Aula 09

Banco do Brasil - Matemática - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

02 de Janeiro de 2023

Índice

1) Frações 3
2) Razão e Proporção 33
3) Proporcionalidade 50
4) Questões Comentadas - Frações - Cesgranrio 72
5) Questões Comentadas - Razão e Proporção - Cesgranrio 85
6) Questões Comentadas - Proporcionalidade - Cesgranrio 91
7) Lista de Questões - Frações - Cesgranrio 106
8) Lista de Questões - Razão e Proporção - Cesgranrio 111
9) Lista de Questões - Proporcionalidade - Cesgranrio 114

FRAÇÕES

Frações

Introdução

$$\frac{a}{b}\quad \begin{matrix} \longrightarrow \text{Numerador} \\ \longrightarrow \text{Denominador} \end{matrix}$$

A fração $\boldsymbol{a/b}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **não apresentam fatores primos em comum**. Em outras palavras, uma fração $\boldsymbol{a/b}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**.

Duas frações são **equivalentes** quando **representam o mesmo número**.

Para **somar e subtrair** frações, devemos transformar todas as frações em **frações equivalentes com o mesmo denominador**.

Para realizar a **multiplicação de frações**, realiza-se a multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores.

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação.

Para **comparar frações**, devemos encontrar frações equivalentes que apresentem o mesmo denominador.

Problemas envolvendo frações

A palavra "**de**" costuma significar uma **multiplicação**.
Uma forma prática de se **obter o todo a partir da parte** do problema é utilizar o recurso "**inverte e multiplica**".
Dada uma fração $\boldsymbol{a/b}$, a **fração complementar** corresponde a $\boldsymbol{1 - a/b}$.

Dízima periódica

O **período** é a porção que se repete em uma dízima periódica.

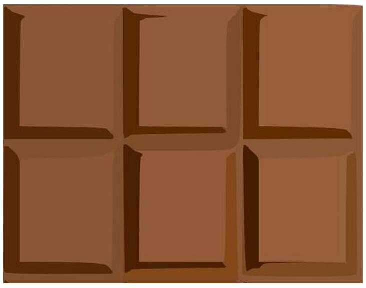
- Um número da forma $\mathbf{0,AAA\ldots = 0,\overline{A}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{A}}{9}$;
- Um número da forma $\mathbf{0,ABABAB\ldots = 0,\overline{AB}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{AB}}{99}$;
- Um número da forma $\mathbf{0,ABCABCABC\ldots = 0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{ABC}}{999}$;
- E assim sucessivamente.

Para dízimas periódicas que fogem desse padrão, devemos modificá-las de modo a deixá-las no formato que conhecemos.

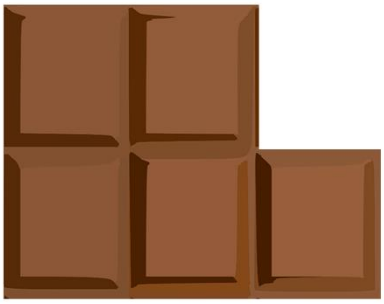
Introdução

Conceitos preliminares

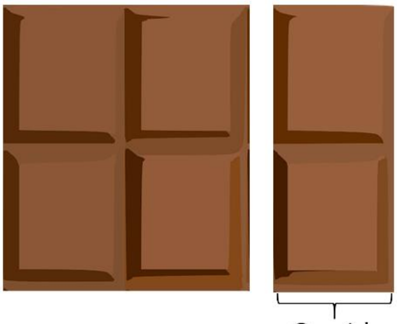
A assimilação plena do conceito de frações é fundamental para se entender diversos outros assuntos de matemática. Para ilustrar a ideia, considere a barra de chocolate a seguir com 6 pedaços.



Comer 5/6 (cinco sextos) da barra de chocolate significa comer 5 dos 6 pedaços. Para o caso em questão, 5/6 representa a seguinte parte que foi comida:

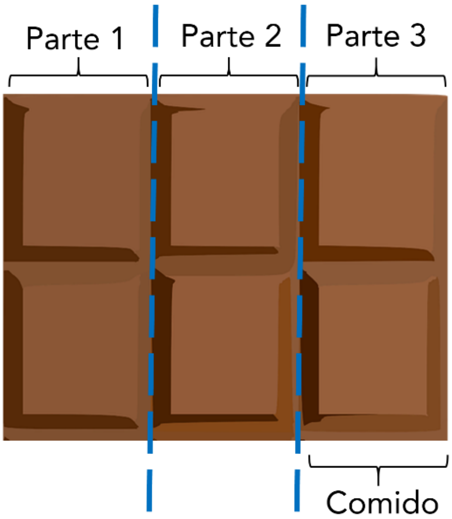


Comer 2/6 (dois sextos) da barra de chocolate significa comer 2 dos 6 pedaços:



E se disséssemos que comemos 1/3 (um terço) da barra de 6 pedaços, o que isso significa? Significa que, a cada três pedaços existentes na barra, comemos um pedaço. Como a nossa barra tem 6 pedaços, 1/3 da nossa barra corresponde a 2 pedaços.

Uma outra forma de se pensar que foi comido 1/3 da barra é dividir a barra em três e comer um desses três pedaços.



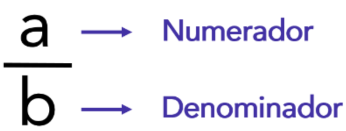
Note, portanto, que dizer que se comeu 2/6 da barra é a mesma coisa do que dizer que se comeu 1/3 da barra. Isso porque as duas frações são equivalentes:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Composição básica de uma fração

Uma fração é um número racional que representa uma divisão composta por dois termos:

- O numerador, que representa o dividendo; e
- O denominador, que representa o divisor.



Frações equivalentes e frações irredutíveis

Considere uma fração com numerador $\boldsymbol{a}$ e denominador $\boldsymbol{b}$, representada por $\boldsymbol{a/b}$. Dizemos que a fração é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **não apresentam fatores primos em comum**. Em outras palavras, uma fração $\boldsymbol{a/b}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**. Exemplos:

- $\frac{2}{7}$ é uma fração irredutível, pois 2 e 7 não apresentam fatores primos em comum;
- $\frac{3}{6}$ **não** é uma fração irredutível, pois 3 e 6 apresentam fatores primos em comum, uma vez que 6 pode ser decomposto por $2 \times \mathbf{3}$;
- $\frac{14}{15}$ é uma fração irredutível, pois 14 e 15 não apresentam fatores primos em comum, uma vez que suas decomposições são $14 = 2 \times 7$ e $15 = 3 \times 5$;

- $\frac{14}{84}$ **não** é uma fração irredutível, pois 14 e 84 apresentam fatores primos em comum, uma vez que suas decomposições são $14 = \mathbf{2} \times \mathbf{7}$ e $84 = \mathbf{2}^2 \times 3 \times \mathbf{7}$.

Para simplificar uma fração e torná-la irredutível, podemos dividir o numerador e o denominador pelo mesmo número sucessivamente até que tal divisão não seja mais possível. Exemplo:

$$\frac{84}{120} \overset{\div 2}{\underset{\div 2}{=}} \frac{42}{60} \overset{\div 2}{\underset{\div 2}{=}} \frac{21}{30} \overset{\div 3}{\underset{\div 3}{=}} \frac{7}{10}$$

Uma outra forma de tornar uma fração irredutível é decompor o numerador e o denominador em fatores primos e "simplificar" os fatores comuns. Exemplo:

$$\frac{84}{120} = \frac{\cancel{2}^{2}.\cancel{3}.7}{\cancel{2}^{3}.\cancel{3}.5} = \frac{7}{2.5} = \frac{7}{10}$$

Veja que não necessariamente precisamos decompor em fatores primos para simplificar a fração. Podemos também transformar o numerador em produtos "convenientes" para assim realizar a simplificação.

$$\frac{84}{120} = \frac{\cancel{12}.7}{\cancel{12}.10} = \frac{7}{10}$$

Duas **frações são equivalentes quando representam o mesmo número**, ou seja, quando são iguais. No exemplo acima, $\frac{84}{120}$, $\frac{42}{60}$, $\frac{21}{30}$ e $\frac{7}{10}$ são equivalentes, pois:

$$\frac{84}{120} = \frac{42}{60} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

(Pref. Sto. Augusto/2020) Ao simplificar a fração $\frac{12}{36}$ obtém-se:

a) 1/6

b) 1/3

c) 1/2

d) 1/4

e) 1/5

Comentários:

Podemos transformar o denominador em 3×12

$$\frac{12}{36} = \frac{\mathbf{12}}{3 \times \mathbf{12}}$$

Simplificando o número **12**, obtém-se:

$$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

Gabarito: Letra B.

Soma e subtração de frações

Para somar e subtrair frações, devemos transformar todas as frações em **frações equivalentes com o mesmo denominador**.

Para que todas as frações tenham o mesmo denominador, devemos obter o **mínimo múltiplo comum (MMC) de todos os denominadores**. Exemplo:

$$\mathbf{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{10}}$$

O mínimo múltiplo comum dos denominadores é $\text{MMC}\,(3;\ 5;10)\ =\ 30$. Logo, os denominadores das três frações devem ser 30. Para acharmos os numeradores, devemos determinar as frações equivalentes cujo denominador é 30.

$$\mathbf{\frac{2}{3}}=\frac{(30\div 3)\times 2}{30}=\frac{10\times 2}{30}=\mathbf{\frac{20}{30}}$$

$$\mathbf{\frac{1}{5}}=\frac{(30\div 5)\times 1}{30}=\frac{6\times 1}{30}=\mathbf{\frac{6}{30}}$$

$$\mathbf{\frac{7}{10}}=\frac{(30\div 10)\times 7}{30}=\frac{3\times 7}{30}=\mathbf{\frac{21}{30}}$$

ESCLARECENDO!

Uma forma prática de obter essas frações equivalentes de denominador 30 é realizar o seguinte procedimento:

$$\underset{30\div 3=10}{\frac{2}{3}=\frac{?}{30}}\quad 10\times 2=20 \qquad \underset{30\div 5=6}{\frac{1}{5}=\frac{?}{30}}\quad 6\times 1=6 \qquad \underset{30\div 10=3}{\frac{7}{10}=\frac{?}{30}}\quad 3\times 7=21$$

Voltando ao problema, temos:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{10}=$$

$$\frac{20}{30}+\frac{6}{30}+\frac{21}{30}=$$

$$\frac{20+6+21}{30}=$$

$$\frac{47}{30}$$

Para realizar uma subtração de frações, devemos realizar o mesmo procedimento.

$$\frac{44}{60}-\frac{20}{30}$$

$$\frac{44}{60}-\frac{40}{60}$$

$$\frac{44-40}{60}=\frac{4}{60}$$

No caso em questão, **podemos tornar a fração 4/60 irredutível**. Se dividirmos o numerador e o denominador por 4 (ou seja, se dividirmos duas vezes por 2), obtemos:

$$\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$$

(PC RJ/2022) Considere a soma

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}+\frac{7}{10}=\frac{a}{b}$$

sendo os números naturais a e b primos entre si.

O valor da soma $a+b$ é:

a) 35;

b) 47;

c) 181;

d) 227;

e) 269.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma das frações do lado esquerdo da equação.

Para realizar a soma, devemos escrever as frações em um denominador comum. O menor denominador comum possível para realizar a soma é o **MMC entre 6, 8 e 10**. Decompondo esses números em fatores primos, temos:

$$6 = 2 \times 3$$

$$8 = 2^3$$

$$10 = 2 \times 5$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$6 = 2 \times 3$

$8 = 2^3$

$10 = 2 \quad \times 5$

Logo, $\text{MMC}(6; 8; 10) = 2^3 \times 3 \times 5 = \mathbf{120}$.

Portanto:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10}$$

$$= \frac{(120 \div 6) \times 1}{\mathbf{120}} + \frac{(120 \div 8) \times 3}{\mathbf{120}} + \frac{(120 \div 10) \times 7}{\mathbf{120}}$$

$$= \frac{20}{120} + \frac{45}{120} + \frac{84}{120}$$

$$= \frac{20 + 45 + 84}{120}$$

$$= \frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$$

Temos que $\frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$ **é igual a** $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$, **sendo $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ primos entre si**.

Dois números são primos entre si quando não apresentam fatores primos em comum. Em outras palavras, sendo os números a e b primos entre si, temos que $\frac{a}{b}$ é uma fração em que não se pode simplificar o numerador com o denominador. Consequentemente, $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ **é uma fração irredutível**. **Devemos, portanto, obter a fração irredutível equivalente a $\frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$**.

Veja que:

$$120 = 10 \times 12$$

$$= (2 \times 5) \times (3 \times 4)$$

$$= (2 \times 5) \times (3 \times 2^2)$$

$$= 2^3 \times 3 \times 5$$

Isso significa que **o número 120 apresenta os fatores primos 2, 3 e 5**. Ao tentar dividir 149 por 2, 3 e 5, percebe-se que sempre temos um resto. Isso significa que 120 e 149 não apresentam fatores primos em comum. Assim, 149 e 120 são primos entre si. Consequentemente, a fração irredutível $\frac{a}{b}$ é $\frac{149}{120}$. Logo:

$$a = 149$$

$$b = 120$$

Portanto:

$$a + b = 149 + 120$$

$$= 269$$

Gabarito: Letra E.

(MANAUSPREV/2015) Considere as expressões numéricas, abaixo.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

O valor, aproximado, da soma entre A e B é

a) 2.

b) 3.

c) 1.

d) 2,5.

e) 1,5.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma para A. Note que todos os denominadores 2, 4, 8, 16 e 32 são potências de 2 e o MMC entre eles é 32.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{16}{32} + \frac{8}{32} + \frac{4}{32} + \frac{2}{32} + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{16 + 8 + 4 + 2 + 1}{32}$$

$$= \frac{31}{32}$$

Vamos agora realizar a soma para B. Perceba que os denominadores 3, 9, 27, 81 e 243 são potências de 3 e o MMC entre eles é 243.

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

$$= \frac{81}{243} + \frac{27}{243} + \frac{9}{243} + \frac{3}{243} + \frac{1}{243}$$

$$= \frac{81 + 27 + 9 + 3 + 1}{243}$$

$$= \frac{121}{243}$$

A soma entre A e B é:

$$A + B = \frac{31}{32} + \frac{121}{243}$$

Note que 31/32 é aproximadamente 32/32. Logo:

$$\frac{31}{32} \approx \frac{32}{32} = 1$$

Além disso, 121/243 é aproximadamente 121/242. Logo:

$$\frac{121}{243} \approx \frac{121}{242} = 0{,}5$$

Portanto, a soma de A e B é, aproximadamente:

$$A + B \approx 1 + 0{,}5 = 1{,}5$$

Gabarito: Letra E.

Multiplicação e divisão de frações

Para realizar a **multiplicação de frações**, realiza-se a multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores, obtendo-se a fração resultante:

$$\frac{3}{4} \times \frac{20}{9} = \frac{3 \times 20}{4 \times 9} = \frac{60}{36}$$

Veja que a fração obtida não é irredutível. Uma forma mais rápida de se obter a fração irredutível é simplificar a expressão antes de realizar a multiplicação:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{5}{3}$$

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$\frac{3}{4} \div \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}} = \frac{3}{4} \times \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}$$

O mesmo ocorre para quando temos um denominador que corresponde a uma fração:

$$\frac{3}{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}}} = 3 \times \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}$$

(TRF 4/2014) O número que corresponde ao resultado da expressão numérica

$$\frac{2}{3}.\frac{1}{4} + \frac{5}{6}.\frac{7}{10} + \frac{1}{9}.\frac{9}{4}$$

é igual a

a)5 /9.

b) 13/36.

c) 3.

d) 1.

e)7/18.

Comentários:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{9} \times \frac{9}{4}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2.2} + \frac{5}{6} \times \frac{7}{2.5} + \frac{1}{9} \times \frac{9}{4}$$

Simplificando os produtos, temos:

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{7}{2} + \frac{1}{1} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{7}{12} + \frac{1}{4}$$

O **MMC** entre **4**, **6** e **12** é **12**. Logo:

$$\frac{2}{12} + \frac{7}{12} + \frac{3}{12}$$

$$= \frac{2 + 7 + 3}{12}$$

$$= \frac{12}{12}$$

$$= 1$$

Gabarito: Letra D.

(ALERN/2013) Sendo x e y números racionais positivos, definiremos a operação denotada por □ da seguinte forma:

$$x\square y = \frac{x}{x+\frac{x}{y}}$$

Por exemplo, fazendo os cálculos verifica-se que 5□1/2, em fração irredutível, é igual a 1/3. De acordo com essa operação que acaba de ser definida, para qualquer número racional positivo representado por x temos que x □$1/3$ será igual a

a)2/3.

b)1/2.

c)1/5.

d)1/4.

e)2/5.

Comentários:

Note que:

$$x\square y = \frac{x}{x+\frac{x}{y}}$$

$$= \frac{x}{\frac{\boldsymbol{x.y+x}}{\boldsymbol{y}}}$$

Quando o denominador é uma fração, inverte-se o denominador e realiza-se a multiplicação:

$$= x \times \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x.y+x}}$$

$$= \frac{x.y}{x(y+1)}$$

$$= \frac{y}{y+1}$$

Logo, a operação $x\square\boldsymbol{y}$ independe de x e equivale a $\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}+1}$.

Para o caso em questão, x □$\boldsymbol{1/3}$ é dado por:

$$\frac{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}}{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+3}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Gabarito: Letra D.

Comparação de frações

Para compararmos frações, ou seja, para descobrir qual fração é maior ou menor do que outra, devemos deixá-las sob um mesmo denominador. Isso significa que, para todas as frações que serão objeto de comparação, devemos encontrar **frações equivalentes** **que apresentem o mesmo denominador**.

Outra forma válida de comparar frações é realizar a divisão do numerador pelo denominador, comparando-se os números decimais encontrados. Veja o exemplo a seguir:

(Pref. Salvador/2017) Considere as frações: $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{3}{10}$, $c = \frac{7}{20}$.

A ordem crescente dessas frações é

a) a, b, c.

b) b, a, c.

c) c, a, b.

d) b, c, a.

e) c, b, a.

Comentários:

O mínimo múltiplo comum entre os denominadores de **a**, **b**, e **c** é 20. As frações equivalentes com denominador 20 são:

$$a = \frac{2}{5} = \frac{8}{20} \qquad b = \frac{3}{10} = \frac{6}{20} \qquad c = \frac{7}{20}$$

Temos, portanto, que a ordem crescente das frações é $\frac{6}{20}, \frac{7}{20}, \frac{8}{20}$, ou seja, **b, c a**.

Outra forma de se comparar as frações é realizar a divisão do numerador pelo denominador:

$$a = \frac{2}{5} = 0{,}4 \qquad b = \frac{3}{10} = 0{,}3 \qquad c = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

Novamente, encontramos que a ordem crescente das frações é **b**, **c**, **a**.

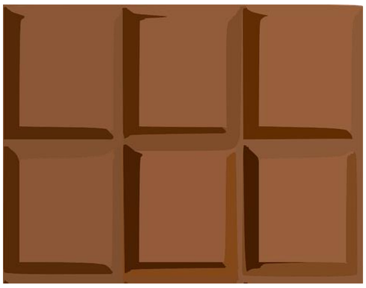
Gabarito: Letra D.

Problemas envolvendo frações

O uso da palavra “de”

Uma palavra muito importante que deve ser observada quando se resolve problemas envolvendo frações é a palavra "**de**". Isso porque, via de regra, essa palavra nos indica uma **multiplicação**.

