Aula 16

Banco do Brasil - Matemática - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

09 de Janeiro de 2023

Índice

LOGARITMOS

Estudamos na aula de equações e inequações exponenciais igualdades do tipo:

$$2^y = 8$$

Onde podíamos reduzir ambas as potências à mesma base e resolver para y.

$$2^y = 8$$

$$2^y = 2^3 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

Porém, em diversas outras situações, **não conseguiremos** reduzir as potências.

Imagine que uma questão da sua prova pergunte qual o valor de y na igualdade abaixo:

$$3^y = 5$$

Como você resolveria?

Não conseguiríamos reduzir as potências à mesma base.

Para poder resolver esta e outras operações iremos iniciar o **estudo do Logaritmo**.

1 - Definição

Dados dois números reais positivos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{x}$, com $\boldsymbol{a} > 0\ e\ \boldsymbol{a} \neq 1$, o **logaritmo** de $\boldsymbol{x}$ na base $\boldsymbol{a}$ é igual ao expoente y ao qual a base $\boldsymbol{a}$ deve ser elevada para se chegar a x como resultado.

Se $\boldsymbol{a} > 0$ e $\boldsymbol{a} \neq 1$ e $\boldsymbol{x} > 0$, temos que:

$$\log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x} = y \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}^y = \boldsymbol{x} \quad , \quad onde:$$

- $\boldsymbol{a}$ → base do logaritmo
- $\boldsymbol{x}$ → logaritmando
- y → logaritmo

Isto é, o **logaritmo** de $\boldsymbol{x}$ na base $\boldsymbol{a}$ é a solução de y na equação $\boldsymbol{a}^y = \boldsymbol{x}$.

Observe que o Logaritmo é uma operação matemática intrinsicamente ligada à potenciação. A ideia do logaritmo é **reverter a operação de exponenciação**.

Sempre que nos depararmos com logaritmo estaremos mentalmente trabalhando com expoentes. Veremos mais a frente (na parte de função) que **a função logarítmica é a inversa da função exponencial**.

1

Inicialmente, esta definição pode parecer um pouco confusa ou difícil. No decorrer da aula, com inúmeros exemplos e questões de provas, tudo ficará mais claro.

TOME NOTA!

logaritmando

$$\log_a x = y$$

base

$$\log_a x = y \quad \leftrightarrow \quad a^y = x$$

Condição de existência: $a > 0$ e $a \neq 1$ e $x > 0$

A pergunta que sempre devemos fazer é: "**Devemos elevar a base a qual expoente para se obter o logaritmando?**"

Vamos voltar no nosso exemplo do começo da aula.

Estávamos interessados em resolver a seguinte igualdade:

$$3^y = 5$$

Aplicando a definição de logaritmo, podemos calcular o valor de y:

$$3^y = 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = \log_3 5}$$

ESCLARECENDO

Observe que iremos **trabalhar constantemente** com a **definição** e também com o **sentindo inverso da definição**. É **importante** que você esteja confortável para trabalhar tanto em um sentido quanto no outro.

$$\log_a x = y \quad \leftrightarrow \quad a^y = x$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: $\log_2 8 = y$

Lembre-se sempre da pergunta: "**Devemos elevar a base a qual expoente para se obter o logaritmando?**"

Nesse caso estaríamos perguntando: 2 elevado a que número dará 8? Sabemos que 2 ao cubo é igual a 8. Logo,

$$\log_2 8 = 3 \quad , \quad pois \quad 2^3 = 8$$

Exemplo 2: $\log_7 7 = y$

7 elevado a 1 é igual a 7. Logo,

$$\log_7 7 = 1 \quad , \quad pois \quad 7^1 = 7$$

Exemplo 3: $\log_{1.050.875} 1 = y$

Um milhão cinquenta mil oitocentos e setenta e cinco elevado a que número resultará em um?

Como vimos na aula de potenciação, qualquer número elevado a 0 resultará em 1. Logo,

$$\log_{1.050.875} 1 = 0 \quad , \quad pois \quad 1.050.875^0 = 1$$

Exemplo 4: $\log_2 \frac{1}{4} = y$

2 elevado a qual número resultará em $1/4$?

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2 \quad , \quad pois \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

E professor, esse nível "básico" cai em concurso? Com certeza. Iremos trabalhar constantemente com a definição de logaritmo em todos os níveis da aula de hoje.

Vejamos uma questão cobrada no concurso da IF-SP.

(IF SP - 2012) Se $\log_x 243 = 5$, então o valor de x deve ser:

a) 2
b) 4
c) 1
d) 3

e) 0

Comentários:

Observe que a banca nos questiona o valor da base. Até então estávamos sempre calculando o resultado de um logaritmo.

Todavia, a operação e a definição continuam as mesmas. Vejamos:

$$\log_x 243 = 5 \quad \rightarrow \quad x^5 = 243$$

$$\boldsymbol{x = 3}$$

Gabarito: Alternativa **D**

2 - Consequências da definição

Devemos ter em mente algumas igualdades decorrentes das **consequências da definição**.

1. Se o logaritmando for igual a base, o **logaritmo será igual a 1**. Vimos isto no exemplo 2.

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a a = 1}}$$

Pois, **qualquer número elevado a 1 é igual a ele mesmo**.

2. O logartimo de 1 (unidade) em qualquer base **é igual a 0**. Analisamos no exemplo 3.

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a 1 = 0}}$$

Pois, **qualquer número elevado a 0 é igual a 1**.

3. A potência de base a e expoente $\log_a x$ será **igual a x**.

$$\boxed{\boldsymbol{a^{\log_a x} = x}}$$

4. Se o logaritmo for igual a base e estiver elevado a um expoente x, o **logaritmando será o próprio x**.

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a a^x = x}}$$

5. Dois logaritmos em uma mesma base são iguais, se e somente se, **os logaritmandos também forem iguais**.

$$\boxed{\log_a x = \log_a y \quad \leftrightarrow \quad x = y}$$

Estas consequências da definição serão usadas constantemente nas resoluções dos problemas. Então, **decore!**

Consequências da definição				
$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$	$a^{\log_a x} = x$	$\log_a a^x = x$	$\log_a x = \log_a y \quad \leftrightarrow \quad x = y$

3 - Bases Especiais ou Particulares

Duas bases frequentemente são cobradas em provas. A base 10 e a base e.

1. **Logaritmo na base 10.**

É o que chamamos de logaritmo decimal. É o mais "comum" a ser usado.

Quando **não estiver explícita a base** do logaritmo em uma operação, entende-se que **a base é a decimal**.

$$\log x \quad \rightarrow \quad \log_{10} x$$

2. **Logaritmo na base e.**

O número de Euller (e) é uma constante matemática irracional e igual, aproximadamente, a 2,721.

O logaritmo de um número na base e tem a seguinte notação:

$$\log_e x \quad \rightarrow \quad \ln x$$

4 - Propriedades dos Logaritmos

Este tema é **MUITO cobrado** em prova. Praticamente todas as questões de logaritmos envolvem a aplicação de uma das propriedades abaixo.

Passarei as propriedades uma a uma com seu conceito e fórmula e ao final farei um **quadro resumo** com as notações que você **DEVE decorar**.

Iremos praticar também com **bastantes exemplos e questões de provas** para você entender como as bancas gostam de cobrar este assunto.

i. Logaritmo do Produto

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\boldsymbol{\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y}$$

Obs: Esta propriedade pode ser estendida para n fatores:

$$\log_a(x_1 * x_2 * x_3 * \dots * x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \cdots + \log_a x_n$$

ii. Logaritmo do Quociente

O logaritmo do **quociente** é igual a **diferença** dos seus logaritmos.

$$\boldsymbol{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

iii. Logaritmo da Potência

O logaritmo de uma **potência** (base real positiva e expoente real) é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\boldsymbol{\log_a x^p = p * \log_a x}$$

iv. Base elevada a um expoente

Quando a **base estiver elevada a um expoente**, o logaritmo é igual ao **produto do inverso da base vezes o logaritmo**.

$$\log_{a^p} x = \frac{1}{p} * \log_a x$$

DESPENCA NA PROVA!

Propriedades dos Logaritmos		
Propriedade	Fórmula	Conceito
Logaritmo do Produto	$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$	O logaritmo do produto é igual a soma de seus logaritmos
Logaritmo do Quociente	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	O logaritmo do quociente é igual a diferença dos seus logaritmos
Logaritmo da Potência	$\log_a x^p = p * \log_a x$	O logaritmo de uma potência é igual a esta potência vezes o logaritmo
Base elevada a um expoente	$\log_{a^p} x = \frac{1}{p} * \log_a x$	Quando a base estiver elevada a um expoente, o logaritmo é igual ao produto do inverso da base vezes o logaritmo

TOME NOTA!

É muito **IMPORTANTE** que você decore essas propriedades e também se sinta **confortável para trabalhar nos dois sentidos da igualdade**.

Em diversos exercícios será exigida a <u>manipulação das soluções</u> com a "volta" de uma das propriedades.

Vejamos alguns exemplos de aplicação dessas propriedades.

Estes exercícios buscam sempre uma "manipulação" algébrica dos numerais. Fique atento às contas. Irei sempre colocar o passo a passo para você acompanhar.

Exemplo 4: Dado que $\mathbf{\log 2 = \boldsymbol{a}}$ e $\mathbf{\log 3 = \boldsymbol{b}}$, calcule os seguinte logaritmos:

a) $y = \log 6$

Aplicaremos a propriedade do **logaritmo do produto** para reescrever este logaritmo e calcular seu valor.

$$y = \log 6$$

$$y = \log(2 * 3)$$

$$y = \log 2 + \log 3$$

$$y = a + b \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log 6 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}$$

b) $y = \log 9$

Aplicaremos a propriedade do **logaritmo da potência** e calcularemos o valor do logaritmo.

$$y = \log 9$$

$$y = \log 3^2$$

$$y = 2 * \log 3$$

$$y = 2 * b \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log 9 = 2\boldsymbol{b}}$$

c) $y = \log 1{,}5$

Aplicando a propriedade do **logaritmo do quociente**:

$$y = \log 1{,}5$$

$$y = \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = \log 3 - \log 2$$

$$y = b - a \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log 1,5 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}$$

d) $y = \log 15$

Aplicando a propriedade do **logaritmo do produto**:

$$y = \log 15$$

$$y = \log(10 * 1{,}5)$$

$$y = \log 10 + \log 1{,}5$$

$$y = 1 + (b - a) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log 15 = 1 + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}$$

e) $y = \log \sqrt{3}$

Aplicando a propriedade do **logaritmo da potência**:

$$y = \log \sqrt{3}$$

$$y = \log 3^{1/2}$$

$$y = \frac{1}{2} * \log 3$$

$$y = \frac{1}{2} * b \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log \sqrt{3} = \frac{\boldsymbol{b}}{2}}$$

f) $y = \log 5$

Aplicando a propriedade do **logaritmo do quociente**:

$$y = \log 5$$

$$y = \log\left(\frac{10}{2}\right)$$

$$y = \log 10 - \log 2$$

$$y = 1 - a \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log 5 = 1 - \boldsymbol{a}}$$

g) $y = \log_{100} 2$

Aplicando a propriedade da **base elevada a um expoente**:

$$y = \log_{100} 2$$

$$y = \log_{10^2} 2$$

$$y = \frac{1}{2} * \log_{10} 2$$

$$y = \frac{1}{2} * \log 2$$

$$y = \frac{1}{2} * a \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\log_{100} 2 = \frac{a}{2}}$$

h) $y = \log 36$

Aplicando <u>simultaneamente</u> as propriedades do **logaritmo do produto** e **do logaritmo da potência**:

$$y = \log 36$$

$$y = \log(2^2 * 3^2)$$

$$y = 2 * \log 2 + 2 * \log 3$$

Conseguiu entender esta última passagem?

Fique atento! Pois, na grande parte dos exercícios, pode ser que tenhamos de **usar propriedades em conjunto**. Observe passo a passo a resolução acima.

$$y = \log 36$$

$$y = \log(2^2 * 3^2)$$

Primeiro vamos aplicar a propriedade do **logaritmo do produto**:

$$y = \log(2^2 * 3^2)$$

$$y = \log 2^2 + \log 3^2$$

Agora, aplicaremos a propriedade do **logaritmo da potência** para ambos os fatores:

$$y = \log 2^2 + \log 3^2$$

$$y = 2 * \log 2 + 2 * \log 3$$

$$y = 2 * a + 2 * b \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\log 36 = 2a + 2b}$$

Exemplo 5: Se $\log_2 x = k$, quanto vale $y = \log_{16} x$?

Primeiro vamos "manipular" algebricamente o número 16 para encontrá-lo em função do número 2.

$$y = \log_{16} x$$

$$y = \log_{2^4} x$$

Aplicaremos agora a **propriedade da base elevada a um expoente**.

$$y = \log_{2^4} x$$

$$y = \frac{1}{4} * \log_2 x$$

$$y = \frac{1}{4} * k \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\log_{16} x = \frac{k}{4}}$$

Exemplo 6: A soma dos logaritmos de três números na base 3 é igual a 4. Determine o produto desses números.

O enunciado nos informa que a soma dos logaritmos de três números na base 3 é igual a 4.

$$\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z = 4$$

Aplicaremos o **"sentido contrário"** da propriedade do **logaritmo do produto**.

É muito **IMPORTANTE** que você decore essas propriedades e também se sinta confortável para trabalhar nos dois sentidos da igualdade.

$$\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z = 4$$

$$\log_3 (x * y * z) = 4$$

$$(x * y * z) = 3^4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{(x * y * z) = 81}$$

5 - Mudança de Base

Em algumas situações pode ser necessária a **conversão do logaritmo para uma única base conveniente**.

As propriedades estudadas acima são correlacionadas a logaritmos com a mesma base.

Nestes casos iremos proceder com a **mudança de base do logaritmo**.

Dados a, x e b, números reais positivos e a e $b \neq 1$, o logaritmo de x na base a pode ser escrito da seguinte forma:

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}}$$

Acerca dessa mudança de base, há **duas observações importantes**:

1. Esta propriedade <u>também pode ser representada</u> da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\log_a x = \log_b x * \log_a b}$$

2. Se a e x são números reais positivos e diferentes de 1, temos:

$$\boldsymbol{\log_a x = \frac{1}{\log_x a}}$$

Exemplo 7: Dado que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule os seguintes logaritmos:

a) $y = \log_3 2$

Aplicando a **mudança para a base 10**:

$$y = \log_3 2$$

$$y = \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$y = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\log_3 2 = \frac{a}{b}}$$

b) $y = \log_2 3$

Poderíamos resolver igual a questão acima (aplicando a mudança para a base 10) ou aplicar a segunda observação estudada que nos diz:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

No exemplo acima calculamos $\log_3 2$, então:

$$y = \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$$

$$y = \frac{1}{\frac{a}{b}}$$

$$y = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\log_2 3 = \frac{b}{a}}$$

c) $y = \log_6 5$

Aplicando a **mudança para a base 10**:

$$y = \log_6 5$$

$$y = \frac{\log 5}{\log 6}$$

Esses logaritmos acima foram calculados nos exemplos $4f$ e $4a$. Veja que os exemplos começam a **misturar diversos conceitos** de logaritmos.

Neste caso, trabalharíamos com mudança de base, propriedade do logaritmo do produto e propriedade do logaritmo do quociente.

Substituindo os valores já calculados teremos:

$$y = \frac{\log 5}{\log 6}$$

$$y = \frac{1-a}{a+b} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\log_6 5 = \frac{1-a}{a+b}}$$

Iremos resolver, agora, uma **série de exercícios de concurso público**. Tenha decoradas as <u>propriedades dos logaritmos</u> e o entendimento do <u>conceito da definição</u> e das <u>consequências da definição</u>.

