) 0

Como vimos, os resultados dependeram do caminho, muito diferente do que ocorre com 1D (você só tem duas opções: pela esquerda ou pela direita, e em 2D temos uma infinidade de caminhos, mostramos apenas duas opções acima).

Em seguida, aprendemos como calcular as derivadas parciais, manualmente, usando a definição do limite e tendo a incrível ferramenta Maxima à nossa disposição.

Por que precisamos conhecer as derivadas parciais? O que elas trazem de benefício? Quais são as informações que ela fornece? Por que se chamam parciais?

Muito bem, a derivada parcial é o mesmo que a derivada comum, diferindo apenas no fato de que devemos escolher apenas uma das variáveis e manter a outra constante.

No programa Maxima, para indicar a derivada da função `f(x,y)` com relação à variável `x` , escreva:

```
diff(f(x,y),x)
```

A derivada parcial da mesma função acima, com relação à variável `y` é:

```
diff(f(x,y),y)
```

A derivada da derivada é possível, basta escrever:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Indicando a derivada de segunda ordem com relação à `x` , no Maxima, escreve-se o acima como:

```
diff(f(x,y),x,2)
```

Finalmente, se ambas as variáveis `x` e `y` variarem, como a função `f(x,y)` irá mudar?

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$$

No Maxima, basta escrever `diff(f(x,y))` sem escolher `x` ou `y`, desta forma ele calcula a variação total da função `f(x,y)`:

```
diff(f(x,y))
```