Considere novamente uma barra de chocolate de 6 pedaços:



Para a essa barra de chocolate, 1/3 de 6 pedaços corresponde a:

$$\frac{1}{3} \textbf{ de } 6 \text{ pedaços} =$$

$$\frac{1}{3} \times 6 \text{ pedaços} =$$

$$\frac{6}{3} = 2 \text{ pedaços}$$

Agora, vamos supor que João tem direito a 1/3 dessa barra **de** 6 pedaços e que, **da** parte de João, Maria comeu a metade (1/2). Quantos pedaços Maria comeu? Maria comeu 1/2 **de** 1/3 **de** 6 pedaços:

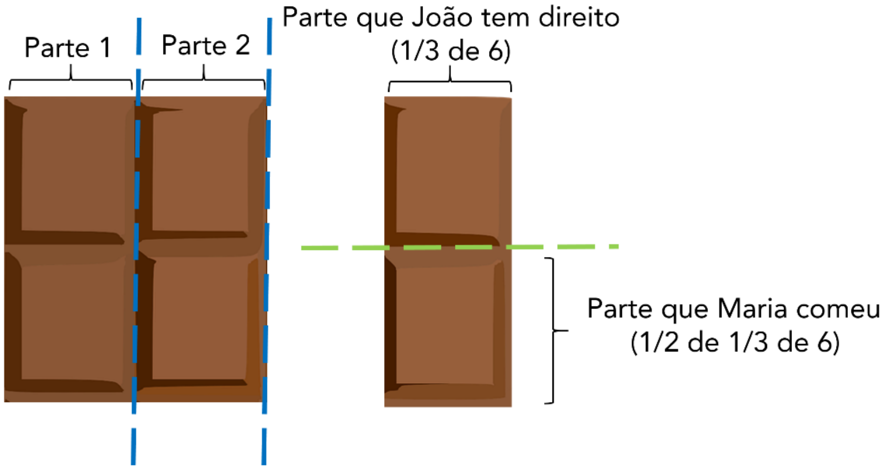
$$\frac{1}{2} \textbf{ de } \frac{1}{3} \textbf{ de } 6 \text{ pedaços} =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 6 \text{ pedaços} =$$

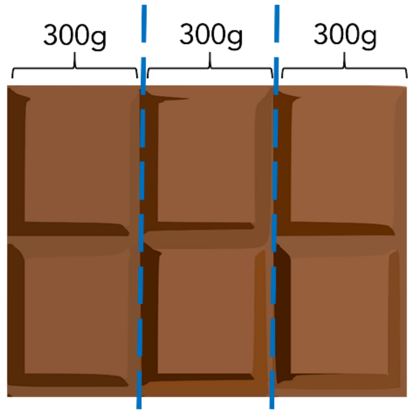
$$\frac{1 \times 1 \times 6}{2 \times 3} =$$

$$\frac{6}{6} = 1 \text{ pedaço}$$

Observe a figura abaixo, que representa a parte que Maria comeu:



E se disséssemos que essa barra de chocolate tem 900 gramas, quantos gramas temos em 1/3 dessa barra? Para resolver o problema, basta observar que, ao dividirmos a barra em 3 partes de 300 gramas, temos que a barra toda tem justamente 3 × 300g = 900g. Logo, 1/3 da barra apresenta 300 gramas.



Uma outra forma de se obter o resultado é trocar o "**de**" pela **multiplicação**:

$$\frac{1}{3}\ \textbf{de}\ 900\text{g} =$$

$$\frac{1}{3} \times 900\text{g} =$$

$$\frac{900\text{g}}{3} = 300\text{g}$$

(AVAREPREV/2020) Uma empresa tem 120 funcionários, entre homens e mulheres. Se 2/5 desses funcionários são mulheres, é correto afirmar que o número de mulheres é igual a

a) 36.

b) 48.

c) 60.

d) 72.

Comentários:

São mulheres 2/5 de 120 funcionários.

$$\frac{2}{5} \textbf{ de } 120 =$$

$$\frac{2}{5} \times 120 =$$

$$2 \times \frac{120}{5} =$$

$$2 \times 24 = 48$$

Gabarito: Letra B.

(Pref. Angra/2019) A família de Flávio pediu uma pizza, que veio dividida em 8 fatias iguais. Flávio comeu uma fatia inteira e dividiu uma outra fatia igualmente com sua irmã.

Da pizza inteira Flávio comeu

a) 1/4.

b) 1/3.

c) 3/8.

d) 1/6.

e) 3/16.

Comentários:

Uma fatia da pizza corresponde a $\frac{1}{8}$ da pizza. Flávio comeu uma fatia mais a metade de outra fatia. Ao comer metade da outra fatia, Flávio comeu $\frac{1}{2}$ **de** $\frac{1}{8}$ da pizza.

Isso significa que Flávio comeu ao todo:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \textbf{ de } \frac{1}{8} \text{ da pizza}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} \text{ da pizza}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \text{ da pizza}$$

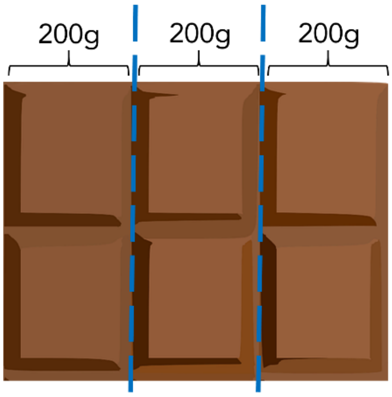
$$= \frac{2+1}{16} = \frac{3}{16} \text{ da pizza}$$

Gabarito: Letra E.

Obtenção do todo a partir da parte

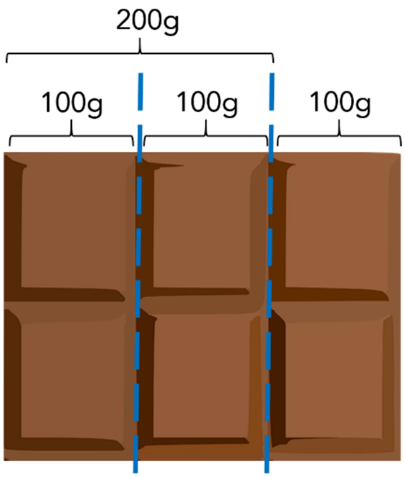
Se disséssemos que 1/3 de uma barra de chocolate tem 200g, quantos gramas tem a barra de chocolate inteira? Para se responder essa pergunta, basta observar que, se uma parte de 3 tem 200g, as três partes que compõem o todo da barra têm:

$$3 \times 200\text{g} \;=\; 600\text{g}.$$



E se disséssemos que 2/3 da barra tem 200g, quantos gramas tem a barra de chocolate inteira? **Ora, se 2 partes de 3 tem 200g, 1 parte de 3 tem 100g**. **Logo, as três partes** que compõem o todo devem ter:

$$3\ \times 100\text{g} \;=\; \mathbf{300g}$$



Uma **forma prática de se obter o todo a partir da parte** do problema é **utilizar o recurso** "**inverte e multiplica**".

Veja que, se 2/3 corresponde a 200g, podemos obter o todo invertendo a fração e multiplicando pelo valor que representa a parte (200g):

$$\frac{3}{2} \times 200\text{g} =$$

$$3 \times \frac{\mathbf{200g}}{\mathbf{2}} =$$

$$\mathbf{3 \times 100g} =$$

$$300\text{g}$$

Por que esse recurso funciona? Perceba que, ao "inverter e multiplicar" a fração 2/3 que corresponde à parte, na verdade **estamos dividindo o valor de 200g por 2, obtendo o valor de uma parte de 3 (100g),** para em seguida **multiplicar essa terça parte por 3, obtendo assim o valor do todo (300g).**

(MPE BA/2017) Em certo reservatório, $\frac{2}{3}$ do volume de água correspondem a 120 litros.

Portanto, $\frac{3}{2}$ do volume de água desse mesmo reservatório correspondem a:

a) 270 litros;

b) 240 litros;

c) 210 litros;

d) 180 litros;

e) 150 litros.

Comentários:

Uma **forma prática de se obter o todo a partir da parte** do problema é **utilizar o recurso** "**inverte e multiplica**".

Se 2/3 correspondem a 120 litros, a **capacidade total** do reservatório é:

$$\frac{3}{2} \times 120 = 3 \times \frac{120}{2} = 3 \times 60 = 180 \text{ litros}$$

Note que a questão **não nos pede a capacidade total** do reservatório, mas sim **3/2 da capacidade**.

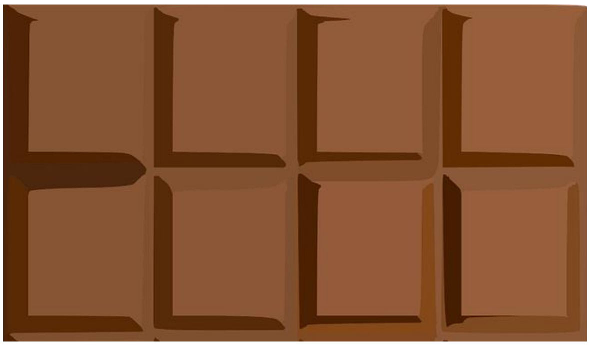
$$\frac{3}{2}\,\textbf{de}\ 180 \text{ litros}$$

$$\frac{3}{2} \times 180 = 270 \text{ litros}$$

Gabarito: Letra A.

Obtenção da fração complementar

Observe a seguinte barra com 8 pedaços de chocolate.



Se comermos 5/8 da barra, **qual fração da barra original ainda resta**?

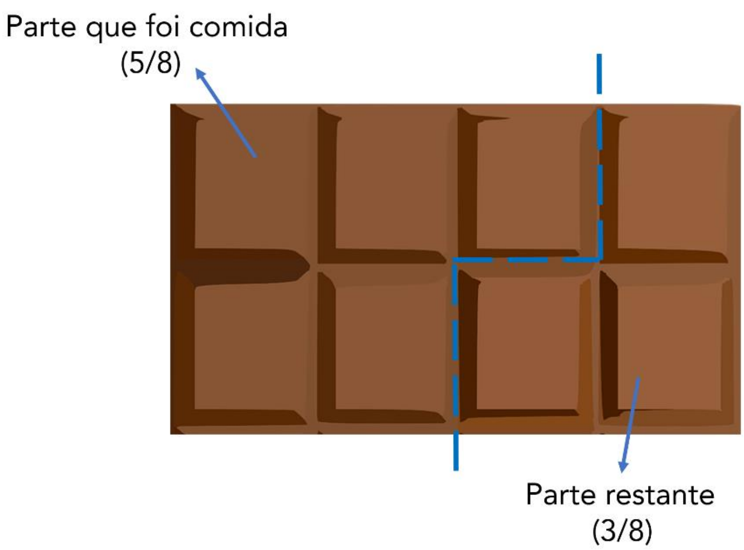
Note que a parte que **não foi comida** é dada pela **subtração de 5/8 da barra inteira**. A barra inteira pode ser representada por 8/8 (8 pedaços de um total de 8 pedaços) ou então pelo número inteiro 1. Logo, a parte que não foi comida é:

$$1-\frac{5}{8}=$$

$$\frac{8}{8}-\frac{5}{8}$$

$$=\frac{8-5}{8}=\frac{3}{8}$$

Note que, para a barra em questão, o que restou após se comer 5/8 é justamente 3 pedaços de 8 (3/8):



Podemos dizer, então, que dada uma fração a/b, a **fração complementar** corresponde a:

$$1 - \frac{a}{b} =$$

$$\frac{b}{b} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$$

(IBGE/2019) Marlene comeu, inicialmente, um quarto da barra de chocolate que comprou. Depois, comeu um terço do que tinha sobrado.

A fração da barra de chocolate que Marlene ainda tem para comer é:

a) 1/2;

b) 1/3;

c) 1/4;

d) 3/4;

e) 1/12.

Comentários:

Inicialmente, Marlene **comeu $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate**. **Sobrou:**

$$1 - \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{3}{4}\ da\ barra}$$

Depois, ao comer $\frac{1}{3}$ **do que tinha sobrado**, Marlene comeu:

$$\frac{1}{3}\ \mathbf{de\ \frac{3}{4}\ da\ barra}$$

$$\frac{1}{3} \times \mathbf{\frac{3}{4}\ da\ barra}$$

$$= \frac{1}{4}\ \text{da barra}$$

O total da barra de chocolate que Marlene comeu nas duas vezes foi:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Como ela comeu no total $\frac{1}{2}$ da barra, a quantidade que restou foi:

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ \text{da barra}$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Cananéia/2020) Mauro comprou um carro. Deu $\frac{1}{3}$ do valor total como entrada e financiou $\frac{3}{4}$ do valor restante. A quantia que falta para completar o valor total será paga em uma única parcela, após o término do financiamento. O valor dessa parcela final corresponde, do valor total do carro, a

a)1/8

b)1/6

c)1/5

d)1/4

e)1/3

Comentários:

Como Mauro deu $\frac{1}{3}$ do valor total como entrada, o **valor restante após a entrada** é a fração complementar:

$$1 - \frac{1}{3} =$$

$$\frac{3}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3-1}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

Como Mauro financiou 3/4 **do valor restante após a entrada**, **ele financiou $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$**.

Isso significa que ele **não financiou $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$**, pois a fração complementar de $\frac{3}{4}$ é:

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Logo, a quantia não financiada do valor restante após a entrada, que corresponde à parcela final, corresponde a:

$$\frac{1}{4}\ \mathbf{de}\ \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} =$$

$$\frac{1}{\cancel{2}.2} \times \frac{\cancel{2}}{3} =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Gabarito: Letra B.

Vamos agora resolver algumas questões a mais sobre problemas envolvendo frações.

HORA DE
PRATICAR!

(Pref. B dos Coqueiros/2020) No início de determinado mês, uma escola tinha um estoque de 720 kg de alimentos. Nas três primeiras semanas desse mês, foram consumidos, respectivamente, 1/6, 5/24 e 1/5 desse estoque de alimentos.

Considerando essa situação hipotética, assinale a opção que apresenta a quantidade de alimentos restante nesse estoque logo após essas três semanas.

a) 144 kg

b) 180 kg

c) 210 kg

d) 306 kg

e) 414 kg

Comentários:

A fração que corresponde ao total de alimentos consumidos é:

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{24}+\frac{1}{5}$$
$$=\frac{20}{120}+\frac{25}{120}+\frac{24}{120}$$
$$=\frac{69}{120}$$

A fração que corresponde ao total de alimentos **não consumidos** é dada pela **fração complementar:**

$$1-\frac{69}{120}=\frac{51}{120}$$

O total de alimentos não consumidos é dado por:

$$\frac{51}{120}\ \textbf{de}\ 720\text{ kg}$$
$$=\frac{51}{120}\times 720$$
$$=51\times\frac{720}{120}$$
$$=51\times 6$$
$$=306\text{ kg}$$

Gabarito: Letra D.

(TRF 4/2019) Um ciclista pedalou durante três horas. Na primeira hora percorreu $\frac{5}{18}$ do trajeto, na segunda hora percorreu $\frac{7}{25}$ do trajeto e na terceira hora percorreu $\frac{11}{45}$ do trajeto. A fração do trajeto que falta percorrer é

a) $\frac{361}{460}$

b) $\frac{351}{460}$

c) $\frac{89}{450}$

d) $\frac{99}{450}$

e) $\frac{250}{460}$

Comentários:

O total do trajeto percorrido é dado pela seguinte soma:

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{25}+\frac{11}{45}$$

Devemos tomar o **MMC** entre **18**, **25** e **45**. Note que:

$$18 = \ 2\times 3^2$$
$$25 = \qquad\quad 5^2$$
$$45 = \qquad 3^2\times 5$$

O MMC é dado tomando-se os maiores expoentes de todos os fatores:

$$\text{MMC}\ (18{,}25{,}45) = 2\times 3^2\times 5^2 = \mathbf{450}$$

Logo, a soma que corresponde à fração do **trajeto percorrido** é:

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{25}+\frac{11}{45}$$
$$=\frac{125}{\mathbf{450}}+\frac{126}{\mathbf{450}}+\frac{110}{\mathbf{450}}$$
$$=\frac{125+126+110}{450}=\frac{361}{450}$$

O trajeto **não percorrido** pedido pela questão é dado pela **fração complementar**:

$$1-\frac{361}{450}$$
$$=\frac{450}{450}-\frac{361}{450}=\frac{89}{450}$$

Gabarito: Letra C.

(VALIPREV/2020) Em uma empresa trabalham 80 funcionários, dos quais $\frac{1}{5}$ trabalha no setor administrativo. Entre os funcionários restantes, $\frac{7}{8}$ trabalham no setor operacional e os demais na manutenção. Em relação ao número total de funcionários que trabalha nessa empresa, aqueles que trabalham na manutenção correspondem a

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{3}{10}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{10}$

e) $\frac{1}{20}$

Comentários:

Observe que, se 1/5 dos funcionários trabalham no setor administrativo, os "**funcionários restantes**" aos quais a questão se refere correspondem à fração complementar:

$$\text{Funcionários restantes } = 1 - \frac{1}{5} = \frac{5-1}{5}$$

$$= \frac{4}{5} \text{ do total de funcionários}$$

7/8 dos funcionários restantes trabalham no setor de operacional, e os demais trabalham no setor de manutenção. Isso significa que os que trabalham no setor de manutenção correspondem a:

$$\text{Trabalham no setor de manutenção } = 1 - \frac{7}{8} = \frac{8-7}{8} = \frac{1}{8} \text{ dos funcionários restantes}$$

Quanto corresponde **1/8 dos "funcionários restantes"** em relação ao total de funcionários?

$$\frac{1}{8} \text{ dos (funcionários restantes) } =$$

$$\frac{1}{8} \times \text{ (funcionários restantes) } =$$

$$\frac{1}{8} \times (\frac{4}{5} \text{ do total de funcionários) } =$$

$$\frac{1}{10} \text{ do total de funcionários}$$

Note que, para resolver a questão, não é necessário saber que na empresa trabalham 80 funcionários.

Gabarito: Letra D.

Quando nos deparamos com problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolvê-los consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**. Esse recurso será utilizado com frequência na resolução dos exercícios. Vejamos:

(PC AM/2022) Geraldo resolveu se desfazer de sua coleção de miniaturas. Assim, ele deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson; das que sobraram, ele deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson e as 48 restantes ele deu para sua irmã Glória.

O número de miniaturas que Gilson recebeu foi

a) 12.

b) 16.

c) 18.

d) 24.

e) 48.

Comentários:

Considere que o total de miniaturas de Geraldo seja $\boldsymbol{M}$.

"...ele (Geraldo) deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson..."

Note que o total de miniaturas que ficou com Gerson é:

$$(\text{Miniaturas Gerson}) = \frac{2}{5} \text{ de } M = \frac{2}{5} \times M = \frac{2}{5}M$$

"...das que sobraram, ele (Geraldo) deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson..."

Após a distribuição para Gerson, o total de miniaturas que sobraram foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson})$$

$$= M - \frac{2}{5}M$$

$$= \frac{5M - 2M}{5}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{5}M}$$

Desse total que restou, $\frac{1}{3}$ ficou com o Gilson. Logo, o número de miniaturas que ficaram com Gilson foi:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{3} \text{de } \boldsymbol{\frac{3}{5}M} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}M = \frac{1}{5}M$$

"...e as 48 restantes ele (Geraldo) deu para sua irmã Glória..."

O número de miniaturas que restou para Glória foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson}) - (\text{Miniaturas Gilson})$$

$$M - \frac{2}{5}M - \frac{1}{5}M$$

$$= \frac{5M - 2M - 1M}{5}$$

$$= \frac{2}{5}M$$

Esse número de miniaturas corresponde a 48. Logo:

$$\frac{2}{5}M = 48$$

$$M = \frac{48 \times 5}{2}$$

$$M = 120$$

Portanto, **o total de miniaturas é 120**. Queremos obter o número de miniaturas que ficaram com Gilson:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{5}M$$

$$= \frac{1}{5} \times 120$$

$$\mathbf{= 24}$$

Gabarito: Letra D.

(SSP AM/2022) Os alunos de uma turma estavam se preparando para um concurso. Constatou-se que: a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC, a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM, e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol.

O número de alunos dessa turma que torcem pelo Manaus FC é

a) 21.

b) 25.

c) 26.

d) 28.

e) 35.

Comentários:

Considere que o total de alunos da turma seja A.

"...a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Manaus FC é:

$$\text{(Manaus FC)} = \frac{1}{3}\,\textbf{de}\ \text{A} = \frac{1}{3} \times \text{A} = \frac{1}{3}\,ª$$

"...a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Nacional-AM é:

$$\text{(Nacional} - \text{AM)} = \frac{1}{4}\,\textbf{de}\ \text{A} = \frac{1}{4} \times \text{A} = \frac{1}{4}\,ª$$

"...e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol."

O número de alunos restantes é:

$$\text{(Total de alunos)} - \text{(Manaus FC)} - \text{(Nacional-AM)}$$

$$A - \frac{1}{3}A - \frac{1}{4}A$$

$$= \frac{12A - 4A - 3A}{12}$$

$$= \frac{5A}{12}$$

Esse número de alunos corresponde a 35. Logo:

$$\frac{5A}{12} = 35$$

$$A = 35 \times \frac{12}{5}$$

$$A = 84$$

Portanto, **o total de alunos é 84**. Queremos obter o número de alunos que torcem pelo Manaus FC:

$$\text{(Manaus FC)} = \frac{1}{3}A$$

$$= \frac{1}{3} \times 84$$

$$= 28$$

Gabarito: Letra D.

Dízima periódica

Definição e representação

Uma dízima periódica ocorre quando, ao realizar uma divisão, obtém-se um número com casas decimais que se repetem indefinidamente.

Exemplo: Ao realizar a divisão de 23 por 99, obtém-se o número "0,23232323...". Note que que a porção "23" se repete indefinidamente. Nesse caso, dizemos que 23 é o período da dízima periódica "0,23232323...". Isso significa que **o período é a porção que se repete na dízima periódica**.