Os exercícios serão resolvidos passo a passo e você entenderá a maneira como as bancas gostam de cobrar este tema.

(FUNDATEC - 2019) Sabendo que o valor de $\log 5 = 0,698$, o valor do $\log 50$ será:

a) 1,698
b) 2,698
c) 3,698
d) 4,698
e) 10,698

Comentários:

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de y e aplicar a "volta" da **propriedade do logaritmo do produto** para encontrarmos o seu valor.

$$y = \log 50$$

$$y = \log(5 * 10)$$

$$y = \log 5 + \log 10$$

$$y = 0{,}698 + 1 \quad \rightarrow \mathbf{y = 1,698}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(Alternative - 2016) Calculando o logaritmo de 625 na base 5, obtem-se:

a) 4
b) 8
c) 2
d) 3
e) 5

Comentários:

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de y e aplicar a **propriedade do logaritmo da potência** para encontrar seu valor.

$$y = \log_5 625$$

$$y = \log_5 5^4$$

$$y = 4 * \log_5 5 = 4 * 1 \quad \rightarrow \mathbf{y = 4}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(FGV - 2019) Sabe-se que $\log_3 x + \log_3 y = 4$. O valor do produto $(x * y)$ é igual a:

a) 12
b) 24
c) 36
d) 54
e) 81

Comentários:

Vamos aplicar o "caminho inverso" da **propriedade do logaritmo do produto**.

$$\log_3 x + \log_3 y = 4$$

$$\log_3(x * y) = 4$$

$$(x * y) = 3^4$$

$$\boldsymbol{(x * y) = 81}$$

Gabarito: Alternativa **E**

(ESAF - 2014) Sabendo-se que $\log x$ representa o logaritmo de x na base 10, calcule o valor da expressão

$$\mathbf{\log 20 + \log 5}$$

a) 5
b) 4
c) 1
d) 2
e) 3

Comentários:

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de y e aplicar o sentido inverso da **propriedade do logaritmo do produto** para encontrar nossa resposta.

$$y = \log 20 + \log 5$$

$$y = \log(20 * 5)$$

$$y = \log 100 \quad \rightarrow \boldsymbol{y = 2}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(COTEC - 2016) Considere a um número real positivo. Se $\log a = 3$, então $\log(a^2/10)$ vale:

a) 8
b) 9
c) 7
d) 5

Comentários:

A sistemática de resolução é a mesma. Chamaremos de y o valor que queremos encontrar e aplicando **as propriedades do logaritmo** calcularemos seu valor.

$$y = \log\left(\frac{a^2}{10}\right)$$

Aplicando a **propriedade do logaritmo do produto e do logaritmo da potência** e calculando y:

15

$$y = \log\left(\frac{a^2}{10}\right)$$

$$y = \log a^2 - \log 10$$

$$y = 2 * \log a - 10$$

$$y = 2 * 3 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 5}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(CESGRANRIO - 2011) Se $\log x$ representa o logaritmo de x na base 10, então o valor de n que tal que $\log n = 3 - \log 2$ é:

a) 2.000
b) 1.000
c) 500
d) 100
e) 10

Comentários:

Vamos desenvolver a igualdade aplicando o caminho inverso da **propriedade do logaritmo do produto**.

$$\log n = 3 - \log 2$$

$$\log n + \log 2 = 3$$

$$\log(n * 2) = 3$$

$$\log(2n) = 3$$

$$2n = 10^3$$

$$2n = 1.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n = 500}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(NC UFPR - 2014) A expressão $\log_{10} 8 + \log_{10} 2$ é equivalente a:

a) $\log_{10} 10$
b) $8 * \log_{10} 2$
c) $2 * \log_{10} 8$
d) $2 * \log_{10} 4$
e) $\log_{10} 2$

Comentários:

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de y e aplicar as propriedades que estudamos para encontrar uma resposta que seja equivalente à expressão fornecida no enunciado.

$$y = \log_{10} 8 + \log_{10} 2$$

Aplicando o "sentido contrário" da **propriedade do logaritmo do produto**:

$$y = \log_{10} 8 + \log_{10} 2$$

$$y = \log_{10}(8 * 2)$$

$$y = \log_{10} 16$$

Perceba que não há gabarito para este resultado. Vamos manipular algebricamente este valor para chegarmos ao gabarito.

Reescrevendo y:

$$y = \log_{10} 16$$

$$y = \log_{10} 4^2$$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência:

$$y = \log_{10} 4^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 2 * \log_{10} 4}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(CURSIVA - 2015) Sabendo que $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,477$, qual o valor de $\log 12$?

a) 1,907
b) 1,070
c) 1,079
d) 1,790

Comentários:

Iremos chamar o valor de $\log 12$ de y e aplicaremos a propriedade do logaritmo do produto e do logaritmo da potência para calcular o gabarito.

$$y = \log 12$$

$$y = \log(4 * 3)$$

$$y = \log(2^2 * 3)$$

$$y = \log 2^2 + \log 3 \quad \rightarrow \quad y = 2 * \log 2 + \log 3$$

Substituindo os valores fornecidos no enunciado e calculando y teremos:

$$y = 2 * \log 2 + \log 3$$

$$y = 2 * 0{,}301 + 0{,}477$$

$$y = 0{,}602 + 0{,}477 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 1{,}079}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(COTEC - 2020) Considere $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$. Nessas condições pode-se afirmar que $\log_{100} 72$ é igual a:

a) $\frac{a+b}{2}$
b) $\frac{a^2+b^2}{2}$
c) $\frac{2a+3b}{2}$
d) $\frac{3a+2b}{2}$
e) $2a + 3n$

Comentários:

Esta questão aborda de forma bem completa as propriedades que acabamos de aprender.

Vamos chamar o valor de $\log_{100} 72$ de y e desenvolver até conseguirmos reduzir nossa resposta em função de $\log 2$ e de $\log 3$.

$$y = \log_{100} 72$$

$$y = \log_{10^2} 72$$

Aplicaremos a **propriedade da base elevada a um expoente**:

$$y = \log_{10^2} 72 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} * \log 72$$

Escrevendo agora o número 72 em função dos números 2 e 3.

$$y = \frac{1}{2} * \log(2^3 * 3^2)$$

Aplicando a **propriedade do logaritmo do produto**.

$$y = \frac{1}{2} * \log(2^3 * 3^2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} * (\log 2^3 - \log 3^2)$$

Utilizaremos a **propriedade do logaritmo da potência** e iremos calcular y em função de a e b.

$$y = \frac{1}{2} * (\log 2^3 - \log 3^2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} * (3 * \log 2 + 2 * \log 3)$$

Substituindo os valores fornecidos no enunciado teremos y igual a:

$$y = \frac{1}{2} * (3 * \log 2 + 2 * \log 3)$$

$$y = \frac{1}{2} * (3 * a + 2 * b) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = \frac{3a + 2b}{2}}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(CETREDE - 2019) Marina afirmou para Cláudio que $2^x = 6$. Quanto será $\log_2 3$.

a) $x + 3$
b) $x - 1$
c) 2
d) $x - 2$
e) $4x$

Comentários:

Usando a definição de logaritmo, sabemos que:

$$2^x = 6 \quad \rightarrow \quad x = \log_2 6$$

Desenvolveremos o resultado para calcular em função de $\log_2 3$. Acompanhe.

$$x = \log_2 6$$

$$x = \log_2(2 * 3)$$

Vamos aplicar a **propriedade do logaritmo do produto** e encontrar o valor questionado pela banca.

$$x = \log_2(2 * 3)$$

$$x = \log_2 2 + \log_2 3$$

$$x = 1 + \log_2 3$$

$$\boldsymbol{\log_2 3 = x - 1}$$

Gabarito: Alternativa **B**

(QUADRIX Adaptada - 2018) Uma colônia de bactérias se prolifera e o número de indivíduos para cada instante $t > 0$ é dado por:

$$N(t) = 2e^{kt}$$

Em que k é uma constante positiva. Sabe-se que, no instante $t = 4$, o número de bactérias é igual a 162.

Com base nesse caso hipotético, o valor de k e o número de bactérias no instante $t = 8$ é igual a:

a) $\ln 3$
b) $\ln 5$
c) $\ln 4$
d) $\ln 7$
e) $\ln 2$

Comentários:

O enunciado nos fornece a igualdade e uma condição de contorno para calcularmos k.

Observe que quando $t = 4 \rightarrow N(t) = 162$.

Vamos substituir estes valores na igualdade e calcular o valor de k.

$$N(t) = 2e^{kt}$$

$$162 = 2e^{4k}$$

$$e^{4k} = \frac{162}{2}$$

$$e^{4k} = 81$$

Aplicando a **definição de logaritmo**:

$$e^{4k} = 81 \quad \rightarrow \quad 4k = \ln 81 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{4}\ln 81$$

Aplicaremos a "volta" da **propriedade do logaritmo da potência**.

É muito **IMPORTANTE** que você decore essas propriedades e também se sinta confortável para trabalhar nos dois sentidos da igualdade.

$$k = \frac{1}{4}\ln 81$$

$$k = \ln 81^{1/4} = \ln \sqrt[4]{81} \quad \rightarrow \boldsymbol{k = \ln 3}$$

Gabarito: Alternativa **A**

20

(NC UFPR - 2017) Considerando que $\log_{10} 5 = 0,7$, assinale a alternativa que apresenta o valor de $\log_5 100$:

a) 0,35
b) 0,50
c) 2,85
d) 7,00
e) 70,00

Comentários:

Vamos chamar de y o valor de $\log_5 100$ e desenvolver a igualdade:

$$y = \log_5 100$$

Aplicaremos a mudança para a base 10.

$$y = \log_5 100$$

$$y = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 5}$$

$$y = \frac{2}{0,7} \rightarrow \mathbf{y = 2,85}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(FCC - 2015) O valor da expressão:

$$\mathbf{y = \log_2 16 + \log_4 8 + \log_8 4}$$

é igual a:

a) 5
b) 23/2
c) 37/6
d) 5/4
e) 41/8

Comentários:

Vamos aplicar a mudança de base nos dois últimos fatores e calcular o valor da expressão:

$$y = \log_2 16 + \log_4 8 + \log_8 4$$

$$y = \log_2 16 + \frac{\log_2 8}{\log_2 4} + \frac{\log_2 4}{\log_2 8}$$

21

$$y = 4 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \quad , \quad MMC(2{,}3) = 6$$

$$y = \frac{24 + 9 + 4}{6} \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{37}{6}}$$

Gabarito: Alternativa **C**

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1 - Definição

A função logarítmica de base $\boldsymbol{a}$, onde $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$ é definida por:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \log_a x}}$$

Sendo uma função f de R_+^* em R que associa cada número x a seu respectivo valor $\log_a x$.

$$f: R_+^* \rightarrow R \quad , \quad x \rightarrow \log_a x$$

TOME NOTA!

Quando trabalhamos com funções é comum usarmos como **notação $\boldsymbol{f(x)}$ ou $\boldsymbol{y}$**. Então, sempre que aparecer um desses dois termos, saibam que são coincidentes.

$$f: R_+^* \rightarrow R \qquad \boldsymbol{f(x)} = \log_a x \quad ou \quad \boldsymbol{y} = \log_a x$$

2 - Domínio

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de $\boldsymbol{x}$** onde a função é definida. Na função logarítmica o domínio é composto por duas condições.

- ✓ A primeira é a **base do logaritmo** ser **maior que 0** e também **diferente de 1**.
- ✓ A segunda é o **logaritmando ser maior que 0**.

Lembram-se da condição de existência do logaritmo visto na primeira parte da aula? Ela será o **domínio** da nossa função logarítmica.

FIQUE ATENTO!

logaritmando

$\log_a x = f(x)$ Condição de existência: $a > 0$ e $a \neq 1$ e $x > 0$

base

Exemplo 1: Encontre o domínio das funções logarítmicas abaixo:

a) $f(x) = \log_3(x - 8)$

Estudamos acima que a condição de existência é dada por duas condições. A primeira é a base ser maior que 0 e diferente de 1. Neste exemplo a base é igual a 3 e já satisfaz esta condição.

A segunda condição é o logaritmando ser maior que 0. Vamos determinar os valores de x para esta condição.

$$x - 8 > 0$$

$$\boldsymbol{x > 8}$$

Sendo assim, o domínio pode ser representado por:

$$\boldsymbol{D = \{x \in R \mid x > 8\}}$$

b) $f(x) = \log_{(x-3)} 8$

Perceba que neste exemplo o logaritmando é maior que 0. O que satisfaz uma das nossas condições de existência.

Todavia, precisamos encontrar o valor de x para que a base possa ser maior que 0 e também diferente de 1.

$$x - 3 > 0 \quad e \quad x - 3 \neq 1$$

$$\boldsymbol{x > 3} \qquad \boldsymbol{x \neq 4}$$

Observe que o domínio é dado pelos valores de $x > 3$. Porém, x tem que ser também diferente de 4. Ou seja, x é igual a todos os valores maiores do que 3, menos o valor 4.

$$\boldsymbol{D = \{x \in R \mid x > 3 \ e \ x \neq 4\}} \ \ ou \ \ \boldsymbol{D = \{x \in R \mid x < 3 \neq 4\}}$$

Podemos ainda representar os valores no eixo Real das abscissas.

O intervalo é aberto em 3 pois queremos os números maiores que 3 e não maiores ou iguais a 3.

c) $f(x) = \log_2(x^2 - 9x + 14)$

Perceba que a base já é maior que 0 e diferente de 1, o que satisfaz uma das duas condições de existência.

A segunda é o logaritmando ser maior que 0.

$$x^2 - 9x + 14 > 0$$

Lembra-se da aula de inequações? Essa é uma boa hora para revisar, pois vamos usar exaustivamente o estudo das inequações para encontrar o domínio das funções logarítmicas.

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

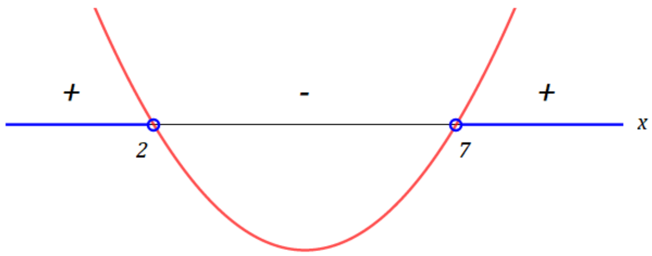
$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 * 1 * 14}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{9 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{9+5}{2} & \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = 7} \\ x_2 = \dfrac{9-5}{2} & \rightarrow \quad \boldsymbol{x_2 = 2} \end{cases}$$

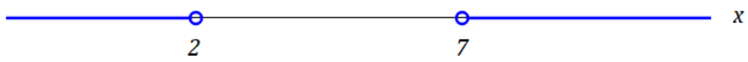
De posse das raízes, vamos proceder com o estudo da função quadrática na reta.

A função é um **parábola com concavidade voltada para cima** e corta o eixo x nas raízes 2 e 7. Como queremos os valores maiores que 0, o intervalo é aberto nas raízes.



Estamos em busca dos valores maiores que 0, isto é, positivos. Os valores positivos encontram-se a esquerda de 2 e a direita de 7.

Representando o domínio na reta teremos:



$$\boldsymbol{D = \{x \in R \mid x < -2 \ e \ x > 7\} \quad ou \quad x =]-\infty, 2[\ \cup\ ]7, +\infty[}$$

Exemplo 2: Veremos agora, como exemplo de uma questão de concurso, no maior nível que a banca pode complicar. Faremos o estudo simultâneo da base com o logaritmando.