Podemos **representar uma dízima periódica com um traço sobre o período**. Isto é:

$$0{,}23232323\ldots = 0,\overline{23}$$

A dízima periódica "5,77898989..." apresenta o período "89", pois esta é a porção que se repete indefinidamente. Podemos representar essa dízima periódica da seguinte forma:

$$5{,}77898989\ldots = 5{,}77\overline{89}$$

Transformação da dízima periódica em fração

Os principais problemas relacionados às dizimas periódicas consistem em transformar o número em uma fração. Para realizar essa transformação, a única coisa que você precisa se lembrar é que:

- Um número na forma $\mathbf{0,AAA\ldots = 0,\overline{A}}$ corresponde a $\frac{\text{A}}{9}$;
- Um número na forma $\mathbf{0,ABABAB\ldots = 0,\overline{AB}}$ corresponde a $\frac{AB}{99}$;
- Um número na forma $\mathbf{0,ABCABCABC\ldots = 0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{ABC}{999}$;
- E assim sucessivamente.

$\mathbf{0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{ABC}{999}$

Vamos a alguns exemplos.

Transforme 0,3333.... em uma fração

$$0{,}3333\ldots = 0,\overline{3} = \frac{3}{9}$$

Transforme 0,45454545... em uma fração

$$0{,}4545\ldots = 0,\overline{45} = \frac{45}{99}$$

Transforme 0,672346723467234... em uma fração

$$0{,}672346723467234\ldots = 0,\overline{67234} = \frac{67234}{99999}$$

Para dízimas periódicas que fogem desse padrão, devemos modificá-las de modo a deixá-las no formato que conhecemos. Vejamos:

Transforme 0,553333... em uma fração

Veja que o período da dízima periódica é 3. Vamos separar 0,55 do restante do número:

$$0{,}55\overline{3} = 0{,}55 + \mathbf{0,00\overline{3}}$$

Note que ainda não podemos transformar a parte que apresenta o período em uma fração. Devemos escrevê-la de uma outra forma:

$$= 0{,}55 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}} \times \mathbf{0,\overline{3}}$$

Agora sim temos $0,\overline{3}$. Esse número corresponde a 3/9.

$$= 0{,}55 + \frac{1}{100} \times \frac{3}{9}$$

$$= \frac{55}{100} + \frac{3}{900}$$

$$= \frac{9 \times 55 + 3}{900}$$

$$= \frac{498}{900}$$

Transforme 6,453121212... em uma fração

Devemos realizar o mesmo procedimento, separando a parte que não se repete do período da dízima periódica.

$$6{,}453\overline{12}\ldots = 6{,}453 + 0{,}000\overline{12}$$

$$= 6{,}453 + \frac{1}{1000} \times 0,\overline{12}$$

$$= 6{,}453 + \frac{1}{1000} \times \frac{12}{99}$$

$$= \frac{6453}{1000} + \frac{12}{99000}$$

$$= \frac{99 \times 6453 + 12}{99000}$$

$$= \frac{638859}{99000}$$

INDO MAIS FUNDO!

Uma decorrência interessante sobre a dízima periódica é que 0,999... é igual a 1. Não se trata de uma aproximação. Os números são exatamente iguais.

$$0{,}999\ldots = 0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Vamos resolver algumas questões.

(DPE RS /2017) Sabendo que o número decimal F é $0{,}8666\ldots$, que o número decimal G é $0{,}7111\ldots$ e que o número decimal H é $0{,}4222\ldots$, então, o triplo da soma desses três números decimais, F, G e H, é igual a

a) 6,111 . . .

b) 5,888 . . .

c) 6

d) 3

e) 5,98

Comentários:

A soma de F, G e H é dada por:

$$0{,}8\overline{6} + 0{,}7\overline{1} + 0{,}4\overline{2}$$

Separando as partes que não se repetem dos períodos, temos:

$$= \mathbf{(0,8 + 0,7 + 0,4)} + 0{,}0\overline{6} + 0{,}0\overline{1} + 0{,}0\overline{2}$$

$$= \mathbf{1,9} + \frac{1}{10}0,\overline{6} + \frac{1}{10}0,\overline{1} + \frac{1}{10}0,\overline{2}$$

$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times (0,\overline{6} + 0,\overline{1} + 0,\overline{2})$$

$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{6}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right)$$

$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{9}\right)$$

$$= 1{,}9 + 0{,}1$$

$$= 2$$

A questão pede o triplo da soma de F, G e H, que é dado por $3 \times 2 = 6$.

Gabarito: Letra C.

(MIN/2013) Julgue o seguinte item, relativo a sistemas numéricos e sistema legal de medidas.

Se A = 1,232323... e B = 0,434343..., então A + B = 165/99.

Comentários:

Observe que A apresenta o período 23.

$$A = 1,\overline{23}$$

$$= \ 1 \ + \frac{23}{99}$$

$$= \frac{99 + 23}{99} = \frac{122}{99}$$

B apresenta o período 43.

$$B = 0,\overline{43}$$

$$= \frac{43}{99}$$

Ao somar A e B, temos:

$$A + B = \frac{122}{99} + \frac{43}{99}$$

$$= \frac{165}{99}$$

Gabarito: CERTO.

RAZÃO E PROPORÇÃO

Razão e proporção

Razão

A **razão** entre os números A e B é a divisão de A por B.

- Razão entre A e B;
- Razão de A para B;
- A está para B;
- A:B;
- A/B;
- $\frac{A}{B}$.

Proporção

Proporção é a igualdade entre duas **ou mais razões**.

Sejam as **razões A/B e C/D**. A **proporção** é dada pela igualdade: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

- A e D são os extremos; e
- B e C são os meios.

Multiplicação cruzada

Em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Em outras palavras, dada a proporção $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, temos que $C \times B = A \times D$.

Uma outra forma de entender a "**multiplicação cruzada**" é perceber que **podemos rearranjar os meios e os extremos**.

Não confundir a razão entre duas entidades com a razão entre uma entidade e a totalidade de casos do problema.

Propriedade fundamental da soma

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

Não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção:

Considerando que $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{\boldsymbol{a+c}}{\boldsymbol{b+d}}$

Propriedade fundamental da subtração

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

Uso conjunto das propriedade da soma e da subtração

Podemos somar e subtrair os numeradores e os denominadores seguindo a mesma lógica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a+c+e+g}{-b+d+f+h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a+c-e+g}{-b+d-f+h}$$

São diversas as possibilidades. **Não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção.**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-c+e-g}{-d+f-h}$$

Escala

A **escala** é um **tipo específico de razão**. Trata-se da razão entre uma medida representada em um desenho e a medida real do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

Dois conceitos importantes derivados das frações são a **razão** e a **proporção**. Vamos compreendê-los.

Razão

Sejam dois números **A** e **B**, com **B** diferente de zero. A **razão entre os números A e B é a divisão de A por B**, podendo ser expressa por:

- Razão entre **A** e **B**;
- Razão de **A** para **B**;
- **A** está para **B;**
- **A:B**;
- **A/B**;
- $\boldsymbol{\frac{A}{B}}$.

O conceito de razão nos permite fazer a comparação entre dois números. Se, por exemplo, tivermos em uma sala 10 adultos e 5 crianças, a razão entre o **número de adultos** e o **número de crianças** é:

$$\frac{\text{Número de adultos}}{\text{Número de crianças}} = \frac{10}{5} = 2$$

Note, portanto, que a razão entre o número de adultos e o número de crianças representa quantas vezes o número de adultos é maior do que o número de crianças. Para o exemplo em questão, representa quantas vezes o número 10 é maior do que o 5: duas vezes.

Se quisermos a razão entre o **número de crianças** e o **número de adultos**, temos:

$$\frac{\text{Número de crianças}}{\text{Número de adultos}} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Vamos exercitar esse conceito.

(SEFAZ-BA/2019) Durante a campanha para eleições presidenciais em determinado país foram compartilhadas 30 milhões de vezes fakenews a favor do candidato A. Já fakenews a favor do candidato B foram compartilhadas 6 milhões de vezes. De acordo com esses dados, pode-se estimar que a razão entre a diferença entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B em relação ao número de compartilhamentos de fakenews pró-B é igual a

a) 4.

b) 3.

c) 2.

d) 5.

e) 6.

Comentários:

O número de compartilhamentos de fakenews pró-A é $N_A = 30\ milhões$.

O número de compartilhamentos de fakenews pró-B é $N_B = 6\ milhões$.

A diferença **D** entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B é dada por:

$$D = N_a - N_b = 24\ milhões$$

A questão pede **razão entre** a diferença entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B **em relação ao** número de compartilhamentos de fakenews pró-B.

Trata-se da **razão entre D e N_b:**

$$\frac{D}{N_b} = \frac{24\ milhões}{6\ milhões} = \frac{24}{6} = 4$$

Gabarito: Letra A.

(CREF 12/2013) Se a razão A/B vale 3, sendo B diferente de 0, então a razão de (2A—B)/2A vale:

a) 1

b) 1/2

c) 4/5

d) 3/5

e) 5/6

Comentários:

Podemos escrever A em função de B.

$$\frac{A}{B} = 3$$

$$A = 3B$$

Substituindo **A = 3B** na razão **(2A—B)/2A**, temos:

$$\frac{2A - B}{2A}$$

$$= \frac{2 \times 3B - B}{2\ \times 3B}$$

$$\frac{6B - B}{6B}$$

$$\frac{5B}{6B} = \frac{5}{6}$$

O **gabarito**, portanto, é **Letra E**.

Outra forma de se resolver a questão é "fazer aparecer" a razão **A/B** na razão **(2A—B)/2A**.

$$\frac{2\text{A} - \text{B}}{2\text{A}}$$

$$= \frac{2A}{2A} - \frac{B}{2A}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{B}{A}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\mathbf{3}}$$

$$= 1 - \frac{1}{6}$$

$$\frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

Gabarito: Letra E.

Assim como ocorre em problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolver exercícios envolvendo o conceito de razão consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**. Vejamos:

(CBM AM/2022) Em um grupo de pessoas, o número de homens é igual ao número de mulheres. Selecionam-se então $\frac{2}{5}$ dos homens $\frac{3}{4}$ das mulheres e forma-se um novo grupo.

Nesse novo grupo, em relação ao total de pessoas, as mulheres representam

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{7}{20}$

d) $\frac{15}{23}$

e) $\frac{17}{25}$

Comentários:

Considere que originalmente o número de **homens** e o número de **mulheres** seja **igual a X**, **totalizando $2X$ pessoas**.

No novo grupo, temos $\frac{2}{5}$ dos homens. O total de homens nesse novo grupo é:

$$\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\ \text{grupo}}} = \frac{2}{5}\ \textbf{de}\ X = \frac{2}{5} \times X = \frac{2}{5}X$$

Ainda no novo grupo, temos $\frac{3}{4}$ das mulheres. O total de mulheres nesse novo grupo é:

$$\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\ \text{grupo}}} = \frac{3}{4}\ \textbf{de}\ X = \frac{3}{4} \times X = \frac{3}{4}X$$

Nesse novo grupo, **a razão entre o número de mulheres e o total de pessoas é**:

$$\frac{\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}}}{\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} + \text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{2}{5}X + \frac{3}{4}X}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{8X + 15X}{20}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{23}{20}X}$$

Simplificando X, temos:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{23}{20}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{20}{23}$$

$$= \mathbf{\frac{15}{23}}$$

Gabarito: Letra D.

Proporção

Conceito de proporção

Proporção é a igualdade entre duas **ou mais razões**.

Sejam as razões **A/B** e **C/D**. A proporção é dada pela igualdade:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

Podemos representar uma proporção das seguintes formas:

- **A** está para **B** assim como **C** está para **D**;
- **A:B::C:D**;
- **A/B = C/D**;
- $\boldsymbol{\frac{A}{B}=\frac{C}{D}}$.

Ainda em uma proporção **A/B = C/D**, diz-se que:

- **A** e **D** são os extremos; e
- **B** e **C** são os meios.

Multiplicação cruzada

A propriedade das proporções conhecida por "multiplicação cruzada" nos diz o seguinte:

> Em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.
> Em outras palavras, dada a proporção $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, temos que $C\times B=A\times D$.

Considere, por exemplo, a proporção:

$$\frac{5}{10}=\frac{20}{40}$$

Note que o produto dos meios, 10×20, é igual ao produto dos extremos, 5×40, pois ambas multiplicações nos retornam o resultado 200.

Vamos a um exemplo.

Determine o valor de incógnita "x" na proporção $\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$.

Realizando a "multiplicação cruzada", obtemos:

$$4 \times 9(x+1) = 3(x-2) \times 20$$

$$36 \times (x+1) = 60 \times (x-2)$$

$$36x + 36 = 60x - 120$$

$$120 + 36 = 60x - 36x$$

$$156 = 24x$$

$$24x = 156$$

$$x = \frac{156}{24}$$

$$x = 6{,}5$$

Uma outra forma de entender a "multiplicação cruzada" é perceber que podemos rearranjar os meios e os extremos. Para exemplificar esse conceito, considere a mesma proporção:

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$$

Os meios da proporção considerada são 4 e $9\,(x+1)$.

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$$

Podemos rearranjar os meios da proporção original da seguinte forma:

$$\frac{3(x-2)}{1} = \frac{4 \times 9(x+1)}{20}$$

Também podemos rearranjar os meios da proporção original assim:

$$\frac{3(x-2)}{4 \times 9\,(x+1)} = \frac{1}{20}$$

Uma outra possibilidade é trocar os meios de posição:

$$\frac{3(x-2)}{9\,(x+1)} = \frac{4}{20}$$

A mesma ideia vale para os extremos da proporção.

Os extremos da proporção considerada são $3(x-2)$ e 20.

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$$

Podemos rearranjar os extremos das seguintes formas:

$$\frac{3(x-2)\times 20}{4} = \frac{9\,(x+1)}{1}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{9\,(x+1)}{3(x-2)\times 20}$$

$$\frac{20}{4} = \frac{9\,(x+1)}{3(x-2)}$$

Entendida essa nova percepção da "multiplicação cruzada", vamos determinar o valor da incógnita "x" de uma outra maneira.

Determine o valor de incógnita "x" na proporção $\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$.

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9(x+1)}{20}$$

$$\frac{3(x-2)}{1} = \frac{4\times 9\,(x+1)}{20}$$

$$\frac{(x-2)}{1} = \frac{4\times 9\,(x+1)}{3\times 20}$$

$$(x-2) = \frac{4\times 9}{3\times 20}\times(x+1)$$

Simplificando 4 com 20 e 9 com 3, obtemos:

$$(x-2) = \frac{3}{5}\times(x+1)$$

$$x-2 = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$$

$$x - \frac{3}{5}x = 2 + \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5}x = \frac{13}{5}$$

$$2x = 13$$

$$x = \frac{13}{2}$$

$$x = 6{,}5$$

Vamos praticar o que aprendemos sobre "multiplicação cruzada".

(Pref. P das Missões/2019) O valor de "x" na proporção $\frac{x}{2} = \frac{x+7}{4}$ é:

a) 2.

b) 5.

c) 7.

d) 9.

e) 10.

Comentários:

Sabemos que:

- $$\frac{x}{2} = \frac{x+7}{4}$$

Para determinar o valor de "x", devemos utilizar a "multiplicação cruzada".

$$x \times 4 = 2 \times (x + 7)$$

$$4x = 2x + 14$$

$$4x - 2x = 14$$

$$2x = 14$$

$$x = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

Gabarito: Letra C.

(CODESG/2019) Considere que os números 0,6; 1,6; 0,3; e k formam, nessa ordem, uma proporção. Qual o valor de k?

a) 0,8

b) 1,8

c) 2,4

d) 2,6

Comentários:

Como os números 0,6; 1,6; 0,3; e k formam uma proporção na ordem indicada, então:

$$\frac{0{,}6}{1{,}6} = \frac{0{,}3}{k}$$

Para determinar o valor de "k", devemos utilizar a "multiplicação cruzada".

$$0{,}6 \times k = 1{,}6 \times 0{,}3$$

$$0{,}6k = 0{,}48$$

$$k = \frac{0{,}48}{0{,}6}$$

$$k = 0{,}8$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Peruíbe/2019) Em um experimento químico, a razão entre uma quantidade do produto A para 2/3 da quantidade do produto B é igual a 1/3. Para obter esse resultado é(são) necessário(s), do produto A,

a) 1/6 da quantidade do produto B.

b) 2/9 da quantidade do produto B.

c) 1/3 da quantidade do produto B.

d) 2/5 da quantidade do produto B.

e) 1/2 da quantidade do produto B.

Comentários:

Seja Q_A a quantidade do produto A e Q_B a quantidade do produto B.

A razão entre Q_A e $\frac{2}{3}Q_b$ é igual a 1/3. Logo:

$$\frac{Q_A}{\left(\frac{2}{3}Q_B\right)} = \frac{1}{3}$$

Rearranjando os meios, temos:

$$\frac{Q_A}{1} = \frac{\left(\frac{2}{3}Q_B\right)}{3}$$

$$Q_A = \frac{2Q_B}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$Q_A = \frac{2}{9} Q_B$$

Logo, são necessários do produto A 2/9 da quantidade do produto B.

Gabarito: Letra B.

Um ponto muito importante na resolução de problemas é **não confundir** a razão entre duas entidades com a razão entre uma entidade e a totalidade de casos do problema. Vejamos o exemplo a seguir:

(Pref. Peruíbe/2019) No ano de 2015, uma pesquisa revelou que, no Brasil, a razão entre o número de pessoas que apresentam algum tipo de deficiência e o número de pessoas que não apresentam deficiência é de 1/3. Com base nessa informação, é correto afirmar que, no Brasil, a cada

a) seis pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

b) cinco pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

c) quatro pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

d) três pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

e) duas pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

Comentários:

Perceba que o problema pergunta sobre a razão entre as pessoas com deficiência (C) e a **totalidade da população** brasileira (T).

A razão apresentada pelo enunciado é entre as pessoas com deficiência (C) e as pessoas sem deficiência (S):

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}} = \frac{1}{3}$$

Ao realizar a "multiplicação cruzada", obtemos que o número de pessoas sem deficiência é o triplo do número de pessoas com deficiência:

$$1\mathrm{S} = 3\mathrm{C}$$

O total de pessoas no Brasil (T) corresponde à soma das pessoas com e sem deficiência:

$$\mathrm{T} = \mathrm{C} + \mathrm{S}$$

A razão entre o número de pessoas com deficiência e a totalidade da população é:

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{T}} = \frac{C}{C+S}$$

Como **S = 3C**, temos:

$$= \frac{C}{C+3C}$$

$$= \frac{C}{4C} = \frac{1}{4}$$

Logo, no Brasil, a cada quatro pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

Gabarito: Letra C.

Propriedades fundamentais das proporções

As propriedades a seguir serão de grande valia para problemas de proporcionalidade, especialmente a propriedade fundamental da soma.

Propriedade fundamental soma

Considerando a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, são validas também as proporções $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$ e também $\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Em resumo, temos que:

$$\text{Considerando que } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ então é verdade que } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

O mesmo vale para uma proporção composta por **mais de duas razões**:

$$\text{Considerando que } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}, \text{ então é verdade que } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$$

Vale ressaltar que **não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção**, sendo também verdade, por exemplo, casos como os seguintes:

$$\text{Considerando que } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}, \text{ então é verdade que } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{\mathbf{a+c}}{\mathbf{b+d}}$$
$$\text{Considerando que } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{e}{f}=\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{h}}, \text{ então é verdade que } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{\mathbf{a+c+g}}{\mathbf{b+d+h}}$$

Vamos a um exemplo que mostra a utilidade dessa propriedade.

Considere a proporção com três razões $\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{20}$. Determine a, b e c, sabendo que $a+b+c=140$.

Utilizando a propriedade fundamental da soma, temos que:

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{20}=\frac{a+b+c}{5+10+20}$$
$$\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{20}=\frac{140}{35}$$
$$\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{20}=4$$

A sequência de igualdades acima significa que:

$$\frac{a}{5}=4 \ \rightarrow a=20$$

$$\frac{b}{10} = 4 \ \rightarrow b = 40$$
$$\frac{c}{20} = 4 \ \rightarrow c = 80$$

Propriedade fundamental da subtração

Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, são validas as proporções $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$ e também $\frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$. Em resumo, temos que:

$$\text{Considerando que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}, \text{então é verdade que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{a}-\mathrm{c}}{\mathrm{b}-\mathrm{d}}$$

Vamos a um exemplo que mostra a utilidade dessa propriedade.

Considere a proporção $\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5}$. Determine a incógnita "x".

Ao subtrair os numeradores, podemos eliminar a incógnita "x". Observe:

$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \frac{\boldsymbol{(x+1)-(x-4)}}{\mathbf{10-5}}$$
$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{5}}$$
$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \mathbf{1}$$

Utilizando a igualdade $\frac{x+1}{10} = 1$, obtemos:

$$x + 1 = 10$$
$$x = 9$$

Poderíamos também utilizar a igualdade $\frac{x-4}{5} = 1$:

$$x - 4 = 5$$
$$x = 9$$

Uso conjunto das propriedades da soma e da subtração

Em uma mesma proporção composta por duas ou mais razões, podemos utilizar as duas propriedades anteriores em conjunto. Por exemplo, se tivermos a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

Podemos somar e subtrair os numeradores e denominadores seguindo a mesma lógica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a + c + e + g}{-b + d + f + h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a - c + e - g}{b - d + f - h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a + c - e - g}{b + d - f - h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a + c - e + g}{b + d - f + h}$$

Enfim, são diversas as possibilidades. O importante é não esquecer que, ao realizar uma operação (soma ou subtração) com o numerador de uma das razões, devemos realizar a mesma operação (soma ou subtração) com o denominador dessa razão.

Vale ressaltar que não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a + c - e}{b + d - f}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-c + e - g}{-d + f - h}$$

Escala

A escala é um tipo específico de razão. Trata-se da razão entre uma medida representada em um desenho e a medida real do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

É muito comum que a escala seja representada na forma **A:B**.

Quando temos, por exemplo, um mapa na escala 1:50.000, significa que cada unidade de comprimento do mapa corresponde a 50.000 unidades de comprimento do mundo real, seja qual for essa unidade de comprimento:

- Se estivermos falando de metros, cada metro do mapa corresponde a 50.000 metros no mundo real;
- Se estivermos falando de centímetros, cada centímetro do mapa corresponde a 50.000 centímetros no mundo real;
- Se estivermos falando de milímetros, cada milímetro do mapa corresponde a 50.000 milímetros no mundo real;
- Etc.

(ANAC/2009) Acerca de grandezas proporcionais e de matemática financeira, julgue o item que segue.

Se a maquete de um helicóptero, construída na escala de 1:24, tiver o comprimento igual a 20 cm, então o comprimento real dessa aeronave será inferior a 5 m.

Comentários:

A escala 1:24 apresenta 20cm como medida representada.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{20 \text{ cm}}{\text{Medida real}}$$

$$1 \times (\text{Medida real}) = 24 \times 20 \text{ cm}$$

$$(\text{Medida real}) = 480 \text{ cm}$$

Lembre-se que o prefixo "**centi**" (**c**) corresponde a 10^{-2}. O valor da medida real, em metros, é:

$$(\text{Medida real}) = 480 \times \mathbf{10^{-2}} \text{ m}$$

$$(\text{Medida real}) = 4{,}8 \text{ m}$$

Logo, o comprimento real dessa aeronave será inferior a 5 m.

Gabarito: CERTO.

(Pref. Olímpia/2019) A tabela a seguir apresenta algumas escalas e medidas:

Escala	Medida na representação gráfica	Medida real
1:1 000	6 cm	60 m
1:2 500	20 cm	X
1:4 000	Y	600 m

As medidas X e Y são, respectivamente, iguais a

a) 25 m e 15 cm.

b) 60 m e 80 cm.

c) 500 m e 12 cm.

d) 500 m e 15 cm.

e) 800 m e 60 cm.

Comentários:

A escala 1:2.500 apresenta 20cm como medida representada e X como medida real.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{2.500} = \frac{20\text{cm}}{\text{X}}$$

$$1 \times \text{X} = 20\text{cm} \ \times 2.500$$

$$\text{X} = 50.000 \text{ cm}$$

Lembre-se que o prefixo "**centi**" (**c**) corresponde a 10^{-2}. O valor de X, em metros, é:

$$\text{X} = 50.000 \times \mathbf{10^{-2}}\text{m}$$

$$\text{X} = 500\text{m}$$

A escala 1:4.000 apresenta Y como medida representada e 600m como medida real.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{4.000} = \frac{\text{Y}}{600\text{m}}$$

$$\frac{600\text{m}}{4.000} = \text{Y}$$

$$\text{Y} = 0{,}15 \text{ m}$$

0,15m correspondem a 15cm. Logo, $\text{Y} = 15\text{cm}$.

Gabarito: Letra D.

PROPORCIONALIDADE

Proporcionalidade

Grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B, C e D quando

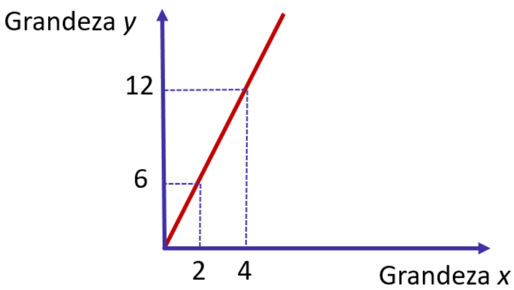
$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{Grandeza B})\times(\text{Grandeza C})\times(\text{Grandeza D})} = \text{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

Quando uma questão disser que duas ou mais grandezas são **proporcionais**, entenda que elas são **diretamente proporcionais**.

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ são diretamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \cdots = \frac{x_n}{y_n} = \text{k}$$



Para resolver problemas de divisão em partes diretamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Grandezas inversamente proporcionais

As expressões a seguir querem dizer a mesma coisa:

- A é **inversamente proporcional** a B;
- A é **diretamente proporcional ao inverso de B**;
- A é **diretamente proporcional a $\frac{1}{B}$**.

Uma grandeza A é inversamente proporcional às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{\frac{1}{(\text{Grandeza B})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza C})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza D})}} = \text{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

De outra forma, podemos dizer que grandeza A é inversamente proporcional às grandezas B, C e D quando:

$$(\text{grandeza A}) \times (\text{gradeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times (\text{grabdeza D}) = \text{k}$$

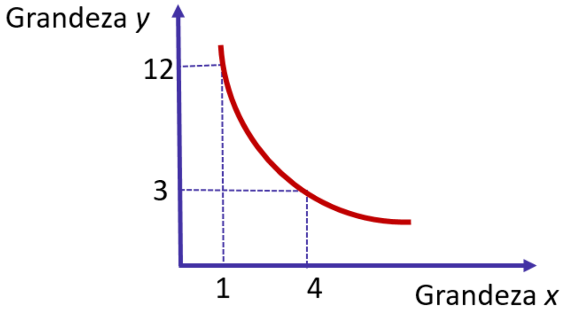
Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são inversamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{y_2}} = \frac{x_3}{\frac{1}{y_3}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{y_n}} = k$$

De outra forma, podemos dizer que são inversamente proporcionais quando:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = x_n \times y_n = k$$



Para resolver problemas de divisão em partes inversamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Grandezas direta e inversamente proporcionais

Se uma grandeza A for **diretamente** proporcional às **grandezas B e C** e **inversamente** proporcional às **grandezas D e E**, então:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{grandeza B})\times(\text{grandeza C})\times\frac{1}{(\text{Grandeza D})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza E})}} = k$$

Para resolver problemas de divisão em partes direta e inversamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Nesse capítulo, apresentaremos primeiro as definições para, em seguida, mostrar a aplicação delas em problemas que podem aparecer na sua prova.

Sabemos que a apresentação "crua" das definições pode não ser "facilmente digerível" em um primeiro momento, porém a resolução de problemas tornará as definições mais claras.

Grandezas diretamente proporcionais

Definição de grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é **diretamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre elas é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\textbf{Grandeza B}} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Esse conceito pode ser estendido para quando temos mais de uma grandeza. Uma grandeza A é **diretamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{(\textbf{Grandeza B})\times(\textbf{Grandeza C})\times(\textbf{Grandeza D})} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Problemas com grandezas diretamente proporcionais

Para resolver problemas com grandezas diretamente proporcionais, devemos utilizar os conceitos vistos anteriormente. Sem mais delongas, vamos a dois exemplos.

Quando uma questão disser que duas ou mais grandezas são **proporcionais,** entenda que elas são **diretamente proporcionais**

Em uma pizzaria, a produção diária de pizzas é proporcional ao número de horas trabalhadas pelos seus funcionários.

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas.

Quantas pizzas foram produzidas em um dia em que os funcionários trabalharam 7 horas?

Veja que a grandeza "pizzas produzidas" é diretamente proporcional à grandeza "horas trabalhadas".

$$\frac{\text{pizzas produzidas}}{\text{horas trabalhadas}} = \text{k}$$

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas. Logo:

$$\frac{80}{5} = k$$

Suponha que, ao trabalhar 7 horas, foram produzidas x pizzas. Então:

$$\frac{x}{7} = k$$

Com as duas igualdades acima, podemos escrever:

$$\frac{80}{5} = \frac{x}{7} = k$$

Podemos realizar a "multiplicação cruzada" na igualdade $\frac{80}{5} = \frac{x}{7}$. Temos:

$$5x = 80 \times 7$$

$$x = \frac{80 \times 7}{5}$$

$$x = 112 \text{ pizzas}$$

Observação: a partir desse momento, vamos escrever diretamente a igualdade do tipo $\frac{80}{5} = \frac{x}{7} = k$.

Vamos a um novo problema com mais grandezas envolvidas.

Em uma pizzaria, a produção diária de pizzas é proporcional ao número de horas trabalhadas pelos seus funcionários e ao número de funcionários presentes no expediente.

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas com 8 funcionários.

Quantas pizzas foram produzidas em um dia em que estavam presentes 10 funcionários trabalhando 7 horas?

Veja que a grandeza "pizzas produzidas" é diretamente proporcional às grandezas "horas trabalhadas" e "número de funcionários".

$$\frac{(\text{pizzas produzidas})}{(\text{horas trabalhadas}) \times (\text{número de funcionários})} = \text{k}$$

Supondo que foram produzidas x pizzas no dia em que 10 funcionários trabalharam 7 horas, temos:

$$\frac{80}{5 \times 8} = \frac{x}{7 \times 10} = k$$

Podemos simplificar $\frac{80}{5\times8} = \frac{x}{7\times10}$ e realizar a "multiplicação cruzada" na igualdade.

$$\frac{80}{5 \times 8} = \frac{x}{7 \times 10}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{x}{70}$$

$$2 \times 70 = 1 \times x$$

$$x = 140 \text{ pizzas}$$

Sequências diretamente proporcionais

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são diretamente proporcionais quando:

$$\frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{y}_1} = \frac{\mathrm{x}_2}{\mathrm{y}_2} = \frac{\mathrm{x}_3}{\mathrm{y}_3} = \cdots = \frac{\mathrm{x}_\mathrm{n}}{\mathrm{y}_\mathrm{n}} = \mathrm{k}$$

Onde **k** é uma constante denominada **constante de proporcionalidade.**

(Pref. Ananindeua/2019) A sequência numérica (6,X,Y,12) é diretamente proporcional a sequência (3,4,5,6). Qual o valor de X+Y?

a) 8

b) 18

c) 16

d) 20

Comentários:

Como a sequência $(6, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, 12)$ é proporcional à sequência $(3,4,5,6)$, temos que:

$$\frac{6}{3} = \frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{12}{6} = k$$

Qual é a constante de proporcionalidade **k**? $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2.$

Temos, portanto, que:

$$\frac{6}{3} = \frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{12}{6} = 2$$

Logo:

$$\frac{X}{4} = 2 \ \rightarrow X = 8$$

$$\frac{Y}{5} = 2 \rightarrow Y = 10$$

A soma procurada é $X + Y = 8 + 10 = 18$

Gabarito: Letra B.

Aspecto gráfico da proporcionalidade direta

Se duas grandezas são **diretamente proporcionais**, quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta, e quando uma grandeza diminui, a outra também diminui.

Ocorre que essa descrição qualitativa não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas diretamente proporcionais, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **uma grandeza aumenta ou diminui na mesma proporção em que a outra aumenta ou diminui.**

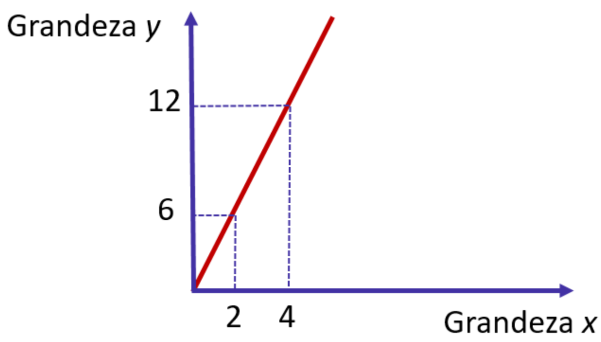
Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve dobrar. Se a primeira grandeza quintuplicar, a segunda grandeza também deve ser multiplicada por 5. Se a primeira grandeza for dividida por 3, a segunda grandeza também deve ser dividida por 3.

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, graficamente, temos uma reta que passa pela origem. Isso porque quando uma grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x, temos:

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \mathrm{k}$$

$$\mathbf{y = kx}$$

(Equação da reta que passa pela origem do plano cartesiano)



Perceba, no exemplo do gráfico, que temos um ponto $(x; y)$ dado pelo par $(2; 6)$. Quando x é multiplicado por 2, o y é multiplicado por 2, e o novo ponto $(x; y)$ obtido é $(4; 12)$.

(Pref. SJC/2019) Duas grandezas y e x, diretamente proporcionais, são representadas, graficamente, por uma função cuja expressão algébrica é:

a) $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \cdot b \cdot c \neq 0$

b) $y = ax^2 + bx$, com a e b reais e $a \cdot b \neq 0$

c) $y = ax^2$, com $a \neq 0$, real

d) $y = ax + b$, com a e b reais e $a \cdot b \neq 0$

e) $y = ax$, com $a \neq 0$, real

Comentários:

Duas grandezas diretamente proporcionais podem ser representadas graficamente por uma reta que passa pela origem do plano cartesiano.

Assim, as grandezas y e x podem ser relacionadas pela função $y = ax$, com a diferente de zero. Nesse caso, a é a constante de proporcionalidade k.

Gabarito: Letra E.

Divisão em partes diretamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes proporcionais** (ou seja, em **partes diretamente proporcionais**) tratam da divisão de uma quantia em partes proporcionais a alguns números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Vamos a um exemplo:

Divida o número 2200 em partes proporcionais a 5, 7 e 10.

Se as partes proporcionais a 5, 7 e 10 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = k$$

A soma das partes é 2.200. Logo, $a + b + c = 2.200$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10}$, temos:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{a+b+c}{5+7+10}$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{2.200}{22}$$

$$\boxed{\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = 100}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 100.

$$\frac{a}{5} = 100 \ \rightarrow a = 500$$

$$\frac{b}{7} = 100 \ \rightarrow b = 700$$

$$\frac{c}{10} = 100 \ \rightarrow c = 1.000$$

Logo, ao dividir o número 2.200 em partes proporcionais a 5, 7 e 10, obtemos, respectivamente, 500, 700 e 1.000.

As questões de concurso público costumam apresentar uma contextualização. Veja um exemplo.

(Pref. Buritizal/2018) Três amigos fizeram um bolão para um jogo de loteria, sendo que um deles colaborou com R$ 13,00, outro com R$ 14,00 e o terceiro com R$ 22,00. Eles foram sorteados e receberam um prêmio de R$ 7.350,00, que será dividido em partes diretamente proporcionais ao que cada um contribuiu no bolão. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia será

a) R$ 1.950,00.

b) R$ 2.000,00.

c) R$ 2.050,00.

d) R$ 2.100,00.

e) R$ 2.150,00.

Comentários:

Se as partes proporcionais a R$13 , R$14 e R$22 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = k$$

A soma das partes é o total do prêmio, isto é, $a + b + c = R\$\ 7.350$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22}$, temos:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{a + b + c}{13 + 14 + 22}$$

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{7350}{49}$$

$$\boxed{\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = 150}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 100. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia é tal que:

$$\frac{a}{13} = 150$$

$$a = 1.950$$

Gabarito: Letra A.

Algumas questões sobre divisões proporcionais podem ser mais complexas. Para resolvê-las, devemos nos ater aos princípios apresentados neste capítulo.

(SABESP/2019) Um pai pretende dividir R$ 750,00 entre seus 3 filhos de tal forma que cada um receba uma quantia diretamente proporcional à sua própria idade. Se dois dos filhos receberão, respectivamente, R$ 225,00 e R$ 240,00, e se a soma das idades dos dois filhos mais novos é 31 anos, então a idade do filho mais velho é

a) 15

b) 21

c) 19

d) 20

e) 16

Comentários:

Se as quantias recebidas por dois filhos foram R$225 e R$240, a quantia recebida pelo terceiro filho é o que restou do total de R$750:

$$750 - 225 - 240 = \text{ R\$285}$$

Como cada filho recebeu uma quantia proporcional à idade, os filhos mais novos, de idades N_1 e N_2, receberam as duas menores quantias, ou seja, receberam R$225 e R$240. Se a idade do filho mais velho é V, então temos a seguinte proporção:

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = k$$

Lembre-se que a soma das idades dos dois filhos mais novos é 31. Logo, $N_1 + N_2 = 31$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" com as **duas primeiras razões** da proporção acima, temos:

$$\boldsymbol{\frac{225}{N_1}} = \boldsymbol{\frac{240}{N_2}} = \frac{285}{V} = \boldsymbol{\frac{225 + 240}{N_1 + N_2}}$$

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = \frac{465}{\mathbf{31}}$$

$$\boxed{\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = 15}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 15. Vamos obter a idade do filho mais velho:

$$\frac{285}{V} = 15$$

$$\frac{285}{15} = V$$

$$V = 19$$

Gabarito: Letra C.

Problemas de regra de sociedade

Em uma sociedade empresarial, os lucros ou os prejuízos costumam ser distribuídos entre as pessoas de maneira diretamente proporcional ao capital investido.

Em resumo, problemas de "regra de sociedade" são problemas de divisão proporcional com uma historinha envolvendo sócios de uma empresa ou de um negócio. Vejamos um exemplo.

(BB/2013) Uma empresa obteve um lucro líquido de R$ 263.500,00. Esse lucro será dividido proporcionalmente às cotas da sociedade que cada um dos seus quatro sócios possui. O sócio majoritário detém 9 das cotas e os outros três sócios possuem, respectivamente, 1, 3 e 4 cotas da sociedade. A quantia, em reais, que o sócio que possui 3 cotas receberá nessa divisão é igual a

a) 15.500,00.

b) 139.500,00.

c) 46.500,00.

d) 62.000,00.

e) 31.000,00.

Comentários:

O lucro líquido será dividido em partes proporcionais às cotas da sociedade. Se as partes proporcionais a 1 , 3, 4 e 9 forem respectivamente a, b, c e d, temos:

- $$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = k$$

A soma das partes é o lucro líquido total, isto é, $a + b + c + d = R\$\ 263.500$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9}$, temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = \frac{a + b + c + d}{1 + 3 + 4 + 9}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = \frac{263.500}{17}$$

$$\boxed{\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = 15.500}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 15.500. Vamos obter a quantia recebida pelo sócio que tem 3 cotas:

$$\frac{b}{3} = 15.500$$

$$b = 46.500$$

Gabarito: Letra C.

Grandezas inversamente proporcionais

Para trabalhar com **grandezas inversamente proporcionais**, devemos saber que as expressões a seguir querem dizer a mesma coisa:

- A é **inversamente proporcional** a B;
- A é **diretamente proporcional ao inverso de B**;
- A é **diretamente proporcional a $\frac{1}{B}$**.

Essa breve introdução é suficiente para resolver todos os problemas sobre grandezas inversamente proporcionais: basta **converter o problema de grandezas inversamente proporcionais em um problema de grandezas diretamente proporcionais**.

Vamos entrar em detalhes.

Definição de grandezas inversamente proporcionais

Uma grandeza A é **inversamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre a grandeza A e o inverso da grandeza B é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\frac{\textbf{1}}{\textbf{Grandeza B}}} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Note que:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\frac{\textbf{1}}{\textbf{Grandeza B}}} = (\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B})$$

Podemos, então, reescrever a definição assim:

Uma grandeza A é **inversamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, o produto da grandeza A pela grandeza B é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$(\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B}) = \boldsymbol{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Esse conceito pode ser estendido para quando temos mais de uma grandeza. Uma grandeza A é **inversamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza B}}\right)\times\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza C}}\right)\times\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza D}}\right)} = \boldsymbol{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Novamente, podemos reescrever o conceito, dizendo que uma grandeza A é **inversamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$(\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B}) \times (\textbf{Grandeza C}) \times (\textbf{Grandeza D}) = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Problemas com grandezas inversamente proporcionais

Para resolver problemas com grandezas inversamente proporcionais, devemos utilizar os conceitos vistos anteriormente. Vamos a um exemplo.