(CRS / PMMG Aspirante – 2010) O domínio da função:

$$\boldsymbol{f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)}$$

está no intervalo:

a) $]7, +\infty[$
b) $]-2{,}7[$
c) $]-1, +\infty[$
d) $]0, +\infty[$

Comentários:

O enunciado nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona o **domínio** desta função.

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de x** onde a função é definida. Na função logarítmica o domínio é composto por duas condições.

- ✓ A primeira é a **base do logaritmo** ser **maior que 0** e também **diferente de 1**.
- ✓ A segunda é o **logaritmando ser maior que 0**.

$$f(x)\log_a x \quad \rightarrow \quad x > 0 \quad e \quad a > 0\, e\, a \neq 1$$

Vamos então <u>dividir</u> nosso problema em <u>dois</u>.

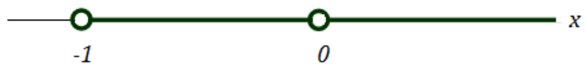
A primeira parte vai ser encontrar a condição de existência para a base $a > 0\ e\ a \neq 1$. E a segunda parte, encontrar o intervalo de existência para o logaritmando $x > 0$.

- (I) – base maior que zero e diferente de 1.

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

$$x + 1 > 0 \ \ e \ \ x + 1 \neq 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x > -1 \ \ e \ \ x \neq 0}$$

Representando os valores de x na reta:



Observe que representamos na reta os valores maiores que -1 (intervalo aberto) e utilizamos a representação também aberta em 0, pois o como vimos $x > -1 \ \ e \ \ x \neq 0$.

- (II) – Logaritmando maior do que zero.

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

$$x^2 - 5x + 14 > 0$$

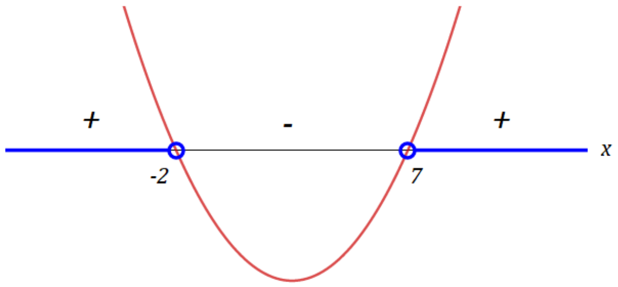
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 * 1 * (-14)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2}$$

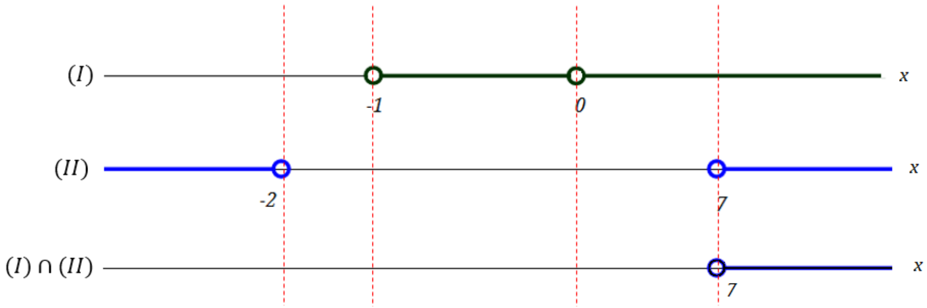
$$\frac{5 \pm 9}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{5 + 9}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = 7} \\ x_2 = \dfrac{5 - 9}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_2 = -2} \end{cases}$$

Fazendo o estudo da inequação na reta:



Perceba que queremos os valores de x onde a função é maior do que zero, isto é, a função é positiva. O intervalo aberto em -2 e também em 7 deve-se ao fato que queremos os valores apenas maiores do que zero e não maiores e iguais a zero.

Vamos agora fazer a interseção da condição (I) com a condição (II).



A interseção será determinada pelo intervalo:

$$]7, +\infty[$$

Gabarito: Alternativa **A**

3 - Imagem

A **imagem** de uma função é representada pelos **possíveis valores de y ou $f(x)$** resultantes da aplicação de x na lei de formação da função.

A **função logarítmica** apresenta como **imagem todos os números reais**. A imagem pode ser negativa, positiva ou até mesmo o zero.

A **função logarítmica** apresenta como **imagem todos os números reais**.

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{R} \quad ou \quad \boldsymbol{I} =]-\infty, +\infty[$$

27

Exemplo 3: Observe esta questão de concurso público elaborada pela FUNDATEC e veja como o tema foi cobrado na prova.

(FUNDATEC – 2019) O conjunto imagem da função $f(x) = \log_2 x$.

a) $[0\,,1]$
b) $[1\,,+\infty]$
c) $[-\infty\,,1]$
d) $(-\infty\,,+\infty)$
e) $\emptyset$

Comentários:

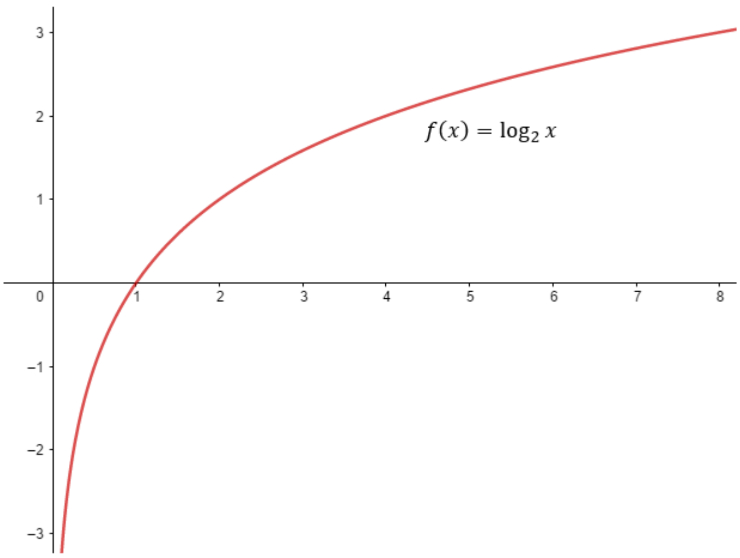
Como vimos acima, bastava saber o conceito sobre a Imagem da função logarítmica para responder a questão e garantir seu ponto na prova.

A imagem da função logarítmica é dada pelo conjunto dos números Reais. Logo:

$$I = R$$

$$\boldsymbol{I} = (-\infty\,,+\infty)$$

E o gráfico da função (que será estudado mais a frente) será:



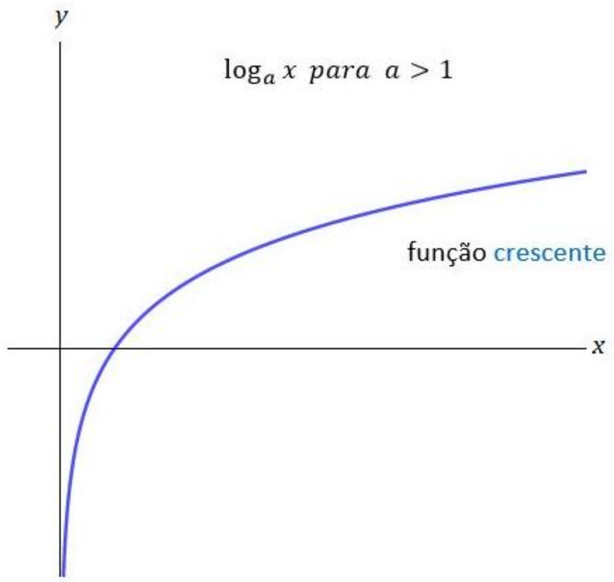
Gabarito: Alternativa **D**

4 – Gráfico e Comportamento

O gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_a x$ pode apresentar <u>dois comportamentos distintos</u> a **depender do valor da base a**.

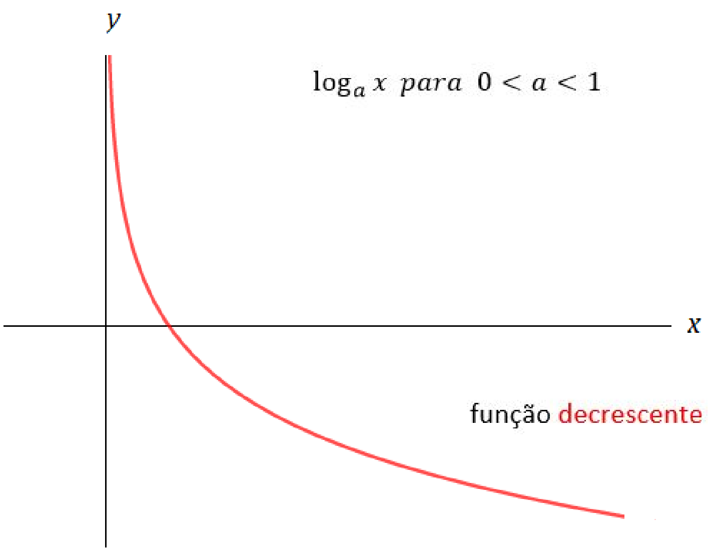
1. $a > 1$

Quando a **base é maior que a unidade** a função logarítmica terá o seguinte comportamento:



2. $0 < a < 1$

Quando a **base estiver entre 0 e 1**, o comportamento da função será:



SE LIGA!

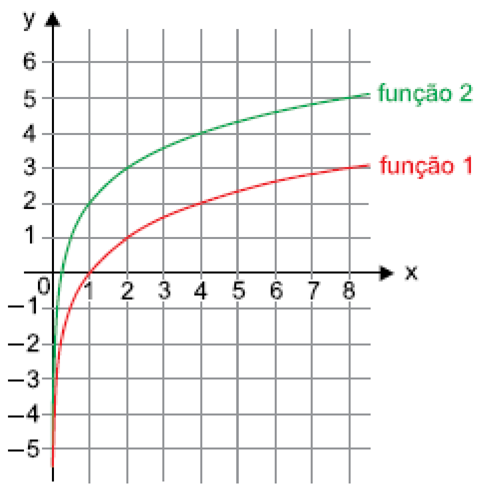
É muito **IMPORTANTE** que você saiba o **comportamento da função logarítmica** em função do valor da base. Conhecer como a função se comporta te ajudará demais na resolução dos exercícios.

RESUMINDO

- Se $a > 1$, a função será **crescente** e dado $x_2 > x1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.
- Se $0 < a < 1$, a função será **decrescente** e dado $x_2 > x1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Exemplo 3: Vejamos uma questão de concurso elaborada pela VUNESP em que você apenas precisava lembrar do comportamento da função logarítmica e assim garantiria seu ponto na prova.

(VUNESP – 2015) A imagem indica o gráfico das funções 1 e 2, ambas definidas para x real e maior do que zero.



30

De acordo com o gráfico, as funções 1 e 2 podem ser, respectivamente,

a) $y = \log_{\frac{1}{2}} x \ e \ y = \log_{\frac{1}{2}} 2x$
b) $y = 2^{x-2} \ e \ y = 2^{2x}$
c) $y = \sqrt{x} - 1 \ e \ y = \sqrt{x} + 1$
d) $y = \log_2 x \ \ e \ y = \log_2 4x$
e) $y = \sqrt{x} \ e \ y = \sqrt{4x}$

Comentários:

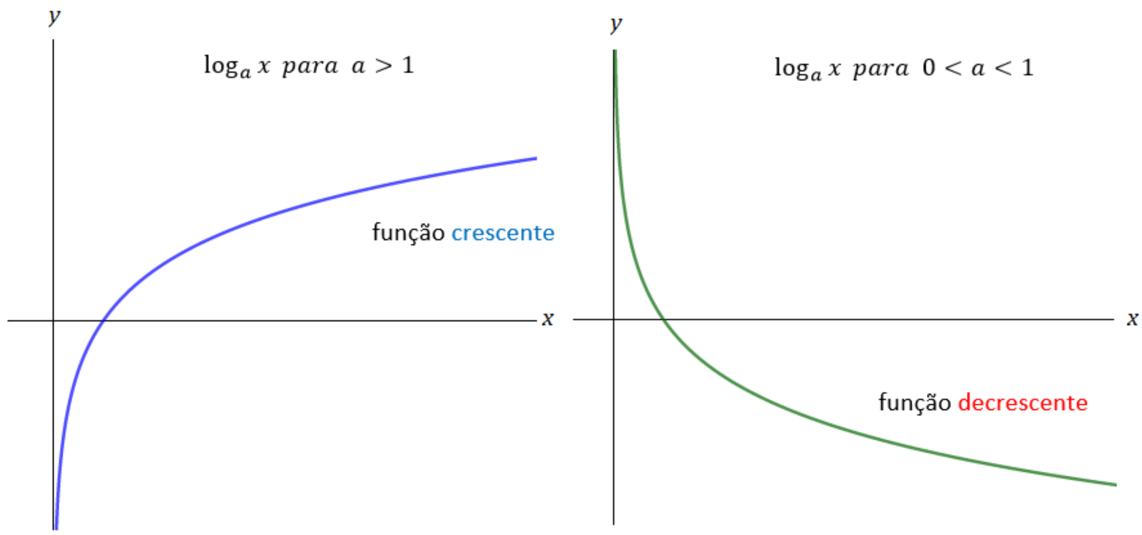
Esta questão nos mostra a importância de estar familiarizado com o gráfico das funções. Se você soubesse o comportamento da função, não precisaria fazer uma conta sequer na hora da prova.

Vamos recordar o comportamento do gráfico da função logarítmica em função da base do logaritmo. Lembrando que a base do logaritmo tem que ser maior que 0 e diferente de 1.

Em termos genéricos temos:

$$f(x) = \log_a x \quad , \quad a > 0 \ e \ a \neq 1$$

O gráfico da função pode assumir dois formatos. Vejamos:



Observe que os gráficos fornecidos pela banca possuem comportamento similar à **função crescente**, isto é, com **base maior que 1**.

A **única opção** dentre as alternativas que apresenta uma **função logarítmica com base maior que 1** é a letra D.

Gabarito: Alternativa **D**

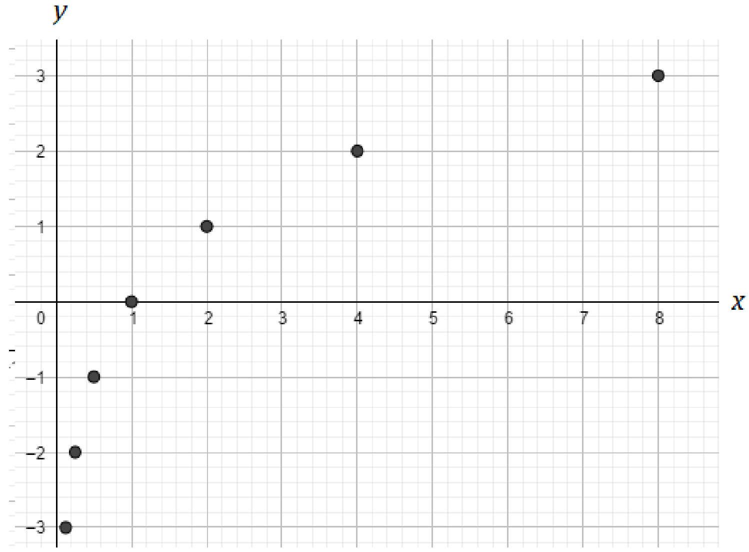
5 - Construindo o gráfico da função logarítmica

Para construir o gráfico da função iremos <u>atribuir valores para x</u> e calcular o valor da função neste ponto.

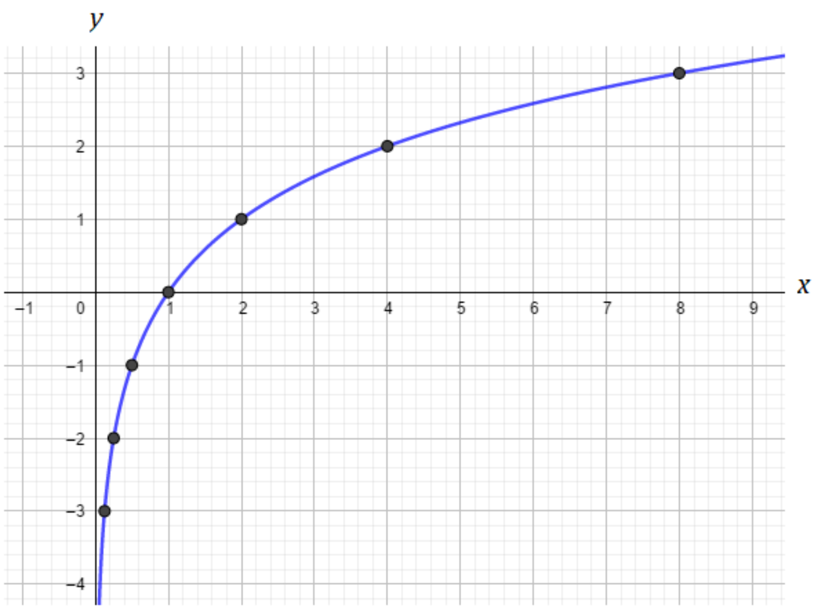
Exemplo 4: Construa o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

Vamos **atribuir alguns valores para x** e **calcular o valor da função para o respectivo valor de x**. Explicitaremos os pontos calculados no gráfico.

x	$f(x) = \log_2 x$
$1/8$	$f(1/8) = \log_2(1/8) = -3$
$1/4$	$f(1/4) = \log_2(1/4) = -2$
$1/2$	$f(1/2) = \log_2(1/2) = -1$
1	$f(1) = \log_2 1 = 0$
2	$f(2) = \log_2 1 = 1$
4	$f(4) = \log_2 4 = 2$
8	$f(8) = \log_2 8 = 3$



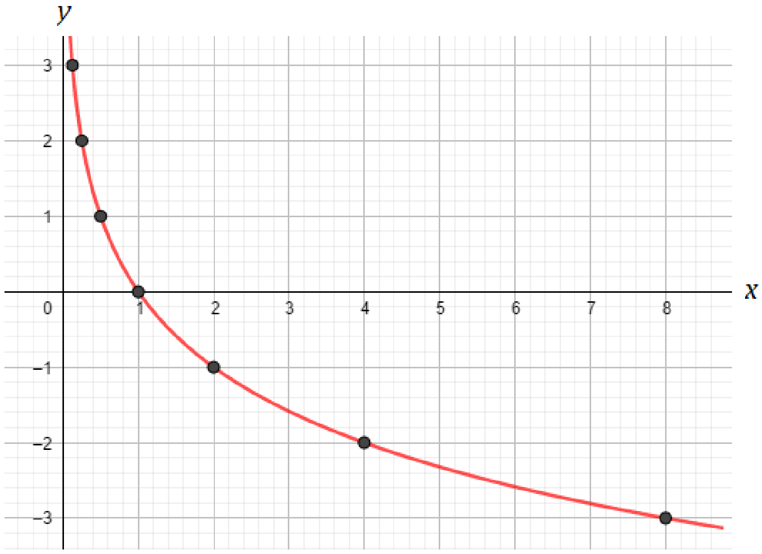
Por fim, traçamos a curva $f(x) = \log_2 x$



Exemplo 5: Construa o gráfico da função $f(x) = \log_{1/2} x$.

A mecânica da construção será a mesma. Iremos **atribuir valores para x** e calcular o valor da função para o respectivo valor de x.

x	$f(x) = \log_{1/2} x$
$1/8$	$f(1/8) = \log_{1/2}(1/8) = 3$
$1/4$	$f(1/4) = \log_{1/2}(1/4) = 2$
$1/2$	$f(1/2) = \log_{1/2}(1/2) = 1$
1	$f(1) = \log_{1/2} 1 = 0$
2	$f(2) = \log_{1/2} 1 = -1$
4	$f(4) = \log_{1/2} 4 = -2$
8	$f(8) = \log_{1/2} 8 = -3$



Aprendemos como construir o gráfico de uma **função logarítmica**. A sistemática será sempre essa. **Atribuir valores para x** e calcular o valor da função nesse ponto x.

Então **fique atento**. A banca pode cobrar essa construção de duas maneiras.

1. A banca pode te dar uma função e perguntar qual gráfico, dentre as alternativas, é o gráfico da função dada ou,
2. O enunciado pode fornecer o gráfico e perguntar qual é a função que aquele gráfico representa.

E não se esqueça do **comportamento da função logarítmica em função do valor da base** do logaritmo. Essas informações serão de grande valia para a resolução dos exercícios.

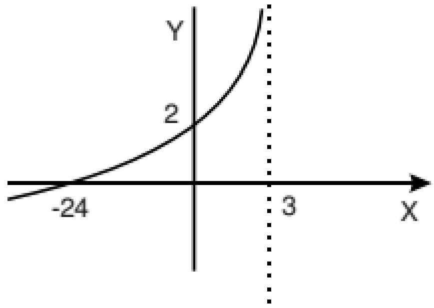
Vejamos um exemplo de cada maneira de como a prova pode abordar esse assunto.

Exemplo 6: A banca fornece a função e pergunta qual é o gráfico.

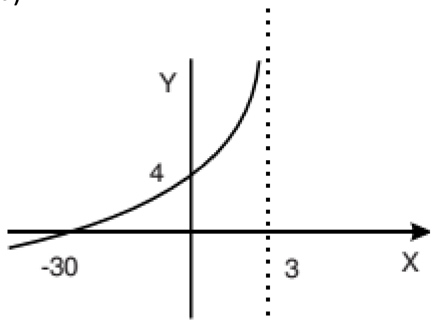
(UEPA – 2012) O gráfico que representa a função $f(x) = 3 - \log_3(3 - x)$

Uma aplicação de $f: R \to R$ é:

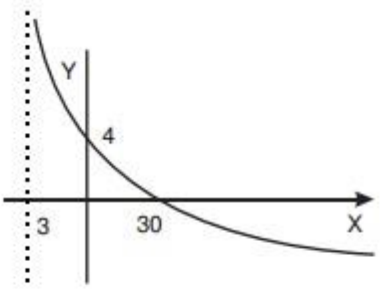
a)



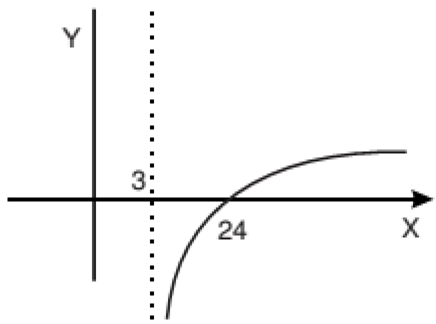
b)



c)



d)



Comentários:

A banca nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona qual o gráfico que melhor a representa.

O **primeiro passo** é descobrir **em que ponto essa função intercepta o eixo das ordenadas**, isto é, em que ponto ela corta o eixo y. Lembrando que quando a função "corta" o eixo y, o valor de x é igual a zero.

- Para $x = 0$:

$$f(x) = 3 - \log_3(3 - x)$$

$$f(0) = 3 - \log_3(3 - 0)$$

$$f(0) = 3 - \log_3 3 = 3 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(0) = 2}$$

Ou seja, a função intercepta o eixo y no ponto $(0,2)$.

Perceba que só com essa informação já poderíamos marcar como gabarito a letra A.

Vamos agora descobrir o valor da função quando $y = 0$, isto é, quando a função intercepta o eixo x.

- Para $y = 0$:

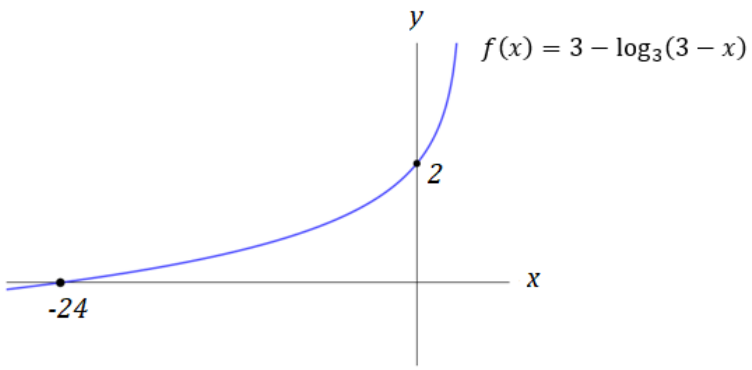
$$f(x) = 3 - \log_3(3 - x)$$

$$0 = 3 - \log_3(3 - x)$$

$$\log_3(3 - x) = 3$$

$$3 - x = 3^3 \quad \rightarrow \quad 3 - x = 27 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = -24}$$

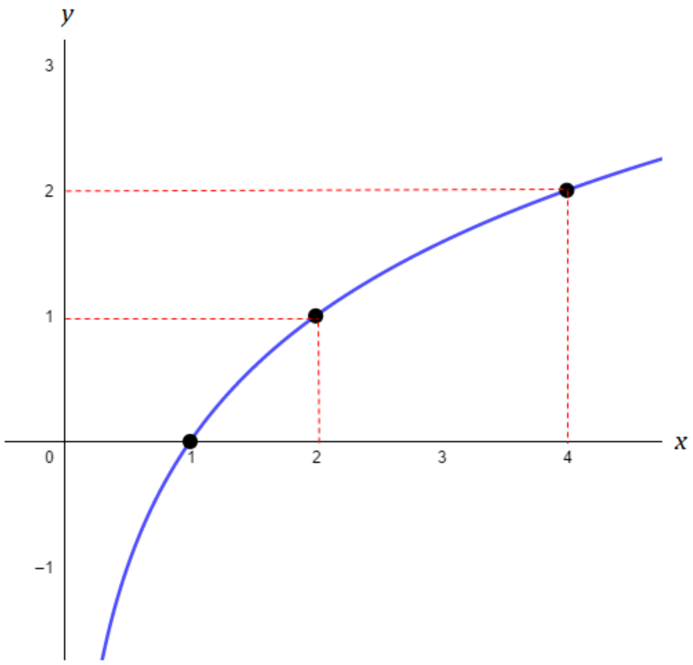
Então, o gráfico da função $f(x) = 3 - \log_3(3 - x)$ será igual a:



Gabarito: Alternativa **A**

Exemplo7: A banca fornece o gráfico e pergunta qual é a função.

(Gualimp - Adaptada / Prefeitura de Areal (RJ) – 2020) Considere a função $f: R \rightarrow R$ cujo o gráfico está esboçado abaixo.



Qual é a lei de formação da função?

a) $\log_2(x+1)$
b) $\log_2 x$
c) $\log x$
d) $\log_2 x + 1$

Comentários:

A lei de formação genérica de uma função logarítmica é igual a:

$$f(x) = \log_a(x+b)$$

Precisamos então calcular a e b. Perceba que quando $x = 1 \rightarrow y = 0$. Iremos substituir estes valores na função e calcular o valor de b.

$$f(x) = \log_a(x+b)$$

$$0 = \log_a(1+b)$$

$$a^0 = 1 + b$$

$$1 = 1 + b \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{b = 0}}$$

E para calcular o valor de a, substituiremos outro ponto pertencente a função. Observe que quando $x = 2 \rightarrow y = 1$. Sendo assim, o valor de a será igual a:

$$f(x) = \log_a(x+b)$$

$$f(2) = \log_a(2+0)$$

$$1 = \log_a 2$$

$$a^1 = 2 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = 2}}$$

Logo, a **lei de formação** será igual a:

$$f(x) = \log_a(x+b)$$

$$f(x) = \log_2(x+0) \quad \rightarrow \boldsymbol{f(x) = \log_2 x}$$

Gabarito: Alternativa **B**

6 - Função Logarítmica x Função Exponencial

Em aulas anteriores, estudamos o comportamento da função exponencial. E na aula de hoje, o comportamento da função logarítmica.

Iremos entender agora a relação entre essas duas funções.

No início da aula explicamos que **o logaritmo está intrinsicamente ligado à exponenciação**. A ideia do logaritmo é reverter a operação de exponenciação.

Na aula de **função exponencial**, aprendemos que a função:

$$g(x) = a^x$$

é uma função bijetora, e como tal, **admite função inversa**.

Calculando a função inversa de $g(x)$, teremos:

$$g(x) = a^x$$

$$y = a^x$$

$$x = a^{y^{-1}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y^{-1} = \log_a x}$$

Sendo assim, **a função logarítmica $f(x) = \log_a x$**, como demonstrado, **é a inversa da função exponencial $g(x) = a^x$**.

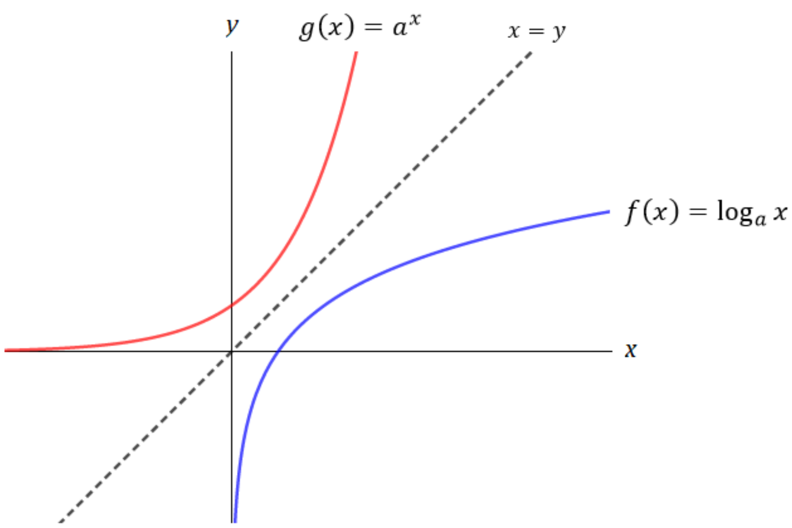
A função logarítmica $f(x)$ é inversa da função exponencial $g(x)$, ou seja, tais funções são simétricas em relação à reta xy (bissetriz dos quadrantes ímpares).

$$f(x) = \log_a x$$

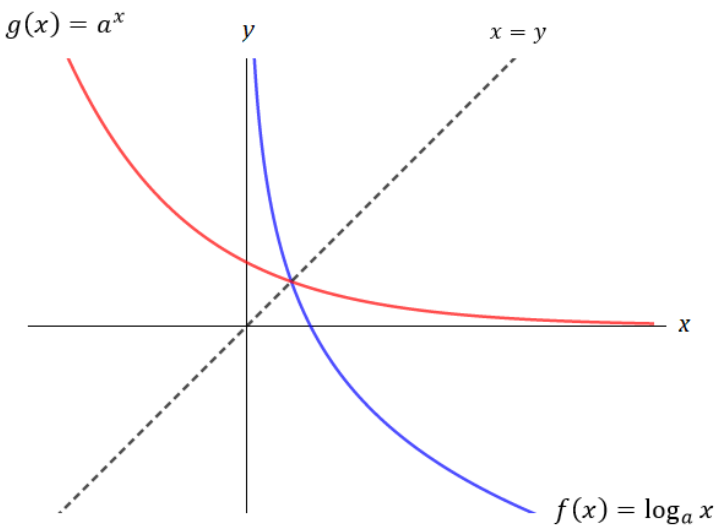
$$g(x) = a^x$$

Vamos analisar o gráfico dessas duas funções **em função da base a** do logaritmo.