Em uma fábrica de peças automotivas, o "custo fixo unitário da produção" é inversamente proporcional à quantidade de peças produzidas do tipo A e do tipo B.

Em um determinado mês, foram produzidas 50 peças do tipo A e 100 peças do tipo B, gerando um custo fixo unitário de R$ 50.

Determine o "custo fixo unitário da produção" em um mês em que foram produzidas 25 peças do tipo A e 250 peças do tipo B.

Veja que a grandeza "custo fixo unitário" é **inversamente proporcional** às grandezas "peças tipo A" e "peças tipo B".

Logo, a grandeza "custo fixo unitário" é **diretamente proporcional** **ao inverso** da grandeza "peças tipo A" e **ao inverso** da grandeza "peças tipo B".

$$\frac{(\text{custo fixo unitário})}{\frac{1}{(\text{peças tipo A})} \times \frac{1}{(\text{peças tipo B})}} = \text{k}$$

Em um determinado mês, foram produzidas 50 peças do tipo A e 100 peças do tipo B, gerando um custo fixo unitário de R$50. Logo:

$$\frac{50}{\frac{1}{50} \times \frac{1}{100}} = k$$

Suponha que, no mês em que foram produzidas 25 peças do tipo A e 250 peças do tipo B, o custo fixo unitário seja C. Logo:

$$\frac{C}{\frac{1}{25} \times \frac{1}{250}} = k$$

Com as duas igualdades anteriores, podemos escrever:

$$\frac{\mathbf{50}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}\times\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}}=\frac{\boldsymbol{C}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}\times\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{250}}}=k$$

$$\mathbf{50\times 50\times 100=\boldsymbol{C}\times 25\times 250}$$

$$\frac{50\times 50\times 100}{25\times 250}=C$$

$$C=R\$\ 40$$

(SEFAZ BA/2022) Três grandezas L, M e N são tais que L é diretamente proporcional a M, e M é inversamente proporcional a N.

Quando M = 4 e N = 18, tem-se L = 60.

Quando L = 45, o valor de M + N é

a) 25.

b) 26.

c) 27.

d) 28.

e) 29.

Comentários:

Sabemos que a grandeza L é <u>diretamente proporcional</u> à grandeza M. Logo, sendo k_1 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{L}{M}=k_1$$

Além disso, a grandeza M é <u>inversamente proporcional</u> à grandeza N. Logo, sendo k_2 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$MN=k_2$$

Quando $M=4$ e $N=18$, tem-se $L=60$. Logo:

$$\frac{L}{M}=k_1\ \rightarrow\frac{60}{4}=k_1\rightarrow \boldsymbol{k_1=15}$$

$$MN=k_2\ \rightarrow 4\times 18=k_2\rightarrow \boldsymbol{k_2=72}$$

Devemos determinar o valor de $M + N$ para o caso em que $L = 45$.

$$\frac{L}{M} = k_1 \rightarrow \frac{45}{M} = 15 \rightarrow M = \frac{45}{15} \rightarrow M = 3$$

$$MN = k_2 \rightarrow 3 \times N = 72 \rightarrow N = 24$$

Logo, **para $L = 45$**, temos:

$$M + N = 3 + 24$$
$$= 27$$

Gabarito: Letra C.

Sequências inversamente proporcionais

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são inversamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{y_2}} = \frac{x_3}{\frac{1}{y_3}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{y_n}} = k$$

Onde **k** é uma constante denominada **constante de proporcionalidade.**

Essa definição equivale a dizer que as sequências são inversamente proporcionais quando:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = k$$

(Pref. Cerquilho/2019) Assinale a alternativa que contém uma tabela apresentando duas grandezas inversamente proporcionais.

a)

Grandeza x	3	4	5	6	7	8
Grandeza y	12	11	10	9	8	7

b)

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	12	11	10	9	8	7

c)

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	16	14	12	10	8	6

d)

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	32	16	8	4	2	1

e)

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	–4	–3	–2	–1	0	1

Comentários:

Para duas sequências serem inversamente proporcionais, a multiplicação das grandezas deve ser sempre igual a uma consante, isto é:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = k$$

Vamos analisar cada alternativa.

A) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	3	4	5	6	7	8
Grandeza y	12	11	10	9	8	7
Produto xy	36	44	50	54	56	56

B) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	12	11	10	9	8	7
Produto xy	96	77	60	45	32	21

C) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	16	14	12	10	8	6
Produto xy	128	98	72	50	32	18

D) O produto dos elementos das duas sequências é constante e igual a 32. **Este é o gabarito**.

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	32	16	8	4	2	1
Produto xy	32	32	32	32	32	32

E) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	-4	-3	-2	-1	0	1
Produto xy	-4	-6	-8	-8	0	32

Gabarito: Letra D.

Aspecto gráfico da proporcionalidade inversa

Se duas grandezas são **inversamente proporcionais**, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui, e quando uma grandeza diminui, a outra aumenta.

Ocorre que essa descrição qualitativa não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas inversamente proporcionais, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **quando uma grandeza aumenta, a outra grandeza diminui na mesma proporção, e quando uma grandeza diminui, a outra grandeza aumenta na mesma proporção.**

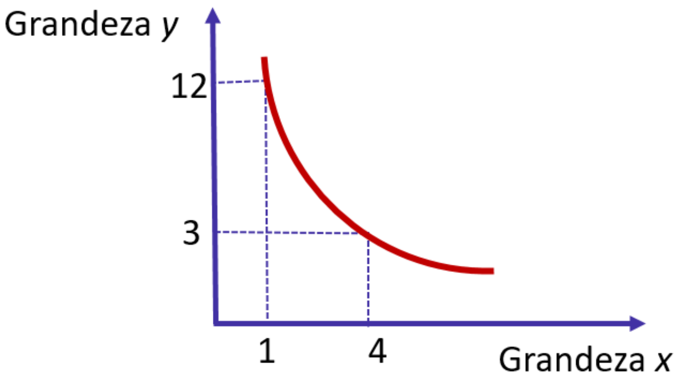
Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve reduzir pela metade. Se a primeira grandeza quintuplicar, a segunda grandeza deve ser dividida por 5. Se a primeira grandeza for dividida por 3, a segunda grandeza deve ser triplicada.

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, graficamente, temos uma curva chamada **hipérbole**.

$$\frac{y}{1/x} = k$$

$$\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$$

(Hipérbole)



Perceba, no exemplo do gráfico, que temos um ponto $(x;y)$ dado pelo par $(1;12)$. Quando x é multiplicado por 4, o y é dividido por 4, e o novo ponto $(x;y)$ obtido é $(4;3)$.

(Pref. Campinas/2019) A professora Alice perguntou aos seus alunos o que são grandezas inversamente proporcionais. Analise o diálogo entre um grupo de alunos sobre esse significado:

Júlia:	Analiso a variação de duas grandezas: se uma das grandezas aumenta e a outra diminui, então essas grandezas são necessariamente inversamente proporcionais.
Caio:	Você está errada Júlia, pois há situações em que isso ocorre e as grandezas não são inversamente proporcionais. Essa sua afirmação é necessária, mas não é suficiente para indicar se as grandezas são inversamente proporcionais.
André:	Se uma grandeza aumenta e a outra também aumenta, essas grandezas são diretamente proporcionais e, se uma aumenta e a outra diminui elas são inversamente proporcionais.
Luana:	Eu não analiso esse aspecto de diminuir e aumentar apenas. Se uma grandeza x for inversamente proporcional a y, os produtos dos valores de x pelos correspondentes valores de y são necessariamente iguais.

Considerando as ideias apresentadas pelos quatro estudantes, é correto afirmar que são verdadeiras apenas as argumentações de

a) Júlia e Luana.

b) Júlia e André.

c) Caio e Luana.

d) Caio e André.

e) André e Luana.

Comentários:

Vamos comentar cada ideia apresentada pelos estudantes.

Júlia: O fato de uma das grandezas aumentar enquanto a outra diminui **não necessariamente define que as grandezas são inversamente proporcionais**.

Isso porque é necessário que **uma grandeza diminua na mesma proporção em que a outra aumenta**. Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve reduzir pela metade, por exemplo.

Podemos mostrar o seguinte **contraexemplo** para o argumento de Júlia: considere duas grandezas, dadas por x e y, tais que $y = \frac{1}{x} + 1$. Se x for de 2 para 4, y vai de $\frac{3}{2}$ para $\frac{5}{4}$. Veja que, nesse exemplo, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui. Ocorre que, nesse caso, **x dobrou e y não diminuiu pela metade**.

Caio: O argumento de caio está correto. Para duas grandezas serem inversamente proporcionais é necessário que, quando uma aumenta, a outra diminui. Ocorre que isso não é suficiente para que as grandezas sejam inversamente proporcionais: é necessário que **uma grandeza diminua na mesma proporção em que a outra aumenta**.

André: André errou pelo mesmo motivo de Júlia, por não especificar a forma em que as grandezas devem aumentar/diminuir.

Nas grandezas diretamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra aumenta **na mesma proporção**. Nas grandezas inversamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui **na mesma proporção**.

Luana: Luana definiu corretamente grandezas inversamente proporcionais: os produtos dos valores das duas grandezas devem ser iguais a uma constante.

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = k$$

As argumentações verdadeiras são as do **Caio** e da **Luana**.

Gabarito: Letra C.

Divisão em partes inversamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes inversamente proporcionais** tratam da divisão de uma quantia em partes inversamente proporcionais a alguns números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Divida o número 700 em partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20.

Se as partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = k$$

A soma das partes é 700. Logo, $a + b + c = 700$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}}$, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{700}{\frac{4+2+1}{20}}$$

$$5a = 10b = 20c = \frac{700}{\frac{7}{20}}$$

$$5a = 10b = 20c = 700 \times \frac{20}{7}$$

$$\boxed{5a = 10b = 20c = 2.000}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 2.000.

$$5a = 2.000 \ \rightarrow a = 400$$

$$10b = 2.000 \rightarrow b = 200$$

$$20c = 2.000 \rightarrow c = 100$$

Logo, ao dividir o número 700 em partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20, obtemos, respectivamente, 400, 200 e 100.

As questões de concurso público costumam apresentar uma contextualização. Veja um exemplo.

(BANESTES/2018) Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

Comentários:

Se as quantidades de cédulas de R$10 , R$20 e R$50 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = k$$

A soma do número de cédulas é 272, isto é, $a + b + c = 272$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = \frac{272}{\frac{10+5+2}{100}}$$

$$10a = 20b = 50c = \frac{272}{\frac{17}{100}}$$

$$10a = 20b = 50c = 272 \times \frac{100}{17}$$

$$\boxed{10a = 20b = 50c = 1.600}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.600. O número de cédulas de cada tipo é:

$$10a = 1.600 \ \rightarrow a = 160$$

$$20b = 1.600 \ \rightarrow b = 80$$

$$50c = 1.600 \ \rightarrow c = 32$$

Temos, portanto, 160 cédulas de R$10, 80 cédulas de R$20 e 32 cédulas de R$50. A quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

$$160 \times R\$10 + 80 \times R\$20 + 32 \times R\$\,50$$
$$= R\$\,4.800$$

Gabarito: Letra E.

Grandezas direta e inversamente proporcionais

Quando se apresentam problemas em que uma grandeza A é diretamente proporcional a algumas grandezas e inversamente proporcional a outras grandezas, **devemos transformar tudo para grandezas diretamente proporcionais.**

Se uma grandeza A for diretamente proporcional às grandezas B e C e inversamente proporcional às grandezas D e E, então podemos dizer que **a grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B, C, 1/D e 1/E**. Logo:

$$\frac{(\text{grandeza A})}{(\text{grandeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times \dfrac{1}{(\text{grandeza D})} \times \dfrac{1}{(\text{grandeza E})}} = \mathbf{k}$$

Onde **k** é a constante de proporcionalidade.

Problemas com grandezas direta e inversamente proporcionais

Vamos a um problema.

Em uma fábrica de parafusos, a receita em reais obtida em um mês é diretamente proporcional ao número de parafusos produzidos e inversamente proporcional à cotação do dólar.

Em um determinado mês, foram produzidos 1.000.000 de parafusos e a receita foi de R$ 10.000,00, sendo o dólar cotado a R$ 2,50.

Determine a receita em reais obtida ao se produzir 500.000 parafusos com o dólar cotado a R$ 5,00.

Veja que a grandeza "receita obtida" é diretamente proporcional a grandeza "número de parafusos" e inversamente proporcional à grandeza "cotação do dólar".

$$\frac{(\text{receita obtida})}{(\text{número de parafusos}) \times \dfrac{1}{(\text{cotação do dólar})}} = k$$

Supondo que a receita em reais obtida ao se produzir 500.000 parafusos com o dólar a R$ 5,00 foi x, então:

$$\frac{10.000}{1.000.000 \times \dfrac{1}{2,5}} = \frac{x}{500.000 \times \dfrac{1}{5}} = k$$

$$\frac{10.000 \ \times 2,5}{1.000.000} = \frac{x \ \times 5}{500.000} = k$$

Podemos simplificar a proporção $\frac{10.000 \times 2{,}5}{1.000.000} = \frac{x \times 5}{500.000}$ para depois realizar a "multiplicação cruzada". Simplificando os denominadores de lados diferentes da igualdade por 500.000, temos:

$$\frac{10.000 \times 2{,}5}{2} = \frac{x \times 5}{1}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", temos:

$$2 \times (x \times 5) = 10.000 \times 2{,}5 \times 1$$

$$10x = 25.000$$

$$x = 2.500$$

Logo, a receita em reais obtida foi de R$ 2.500,00.

Divisão em partes direta e inversamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes direta e inversamente proporcionais** tratam da divisão de uma quantia em partes proporcionais a alguns números e inversamente proporcionais a outros números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Vamos a um exemplo.

Um pai quer dividir a quantia de R$ 15.000 a seus três filhos Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo de modo diretamente proporcional às notas obtidas em uma prova de matemática e de modo inversamente proporcional ao tempo semanal que eles jogam videogame.

Arnaldo obteve 10 em matemática e joga videogame durante 10h por semana.

Bernaldo obteve 8 em matemática e joga videogame durante 2h por semana.

Cernaldo obteve 5 em matemática e joga videogame durante 1h por semana.

Qual foi a quantia em reais que cada filho recebeu?

A quantia foi dividida em partes **diretamente proporcionais à nota obtida em matemática** e **inversamente proporcionais** ao **tempo dispendido com videogame**.

Se Arnaldo recebeu a quantia A, Bernaldo recebeu a quantia B e Cernaldo recebeu a quantia C, temos a seguinte proporção:

$$\frac{A}{\mathbf{10} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}} = \frac{B}{\mathbf{8} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \frac{C}{\mathbf{5} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}} = k$$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = k$$

Temos que a soma das quantias recebidas é R$ 15.000.

$$A + B + C = 15.000$$

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5}$, temos:

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{A + B + C}{1 + 4 + 5}$$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{15.000}{10}$$

$$\boxed{\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = 1.500}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.500.

$$\frac{A}{1} = 1.500 \ \rightarrow A = 1.500$$

$$\frac{B}{4} = 1.500 \ \rightarrow B = 6.000$$

$$\frac{C}{5} = 1.500 \ \rightarrow C = 7.500$$

Logo, Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo receberam, respectivamente, R$ 1.500, R$ 6.000 e R$ 7.500.

Questões Comentadas – CESGRANRIO

Frações

1.(CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Colocar uma barra sobre o período é uma das formas de representar uma dízima periódica: $0,\overline{3} = 0,333\ldots$ A expressão $0,\overline{4} + 0,1\overline{6}$ é igual a:

a) $\frac{51}{100}$

b) $\frac{511}{1000}$

c) $\frac{11}{18}$

d) $\frac{14}{15}$

e) $\frac{5}{9}$

Comentários:

Vamos realizar a soma, separando o período de $0,1\overline{6}$ do restante do número:

$$0,\overline{4} + 0,1\overline{6}$$

$$= \frac{4}{9} + 0,1 + 0,0\overline{6}$$

$$= \frac{4}{9} + 0,1 + \frac{1}{10} \times 0,\overline{6}$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{6}{9}$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{1}{10} + \frac{6}{90}$$

$$= \frac{40 + 9 + 6}{90}$$

$$= \frac{55}{90} = \frac{11}{18}$$

Gabarito: Letra C.

2. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Baldo usa uma calculadora que ignora todos os valores após a primeira casa decimal no resultado de cada operação realizada. Desse modo, quando Baldo faz $\frac{4}{3} \times \frac{6}{5}$, a calculadora mostra o resultado de 1,3 × 1,2 = 1,5. Portanto, há um erro no valor final de 0,1, pois $\frac{4}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{24}{15} = 1,6$.

Qual o erro da calculadora de Baldo para a expressão $\left(\left(\frac{10}{3} \times \frac{10}{3}\right)\right) \times 9$

a) 0

b) 1,3

c) 1,5

d) 2,8

e) 3,3

Comentários:

Temos que $\frac{10}{3} = 3{,}333\ldots$. A calculadora, ao realizar a operação, apresenta o valor 3,3.

Assim, a expressão dada por $\left(\left(\frac{10}{3} \times \frac{10}{3}\right)\right) \times 9$ fica assim:

$$((3{,}3 \times 3{,}3)) \times 9$$

O produto $3{,}3 \times 3{,}3$ é igual a $10{,}89$. A calculadora, ao realizar a operação, apresenta o valor $10{,}8$. Ficamos com:

$$(10{,}8) \times 9$$

Finalmente, o produto $10{,}8 \times 9$ é igual a $\mathbf{97,2}$. Como temos apenas uma casa decimal, **a calculadora apresenta exatamente esse valor**.

Agora que temos o valor obtido pela calculadora, vamos obter o **real valor da operação**:

$$\left(\left(\frac{10}{3} \times \frac{10}{3}\right)\right) \times 9$$

$$= \frac{10 \times 10}{3 \times 3} \times 9$$

$$= \frac{100}{9} \times 9$$

$$= 100$$

Portanto, o erro da calculadora foi de:

$$\text{Erro} = \text{Valor real} - \text{Valor calculado}$$

$$= 100 - 97{,}2 = 2{,}8$$

Gabarito: Letra D.

3. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Numa cidade, 4 em cada 15 pessoas são estrangeiras. Dessas pessoas estrangeiras, 3 em cada 8, são crianças.

Nessa cidade, as pessoas que NÃO são crianças estrangeiras correspondem a que fração da população?

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{9}{10}$

c) $\frac{16}{23}$

d) $\frac{14}{45}$

e) $\frac{43}{120}$

Comentários:

Considere que o total de pessoas da cidade é T. Nesse caso, o **número de estrangeiros** é:

$$\boldsymbol{\frac{4}{15}T}$$

$\frac{3}{8}$ **dos estrangeiros** são crianças. Portanto, o **total de <u>crianças estrangeiras</u>** é:

$$\frac{3}{8}\ \mathbf{dos}\ (\mathbf{estrangeiros})$$

$$= \frac{3}{8} \times \boldsymbol{\frac{4}{15}T}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}T$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{10}T}$$

O total da população que **<u>não é</u>** **<u>criança estrangeira</u>** é:

$$T - \boldsymbol{\frac{1}{10}T} = \frac{10-1}{10}T = \frac{9}{10}T$$

Portanto, a fração da população que corresponde às pessoas que **<u>NÃO são</u>** **<u>crianças estrangeiras</u>** é $\frac{9}{10}$.

Gabarito: Letra B.

4.(CESGRANRIO/BNDES/2013) O Parque Estadual Serra do Conduru, localizado no Sul da Bahia, ocupa uma área de aproximadamente 9.270 hectares. Dessa área, 7 em cada 9 hectares são ocupados por florestas.

Qual é, em hectares, a área desse Parque NÃO ocupada por florestas?

a) 2.060

b) 2.640

c) 3.210

d) 5.100

e) 7.210

Comentários:

Como **7 em cada 9 hectares** são **ocupados por florestas**, temos que $\frac{7}{9}$ **da área é ocupada por florestas**.

A fração que corresponde a área que **não** é ocupada por florestas é a **fração complementar** de $\frac{7}{9}$:

$$1-\frac{7}{9}=\frac{9-7}{9}=\frac{2}{9}$$

Portanto, a área não ocupada por florestas é:

$$\frac{2}{9}\ \textbf{da}\ \text{área do parque}$$

$$\frac{2}{9}\times 9.270\ \text{hectares}$$

$$=2.060\ \text{hectares}$$

Gabarito: Letra A.

5. (CESGRANRIO/FINEP/2011) Utilize as informações abaixo para responder à questão.

Uma empresa desenvolveu postes de iluminação elétrica feitos de fibra de vidro, mais flexíveis e mais leves do que os postes tradicionalmente usados no Brasil. Cada poste de fibra de vidro tem 120 kg, o que corresponde a $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{8}$, respectivamente, das massas dos postes de madeira, aço e concreto.

Qual é, em kg, a massa de um poste de aço?

a) 80

b) 150

c) 180

d) 270

e) 360

Comentários:

Suponha que a massa do poste de aço é A.

O poste de fibra de vidro tem **120kg** e **corresponde a $\frac{2}{3}$ da massa de um poste de aço**. Logo:

$$\mathbf{120\ kg} = \frac{2}{3} \times A$$

$$120\ \text{kg} \times \frac{3}{2} = A$$

$$A = 180\ \text{kg}$$

Gabarito: Letra C.

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011)

Ação global contra petróleo caro

A Agência Internacional de Energia (AIE), formada por 28 países, anunciou ontem a liberação de 60 milhões de barris de petróleo de reservas estratégicas [...]. Os EUA vão entrar com metade do volume, [...] a Europa irá colaborar com $\frac{3}{10}$, e o restante virá de Austrália, Japão, Coreia e Nova Zelândia.

O Globo, Rio de Janeiro, p. 17. 24 jun. 2011. Adaptado.

Suponha que os países asiáticos (Japão e Coreia) contribuam juntos com 1,8 milhão de barris a mais do que a contribuição total dos países da Oceania (Austrália e Nova Zelândia).

Desse modo, quantos milhões de barris serão disponibilizados pelos países asiáticos?

a) 5,2

b) 5,6

c) 6,9

d) 7,4

e) 8,2

Comentários:

Temos um total de 60 milhões de barris.

"Os EUA vão entrar com metade do volume."

- **Barris EUA**: $\frac{1}{2} \times 60 = 30$ milhões.
- **Barris restantes**: $60 - 30 = 30$ milhões.

"...a Europa irá colaborar com 3/10 (do total de 60 milhões)..."

- **Barris Europa**: $\frac{3}{10} \times \mathbf{60} = 18 \text{ milhões}$
- **Barris restantes**: $30 - 18 = 12 \text{ milhões}$

"...o restante virá de Austrália, Japão, Coreia e Nova Zelândia."

Isso significa que os **12 milhões** de barris que restaram após as contribuições dos EUA e da Europa virão de Austrália, Japão, Coreia e Nova Zelândia.

"Suponha que os países asiáticos (Japão e Coreia) contribuam juntos com 1,8 milhão de barris a mais do que a contribuição total dos países da Oceania (Austrália e Nova Zelândia)."

Considere que os países asiáticos (Japão e Coreia) contribuíram com A e que os países da Oceania (Austrália e Nova Zelândia) contribuíram com O. Nesse caso:

$$A = O + 1{,}8$$

$$A - 1{,}8 = O$$

$$O = A - 1{,}8$$

A soma das contribuições dos países asiáticos com as contribuições dos países da Oceania corresponde a **12 milhões**. Logo:

$$A + O = 12$$

Substituindo $O = A - 1{,}8$ em $A + O = 12$, temos:

$$A + O = 12$$

$$A + (A - 1{,}8) = 12$$

$$2A = 13{,}8$$

$$A = 6{,}9$$

Portanto, os países asiáticos contribuíram com 6,9 milhões de barris.

Gabarito: Letra C.

7. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Uma pesquisa feita em uma empresa constatou que apenas 1/6 de seus funcionários são mulheres, e que exatamente 1/4 delas são casadas.

De acordo com a pesquisa, nessa empresa, as mulheres que não são casadas correspondem a que fração de todos os seus funcionários?

a) 1/3

b) 1/4

c) 1/8

d) 15/24

e) 23/24

Comentários:

Considere que o total de funcionários é T. Nesse caso, o **número de mulheres** é:

$$\boldsymbol{\frac{1}{6}T}$$

Como 1/4 das mulheres são casadas, a **fração complementar** a 1/4 corresponde às mulheres **não** casadas.

$$1-\frac{1}{4}=\frac{4-1}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

Portanto, **3/4 das mulheres** não são casadas. Com relação ao total de funcionários, o total de mulheres não casadas é:

$$\frac{3}{4}\ \textbf{das}\ (\textbf{mulheres})$$

$$=\frac{3}{4}\times\left(\boldsymbol{\frac{1}{6}T}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}T$$

$$=\frac{1}{8}T$$

Portanto, as mulheres que não são casadas correspondem a **1/8 do total de funcionários**.

Gabarito: Letra C.

8. (CESGRANRIO/ANP/2016) Um grupo de jovens participou de uma pesquisa sobre tabagismo. Cinco em cada 7 jovens entrevistados declararam-se não fumantes. Dentre os jovens restantes, 3 em cada 4 afirmaram que fumam diariamente. Se 84 jovens entrevistados afirmaram fumar todos os dias, quantos jovens participaram da pesquisa?

a) 112

b) 280

c) 294

d) 392

e) 420

Comentários:

Considere que o total de jovens que participaram da pesquisa seja T. Nesse caso, precisamos determinar o valor de T.

"Cinco em cada 7 jovens entrevistados declararam-se não fumantes."

Isso significa que $\frac{5}{7}T$ são **não fumantes**. **Os demais jovens são fumantes**:

$$T - \frac{5}{7}T = \frac{7-5}{7}T = \frac{2}{7}T$$

"Dentre os jovens restantes, 3 em cada 4 afirmaram que fumam diariamente"

Isso significa que $\frac{3}{4}$ **dos jovens fumantes** fumam diariamente.

$$\frac{3}{4} \textbf{ dos jovens fumantes}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{7}T$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{7}T$$

$$\frac{3}{14}T$$

Portanto, $\frac{3}{14}T$ **são jovens que fumam diariamente**.

"84 jovens entrevistados afirmaram fumar todos os dias"

Temos que o número de jovens que fumam diariamente é 84. Logo:

$$\frac{3}{14}T = 84$$

$$T = 84 \times \frac{14}{3}$$

$$T = 392$$

Portanto, o total de jovens que participaram da pesquisa é **392**.

Gabarito: Letra D.

9. (CESGRANRIO/BB/2015) A mãe de João decidiu ajudá-lo a pagar uma das prestações referentes a uma compra parcelada. Ela solicitou a antecipação do pagamento e, por isso, a financeira lhe concedeu um desconto de 6,25% sobre o valor original daquela prestação. João pagou um terço do novo valor, e sua mãe pagou o restante.

A parte paga pela mãe de João corresponde a que fração do valor original da prestação?

a) $\frac{29}{48}$

b) $\frac{1}{24}$

c) $\frac{15}{16}$

d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{4}{25}$

Comentários:

Pessoal, apesar dessa questão envolver porcentagem, que não é assunto dessa aula, inserimos esse problema aqui pelo fato dele estar mais relacionada ao uso de frações.

Considere que o valor original da prestação era P.

A financeira concedeu um **desconto de 6,25%**, ou seja, um **desconto de $\frac{6,25}{100}$ do valor da prestação P**. O **novo valor**, **removido o desconto**, é:

$$P - \frac{6,25}{100}P$$

$$= \frac{100 - 6,25}{100}P$$

$$= \frac{93,75}{100}P$$

João pagou um terço do **novo valor**, e sua mãe pagou o restante. Portanto, a mãe de João pagou $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ **do novo valor**. Logo, o valor pago pela mãe de João foi:

$$\frac{2}{3}\ \textbf{do}\ (\textbf{novo valor})$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{\mathbf{93,75}}{\mathbf{100}}\boldsymbol{P}$$

$$= \frac{187,5}{300}P$$

A parte paga pela mãe de João corresponde a $\frac{187,5}{300}$ do valor original da prestação. Como não temos essa fração nas alternativas, devemos encontrar uma fração equivalente a $\frac{187,5}{300}$.

Primeiro, vamos remover a parte decimal presente no numerador, multiplicando o numerador e o denominador por 2:

$$\frac{187,5}{300} = \frac{375}{600}$$

Ao dividir o numerador e o denominador por 25, temos:

$$\frac{375}{600} = \frac{15}{24}$$

Ao dividir o numerador e o denominador por 3, temos:

$$\frac{15}{24} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}$$

Portanto, a parte paga pela mãe de João corresponde a $\frac{5}{8}$ do valor original da prestação.

Gabarito: Letra D.

10. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2014) Os irmãos Ana e Luís ganharam de seus pais quantias iguais. Ana guardou $\frac{1}{6}$ do que recebeu e gastou o restante, enquanto seu irmão gastou $\frac{1}{4}$ do valor recebido, mais R$ 84,00. Se Ana e Luís gastaram a mesma quantia, quantos reais Ana guardou?

a) 12,00

b) 24,00

c) 72,00

d) 132,00

e) 144,00

Comentários:

Suponha que Ana e Luís ganharam cada um uma quantia Q.

"Ana guardou 1/6 do que recebeu e gastou o restante."

Logo, a **quantia gasta por Ana** é:

$$Q - \frac{1}{6}Q = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}Q$$

"...seu irmão gastou 1/4 do valor recebido, mais R$ 84,00."

Logo, o **valor gasto pelo irmão** de Ana é:

$$\frac{1}{4}Q + 84$$

"...Ana e Luís gastaram a mesma quantia..."

Temos, portanto, a seguinte igualdade:

$$\frac{5}{6}Q = \frac{1}{4}Q + 84$$

$$\frac{5}{6}Q - \frac{1}{4}Q = 84$$

$$\frac{10-3}{12}Q = 84$$

$$\frac{7}{12}Q = 84$$

$$Q = 84 \times \frac{12}{7}$$

$$\boldsymbol{Q = 144}$$

Muita atenção neste momento. A quantia que cada um recebeu é **R$ 144,00**. A questão pergunta sobre o **valor guardado por Ana**, que corresponde a $\frac{1}{6}Q$. Portanto, o valor guardado foi:

$$\frac{1}{6} \times 144 = R\$\ 24{,}00$$

Gabarito: Letra B.

11.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Em um site de compras coletivas, foi anunciada uma oferta para um jantar em um restaurante de luxo. As regras para utilização dos cupons eram as seguintes:

• Limite de uso de 1 cupom por pessoa, gasto em uma única visita.

• Não é válido para entrega ou viagem.

• Validade: de segunda a sexta-feira, dentro de uma determinada semana.

Sabendo-se que foram vendidos N cupons e que, na semana destinada à utilização da oferta, metade dos compradores compareceram ao restaurante na segunda-feira; um terço do restante foi na terça-feira; na quarta-feira, a quarta parte do que faltava; na quinta-feira, a quinta parte do restante; e que, na sexta-feira, último dia da oferta, restavam menos de 20 clientes para utilizar o cupom.

Se todos os compradores utilizaram o cupom, o número de compradores que foram atendidos na sexta-feira foi

a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

e) 18

Comentários:

Temos um total de **N** cupons. Vamos resolver a questão por partes.

"Metade dos compradores compareceram ao restaurante na segunda-feira..."

- **Cupons utilizados na segunda: $\frac{1}{2}N$.**
- Cupons restantes: $N - \frac{1}{2}N = \frac{1}{2}N$

"...um terço do restante foi na terça-feira..."

- **Cupons utilizados na terça:**

$$\frac{1}{3}\text{de}\frac{1}{2}N = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}N = \frac{1}{6}N.$$

- Cupons restantes:

$$\frac{1}{2}N - \frac{1}{6}N = \frac{3-1}{6}N = \frac{2}{6}N = \frac{1}{3}N.$$

"...na quarta-feira, a quarta parte do que faltava..."

- **Cupons utilizados na quarta:**

$$\frac{1}{4}\text{de}\frac{1}{3}N = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}N = \frac{1}{12}N.$$

- Cupons restantes:

$$\frac{1}{3}N - \frac{1}{12}N = \frac{4-1}{12}N = \frac{3}{12}N = \frac{1}{4}N.$$

"...na quinta-feira, a quinta parte do restante..."

- **Cupons utilizados na quinta:**

$$\frac{1}{5}\text{de}\frac{1}{4}N = \frac{1}{5}\times\frac{1}{4}N = \frac{1}{20}N.$$

- Cupons restantes:

$$\frac{1}{4}N - \frac{1}{20}N = \frac{5-1}{20}N = \frac{4}{20}N = \frac{1}{5}N.$$

"...na sexta-feira, último dia da oferta, restavam menos de 20 clientes para utilizar o cupom. Se todos os compradores utilizaram o cupom..."

Como todos os compradores utilizaram o cupom, isso significa que na sexta-feira foram utilizados todos os cupons que restaram na quinta-feira.

- **Cupons utilizados na sexta:** $\frac{1}{5}N$.
- Cupons restantes: 0.

Temos a informação de que na sexta-feira restavam menos de 20 clientes. Isso significa que:

$$\frac{1}{5}N < 20$$

$$N < 5\times 20$$

$$N < 100$$

E agora, professor? O que fazemos com essa informação?

Note que o número de cupons utilizados ao longo da semana é:

$$\frac{1}{2}N \quad \frac{1}{6}N \quad \frac{1}{12}N \quad \frac{1}{20}N \quad \frac{1}{5}N$$

Esses números de cupons **devem ser valores inteiros**. Logo, N deve ser divisível simultaneamente por 2, 6, 12, 20 e 5. Isso significa que N deve ser múltiplo simultaneamente de 2, 6, 12, 20 e 5.

Note que o **menor múltiplo comum** (**MMC**) entre **2, 6, 12, 20 e 5** é **60**. Isso significa que, para que o número de cupons seja inteiro, N poderia ser qualquer múltiplo de 60: 60, 120, 180...

Observe, porém, que $N < 100$. Com essa informação, temos que necessariamente $N = 60$.

Logo, o número de compradores que foram atendidos na sexta-feira foi:

$$\frac{1}{5}N = \frac{1}{5}\times 60 = 12$$

Gabarito: Letra B.

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Razão e proporção

1.(CESGRANRIO/BR/2013) Carlos foi de ônibus de casa para o trabalho, e a viagem demorou 54 minutos. Na volta, pegou o metrô, e o tempo de viagem foi reduzido em 12 minutos. Nesse dia, qual foi a razão entre os tempos gastos por Carlos para ir ao trabalho e dele voltar, nessa ordem?

a) $\frac{9}{7}$

b) $\frac{8}{7}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{9}{2}$

Comentários:

O tempo de **ida** é de **54 minutos**.

O tempo de **volta** foi reduzido em 12 minutos. Logo, o tempo de volta é 54 − 12 = **42 minutos**.

A razão entre os tempos de **ida** e de **volta** é:

$$\frac{\text{Tempo de ida}}{\text{Tempo de volta}} = \frac{\mathbf{54}}{\mathbf{42}}$$

Ao simplificar o numerador e o denominador por 6, obtém-se:

$$\frac{\text{Tempo de ida}}{\text{Tempo de volta}} = \frac{9}{7}$$

Gabarito: Letra A.

2.(CESGRANRIO/FINEP/2014) Maria tinha 450 mL de tinta vermelha e 750 mL de tinta branca. Para fazer tinta rosa, ela misturou certa quantidade de tinta branca com os 450 mL de tinta vermelha na proporção de duas partes de tinta vermelha para três partes de tinta branca.

Feita a mistura, quantos mL de tinta branca sobraram?

a) 75

b) 125

c) 175

d) 375

e) 675

Comentários:

A mistura foi realizada na proporção de **duas partes** de **tinta vermelha** para **três partes** de **tinta branca**.

Sabemos que na mistura foram utilizados 450ml de tinta vermelha. Considere que o total de tinta branca utilizada na mistura foi B. Nesse caso, temos:

$$\frac{450 \text{ ml}}{B} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

$$2B = 3 \times 450\text{ml}$$

$$B = \frac{1350 \text{ ml}}{2} = 675 \text{ ml}$$

Como originalmente Marta tinha 750 ml de tinta branca, a quantidade de tinta branca que restou é:

$$750 \text{ ml} - 675 \text{ ml} = 75\text{ml}$$

Gabarito: Letra A.

3.(CESGRANRIO/BR/2013) Um pipoqueiro observou que, de cada 12 saquinhos de pipoca que vendia, 5 eram de pipoca salgada e os restantes, de pipoca doce.

Considerando-se essa proporção, se ele vender 96 saquinhos de pipoca, quantos serão de pipoca doce?

a) 8

b) 20

c) 40

d) 48

e) 56

Comentários:

Suponha que o pipoqueiro vendeu S **pipocas salgadas** e D **pipocas doces**.

O total de pipocas vendidas é 96. Logo:

$$S + D = 96$$

A cada **12 pipocas vendidas**, **5 eram salgadas** e **7** (restantes) **eram doces**. Portanto:

$$\frac{S}{D} = \frac{5}{7}$$

$$S = \frac{5}{7}D$$

A questão pergunta quantas pipocas doces foram vendidas. Substituindo $S = \frac{5}{7}D$ em $S + D = 96$, temos:

$$S + D = 96$$

$$\frac{5}{7}D + D = 96$$

$$\frac{5+7}{7}D = 96$$

$$\frac{12}{7}D = 96$$

$$D = 96 \times \frac{7}{12} = 56$$

Logo, foram vendidos **56 saquinhos de pipoca doce**.

Gabarito: Letra E.

4.(CESGRANRIO/BR/2013) Com a expansão do setor hoteleiro no Rio de Janeiro, novos postos de trabalho serão criados. Estima-se que, de cada 7 novas vagas, 4 serão no setor de alimentação (garçons, copeiras, cozinheiros, por exemplo), e 3, para camareiras.

Considerando-se essa proporção, um hotel que contratar 24 camareiras contratará, também, quantos profissionais para o setor de alimentação?

a) 18

b) 26

c) 30

d) 32

e) 36

Comentários:

De cada 7 novas vagas no setor hoteleiro, **4 serão no setor de alimentação e 3 serão para camareiras**. Logo:

$$\frac{\text{Contratados alimentação}}{\text{Contratadas camareiras}} = \frac{4}{3}$$

Considerando-se essa proporção, se um hotel contratar **24 camareiras**, temos:

$$\frac{\text{Contratados alimentação}}{\mathbf{24}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Contratados alimentação} = \frac{4}{3} \times 24$$

$$\text{Contratados alimentação} = 32$$

Gabarito: Letra D.

5. (CESGRANRIO/BR/2015) Uma empresa substituiu seus monitores antigos no formato fullscreen, cuja proporção entre a largura e a altura da tela é de 4:3, por monitores novos no formato widescreen, com proporção entre largura e altura dada por 16:9. Os monitores novos e antigos têm a mesma altura.

A razão entre a largura do modelo novo e a largura do modelo antigo é dada por

a) 1:4

b) 3:4

c) 4:3

d) 4:9

e) 9:4

Comentários:

Suponha que a altura dos dois monitores é A. Considere também que a **largura do modelo novo é L_N** e a **largura do modelo antigo é L_A**. Nesse caso, a questão pergunta pela razão $\frac{L_N}{L_A}$.

Para o **monitor antigo**, a proporção entre a largura e a altura da tela é de 4:3. Logo:

$$\frac{L_A}{A} = \frac{4}{3} \rightarrow L_A = \frac{4}{3}A$$

Para o **monitor novo**, a proporção entre a largura e a altura da tela é de 16:9. Logo:

$$\frac{L_N}{A} = \frac{16}{9} \rightarrow L_N = \frac{16}{9}A$$

A razão entre a largura do modelo novo e a largura do modelo antigo é dada por:

$$\frac{L_N}{L_A} = \frac{\frac{16}{9}A}{\frac{4}{3}A} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}} = \frac{16}{9} \times \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \frac{4}{3}$$

Gabarito: Letra C.

6.(CESGRANRIO/BB/2012) Numa pesquisa sobre acesso à internet, três em cada quatro homens e duas em cada três mulheres responderam que acessam a rede diariamente. A razão entre o número de mulheres e de homens participantes dessa pesquisa é, nessa ordem, igual a $\frac{1}{2}$.

Que fração do total de entrevistados corresponde àqueles que responderam que acessam a rede todos os dias?

a) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{8}{11}$

c) $\frac{13}{18}$

d) $\frac{17}{24}$

e) $\frac{25}{36}$

Comentários:

Considere que na pesquisa temos H homens e M mulheres.

Como três a cada quatro homens acessam a rede diariamente, o **número de homens que acessam a rede diariamente** é $\frac{3}{4}H$.

Como duas a cada três mulheres acessam a rede diariamente, o **número de mulheres que acessam a rede diariamente** é $\frac{2}{3}M$.

A razão entre o número de mulheres e de homens é $\frac{1}{2}$. Logo, $\boldsymbol{\frac{M}{H} = \frac{1}{2}}$.