1. $a > 1$



2. $0 < a < 1$



EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Este tópico **sintetiza** toda a matéria até então estudada. Iremos resolver equações que apresentam logaritmo em seus termos.

O item 5 das consequências da definição do logaritmo (estudado no início da aula) nos diz que:

Dois logaritmos em uma mesma base são iguais, se e somente se, **os logaritmandos também forem iguais**.

$$\log_a x = \log_a y \quad \leftrightarrow \quad x = y$$

Podemos expandir essa igualdade também para as funções.

Assim,

$$\boldsymbol{\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \leftrightarrow \quad f(x) = g(x)}$$

Alguns tipos de equações logarítmicas podem aparecer na sua prova.

Iremos enumerar **três tipos** e posteriormente comentar alguns exemplos que abordam os mais diversos modos de se resolver uma equação logarítmica. Depois dos exemplos, resolveremos algumas questões de concurso sobre o tema.

Lembre-se sempre de que, para cada tipo estudado, estamos adotando a **condição de existência do logaritmo**, isto é, base maior que 0 e diferente de 1 e logaritmando maior que 1.

logaritmando

$\log_a f(x)$ *Condição de existência:* $\boldsymbol{a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ e } f(x) > 0}$

base

I. Igualdade entre logaritmos de mesma base

É uma equação que apresenta igualdade de logaritmos do tipo:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$$

II. Igualdade entre um logaritmo e um número

Para resolver este tipo, aplicamos a definição de logaritmo.

$$\boldsymbol{\log_a f(x) = b \quad \rightarrow \quad f(x) = a^b}$$

III. Mudança para uma incógnita auxiliar

Para resolver este tipo de equação, tomaremos como artifício o uso de uma incógnita auxiliar para facilitar nossa solução.

São equações do tipo:

$$\boldsymbol{(\log_a x)^2 + \log_a x = b}$$

Vamos resolver alguns exemplos que abordam todos esses tipos para fixar a matéria. Atente-se que neste tópico, como falado acima, utilizaremos todo o conteúdo até aqui estudado.

As propriedades do logaritmo serão usadas exaustivamente, assim como a condição de existência do logaritmo, isto é, base maior que 0 e diferente de 1 e logaritmando maior que 1.

Também iremos utilizar a **definição de logaritmo** e as **consequências** decorrentes da definição.

Então é muito importante que você esteja familiarizado com cada propriedade do logaritmo para não se perder na resolução.

Exemplo 1: Obtenha o conjunto solução das equações abaixo:

a) $\log(4x - 9) = \log 71$

Observe que as bases são iguais, isto é, há igualdade entre dois logaritmos de mesma base (tipo I). Então,

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$f(x) = g(x)$$

$$4x - 9 = 71$$

$$4x = 80 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 20}$$

Conjunto Solução: $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{20}\}$

b) $\log_3(x+17)=5$

Igualdade entre um logaritmo e um número (tipo II).

Resolveremos pela definição de logaritmo:

$$\log_3(x+7)=5$$

$$x+7=3^5$$

$$x+7=243 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x=236}$$

Conjunto Solução: $\boldsymbol{S}=\{\mathbf{236}\}$

c) $(\log_3 x)^2-5\log_3 x=-6$

Vamos utilizar uma incógnita auxiliar para solucionar esta equação (tipo III).

Chamaremos $\log_3 x$ de y.

$$y=\log_3 x$$

Substituindo na equação e calculando o valor de y.

$$(\log_3 x)^2-5\log_3 x=-6$$

$$y^2-5y=-6$$

$$y^2-5y+6=0$$

Duas raízes que apresentam soma 5 e produto 6.

$$\boldsymbol{y_1=2} \quad e \quad \boldsymbol{y_2=3}$$

Iremos substituir na nossa igualdade auxiliar e calcular os valores de x que satisfazem a igualdade.

$$y=\log_3 x \quad \begin{cases} 2=\log_3 x & \rightarrow \quad \boldsymbol{x=9} \\ 3=\log_3 x & \rightarrow \quad \boldsymbol{x=27} \end{cases}$$

Conjunto Solução: $\boldsymbol{S}=\{\mathbf{9}\,,\mathbf{27}\}$

d) $\log_2(x-3)+\log_2 12=\log_2(x+1)$

Aplicando a "volta" da propriedade do logaritmo do produto e desenvolvendo a equação teremos:

$$\log_2(x-3)+\log_2 12=\log_2(x+1)$$

$$\log_2[(x-3)*12] = \log_2(x+1)$$

$$[(x-3)*12] = x+1$$

$$12x - 36 = x + 1$$

$$11x = 37 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{37}{11}}$$

Conjunto Solução: $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{37/11}\}$

Vejamos como esse assunto já foi <u>cobrado em prova</u>.

(FUNDATEC - 2019) A solução da equação logarítmica $\log_{10}(x-4) = 2$ é:

a) $x = 6$
b) $x = 10$
c) $x = 50$
d) $x = 100$
e) $x = 104$

Comentários:

Perceba que é uma equação logarítmica onde há a igualdade entre um logaritmo e um número. Resolveremos pela definição de logaritmo.

$$\log_{10}(x-4) = 2$$

$$x - 4 = 10^2$$

$$x - 4 = 100 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 104}$$

Gabarito: Alternativa **E**

(CETREDE - 2019) Pode-se afirmar que o conjunto verdade da equação $\log x + \log(x+1) - \log 6 = 0$ é igual a:

a) $\{3\}$
b) $\{2, -3\}$
c) $\{2\}$
d) $\{-2, 3\}$
e) $\{2, 3\}$

Comentários:

Antes de começar a resolver, perceba que **não poderíamos jamais marcar as letras B ou D** como gabarito.

Observe o segundo fator da soma:

$$\log(x+1)$$

O logaritmando tem que ser maior que 0 como condição de existência. Assim,

$$x+1>0$$

$$\boldsymbol{x>-1}$$

Ou seja, x tem que ser maior que -1 e as letra B e D apresentam -2 e -3 como solução, o que é impossível para nossa condição de existência.

Vamos trabalhar algebricamente com a igualdade e calcular o valor de x. Acompanhe.

$$\log x+\log(x+1)-\log 6=0$$

$$\log(x^2+x)=\log 6$$

$$x^2+x=6$$

$$x^2+x-6=0$$

Resolvendo por Bhaskara:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4*1*(-6)}}{2*1}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}$$

$$x=\frac{-1\pm 5}{2}\begin{cases} x_1=\dfrac{-1-5}{2} \rightarrow \cancel{\boldsymbol{x_1=-3}} \\ x_2=\dfrac{-1+5}{2} \rightarrow \boldsymbol{x_2=2} \end{cases}$$

Em um primeiro momento você poderia ir direto e marcar a letra B. Porém, vimos acima que para a condição de existência do logaritmo, x deve ser maior que -1.

Sendo assim, a solução $\boldsymbol{x_1 = -3}$ está **descartada**.

Nosso conjunto solução da equação será:

$$\boldsymbol{S = \{2\}}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(AMAUC - 2019) Seja a equação logarítmica $(\log_2 x)^2 - 6 * \log_2 x + 8 = 0$. O conjunto solução é:

a) $\{6\ e\ 8\}$
b) $\{4\ e\ 16\}$
c) $\{2\ e\ 4\}$
d) $\{-6\ e\ 8\}$
e) $\{4\ e - 16\}$

Comentários:

Para esta questão, usamos o mesmo raciocínio inicial da questão acima. **Jamais poderíamos marcar a letra D ou a E** na prova.

A condição de existência do logaritmo nos impõe que o logaritmando deve ser maior que 0. Observe o seguinte fator da equação:

$$\log_2 x$$

O logaritmando tem que ser maior que 0, como condição de existência. Assim,

$$\boldsymbol{x > 0}$$

As letras D e E apresentam valores menores que 0 como solução. Ou seja, jamais poderiam ser marcadas.

Vamos utilizar uma incógnita auxiliar para solucionar esta equação.

Chamaremos $\log_2 x$ de y.

$$y = \log_2 x$$

Substituindo na equação e calculando o valor de y.

$$(\log_2 x)^2 - 6 * \log_2 x + 8 = 0$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

Duas raízes que apresentam soma 6 e produto 8.

$$y_1 = 4 \quad e \quad y_2 = 2$$

Mas, $y = \log_2 x$. Calculando x:

$$y = \log_2 x \begin{cases} 4 = \log_2 x & \rightarrow \boldsymbol{x = 16} \\ 2 = \log_2 x & \rightarrow \boldsymbol{x = 4} \end{cases}$$

Gabarito: Alternativa **B**

(CESPE - 2018) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e, cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = \ln x = \log_e x$ tem inúmeras aplicações científicas.

A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

A equação $\ln x = -4$ tem uma única solução.

Comentários:

Perceba que é uma equação logarítmica onde há a igualdade entre um logaritmo e um número. Resolveremos pela definição de logaritmo.

$$\ln x = -4 \quad \rightarrow \boldsymbol{x = e^{-4}}$$

Então, há sim **apenas uma única** solução.

Gabarito: **Correto**

(OBJETIVA - 2015) Assinalar a alternativa que apresenta os resultados possíveis para a equação logarítmica abaixo:

$$\boldsymbol{\log_{(10-x)}(x^2 + 2x) = 1}$$

a) $x = -5 \; e \; x = 2$
b) $x = -3 \; e \; x = 2$
c) $x = -5 \; e \; x = 1$
d) $x = -3 \; e \; x = 1$

Comentários:

Observe que é uma equação logarítmica onde há a igualdade entre um logaritmo e um número.

Resolveremos pela definição de logaritmo.

$$\log_{(10-x)}(x^2 + 2x) = 1$$

$$x^2 + 2x = 10 - x$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Duas raízes que apresentam soma -3 e produto -10.

$$\boldsymbol{x_1 = -5} \; e \; \boldsymbol{x_2 = 2}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(CPCON - 2019) O conjunto solução da equação $\log_2(x^2 - 9x + 18) - \log_2(x - 6) = \log_2 8$, é:

a) $S = \{12\}$
b) $S = \{7\}$
c) $S = \{9\}$
d) $S = \{3\}$
e) $S = \{11\}$

Comentários:

Vamos aplicar a "volta" da <u>propriedade do logaritmo do quociente</u> e calcular o valor de x.

$$\log_2(x^2 - 9x + 18) - \log_2(x - 6) = \log_2 8$$

$$\log_2\left(\frac{x^2 - 9x + 18}{x - 6}\right) = \log_2 8$$

$$\frac{x^2 - 9x + 18}{x - 6} = 8$$

$$x^2 - 9x + 18 = 8x - 48$$

$$x^2 - 17x + 66 = 0$$

Resolvendo por Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 * 1 * 66}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 264}}{2}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{17 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{17+5}{2} & \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = 11} \\ x_2 = \dfrac{17-5}{2} & \rightarrow \quad \cancel{\boldsymbol{x_2 = 6}} \end{cases}$$

Encontramos 2 valores possíveis para x. Mas observe o segundo fator da equação:

$$\log_2(x-6)$$

O logaritmando tem que ser maior que 0, como condição de existência. Assim,

$$x - 6 > 0$$

$$\boldsymbol{x > 6}$$

Observe que $x_2 = 6$ não pode ser solução para nossa equação pois, como calculamos pela condição de existência, x tem que ser maior que 6. Logo, **x_2 está descartado**.

Sendo assim, o conjunto solução para nossa equação será:

$$\boldsymbol{S = \{11\}}$$

Gabarito: Alternativa **E**

(CESGRANRIO - 2017) Qual o maior valor de k na equação $\log(kx) = 2\log(x+3)$ para que ela tenha exatamente uma raiz?

a) 0
b) 3
c) 6
d) 9
e) 12

Comentários:

Vamos aplicar a "volta" da propriedade do logaritmo da potência e calcular o valor de k para que a equação tenha exatamente uma raiz.

Obs: Houve uma imprecisão terminológica. A banca quis dizer "duas raízes reais e iguais" no lugar de "uma raiz".

$$\log(kx) = 2\log(x+3)$$

$$\log(kx) = \log(x+3)^2$$

$$kx = (x+3)^2$$

$$kx = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + (6-k)x + 9 = 0$$

Para que a equação tenha exatamente uma raiz, o delta de Bhaskara tem que ser igual a 0.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$(6-k)^2 - 4 * 1 * 9 = 0$$

$$36 - 12k + k^2 - 36 = 0$$

$$k^2 - 12k = 0$$

$$k(k-12) = 0$$

$$k = 0 \quad ou \quad k = 12$$

Então, o maior valor para k será:

$$\boldsymbol{k = 12}$$

Gabarito: Alternativa **E**

INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

São **desigualdades** que apresentam logaritmos em um dos seus termos.

Assim, como estudado nas equações logarítmicas, vamos dividir as inequações em três tipos:

I. Desigualdades entre logaritmos de mesma base

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a f(x) > \log_a g(x)}}$$

Neste item, 2 pontos (a depender do valor da base) devem ser considerados.

Estudamos que quando a base a do logaritmo é maior que 1 $(a > 1)$ a função é crescente e quando a base a está entre 0 e 1 $(0 < a < 1)$ a função é decrescente.

Relembrando:

- Se $\boldsymbol{a > 1}$, a função será **crescente** e dado $\boldsymbol{x_2 > x1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)}$.
- Se $\boldsymbol{0 < a < 1}$, a função será **decrescente** e dado $\boldsymbol{x_2 > x1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)}$.

1. $\boldsymbol{a > 1}$

Quando a base é maior que 1, iremos **MANTER** o sentido da desigualdade.

$$Se\ a > 1 \quad , \quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \rightarrow \quad f(x) > g(x)$$

2. $\boldsymbol{0 < a < 1}$

Quando a base é um número entre 0 e 1, iremos **INVERTER** o sentido da desigualdade.

$$Se\ 0 < a < 1 \quad , \quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \rightarrow \quad 0 < f(x) < g(x)$$

FIQUE ATENTO!

$$\boldsymbol{\log_a f(x) > \log_a g(x)} \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \ \rightarrow \ f(x) > g(x) \quad \boldsymbol{mantém}\ a\ desigualdade \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \ \rightarrow \ 0 < f(x) < g(x) \quad \boldsymbol{inverte}\ a\ desigualdade \end{cases}$$

II. Desigualdade entre um logaritmo e um número

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a f(x) \lesseqgtr k}}$$

Para resolver este tipo de desigualdade, utilizaremos a definição de logaritmo.

Porém, assim como estudado no item acima, iremos inverter ou não o sinal da desigualdade a depender do valor da base a do logaritmo.

Quando a **base for maior que 1**, iremos **MANTER** o sentido da desigualdade. Enquanto que, quando **a base for um número entre 0 e 1**, iremos **INVERTER** o sentido da desigualdade.

Sintetizando teremos:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) > k} \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \ \rightarrow\ f(x) > a^k \ \ mantém\ o\ sinal \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1}\ \rightarrow\ 0 < f(x) < a^k \ \ inverte\ o\ sinal \end{cases}$$

Observe que podemos ter também o caso de $\log_a f(x) < k$. Mas a ideia permanece a mesma. Mantém o sinal quando a base é maior que 1 e inverte quando a base estiver entre 0 e 1.

Vejamos:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) < k} \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1}\ \rightarrow\ 0 < f(x) < a^k \ \ mantém\ o\ sinal \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1}\ \rightarrow\ f(x) > a^k \ \ inverte\ \ sinal \end{cases}$$

III. Mudança para uma incógnita auxiliar

Para resolver este tipo de equação, assim como nas equações logarítmicas, tomaremos como artifício o uso de uma incógnita auxiliar para facilitar nossa solução.

Nas **inequações logarítmicas** iremos calcular também a **condição de existência de cada fator** que apresenta o logaritmo em seu termo.

Calcularemos o **intervalo solução** para cada logaritmando e também o intervalo solução da inequação.

E nossa **resposta** será a interseção desses intervalos.

Vejamos nos exemplos e nas questões de provas solucionadas abaixo como devemos proceder.

Exemplo 1: Calcule o conjunto solução das inequações abaixo:

a) $\log_5(2x+5) < 2$

Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- $(I) - \log_5(2x+5)$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$2x + 5 > 0$$

$$2x > -5$$

$$\boldsymbol{x > -\frac{5}{2}}$$

- $(II) - \log_5(2x+5) < 2$

Observe que se trata de uma inequação do tipo II, isto é, <u>desigualdade entre um logaritmo e um número</u>.

Utilizaremos a definição de logaritmo para calcular o valor de x que satisfaz a inequação. E nesse caso, **a base é maior que 1**, ou seja, iremos **MANTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) < k} \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \ \rightarrow \ 0 < f(x) < a^k \ \ mantém\ o\ sinal \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \ \rightarrow \ f(x) > a^k \ \ inverte\ \ sinal \end{cases}$$

Calculando x teremos:

$$\log_5(2x+5) < 2$$

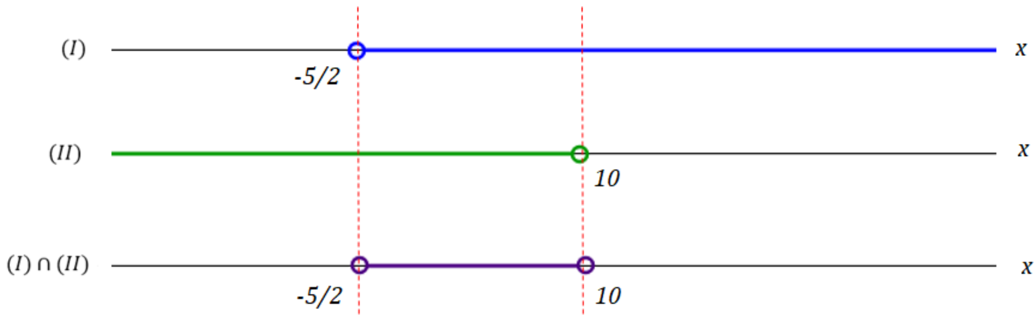
$$2x + 5 < 5^2$$

$$2x + 5 < 25$$

$$2x < 20$$

$$\boldsymbol{x < 10}$$

Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das duas soluções.



Sendo assim, o conjunto solução da inequação será:

$$\boldsymbol{S = -\frac{5}{2} < x < 10}$$

b) $\log_{1/2}(3x-2) < \log_{1/2} 7$

Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- $(I) - \log_{1/2}(3x-2)$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$3x - 2 > 0$$

$$3x > 2$$

$$\boldsymbol{x > \frac{2}{3}}$$

- $(II) - \log_{1/2}(3x-2) < \log_{1/2} 7$

Observe que se trata de uma inequação do tipo I, isto é, desigualdade entre logaritmos de mesma base. E nesse caso, **a base do logaritmo está entre 0 e 1**. Logo, devemos **INVERTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) > \log_a g(x)} \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \quad \rightarrow \quad f(x) > g(x) \quad \textit{mantém a desigualdade} \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \quad \rightarrow \quad 0 < f(x) < g(x) \quad \textit{inverte a desigualdade} \end{cases}$$

Resolvendo a inequação:

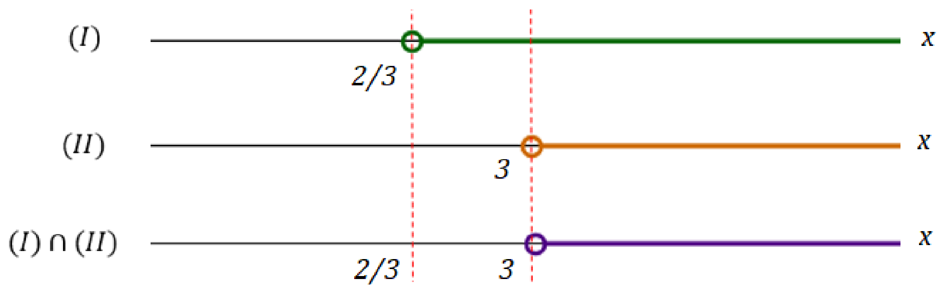
$$\log_{1/2}(3x-2) < \log_{1/2} 7$$

$$3x - 2 > 7$$

$$3x > 9$$

$$\boldsymbol{x > 3}$$

Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das duas soluções.



Sendo assim, o conjunto solução da inequação será:

$$\boldsymbol{S = x > 3}$$

c) $(\log_2(x))^2 - 5 * \log_2(x) + 6 > 0$

Mesmo procedimento dos outros dois exemplos. Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

Como os dois fatores que apresentam logaritmos são iguais, o estudo de um será igual ao do outro.

- $(I) - \log_2(x)$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$\boldsymbol{x > 0}$$

- $(II) - (\log_2(x))^2 - 5 * \log_2(x) + 6 > 0$

Observe que se trata de uma inequação do tipo III, isto é, necessitaremos de uma incógnita auxiliar para nos ajudar a encontrar o conjunto solução.

Vamos chamar $\log_2(x)$ de y e resolver para y.

$$y = \log_2(x)$$

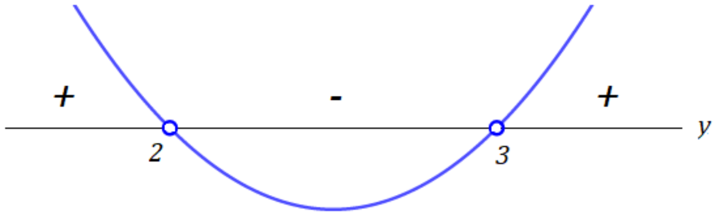
$$y^2 - 5y + 6 > 0$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

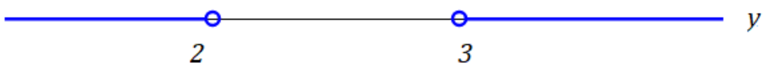
Duas raízes que a soma seja 5 e o produto 6.

$$\boldsymbol{y_1 = 2 \quad e \quad y_2 = 3}$$

Faremos o estudo de y na reta. Trata-se de uma parábola com concavidade voltada para cima e raízes em 2 e 3.



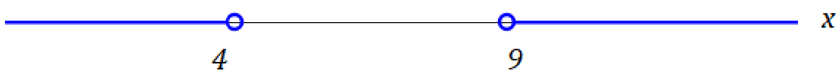
Para ser maior que 0, nosso intervalo será o intervalo positivo, isto é, o intervalo menor que 2 e o intervalo maior que 3.



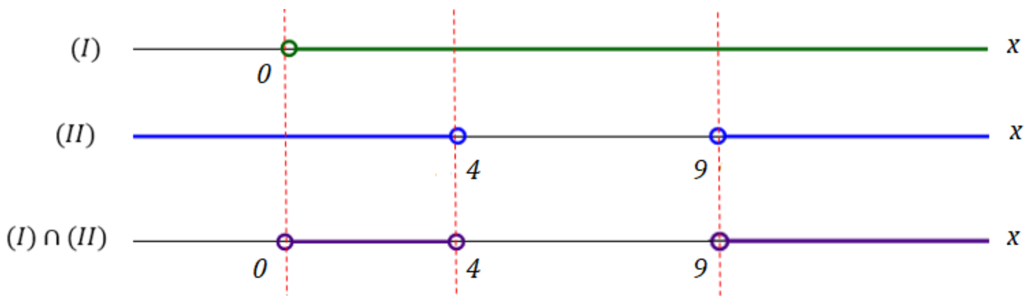
Porém, precisamos fazer o estudo da inequação em x. Sabemos que:

$$y = \log_2(x) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2 = \log_2(x) & \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 4} \\ 3 = \log_2(x) & \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 9} \end{cases}$$

Logo, nossa reta em x será:



Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das duas soluções.



Sendo assim, o conjunto solução será igual a:

$$\boldsymbol{S = 0 < x < 4 \ \ ou \ \ x > 9}$$

Vamos analisar como este assunto é cobrado em prova.

(COTEC - 2020) Resolvendo-se a inequação $\log 2x > \log(x+1)$, obtemos:

a) $S = \{x \in R \mid x < -1\}$
b) $S = \{x \in R \mid x > -1\}$
c) $S = \{x \in R \mid x > 1\}$
d) $S = \{x \in R \mid x > 1/2\}$
e) $S = \{x \in R \mid x < 1/2\}$

Comentários:

Vamos fazer o estudo do logaritmando das duas funções e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- $(I) - \log 2x$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$2x > 0$$

$$\boldsymbol{x > 0}$$

- $(II) - \log(x+1)$

Sendo o logaritmando maior que 0:

$$x + 1 > 0$$

$$\boldsymbol{x > -1}$$

- $(III) - \log 2x > \log(x+1)$

Relembrando a teoria:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) > \log_a g(x)} \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \ \rightarrow\ f(x) > g(x) \quad mantém\ a\ desigualdade \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \ \rightarrow\ 0 < f(x) < g(x) \quad inverte\ a\ desigualdade \end{cases}$$

Como a base do logaritmo (10) é maior que 1, a desigualdade se mantém.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \rightarrow \quad f(x) > g(x)$$

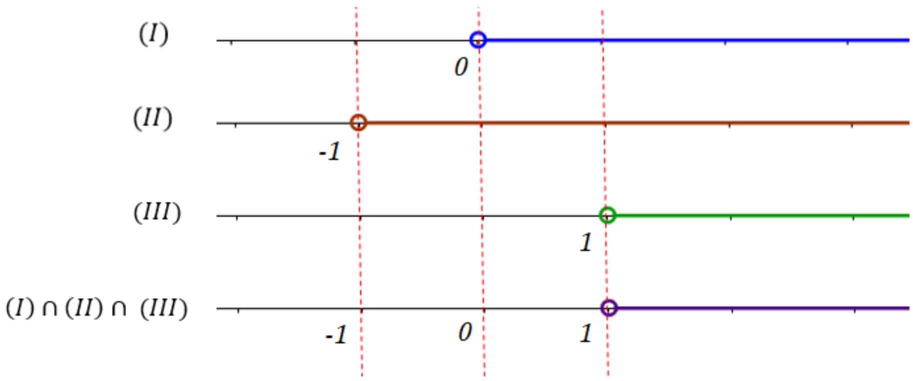
$$\log 2x > \log(x+1)$$

$$2x > x + 1$$

$$\boldsymbol{x > 1}$$

Então, chegamos a três soluções distintas para nosso valor de x.

Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das três soluções.



Sendo assim, o conjunto solução será igual a:

$$\boldsymbol{S = \{x \in R \mid x > 1\}}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(FGV - 2013) Considere a desigualdade:

$$\boldsymbol{\log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015} x)) > 0}$$

O menor valor inteiro x que satisfaz essa desigualdade é:

a) $2013^{2014} + 1$
b) $2014^{2013} + 1$
c) $2014^{2015} + 1$
d) $2015^{2014} + 1$
e) 2016

Comentários:

Vamos resolver normalmente pela definição de logaritmo e, como as **bases são maiores que 1**, iremos **MANTER** o sinal da desigualdade.

$$\log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015} x)) > 0$$

$$\log_{2014}(\log_{2015} x) > 2013^0$$

$$\log_{2014}(\log_{2015} x) > 1$$

$$\log_{2015} x > 2014$$

$$\boldsymbol{x > 2015^{2014}}$$

Perceba que x tem que ser maior que esse número. O primeiro inteiro maior que esse número é igual a esse número somado a unidade.

Sendo assim, o conjunto solução pedido no enunciado será:

$$\boldsymbol{S = 2015^{2014} + 1}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(FUNCAB - 2014) Resolva a inequação abaixo:

$$\boldsymbol{\log_{0,5}(x - 1) > 2}$$

a) $]1\,,5/4[$
b) $]1\,,+\infty[$
c) $]-\infty\,,5/4[$
d) $]-\infty\,,1[$
e) $]5/4\;,+\infty[$

Comentários:

Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e posteriormente o estudo da inequação logarítmica.

- (I) - $\log_{0,5}(x - 1)$

Estudamos que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$x - 1 > 0$$

$$\boldsymbol{x > 1}$$

- (II) - $\log_{0,5}(x - 1) > 2$

Vamos resolver pela definição de logaritmo. Porém, como **a base do logaritmo está entre 0 e 1**, iremos **INVERTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\log_a f(x) > k \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a} > \mathbf{1} \ \rightarrow\ f(x) > a^k \ \ mantém\ o\ sinal \\ Se\ \mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1} \ \rightarrow\ 0 < f(x) < a^k \ \ inverte\ o\ sinal \end{cases}$$

Então,

$$\log_{0,5}(x-1) > 2$$

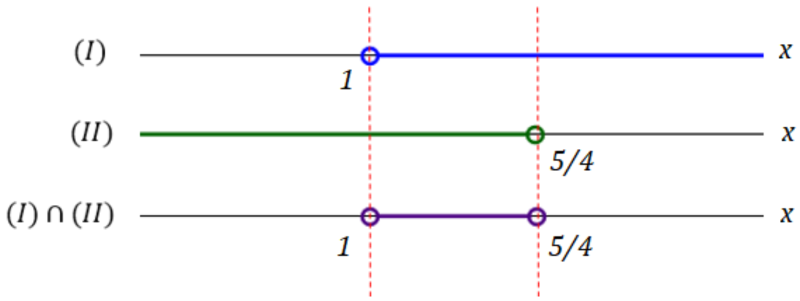
$$x - 1 < 0,5^2$$

$$x - 1 < \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{1}{4} + 1$$

$$\boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}$$

Vamos fazer o estudo das duas soluções na reta e achar a interseção delas (que será nosso resultado).



Logo, o conjunto solução será igual a:

$$\boldsymbol{S} = \left]\mathbf{1}\,,\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right[$$

Gabarito: Alternativa **A**

(MOURA MELO - 2011) Resolvendo em R a inequação logarítmica:

$$\log_2(x-3) - \log_2(x-4) < 3$$

Obtém-se:

a) $\{x \in R \mid x > 29/7\}$
b) $\{x \in R \mid 4 < x < 29/7\}$
c) $\{x \in R \mid 4 \le x \le 29/7\}$
d) $\{x \in R \mid x < 4\}$

Comentários:

Vamos fazer o estudo do logaritmando das duas funções e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- $\log_2(x-3)$

Estudamos que o logaritmando tem que ser maior que 0. Então,

$$x - 3 > 0$$

$$\boldsymbol{x > 3}$$

- $\log_2(x-4)$

Novamente, temos que o logaritmando deve ser maior que 0.

$$x - 4 > 0$$

$$\boldsymbol{x > 4}$$

- $\log_2(x-3) - \log_2(x-4) < 3$

Vamos resolver pela <u>definição de logaritmo</u>. A **base do logaritmo é maio que 1**, então, iremos **MANTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) < k} \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \ \rightarrow\ 0 < f(x) < a^k \ \ mantém\ o\ sinal \\ \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \ \rightarrow\ f(x) > a^k \ \ inverte\ \ sinal \end{cases}$$

Iremos aplicar a "volta" da <u>propriedade do logaritmo do quociente</u> e resolver para x.

$$\log_2(x-3) - \log_2(x-4) < 3$$

$$\log_2\left(\frac{x-3}{x-4}\right) < 3$$

$$\frac{x-3}{x-4} < 2^3$$

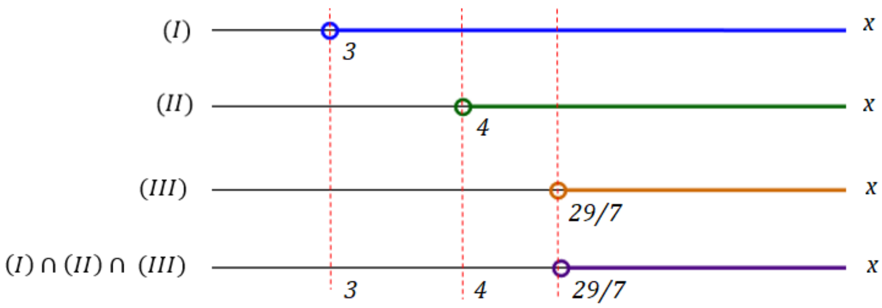
$$\frac{x-3}{x-4} < 8$$

$$x - 3 < 8x - 32$$

$$29 < 7x$$

$$\frac{29}{7} < x \ \ ou\ \boldsymbol{x} > \boldsymbol{\frac{29}{7}}$$

Vamos fazer o estudo das três soluções na reta e achar a interseção delas (que será nosso resultado).