A questão pergunta a **fração do total de entrevistados** que corresponde àqueles que responderam que acessam a rede diariamente. Logo, devemos determinar o seguinte valor:

$$\frac{\text{Total de homens e mulheres que acessam a rede diariamente}}{\text{Total de homens e mulheres}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}H + \frac{2}{3}M}{H + M}$$

Para determinar o valor de $\frac{\frac{3}{4}H+\frac{2}{3}M}{H+M}$, devemos escrever tudo em função de H ou tudo em função de M. Como $\frac{M}{H} = \frac{1}{2}$, temos $\boldsymbol{H = 2M}$. Substituindo **essa informação** em $\frac{\frac{3}{4}H+\frac{2}{3}M}{H+M}$, temos:

$$\frac{\frac{3}{4}H + \frac{2}{3}M}{H + M}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\boldsymbol{2M} + \frac{2}{3}M}{\boldsymbol{2M} + M}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}M + \frac{2}{3}M}{3M}$$

$$= \frac{\frac{9+4}{6}M}{3M}$$

$$= \frac{\frac{13}{6}}{3} = \frac{13}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{18}$$

Gabarito: Letra C.

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Proporcionalidade

1.(CESGRANRIO/ANP/2016) Uma determinada solução é a mistura de 3 substâncias, representadas pelas letras P, Q e R. Uma certa quantidade dessa solução foi produzida, e sua massa é igual à soma das massas das três substâncias P, Q e R, usadas para compô-la. As massas das substâncias P, Q e R dividem a massa da solução em partes diretamente proporcionais a 3, 5 e 7, respectivamente.

A que fração da massa da solução produzida corresponde a soma das massas das substâncias P e Q utilizadas na produção?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{12}{35}$

d) $\frac{8}{15}$

e) $\frac{10}{21}$

Comentários:

As massas das substâncias P, Q e R são proporcionais a 3, 5 e 7.

Temos que 3 + 5 + 7 = 15. Logo, **a cada 15 partes da solução**, temos **3 partes de P**, **5 partes de Q** e **7 partes de R**.

Tomando em conjunto as **substâncias P e Q**, temos 3 + 5 = **8 partes a cada 15 partes da solução**.

Logo, a soma das massas das substâncias P e Q com relação ao total da solução corresponde a $\mathbf{\frac{8}{15}}$.

Gabarito: Letra D.

2. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Uma herança no valor de R$ 168.000,00 foi dividida entre quatro irmãos em partes diretamente proporcionais às suas respectivas idades. Se as idades, em número de anos, são 32, 30, 27 e 23, a parte que coube ao mais novo dos irmãos é, em reais, igual a

a) 23.000

b) 27.600

c) 28.750

d) 32.200

e) 34.500

Comentários:

Suponha que os valores recebidos pelos irmãos de idades 32, 30, 27 e 23 sejam, respectivamente, a, b, c e d.

Como a herança foi dividida em partes proporcionais às idades, temos:

$$\frac{a}{32} = \frac{b}{30} = \frac{c}{27} = \frac{d}{23} = k$$

A soma dos valores recebidos é R$ 168.000. Logo, $a + b + c + d = 168.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a}{32} = \frac{b}{30} = \frac{c}{27} = \frac{d}{23}$, temos:

$$\frac{a}{32} = \frac{b}{30} = \frac{c}{27} = \frac{d}{23} = \frac{a + b + c + d}{32 + 30 + 27 + 23}$$

$$\frac{a}{32} = \frac{b}{30} = \frac{c}{27} = \frac{d}{23} = \frac{168.000}{112}$$

$$\boxed{\frac{a}{32} = \frac{b}{30} = \frac{c}{27} = \frac{d}{23} = 1500}$$

A parte que corresponde ao mais novo é d. Temos:

$$\frac{d}{23} = 1500$$

$$d = 1500 \times 23$$

$$d = 34.000$$

Gabarito: Letra E.

3.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) João tem uma caixa que contém 30 bolas, sendo 9 azuis, 15 vermelhas e 6 amarelas. Mário tem uma caixa que contém 50 bolas coloridas. Considerando a proporção de cores e bolas existentes na caixa de João, tem-se que a caixa de Mario contém bolas azuis, vermelhas e amarelas nas respectivas quantidades

a) 10, 15 e 25.

b) 10, 25 e 15.

c) 15, 25 e 10.

d) 25, 10 e 15.

e) 25, 15 e 10.

Comentários:

Na caixa de Mário, que contém 50 bolas, as quantidades de bolas azuis (z), vermelhas (v) e amarelas (a) devem ser diretamente proporcionais a 9, 15 e 6. Logo:

$$\frac{z}{9}=\frac{v}{15}=\frac{a}{6}=k$$

A soma das bolas da caixa de Mário é 50. Logo, $z+v+a=50$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{z}{9}=\frac{v}{15}=\frac{a}{6}$, temos:

$$\frac{z}{9}=\frac{v}{15}=\frac{a}{6}=\frac{z+v+a}{9+15+6}$$

$$\frac{z}{9}=\frac{v}{15}=\frac{a}{6}=\frac{50}{30}$$

$$\frac{z}{9}=\frac{v}{15}=\frac{a}{6}=\frac{5}{3}$$

Temos que:

$$\frac{z}{9}=\frac{5}{3}\rightarrow z=9\times\frac{5}{3}\rightarrow z=15$$

$$\frac{v}{15}=\frac{5}{3}\rightarrow v=15\times\frac{5}{3}\rightarrow v=25$$

$$\frac{a}{6}=\frac{5}{3}\rightarrow a=6\times\frac{5}{3}\rightarrow a=10$$

Portanto, as quantidades de bolas azuis, vermelhas e amarelas são, respectivamente, 15, 25 e 10.

Gabarito: Letra C.

4. (CESGRANRIO/BB/2015) Aldo, Baldo e Caldo resolvem fazer um bolão para um concurso da Mega-Sena. Aldo contribui com 12 bilhetes, Baldo, com 15 bilhetes e Caldo, com 9 bilhetes. Eles combinaram que, se um dos bilhetes do bolão fosse sorteado, o prêmio seria dividido entre os três proporcionalmente à quantidade de bilhetes com que cada um contribuiu. Caldo também fez uma aposta fora do bolão e, na data do sorteio, houve 2 bilhetes ganhadores, sendo um deles o da aposta individual de Caldo, e o outro, um dos bilhetes do bolão.

Qual a razão entre a quantia total que Caldo recebeu e a quantia que Baldo recebeu?

a) 0,8

b) 1,5

c) 2

d) 2,5

e) 3

Comentários:

Considere que o **prêmio total** é $\boldsymbol{P}$. O valor total é dividido entre 2 bilhetes ganhadores, sendo um deles o da **aposta individual de Caldo** e o outro um dos bilhetes do **bolão**.

Observe, portanto, que **Caldo**, antes mesmo de obter a sua quantia relativa ao bolão, obteve $\frac{P}{2}$.

A outra metade do prêmio total deve ser repartido entre Aldo, Baldo e Caldo em partes proporcionais a 12, 15 e 9. Sejam essas partes, respectivamente, a, b e c. Nesse caso, temos:

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{9} = k$$

A soma das partes obtidas com o bolão corresponde à **metade** do **prêmio total**. Logo, $a + b + c = \frac{P}{2}$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{9}$, temos:

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{9} = \frac{a+b+c}{12+15+9}$$

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{9} = \frac{\frac{P}{2}}{36}$$

$$\boxed{\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{9} = \frac{P}{72}}$$

Temos que:

$$\frac{b}{15} = \frac{P}{72} \rightarrow b = \frac{P}{72} \times 15 \rightarrow b = \frac{5}{24}P$$

$$\frac{c}{9} = \frac{P}{72} \rightarrow c = \frac{P}{72} \times 9 \rightarrow c = \frac{1}{8}P$$

Note, portanto, que **Baldo recebeu $\boldsymbol{b = \frac{5}{24}P}$**. Por outro lado, Caldo recebeu não só a parte c do bolão, mas também a metade do prêmio que não foi contabilizada no bolão. Logo, **Caldo recebeu**:

$$\frac{P}{2}+c=\frac{P}{2}+\frac{P}{8}=\frac{4P+P}{8}=\boldsymbol{\frac{5}{8}P}$$

A razão entre a quantia total que Caldo recebeu e a quantia que Baldo recebeu é:

$$\frac{\boldsymbol{\frac{5}{8}P}}{\boldsymbol{\frac{5}{24}P}}=\frac{5}{8}\times\frac{24}{5}=3$$

Gabarito: Letra E.

5. (CESGRANRIO/EPE/2014) Os catadores de uma cooperativa recolheram 14.000 latas de alumínio. Essas latas eram, exclusivamente, de cerveja, de sucos ou de refrigerantes. De cada 5 latas recolhidas, 2 eram de cerveja e, para cada 7 latas de refrigerantes, havia 3 latas de suco.

Do total de latas recolhidas pelos catadores, quantas eram de suco?

a) 2.000

b) 2.520

c) 2.800

d) 5.600

e) 5.880

Comentários:

Note que:

- De cada **5 latas recolhidas**, 2 são de cerveja e as 3 restantes são de suco ou de refrigerante.

Mantendo a proporção, poderíamos dizer:

- De cada **10 latas recolhidas**, **4 são de cerveja** e as 6 restantes são de suco ou de refrigerante.
- De cada **20 latas recolhidas**, **8 são de cerveja** e as 12 restantes são de suco ou de refrigerante.
- De cada **30 latas recolhidas**, **12 são de cerveja** e as 18 restantes são de suco ou de refrigerante.
- De cada **40 latas recolhidas**, **16 são de cerveja** e as 24 restantes são de suco ou de refrigerante.
- De cada **50 latas recolhidas**, **20 são de cerveja** e as **30 restantes são de suco ou de refrigerante**.

Observe que o enunciado nos diz que para cada 7 latas de refrigerantes, havia 3 latas de suco. Podemos dizer que:

- Dentre 10 latas de suco ou refrigerante, 7 são de refrigerante e 3 são de suco.
- Dentre 20 latas de suco ou refrigerante, 14 são de refrigerante e 6 são de suco.
- Dentre **30 latas de suco ou refrigerante**, **21 são de refrigerante** e **9 são de suco.**

Perceba, então, que:

- De cada **50 latas recolhidas**, **20 são de cerveja** e as **30 restantes são de suco ou de refrigerante**, dentre as quais **21 são de refrigerante** e **9 são de suco**.

Temos um total de 14.000 latas. A quantidade de latas de cerveja (c), refrigerante (r) e suco (s) são proporcionais a **20, 21 e 9**. Logo:

$$\frac{c}{20} = \frac{r}{21} = \frac{s}{9} = k$$

A totalidade das latas é de 14.000. Logo, $c + r + s = 14.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{c}{20} = \frac{r}{21} = \frac{s}{9}$, temos:

$$\frac{c}{20} = \frac{r}{21} = \frac{s}{9} = \frac{c + r + s}{20 + 21 + 9}$$

$$\frac{c}{20} = \frac{r}{21} = \frac{s}{9} = \frac{14.000}{50}$$

$$\frac{c}{20} = \frac{r}{21} = \frac{s}{9} = 280$$

Temos que:

$$\frac{s}{9} = 280$$

$$s = 9 \times 280 = 2.520$$

Gabarito: Letra B.

6. (CESGRANRIO/BASA/2015) Em uma empresa, o total de descontos que incidem sobre o salário bruto de cada funcionário é proporcional ao valor desse mesmo salário bruto. Um funcionário F_1 tem salário líquido igual a S_1, calculado após a incidência do total de descontos igual a x_1 reais. Um funcionário F_2 tem salário líquido igual a S_2, calculado após a incidência do total de descontos igual a x_2 reais.

O total de descontos x_2 é tal que

a) $x_2 = \frac{S_1+x_1}{S_2+x_2} \cdot x_1$.

b) $x_2 = \frac{S_2+x_2}{S_1+x_1} \,.\, (x_1 + x_2)$.

c) $x_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot x_1$.

d) $x_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot x_1$.

e) $x_2 = \frac{S_1+x_1}{S_2+x_2} \,.\, (x_1 + x_2)$.

Comentários:

O **total de descontos** é **diretamente proporcional** ao valor do **salário bruto**. Logo:

$$\frac{\text{descontos}}{\text{salário bruto}} = k$$

Note que o **salário bruto** corresponde ao **salário líquido** **somado** aos **descontos**.

- Para o funcionário F_1, temos o desconto x_1 e o **salário bruto** $\boldsymbol{S_1 + x_1}$;
- Para o funcionário F_2, temos o desconto x_2 e o **salário bruto** $\boldsymbol{S_2 + x_2}$.

Logo, temos a seguinte proporção:

$$\frac{x_1}{S_1 + x_1} = \frac{x_2}{S_2 + x_2} = k$$

A partir da primeira igualdade, temos:

$$\frac{x_2}{S_2 + x_2} = \frac{x_1}{S_1 + x_1}$$

Realizando a "**multiplicação cruzada**", temos:

$$x_2 \times (S_1 + x_1) = x_1 \times (S_2 + x_2)$$

$$S_1x_2 + x_1x_2 = S_2x_1 + x_1x_2$$

$$S_1x_2 = S_2x_1$$

$$x_2 = \frac{S_2}{S_1}x_1$$

Gabarito: Letra D.

7.(CESGRANRIO/ANP/2016) Considere um gás ideal que passa por uma transformação durante a qual sua pressão e o volume que ocupa podem variar, mas sua temperatura é sempre mantida constante. A Lei de Boyle-Mariotte garante que, nessas circunstâncias, o produto entre a pressão P e o volume V ocupado pelo gás é constante. Quando o gás considerado ocupa o volume correspondente a 18ml, a sua pressão é de 3 atm (atmosferas).

Se a medida do volume ocupado pelo gás for de 2,25ml, então, sua pressão, em atmosferas, medirá

a) 33,75

b) 31,50

c) 24,00

d) 13,50

e) 12,00

Comentários:

Pessoal, o **produto** entre a **pressão P** e o **volume V** ocupado pelo gás é **constante**, isto é, pressão e volume são grandezas **inversamente proporcionais**.

$$(\text{Pressão}) \times (\text{Volume}) = k$$

Temos uma situação em que um gás ocupa um volume de **18ml** com uma pressão de **3atm**. Considere que esse gás, quanto apresentar o volume **2,25ml**, apresente a pressão $\boldsymbol{P_2}$. Nesse caso:

$$3\text{atm} \times 18\text{ml} = \text{P}_2 \times 2{,}25\text{ml}$$

$$P_2 = \frac{3\text{atm} \times 18\text{ml}}{2{,}25\text{ml}}$$

$$P_2 = 24 \text{ atm}$$

Gabarito: Letra C.

8. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) A Figura mostra duas rodas dentadas que estão acopladas. Sabe-se que, nessa situação, o número de dentes é inversamente proporcional ao número de voltas dadas por cada roda dentada.

Quando a menor roda (com 6 dentes) der 108 voltas completas, a maior (com 9 dentes) dará um número de voltas completas igual a

a) 18

b) 54

c) 72

d) 162

e) 216

Comentários:

O **número de dentes** é **inversamente proporcional** ao **número de voltas**. Logo, **o produto das duas grandezas é constante**:

$$(\text{Número de dentes}) \times (\text{Número de voltas}) = k$$

Temos que a roda de 6 dentes dá 108 voltas. Suponha que a roda com 9 dentes dá V voltas. Nesse caso:

$$6 \times 108 = 9 \times V$$

$$V = \frac{6 \times 108}{9}$$

$$V = 72 \text{ voltas}$$

Gabarito: Letra C.

9. (CESGRANRIO/BR/2012) Seja P uma grandeza diretamente proporcional a Q e inversamente proporcional a R. Sabe-se que P vale 2 quando Q vale $\frac{2}{7}$ e R vale $\frac{9}{14}$.

Quanto vale P quando Q vale $\sqrt{80}$ e R vale $\sqrt{180}$?

a) 3.

b) 2.

c) $\sqrt{2}$.

d) $\frac{1}{2}$.

e) $\frac{1}{3}$.

Comentários:

P é uma grandeza **diretamente proporcional** a **Q** e **inversamente proporcional** a **R**. Isso significa que **P** é **diretamente proporcional** a **Q** e a $\frac{1}{R}$. Logo:

$$\frac{P}{Q \times \frac{1}{R}} = k$$

Sabe-se que **P vale 2** quando **Q vale $\frac{2}{7}$** e **R vale $\frac{9}{14}$**. Suponha que a grandeza **P valha x** quando **Q vale $\sqrt{80}$** e **R vale $\sqrt{180}$**. Nesse caso:

$$\frac{2}{\frac{2}{7} \times \frac{1}{\frac{9}{14}}} = \frac{x}{\sqrt{80} \times \frac{1}{\sqrt{180}}}$$

$$\frac{2}{\frac{2}{7}\times\frac{14}{9}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{80}{180}}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{1}\times\frac{2}{9}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{8}{18}}}$$

$$\frac{9}{2} = \frac{x}{\sqrt{\frac{4}{9}}}$$

$$x = \frac{9}{2}\times\frac{2}{3}$$

$$x = 3$$

Gabarito: Letra A.

10. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2014) Aldo e Baldo foram a uma pizzaria sem dinheiro algum e combinaram com o gerente que pagariam o que consumissem lavando pratos. Aldo consumiu R$ 62,00 e Baldo consumiu R$ 93,00. Aldo era rápido na lavagem dos pratos e, a cada 5 pratos que Baldo lavava, Aldo lavava 7 pratos. Ao fim do serviço, Aldo e Baldo discutiram porque Aldo disse sentir-se injustiçado, visto que o justo teria sido dividirem a conta proporcionalmente ao consumo de cada um e de forma inversamente proporcional a quantos pratos cada um lavou.

O valor que caberia a Aldo, nos termos da divisão que ele considerou justa, em reais, corresponde a

a) 45,00

b) 50,00

c) 60,00

d) 62,00

e) 75,50

Comentários:

Vamos considerar que a conta foi dividida **proporcionalmente** ao **consumo** de cada um e de forma **inversamente proporcional** a **quantos pratos cada um lavou**.

Suponha que o valor que cabe a **Aldo é a** e o valor que cabe a **Baldo é b**. Essas partes são **diretamente proporcionais** a **62 e 93** e **inversamente proporcionais** a **7 e 5**, respectivamente.

Temos a seguinte proporção:

$$\frac{a}{62 \times \frac{1}{7}} = \frac{b}{93 \times \frac{1}{5}} = k$$

$$\frac{a}{\frac{62}{7}} = \frac{b}{\frac{93}{5}} = k$$

O **total da conta** corresponde ao total consumido, que é 62 + 93 = 155. Logo, as partes que caberia a Aldo e a Baldo são tais que $a + b = R\$\ 155$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{62\times\frac{1}{7}} = \frac{b}{93\times\frac{1}{5}}$, temos:

$$\frac{a}{\frac{62}{7}} = \frac{b}{\frac{93}{5}} = \frac{a+b}{\frac{62}{7}+\frac{93}{5}}$$

$$\frac{a}{\frac{62}{7}} = \frac{b}{\frac{93}{5}} = \frac{155}{\frac{310+651}{35}}$$

$$\frac{a}{\frac{62}{7}} = \frac{b}{\frac{93}{5}} = \frac{155}{\frac{961}{35}}$$

$$\frac{a}{\frac{62}{7}} = \frac{b}{\frac{93}{5}} = 155 \times \frac{35}{961}$$

$$\frac{a}{\frac{62}{7}} = \frac{b}{\frac{93}{5}} = (5 \times 31) \times \frac{7 \times 5}{(31 \times 31)}$$

$$\boxed{\frac{a}{\frac{62}{7}} = \frac{b}{\frac{93}{5}} = \frac{5 \times 5 \times 7}{31}}$$

Logo, o valor de a é tal que:

$$\frac{a}{\frac{62}{7}} = \frac{5 \times 5 \times 7}{31}$$

$$a = \frac{5 \times 5 \times 7}{31} \times \frac{62}{7}$$

$$a = \frac{5 \times 5 \times 7}{31} \times \frac{2 \times 31}{7}$$

$$a = 5 \times 5 \times 2$$

$$a = 50$$

Gabarito: Letra B.

11. (CESGRANRIO/IBGE/2014) Em um certo país, cada aposentado ganha uma quantia diretamente proporcional à raiz quadrada do número de anos que trabalhou. Urbano aposentou-se hoje nesse país e receberá uma aposentadoria de X unidades monetárias. Se trabalhasse mais 13 anos, sua aposentadoria aumentaria em 1000 unidades monetárias e, no entanto, se tivesse se aposentado há 11 anos, receberia 1000 unidades monetárias a menos.

Para que as afirmações acima estejam todas corretas, o valor de X deve ser

a) 2000

b) 3000

c) 4000

d) 5000

e) 6000

Comentários:

Pessoal, essa questão foge bastante do nível de dificuldade esperado para questões envolvendo proporcionalidade.