Sendo assim, o conjunto solução será igual a:

$$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \mid \ \boldsymbol{x} > \mathbf{29/7}\}$$

Gabarito: Alternativa **A**

Chegamos ao final da teoria. Iremos comentar agora uma **bateria de questões de concursos** das mais variadas bancas que sintetizam todo o conteúdo estudado.

Vamos juntos!

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Logaritmo

1. (CESGRANRIO / BR - 2015) Sejam $M = \log 30$ e $N = \log 300$.

Na igualdade $x + N = M$, qual é o valor de x?

a) -2
b) -1
c) 0
d) +1
e) +2

Comentários:

Vamos substituir os valores na igualdade e calcular o valor de x.

$$x + N = M$$

$$x + \log 300 = \log 30$$

$$x = \log 30 - \log 300$$

Iremos aplicar a "volta" da propriedade do Logaritmo do Quociente.

O logaritmo do **quociente** é igual a **diferença** dos seus logaritmos.

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$x = \log 30 - \log 300$$

$$x = \log\left(\frac{30}{300}\right)$$

$$x = \log 0{,}1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = -1}$$

Observe que nesta parte final aplicamos a definição de logaritmo para chegar ao resultado.

10 elevado a que número é igual a 0,1? Resposta: 10 elevado a -1.

Caso você tenha dificuldade, pode manipular algebricamente para se chegar ao resultado. Vejamos. 0,1 é igual a $1/10$ que é igual a 10^{-1}.

$$x = \log 0{,}1$$

$$x = \log 10^{-1}$$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência.

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p \times \log_a x$$

$$x = \log 10^{-1}$$

$$x = -1 \times \log 10$$

Sabemos que $\log 10 = 1$. Então:

$$x = -1 \times \log 10$$

$$x = -1 \times 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = -1}$$

Gabarito: Alternativa **B**

2. (CESGRANRIO / Liquigas - 2014) A sequência $\{a_n\}, n \in N$ é uma progressão geométrica de termos positivos cuja razão é $1/64$.

Considere $\{b_n\}, n \in N$ a sequência definida por:

$$b_n = \log_2((a_n)^3)$$

A sequência $\{b_n\}$ é uma progressão

a) aritmética de razão −18.
b) aritmética de razão −6.
c) aritmética de razão 32.

d) geométrica de razão 16.
e) geométrica de razão 12.

Comentários:

Para resolver esta questão, vamos arbitrar um valor para o primeiro termo da PG. Iremos chamar $a_1 = 64$.

Então, de posse de a_1 e da razão $1/64$, vamos montar esta PG até o terceiro termo.

$$\{a_n\} = \left(64\,;1\,;\frac{1}{64}\,;\ldots\right)$$

Observe que cada número é obtido pelo número anterior multiplicado pela razão. De posse da PG, podemos determinar a sequência $\{b_n\}$. Antes de passar aos cálculos, vamos aplicar a propriedade do Logaritmo da Potência.

$$b_n = \log_2((a_n)^3)$$

$$\boldsymbol{b_n = 3 \times \log_2(a_n)}$$

- Calculando b_1:

$$b_1 = 3 \times \log_2(a_1)$$

$$b_1 = 3 \times \log_2(64)$$

$$b_1 = 3 \times 6 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b_1 = 18}}$$

- Calculando b_2:

$$b_2 = 3 \times \log_2(a_2)$$

$$b_2 = 3 \times \log_2(1)$$

$$b_2 = 3 \times 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b_2 = 0}}$$

- Calculando b_3:

$$b_3 = 3 \times \log_2(a_3)$$

$$b_3 = 3 \times \log_2\left(\frac{1}{64}\right)$$

$$b_3 = 3 \times -6 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b_3 = -18}}$$

Lembrando da aula de potência que $\frac{1}{64} = 2^{-6}$.

Então, escrevendo a sequência $\{b_n\}$ teremos:

$$\{b_n\} = (18\,;0\,;\ -18\,;\dots)$$

Perceba que cada número é igual ao número anterior menos 18. Ou seja, a sequência $\{b_n\}$ é uma progressão aritmética de razão −18.

Gabarito: Alternativa **A**

3. (CESGRANRIO / BASA - 2013) Sabe-se que x e y são números reais tais que:

$$y = 5^{3x}$$

Conclui-se que x é igual a

a) $\log_5(y^3)$
b) $\log_5(y/3)$
c) $\log_5(\sqrt[3]{y})$
d) $-\log_5(3y)$
e) $\frac{1}{3\log_5(y)}$

Comentários:

Vamos aplicar "$\log_5$" nos dois lados da igualdade e desenvolver a expressão.

$$y = 5^{3x}$$

$$\log_5 y = \log_5 5^{3x}$$

Aplicando a propriedade do Logaritmo da Potência.

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p \times \log_a x$$

$$\log_5 y = \log_5 5^{3x}$$

$$\log_5 y = 3x \times \log_5 5$$

Sabemos que $\log_5 5 = 1$.

$$\log_5 y = 3x \times 1$$

$$\log_5 y = 3x \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{1}{3} \times \log_5 y}$$

Cuidado para não marcar a Alternativa B. Observe que a fração na expressão acima está **FORA** dos parênteses, enquanto que na alternativa está dentro. São números totalmente diferentes.

Por fim, para chegar em umas das respostas, iremos aplicar a "volta" da propriedade do Logaritmo da Potência vista acima.

$$x = \frac{1}{3} \times \log_5 y$$

$$x = \log_5 y^{1/3} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \log_5 \sqrt[3]{y}}$$

Gabarito: Alternativa **C**

4. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Dado $\log_3 2 = 0,63$, tem-se que $\log_6(24)$ é igual a

a) 1,89
b) 1,77
c) 1,63
d) 1,51
e) 1,43

Comentários:

Iremos chamar $\boldsymbol{y = \log_6(24)}$ e calcular seu valor.

Observe, primeiramente, que a banca nos fornece o valor de um logaritmo na base 3. Então, vamos começar desenvolvendo o valor questionado mudando sua base para a base 3.

Dados a, x e b, números reais positivos e a e $b \neq 1$, o logaritmo de x na base a pode ser escrito da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

$$y = \log_6(24)$$

$$y = \frac{\log_3 24}{\log_3 6}$$

Reescrevendo os valores decompostos:

$$y = \frac{\log_3(2^3 \times 3)}{\log_3(2 \times 3)}$$

Aplicando a propriedade do Logartimo do produto.

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\boldsymbol{\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y}$$

$$y = \frac{\log_3 2^3 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

Iremos aplicar a propriedade do Logartimo da Potência no primeiro fator do numerador.

O logaritmo de uma **potência** (base real positiva e expoente real) é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\boldsymbol{\log_a x^p = p * \log_a x}$$

$$y = \frac{\log_3 2^3 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

$$y = \frac{3 \times \log_3 2 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

Sabemos que $\log_3 3 = 1$ e que, conforme fornecido no enuncido, $\log_3 2 = 0{,}63$. Substituindo os valores:

$$y = \frac{3 \times \log_3 2 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

$$y = \frac{3 \times 0{,}63 + 1}{0{,}63 + 1}$$

$$y = \frac{2{,}89}{1{,}63} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 1,77}$$

Gabarito: Alternativa **B**

5. (CESGRANRIO / BR - 2010) Se b é um número real positivo, diferente de 1, logo, deduz-se que

a) $\log_b 7 > \log_b 3$
b) $\log_b 12 = (\log_b 6)(\log_b 2)$
c) $\log_b 24 = (\log_b 3) + 3(\log_b 2)$
d) $\log_b(-10)^{-10} < 0$
e) $\log_b \sqrt[5]{4} = \frac{\log_b 5}{\log_b 4}$

Comentários:

Vamos analisar item a item.

a) $\log_b 7 > \log_b 3$

INCORRETO. Perceba que não podemos generalizar esta desigualdade. Essa alternativa seria correto se $b > 1$.

Porém, se b estiver entre 0 e 1, isto é, $0 < b < 1$, a **desigualdade inverte o sinal**:

$$\log_b 7 < \log_b 3$$

Logo, nem sempre essa assertiva é verdadeira.

b) $\log_b 12 = (\log_b 6)(\log_b 2)$

INCORRETO. A banca aplicou erradamente a propriedade do Logaritmo do Produto. O correto seria:

$$\log_b 12 = \log_b (6 \times 2) = \log_b 6 + \log_b 2$$

c) $\log_b 24 = (\log_b 3) + 3(\log_b 2)$

CORRETO. Vamos decompor o número 24.

$$\log_b 24 = \log_b (2^3 \times 3)$$

Iremos aplicar a propriedade do Logaritmo do Produto.

$$\log_b (2^3 \times 3) = \log_b 2^3 + \log_b 3$$

Por fim, aplicamos a propriedade do Logaritmo da Potência:

$$\log_b 2^3 + \log_b 3 = 3 \times \log_b 2 + \log_b 3$$

Sendo assim, a assertiva está correta.

d) $\log_b (-10)^{-10} < 0$

INCORRETO. Estudamos (na teoria) que a condição de existência é:

logaritmando

$$\log_a x = y \qquad\qquad \log_a x = y \quad \leftrightarrow \quad a^y = x$$

base

Condição de existência: $a > 0$ e $a \neq 1$ e $x > 0$

Sendo assim, a alterntiva contraria a condição de existência do logaritmo, uma vez que $-10 < 0$.

e) $\log_b \sqrt[5]{4} = \dfrac{\log_b 5}{\log_b 4}$

INCORRETO. Vamos desenvolver $\log_b \sqrt[5]{4}$.

$$\log_b \sqrt[5]{4} = \log_b 4^{1/5}$$

Aplicando a propriedade do Logaritmo do Produto:

$$\log_b 4^{1/5} = \frac{1}{5} \times \log_b 4$$

Logo, a assertiva está errada.

Gabarito: Alternativa **C**

6. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) A magnitude de um terremoto na escala Richter corresponde ao logaritmo (na base 10) da medida da amplitude de determinadas ondas sísmicas, sob características padronizadas, produzidas durante um terremoto.**

O poder destrutivo de um terremoto é proporcional à potência 3/2 de sua amplitude. A razão do poder destrutivo entre dois terremotos, de escalas 5 e 6 na escala Ritcher, é de

a) $(10)^{1,5}$
b) $(10)^{-1,5}$
c) 1
d) $(1/100)^{-1,5}$
e) $(1/10)^{1,5}$

Comentários:

O poder destrutivo D de um terremoto é proporcional à potência 3/2 de sua amplitude A. Ou seja,

$$D = A^{3/2}$$

A magnitude M de um terremoto na escala Richter corresponde ao logaritmo (na base 10) da medida da amplitude de determinadas ondas sísmicas.

$$M = \log A$$

Vamos calcular a Magnitude e o poder Destrutivo para dois terremotos, de escalas 5 (terremoto I) e 6 (terremoto II) na escala Ritcher.

- I: 5 na escala Ritcher.

$$M = \log A$$

$$M_I = \log A_I$$

$$5 = \log A_I \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_I = 10^5}}$$

De posse da Amplitude, calculamos o poder destrutivo D:

$$D = A^{3/2}$$

$$D_I = {A_I}^{3/2}$$

$$D_I = (10^5)^{3/2}$$

$$D_I = 10^{15/2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{D_I = 10^{7,5}}}$$

- II: 6 na escala Ritcher.

$$M = \log A$$

$$M_{II} = \log A_{II}$$

$$6 = \log A_{II} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_{II} = 10^6}}$$

De posse da Amplitude, calculamos o poder destrutivo D:

$$D = A^{3/2}$$

$$D_{II} = {A_{II}}^{3/2}$$

$$D_{II} = (10^6)^{3/2}$$

$$D_{II} = 10^{18/2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{D_{II} = 10^9}}$$

Sendo assim, <u>a razão d do poder destrutivo entre dois terremotos, de escalas 5 e 6 na escala Ritcher</u>, é de:

$$d = \frac{D_I}{D_{II}}$$

$$d = \frac{10^{7,5}}{10^9}$$

$$d = 10^{7,5-9} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{d = 10^{-1,5}}$$

Gabarito: Alternativa **B**

7. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Sejam x, M, N e P números reais positivos que tornam verdadeiras as igualdades

$$\frac{\log M}{2} = \frac{\log N}{6} = \frac{\log P}{4} = \log x$$

Qual é o valor de K para o qual

$$\frac{N^2}{\sqrt{MP}} = x^k$$

a) -1
b) 3
c) 4
d) 6
e) 9

Comentários:

Vamos trabalhar com as igualdades uma a uma e calcular o valor de M, N e P em função de x.