O valor recebido por um aposentado é **diretamente proporcional** à raiz quadrada do número de anos que trabalhou. Logo:

$$\frac{Valor\ recebido}{\sqrt{Anos\ trabalhados}} = k$$

Considere que Urbano, aposentando-se hoje, tenha trabalhado A anos. Temos que Urbano:

- Trabalhando A anos, recebe X;
- Trabalhando $A + 13$ anos, recebe $X + 1000$;
- Trabalhando $A - 11$ anos, recebe $X - 1000$.

Tem-se, portanto, a seguinte proporção:

$$\frac{X}{\sqrt{A}} = \frac{X + 1000}{\sqrt{A + 13}} = \frac{X - 1000}{\sqrt{A - 11}} = k$$

Primeira Solução

Como as alternativas trazem valores inteiros, vamos assumir que A, $A + 13$ e $A - 11$ são quadrados perfeitos, isto é, a raiz desses números são números naturais.

Devemos, então, encontrar um quadrado perfeito A que:

- Ao somar 13 unidades ($A + 13$), temos também um quadrado perfeito;
- Ao subtrair 11 unidades ($A - 11$), temos também um quadrado perfeito.

Os primeiros quadrados perfeitos são:

$$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2 \quad 6^2 \quad 7^2 \quad 8^2$$

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36 \quad 49 \quad 64$$

Note que ao somar 13 ao número 36 obtém-se 49, que é um quadrado perfeito. Quando subtraímos 11 de 36, obtém-se 25, que também é um quadrado perfeito. Logo, o quadrado perfeito procurado é $A = 36$.

Obtido o valor de A, a proporção fica assim:

$$\frac{X}{\sqrt{36}} = \frac{X + 1000}{\sqrt{36 + 13}} = \frac{X - 1000}{\sqrt{36 - 11}} = k$$

$$\frac{X}{6} = \frac{X + 1000}{7} = \frac{X - 1000}{5} = k$$

Realizando a "multiplicação cruzada" em $\frac{X}{6} = \frac{X+1000}{7}$, temos:

$$7X = 6 \times (X + 1000)$$

$$7X = 6X + 6000$$

$$X = 6000$$

O **gabarito**, portanto, é **letra E**.

Segunda Solução

Lembre-se que temos a seguinte proporção:

$$\frac{X}{\sqrt{A}} = \frac{X + 1000}{\sqrt{A + 13}} = \frac{X - 1000}{\sqrt{A - 11}} = k$$

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" em $\frac{X+1000}{\sqrt{A+13}} = \frac{X-1000}{\sqrt{A-11}}$, temos:

$$\frac{X}{\sqrt{A}} = \frac{\boldsymbol{X + 1000}}{\boldsymbol{\sqrt{A + 13}}} = \frac{\boldsymbol{X - 1000}}{\boldsymbol{\sqrt{A - 11}}} = \frac{(\boldsymbol{X + 1000}) + (\boldsymbol{X - 1000})}{\boldsymbol{\sqrt{A + 13}} + \boldsymbol{\sqrt{A - 11}}}$$

$$\frac{X}{\sqrt{A}} = \frac{X+1000}{\sqrt{A+13}} = \frac{X-1000}{\sqrt{A-11}} = \frac{2X}{\sqrt{A+13}+\sqrt{A-11}}$$

Realizando a "multiplicação cruzada" em $\frac{X}{\sqrt{A}} = \frac{2X}{\sqrt{A+13}+\sqrt{A-11}}$, temos:

$$X\left(\sqrt{A+13}+\sqrt{A-11}\right) = 2X\sqrt{A}$$

$$\left(\sqrt{A+13}+\sqrt{A-11}\right) = 2\sqrt{A}$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, temos:

$$\left(\sqrt{A+13}+\sqrt{A-11}\right)^2 = \left(2\sqrt{A}\right)^2$$

$$A+13+A-11+2\sqrt{A+13}\sqrt{A-11} = 4A$$

$$2\sqrt{A+13}\sqrt{A-11} = 2A-2$$

$$\sqrt{A+13}\sqrt{A-11} = A-1$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, temos:

$$(A+13)(A-11) = A^2-2A+1$$

$$A^2-11A+13A-143 = A^2-2A+1$$

$$2A-143 = -2A+1$$

$$4A = 144$$

$$A = 36$$

Isso significa que o tempo trabalhado por Urbano é de 36 anos. Agora que temos esse valor, podemos substituí-lo na proporção encontrada:

$$\frac{X}{\sqrt{A}} = \frac{X+1000}{\sqrt{A+13}} = \frac{X-1000}{\sqrt{A-11}} = k$$

$$\frac{X}{\sqrt{36}} = \frac{X+1000}{\sqrt{36+13}} = \frac{X-1000}{\sqrt{36-11}} = k$$

$$\frac{X}{6} = \frac{X+1000}{7} = \frac{X-1000}{5} = k$$

Realizando a "multiplicação cruzada" em $\frac{X}{6} = \frac{X+1000}{7}$, temos:

$$7X = 6 \times (X + 1000)$$

$$7X = 6X + 6000$$

$$X = 6000$$

Gabarito: Letra E.

Lista de Questões – CESGRANRIO

Frações

1.(CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Colocar uma barra sobre o período é uma das formas de representar uma dízima periódica: $0,\overline{3} = 0,333 \ldots$ A expressão $0,\overline{4} + 0,1\overline{6}$ é igual a:

a) $\frac{51}{100}$

b) $\frac{511}{1000}$

c) $\frac{11}{18}$

d) $\frac{14}{15}$

e) $\frac{5}{9}$

2. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Baldo usa uma calculadora que ignora todos os valores após a primeira casa decimal no resultado de cada operação realizada. Desse modo, quando Baldo faz $\frac{4}{3} \times \frac{6}{5}$, a calculadora mostra o resultado de 1,3 × 1,2 = 1,5. Portanto, há um erro no valor final de 0,1, pois $\frac{4}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{24}{15} = 1,6.$

Qual o erro da calculadora de Baldo para a expressão $\left(\left(\frac{10}{3} \times \frac{10}{3}\right)\right) \times 9$

a) 0

b) 1,3

c) 1,5

d) 2,8

e) 3,3

3.(CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Numa cidade, 4 em cada 15 pessoas são estrangeiras. Dessas pessoas estrangeiras, 3 em cada 8, são crianças.

Nessa cidade, as pessoas que NÃO são crianças estrangeiras correspondem a que fração da população?

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{9}{10}$

c) $\frac{16}{23}$

d) $\frac{14}{45}$

e) $\frac{43}{120}$

4.(CESGRANRIO/BNDES/2013) O Parque Estadual Serra do Conduru, localizado no Sul da Bahia, ocupa uma área de aproximadamente 9.270 hectares. Dessa área, 7 em cada 9 hectares são ocupados por florestas.

Qual é, em hectares, a área desse Parque NÃO ocupada por florestas?

a) 2.060

b) 2.640

c) 3.210

d) 5.100

e) 7.210

5. (CESGRANRIO/FINEP/2011) Utilize as informações abaixo para responder à questão.

Uma empresa desenvolveu postes de iluminação elétrica feitos de fibra de vidro, mais flexíveis e mais leves do que os postes tradicionalmente usados no Brasil. Cada poste de fibra de vidro tem 120 kg, o que corresponde a $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{8}$, respectivamente, das massas dos postes de madeira, aço e concreto.

Qual é, em kg, a massa de um poste de aço?

a) 80

b) 150

c) 180

d) 270

e) 360

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011)

Ação global contra petróleo caro

A Agência Internacional de Energia (AIE), formada por 28 países, anunciou ontem a liberação de 60 milhões de barris de petróleo de reservas estratégicas [...]. Os EUA vão entrar com metade do volume, [...] a Europa irá colaborar com $\frac{3}{10}$, e o restante virá de Austrália, Japão, Coreia e Nova Zelândia.

O Globo, Rio de Janeiro, p. 17. 24 jun. 2011. Adaptado.

Suponha que os países asiáticos (Japão e Coreia) contribuam juntos com 1,8 milhão de barris a mais do que a contribuição total dos países da Oceania (Austrália e Nova Zelândia).

Desse modo, quantos milhões de barris serão disponibilizados pelos países asiáticos?

a) 5,2

b) 5,6

c) 6,9

d) 7,4

e) 8,2

7. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Uma pesquisa feita em uma empresa constatou que apenas 1/6 de seus funcionários são mulheres, e que exatamente 1/4 delas são casadas.

De acordo com a pesquisa, nessa empresa, as mulheres que não são casadas correspondem a que fração de todos os seus funcionários?

a) 1/3

b) 1/4

c) 1/8

d) 15/24

e) 23/24

8. (CESGRANRIO/ANP/2016) Um grupo de jovens participou de uma pesquisa sobre tabagismo. Cinco em cada 7 jovens entrevistados declararam-se não fumantes. Dentre os jovens restantes, 3 em cada 4 afirmaram que fumam diariamente. Se 84 jovens entrevistados afirmaram fumar todos os dias, quantos jovens participaram da pesquisa?

a) 112

b) 280

c) 294

d) 392

e) 420

9. (CESGRANRIO/BB/2015) A mãe de João decidiu ajudá-lo a pagar uma das prestações referentes a uma compra parcelada. Ela solicitou a antecipação do pagamento e, por isso, a financeira lhe concedeu um desconto de 6,25% sobre o valor original daquela prestação. João pagou um terço do novo valor, e sua mãe pagou o restante.

A parte paga pela mãe de João corresponde a que fração do valor original da prestação?

a) $\frac{29}{48}$

b) $\frac{1}{24}$

c) $\frac{15}{16}$

d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{4}{25}$

10. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2014) Os irmãos Ana e Luís ganharam de seus pais quantias iguais. Ana guardou $\frac{1}{6}$ do que recebeu e gastou o restante, enquanto seu irmão gastou $\frac{1}{4}$ do valor recebido, mais R$ 84,00. Se Ana e Luís gastaram a mesma quantia, quantos reais Ana guardou?

a) 12,00

b) 24,00

c) 72,00

d) 132,00

e) 144,00

11. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Em um site de compras coletivas, foi anunciada uma oferta para um jantar em um restaurante de luxo. As regras para utilização dos cupons eram as seguintes:

• Limite de uso de 1 cupom por pessoa, gasto em uma única visita.

• Não é válido para entrega ou viagem.

• Validade: de segunda a sexta-feira, dentro de uma determinada semana.

Sabendo-se que foram vendidos N cupons e que, na semana destinada à utilização da oferta, metade dos compradores compareceram ao restaurante na segunda-feira; um terço do restante foi na terça-feira; na quarta-feira, a quarta parte do que faltava; na quinta-feira, a quinta parte do restante; e que, na sexta-feira, último dia da oferta, restavam menos de 20 clientes para utilizar o cupom.

Se todos os compradores utilizaram o cupom, o número de compradores que foram atendidos na sexta-feira foi

a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

e) 18

Gabarito – CESGRANRIO

Frações

1. LETRA C
2. LETRA D
3. LETRA B
4. LETRA A
5. LETRA C
6. LETRA C
7. LETRA C
8. LETRA D
9. LETRA D
10. LETRA B
11. LETRA B

Lista de Questões – CESGRANRIO

Razão e proporção

1.(CESGRANRIO/BR/2013) Carlos foi de ônibus de casa para o trabalho, e a viagem demorou 54 minutos. Na volta, pegou o metrô, e o tempo de viagem foi reduzido em 12 minutos. Nesse dia, qual foi a razão entre os tempos gastos por Carlos para ir ao trabalho e dele voltar, nessa ordem?

a) $\frac{9}{7}$

b) $\frac{8}{7}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{9}{2}$

2.(CESGRANRIO/FINEP/2014) Maria tinha 450 mL de tinta vermelha e 750 mL de tinta branca. Para fazer tinta rosa, ela misturou certa quantidade de tinta branca com os 450 mL de tinta vermelha na proporção de duas partes de tinta vermelha para três partes de tinta branca.

Feita a mistura, quantos mL de tinta branca sobraram?

a) 75

b) 125

c) 175

d) 375

e) 675

3.(CESGRANRIO/BR/2013) Um pipoqueiro observou que, de cada 12 saquinhos de pipoca que vendia, 5 eram de pipoca salgada e os restantes, de pipoca doce.

Considerando-se essa proporção, se ele vender 96 saquinhos de pipoca, quantos serão de pipoca doce?

a) 8

b) 20

c) 40

d) 48

e) 56

4.(CESGRANRIO/BR/2013) Com a expansão do setor hoteleiro no Rio de Janeiro, novos postos de trabalho serão criados. Estima-se que, de cada 7 novas vagas, 4 serão no setor de alimentação (garçons, copeiras, cozinheiros, por exemplo), e 3, para camareiras.

Considerando-se essa proporção, um hotel que contratar 24 camareiras contratará, também, quantos profissionais para o setor de alimentação?

a) 18

b) 26

c) 30

d) 32

e) 36

5. (CESGRANRIO/BR/2015) Uma empresa substituiu seus monitores antigos no formato fullscreen, cuja proporção entre a largura e a altura da tela é de 4:3, por monitores novos no formato widescreen, com proporção entre largura e altura dada por 16:9. Os monitores novos e antigos têm a mesma altura.

A razão entre a largura do modelo novo e a largura do modelo antigo é dada por

a) 1:4

b) 3:4

c) 4:3

d) 4:9

e) 9:4

6.(CESGRANRIO/BB/2012) Numa pesquisa sobre acesso à internet, três em cada quatro homens e duas em cada três mulheres responderam que acessam a rede diariamente. A razão entre o número de mulheres e de homens participantes dessa pesquisa é, nessa ordem, igual a $\frac{1}{2}$.

Que fração do total de entrevistados corresponde àqueles que responderam que acessam a rede todos os dias?

a) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{8}{11}$

c) $\frac{13}{18}$

d) $\frac{17}{24}$

e) $\frac{25}{36}$

Gabarito – CESGRANRIO

Razão e proporção

1. LETRA A
2. LETRA A
3. LETRA E
4. LETRA D
5. LETRA C
6. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Proporcionalidade

1.(CESGRANRIO/ANP/2016) Uma determinada solução é a mistura de 3 substâncias, representadas pelas letras P, Q e R. Uma certa quantidade dessa solução foi produzida, e sua massa é igual à soma das massas das três substâncias P, Q e R, usadas para compô-la. As massas das substâncias P, Q e R dividem a massa da solução em partes diretamente proporcionais a 3, 5 e 7, respectivamente.

A que fração da massa da solução produzida corresponde a soma das massas das substâncias P e Q utilizadas na produção?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{12}{35}$

d) $\frac{8}{15}$

e) $\frac{10}{21}$

2. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Uma herança no valor de R$ 168.000,00 foi dividida entre quatro irmãos em partes diretamente proporcionais às suas respectivas idades. Se as idades, em número de anos, são 32, 30, 27 e 23, a parte que coube ao mais novo dos irmãos é, em reais, igual a

a) 23.000

b) 27.600

c) 28.750

d) 32.200

e) 34.500

3.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) João tem uma caixa que contém 30 bolas, sendo 9 azuis, 15 vermelhas e 6 amarelas. Mário tem uma caixa que contém 50 bolas coloridas. Considerando a proporção de cores e bolas existentes na caixa de João, tem-se que a caixa de Mario contém bolas azuis, vermelhas e amarelas nas respectivas quantidades

a) 10, 15 e 25.

b) 10, 25 e 15.

c) 15, 25 e 10.

d) 25, 10 e 15.

e) 25, 15 e 10.

4. (CESGRANRIO/BB/2015) Aldo, Baldo e Caldo resolvem fazer um bolão para um concurso da Mega-Sena. Aldo contribui com 12 bilhetes, Baldo, com 15 bilhetes e Caldo, com 9 bilhetes. Eles combinaram que, se um dos bilhetes do bolão fosse sorteado, o prêmio seria dividido entre os três proporcionalmente à quantidade de bilhetes com que cada um contribuiu. Caldo também fez uma aposta fora do bolão e, na data do sorteio, houve 2 bilhetes ganhadores, sendo um deles o da aposta individual de Caldo, e o outro, um dos bilhetes do bolão.

Qual a razão entre a quantia total que Caldo recebeu e a quantia que Baldo recebeu?

a) 0,8

b) 1,5

c) 2

d) 2,5

e) 3

5. (CESGRANRIO/EPE/2014) Os catadores de uma cooperativa recolheram 14.000 latas de alumínio. Essas latas eram, exclusivamente, de cerveja, de sucos ou de refrigerantes. De cada 5 latas recolhidas, 2 eram de cerveja e, para cada 7 latas de refrigerantes, havia 3 latas de suco.

Do total de latas recolhidas pelos catadores, quantas eram de suco?

a) 2.000

b) 2.520

c) 2.800

d) 5.600

e) 5.880

6.(CESGRANRIO/BASA/2015) Em uma empresa, o total de descontos que incidem sobre o salário bruto de cada funcionário é proporcional ao valor desse mesmo salário bruto. Um funcionário F_1 tem salário líquido igual a S_1, calculado após a incidência do total de descontos igual a x_1 reais. Um funcionário F_2 tem salário líquido igual a S_2, calculado após a incidência do total de descontos igual a x_2 reais.

O total de descontos x_2 é tal que

a) $x_2 = \frac{S_1+x_1}{S_2+x_2} \cdot x_1$.

b) $x_2 = \frac{S_2+x_2}{S_1+x_1} \cdot (x_1 + x_2)$.

c) $x_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot x_1$.

d) $x_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot x_1$.

e) $x_2 = \frac{S_1+x_1}{S_2+x_2} \cdot (x_1 + x_2)$.

7.(CESGRANRIO/ANP/2016) Considere um gás ideal que passa por uma transformação durante a qual sua pressão e o volume que ocupa podem variar, mas sua temperatura é sempre mantida constante. A Lei de Boyle-Mariotte garante que, nessas circunstâncias, o produto entre a pressão P e o volume V ocupado pelo gás é constante. Quando o gás considerado ocupa o volume correspondente a 18ml, a sua pressão é de 3 atm (atmosferas).

Se a medida do volume ocupado pelo gás for de 2,25ml, então, sua pressão, em atmosferas, medirá

a) 33,75

b) 31,50

c) 24,00

d) 13,50

e) 12,00

8. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) A Figura mostra duas rodas dentadas que estão acopladas. Sabe-se que, nessa situação, o número de dentes é inversamente proporcional ao número de voltas dadas por cada roda dentada.

Quando a menor roda (com 6 dentes) der 108 voltas completas, a maior (com 9 dentes) dará um número de voltas completas igual a

a) 18

b) 54

c) 72

d) 162

e) 216

9. (CESGRANRIO/BR/2012) Seja P uma grandeza diretamente proporcional a Q e inversamente proporcional a R. Sabe-se que P vale 2 quando Q vale $\frac{2}{7}$ e R vale $\frac{9}{14}$.

Quanto vale P quando Q vale $\sqrt{80}$ e R vale $\sqrt{180}$?

a) 3.

b) 2.

c) $\sqrt{2}$.

d) $\frac{1}{2}$.

e) $\frac{1}{3}$.

10. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2014) Aldo e Baldo foram a uma pizzaria sem dinheiro algum e combinaram com o gerente que pagariam o que consumissem lavando pratos. Aldo consumiu R$ 62,00 e Baldo consumiu R$ 93,00. Aldo era rápido na lavagem dos pratos e, a cada 5 pratos que Baldo lavava, Aldo lavava 7 pratos. Ao fim do serviço, Aldo e Baldo discutiram porque Aldo disse sentir-se injustiçado, visto que o justo teria sido dividirem a conta proporcionalmente ao consumo de cada um e de forma inversamente proporcional a quantos pratos cada um lavou.

O valor que caberia a Aldo, nos termos da divisão que ele considerou justa, em reais, corresponde a

a) 45,00

b) 50,00

c) 60,00

d) 62,00

e) 75,50

11. (CESGRANRIO/IBGE/2014) Em um certo país, cada aposentado ganha uma quantia diretamente proporcional à raiz quadrada do número de anos que trabalhou. Urbano aposentou-se hoje nesse país e receberá uma aposentadoria de X unidades monetárias. Se trabalhasse mais 13 anos, sua aposentadoria aumentaria em 1000 unidades monetárias e, no entanto, se tivesse se aposentado há 11 anos, receberia 1000 unidades monetárias a menos.

Para que as afirmações acima estejam todas corretas, o valor de X deve ser

a) 2000

b) 3000

c) 4000

d) 5000

e) 6000

Gabarito – CESGRANRIO

Proporcionalidade

1. LETRA D
2. LETRA E
3. LETRA C
4. LETRA E
5. LETRA B
6. LETRA D
7. LETRA C
8. LETRA C
9. LETRA A
10. LETRA B
11. LETRA E

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.