- M em função de x:

$$\frac{\log M}{2} = \log x$$

$$\log M = 2 \times \log x$$

$$\log M = \log x^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = x^2}}$$

- N em função de x:

$$\frac{\log N}{6} = \log x$$

$$\log N = 6 \times \log x$$

$$\log N = \log x^6 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{N = x^6}}$$

- P em função de x:

$$\frac{\log P}{4} = \log x$$

$$\log P = 4 \times \log x$$

$$\log P = \log x^4 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P = x^4}}$$

Agora, de posse do valor das incógnitas em função de x, vamos subsitituir os valores na igualdade fornecida e calcular o valor de k.

$$\frac{N^2}{\sqrt{MP}} = x^k$$

$$\frac{(x^6)^2}{\sqrt{x^2 \times x^4}} = x^k$$

$$\frac{x^{6\times 2}}{\sqrt{x^{2+4}}} = x^k$$

$$\frac{x^{12}}{\sqrt{x^6}} = x^k$$

$$\frac{x^{12}}{x^3} = x^k$$

$$x^{12-3} = x^k$$

$$x^9 = x^k \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 9}$$

Gabarito: Alternativa **E**

8. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Se

$$y = \log_{81}\left(\frac{1}{27}\right) \quad e \quad x \in R_+$$

são tais que $x^y = 8$, então x é igual a:

a) 1/16

b) 1/2
c) $\log_3 8$
d) 2
e) 16

Comentários:

Vamo desenvolver a expressão de y:

$$y = \log_{81}\left(\frac{1}{27}\right)$$

Escrevendo em termos da potência de 3.

$$y = \log_{3^4}\left(\frac{1}{3^3}\right)$$

$$y = \log_{3^4}(3^{-3})$$

Aplicando simultaneamente as propriedades da Logaritmo da Potência e da Base elevada a um expoente:

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\boldsymbol{\log_a x^p = p \times \log_a x}$$

Quando a **base estiver elevada a um expoente**, o logaritmo é igual ao **produto do inverso da base vezes o logaritmo**.

$$\boldsymbol{\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \times \log_a x}$$

$$y = \log_{3^4}(3^{-3})$$

$$y = \frac{-3}{4} \times \log_3 3$$

Sabemos que $\log_3 3 = 1$. Então:

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{-3}{4}}}$$

O enunciado nos informa que $x^y = 8$.

$$x^y = 8$$

$$x^y = 2^3$$

Vamos aplicar $\log_2$ nos dois lados e desenvolver a igualdade:

$$x^y = 2^3$$

$$\log_2 x^y = \log_2 2^3$$

$$y \times \log_2 x = 3 \times \log_2 2$$

Substituindo $y = \frac{-3}{4}$:

$$\frac{-3}{4} \times \log_2 x = 3$$

$$\log_2 x = \frac{3 \times 4}{-3}$$

$$\log_2 x = -4$$

$$x = 2^{-4}$$

$$x = \frac{1}{2^4} \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{16}}$$

Gabarito: Alternativa **A**

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Função Logarítmica

1. **(CESGRANRIO / FINEP - 2011) Sejam F e G funções reais definidas em domínios convenientes, de modo que existam números reais y_1 e y_2 tais que**

$$F(x) = y_1 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$G(x) = y_2 = x^3$$

Com as devidas restrições, a saber, $y_2 \neq 0$, podemos calcular $F(y_2)$ e, nesse caso, encontraremos

a) $-3y_1$
b) $-y_1$
c) y_1
d) $3y_1$
e) $(y_1)^3$

Comentários:

Sabemos que $y_2 = x^3$. Então, estamos em busca do valor de:

$$F(y_2) \ \rightarrow \ F(x^3)$$

O enunciado nos informa que:

$$F(x) = y_1 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

Sendo assim, $F(x^3)$ será igual a:

$$F(x^3) = \log\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$F(x^3) = \log\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$F(x^3) = \left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3$$

Aplicando a propriedade do Logaritmo da potência:

$$F(x^3) = 3 \times \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

A banca nos informa que $y_1 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$. Substituindo teremos:

$$F(x^3) = 3 \times \log\left(\frac{1}{x}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{F(x^3) = 3y_1}$$

Gabarito: Alternativa **D**

2. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Dada a função $f(x) = \log x$, de domínio R*+, têm-se $f(2) = 0,3$ e $f(3) = 0,48$. Se $f(p) = 1,38$, então p é igual a

a) 12
b) 18
c) 24
d) 30
e) 36

Comentários:

Observe que esta questão é uma "volta" do que estamos acostumados a fazer. Viemos trabalhando sempre com a decomposição de um número e a substituição pelos Logaritmos para achar um valor final.

Por exemplo, a banca fornece o valor de $\log 2$ e $\log 3$ e nos pede para calcular o $\log 24$. Este é o caso que estamos "acostumados". Iríamos decompor o número 24 e substituir em função de 2 e 3.

Porém, nesta questão, **a banca fornece o resultado e nos questiona o número que apresenta este resultado**. É como se ela fornecesse o resultado de $\log 24$ (sem dizer que a resposta é 24) e perguntasse qual número resulta na resposta fornecida.

Vamos então decompor o resultado dado em função de $0{,}3$ e $0{,}48$.

$$\boxed{\boldsymbol{f(p) = 1,38 = 0,3 + 0,3 + 0,3 + 0,48}}$$

Iremos substituir os resultados pelas respectivas funções (entendeu agora como este exercício é a volta? Estamos acostumados a substituir a função pelo resultado dela. Agora substituímos o resultado pela função).

$$f(p) = 1{,}38 = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}48$$

$$f(p) = 1{,}38 = \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 3$$

Aplicando a "volta" da propriedade do Logaritmo do Produto:

$$f(p) = \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 3$$

$$f(p) = \log(2 \times 2 \times 2 \times 3)$$

$$f(p) = \log(24) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p = 24}$$

Gabarito: Alternativa **C**

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Equações Logarítmicas

1. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2018) Se x e y são números reais, tais que $2\log(x-2y) = \log x + \log y$, qual valor de x/y?**

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Comentários:

Vamos desenvoler a igualdade acima aplicando a "volta" da propriedade do Logaritmo da Potência do lado esquerdo da igualdade e a "volta" do Logaritmo do Produto do lado direito.

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p * \log_a x$$

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$$

$$2\log(x-2y) = \log x + \log y$$

$$\log(x-2y)^2 = \log(xy)$$

Logo,

$$(x-2y)^2 = xy$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

Vamos desenvolver a equação do segundo grau para calcular o valor de x em função de y.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5y) \pm \sqrt{(-5y)^2 - 4 \times 1 \times \boldsymbol{4y^2}}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 16\boldsymbol{y^2}}}{2}$$

$$x = \frac{5y \pm \sqrt{9\boldsymbol{y^2}}}{2}$$

$$x = \frac{5y \pm 3\boldsymbol{y}}{2} \begin{cases} x = \dfrac{5y+3y}{2} = \dfrac{8y}{2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 4y}} \\ x = \dfrac{5y-3y}{2} = \dfrac{2y}{2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = y}} \end{cases}$$

Então, achamos duas igualdades: $x = 4y$ e $x = y$. O enunciado nos questiona o valor de $\frac{x}{y}$. Vamos trabalhar separadamente com cada igualdade.

- $x = 4y$

$$x = 4y \rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{x}{y} = 4}}$$

- $x = y$

$$x = y \rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{x}{y} = 1}}$$

Observe que achamos duas respostas. Alternativa A e Alternativa D. Porém, **não podemos esquecer de um "pequeno grande" detalhe.**

Aprendemos em logaritmo que o Logaritmando há de ser maior que zero. Então:

$$x - 2y > 0$$

$$x > 2y \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{x}{y} > 2}$$

Logo, dado que $\frac{x}{y}$ tem que ser maior que 2, eliminamos a segunda resposta $\left(\frac{x}{y} = 1\right)$. Sendo assim, nossa resposta será igual a:

$$\boldsymbol{\frac{x}{y} = 4}$$

Gabarito: Alternativa **D**

2. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Se $\log x$ representa o logaritmo na base 10 de x, então o valor de n tal que $\log n = 3 - \log 2$ é**

a) 2.000
b) 1.000
c) 500
d) 100
e) 10

Comentários:

Se você recordasse que 3 é igual ao $\log 1.000$ mataria esta questão rapidamente. Vejamos:

Sabemos que $\log 1.000 = 3$, pois pela definição de logaritmo $10^3 = 1.000$. Substituindo 3 por $\log 1.000$:

$$\log n = 3 - \log 2$$

$$\log n = \log 1.000 - \log 2$$

Aplicando a "volta" da propriedade do Logaritmo do Quociente.

O logaritmo do **quociente** é igual a **diferença** dos seus logaritmos.

$$\boldsymbol{\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

$$\log n = \log 1.000 - \log 2$$

$$\log n = \log \left(\frac{1.000}{2}\right)$$

$$\log n = \log 500 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n = 500}$$

"Professor, e se eu na hora da prova, por nervosismo esquecesse?"

Então, caro Aluno. Neste caso iríamos desenvolver a expressão. Não mudaria muita coisa a resolução. Vejamos:

$$\log n = 3 - \log 2$$

$$\log n + \log 2 = 3$$

Aplicando a "volta" da <u>propriedade do Logaritmo do Produto</u>.

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\boldsymbol{\log_a (x \times y) = \log_a x + \log_a y}$$

$$\log n + \log 2 = 3$$

$$\log(2n) = 3$$

$$2n = 10^3$$

$$2n = 1.000$$

$$n = \frac{1.000}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n = 500}$$

Gabarito: Alternativa **C**

3. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2017) Qual o maior valor de k na equação

$$\log(kx) = 2\log(x+3)$$

para que ela tenha exatamente uma raiz?

a) 0
b) 3
c) 6
d) 9
e) 12

Comentários:

Observe que o enunciado nos pergunta o valor de k para que tenha exatamente uma raiz, ou seja, nesse momento na hora da prova, você tem que ter em mente que, de alguma forma, você tem que chegar a uma equação do segundo grau.

E mais, uma equação do segundo grau e que o delta de Bháskara seja igual a 0, pois como estudamos nas aulas de equação do segundo grau, para um delta igual a 0 a equação aprensenta extamente uma raiz.

Iremos desenvolver a igualdade acima para buscar uma equação quadrática. Vejamos passo a passo.

$$\log(kx) = 2\log(x+3)$$

Vamos aplicar a "volta" da propriedade do logaritmo da potência.

O logaritmo de uma **potência** (base real positiva e expoente real) é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\boldsymbol{\log_a x^p = p * \log_a x}$$

$$\log(kx) = 2\log(x+3)$$

$$\log(kx) = \log\log(x+3)^2$$

$$kx = (x+3)^2$$

$$kx = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 6x - kx + 9 = 0$$

$$x^2 + (6 - k)x + 9 = 0$$

Esta é nossa equação do segundo grau. Para que tenha apenas uma raiz, $\Delta = 0$.

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$$

$$\sqrt{(6 - k)^2 - 4 \times 1 \times 9} = 0$$

$$\sqrt{(6 - k)^2 - 36} = 0$$

Elevando os 2 lados ao quadrado:

$$(6 - k)^2 - 36 = 0$$

$$(6 - k)^2 = 36$$

Para $(6 - k)$ ao quadrado ser igual a 36, o valor de dentro dos parênteses tem que ser igual a 6 ou -6.

$$(6 - k)^2 = 36 \quad \begin{cases} 6 - k = 6 & \rightarrow \boxed{\boldsymbol{k = 0}} \\ 6 - k = -6 & \rightarrow \boxed{\boldsymbol{k = 12}} \end{cases}$$

A banca nos questiona o maior valor. Logo,

$$\boldsymbol{k = 12}$$

Gabarito: Alternativa **E**

4. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Em calculadoras científicas, a tecla log serve para calcular logaritmos de base 10. Por exemplo, se digitamos 100 e, em seguida, apertamos a tecla log, o resultado obtido é 2. A tabela a seguir apresenta alguns resultados, com aproximação de três casas decimais, obtidos por Pedro ao utilizar a tecla log de sua calculadora científica.

Número digitado	Resultado obtido após apertar a tecla *log*
2	0,301
3	0,477
7	0,845

Utilizando-se os valores anotados por Pedro na tabela acima, a solução da equação $\log 6 + x = \log 28$ é:

a) 0,563
b) 0,669
c) 0,966
d) 1,623
e) 2,402

Comentários:

Vamos reescrever a igualdade com os números decompostos.

$$\log 6 + x = \log 28$$

$$\log(2 \times 3) + x = \log(7 \times 2^2)$$

Iremos aplicar a propriedade do Logaritmo do Produto.

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\boldsymbol{\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y}$$

$$\log(2 \times 3) + x = \log(7 \times 2^2)$$

$$\log 2 + \log 3 + x = \log 7 + \log 2^2$$

Aplicando a propriedade da Logaritmo da Potência no último fator.

O logaritmo de uma **potência** (base real positiva e expoente real) é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\boldsymbol{\log_a x^p = p \times \log_a x}$$

$$\log 2 + \log 3 + x = \log 7 + \log 2^2$$

$$\log 2 + \log 3 + x = \log 7 + 2 \times \log 2$$

$$x = \log 7 + \log 2 - \log 3$$

Por fim, vamos substituir os valores fornecidos no enunciado e calcular o valor de x.

$$x = \log 7 + \log 2 - \log 3$$

$$x = 0{,}845 + 0{,}301 - 0{,}477 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 0,669}$$

Gabarito: Alternativa **B**

5. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Os valores de x que satisfazem ao sistema

$$\begin{cases} y = \log(x-1) \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

São:

a) 1 ; -1
b) 1 ; 10
c) 10 ; 1/10
d) 10 ; 1/11
e) 11 ; 11/10

Comentários:

Vamos desenvolver a segunda equação:

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y = \pm 1$$

Ou seja, $y = 1$ ou $y = -1$.

Vamos substituir separadamente esses valores na primeira equação e calcular os valores de x.

- $y = 1$

$$y = \log(x-1)$$

$$1 = \log(x-1)$$

$$10^1 = x - 1$$

$$10 = x - 1$$

$$x = 10 + 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 11}$$

- $y = -1$

$$y = \log(x - 1)$$

$$-1 = \log(x - 1)$$

$$10^{-1} = x - 1$$

$$\frac{1}{10} = x - 1$$

$$x = \frac{1}{10} + 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{11}{10}}$$

Logo, $x = 11$ ou $x = \frac{11}{10}$.

Apenas lembrando que as 2 soluções satisfazem a condição de existência do Logaritmo.

$$x - 1 > 0$$

$$\boldsymbol{x > 1}$$

Gabarito: Alternativa **E**

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Inequações Logarítmicas

1. **(CESGRANRIO / BR - 2015) A estabilidade de um determinado processo industrial é avaliada a partir de um índice N, que é um número real positivo. O processo é considerado estável se, e somente se,**

$$3 \leq \log_3(N) \leq 4$$

O processo é dito instável se, e somente se, o mesmo não for estável.

Dessa forma, o referido processo industrial é considerado instável se, e somente se, o índice N pertence ao conjunto

a) $]-\infty\,,9[\ \cup\ ]12\,,+\infty[$
b) $]0\,,27[\ \cup\ ]81\,,+\infty[$
c) $]0\,,9[\ \cup\ ]12\,,+\infty[$
d) $]9\,,12[$
e) $]27\,,81[$

Comentários:

Vamos calcular o intervalo que o processo será estável e, por consequência, o intervalo restante é onde o referido processo é instável (nosso gabarito).

$$3 \leq \log_3(N) \leq 4$$

$$3^3 \leq\ N \leq 3^4$$

$$27 \leq\ N \leq 81$$

Então, o processo é estável no intervalo $(27\,;81)$. Logo. ele será INSTÁVEL em todo o restante.

Conforme estudamos na parte teórica, **o Logaritmando há de ser maior que 0**. Então,

$$\boxed{\boldsymbol{N > 0}}$$

Então, observe que na parte esquerda da reta acima, estaremos limitados aos valores maiores que zero, uma vez que, conforme vimos, $N > 0$.

Logo, o referido processo industrial é considerado instável se, e somente se, o índice N pertence ao conjunto

$$\boldsymbol{]0\,,27[\ \cup\ ]81\,,+\infty[}$$

Gabarito: Alternativa **B**

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Logaritmo

1. (CESGRANRIO / BR - 2015) Sejam $M = \log 30$ e $N = \log 300$.

Na igualdade $x + N = M$, qual é o valor de x?

a) -2
b) -1
c) 0
d) +1
e) +2

2. (CESGRANRIO / Liquigas - 2014) A sequência $\{a_n\}, n \in N$ é uma progressão geométrica de termos positivos cuja razão é $1/64$.

Considere $\{b_n\}, n \in N$ a sequência definida por:

$$b_n = \log_2((a_n)^3)$$

A sequência $\{b_n\}$ é uma progressão

a) aritmética de razão −18.
b) aritmética de razão −6.
c) aritmética de razão 32.
d) geométrica de razão 16.
e) geométrica de razão 12.

3. (CESGRANRIO / BASA - 2013) Sabe-se que x e y são números reais tais que:

$$y = 5^{3x}$$

Conclui-se que x é igual a

a) $\log_5(y^3)$
b) $\log_5(y/3)$

c) $\log_5(\sqrt[3]{y})$
d) $-\log_5(3y)$
e) $\frac{1}{3\log_5(y)}$

4. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Dado $\log_3 2 = 0,63$, tem-se que $\log_6(24)$ é igual a

a) 1,89
b) 1,77
c) 1,63
d) 1,51
e) 1,43

5. (CESGRANRIO / BR - 2010) Se b é um número real positivo, diferente de 1, logo, deduz-se que

a) $\log_b 7 > \log_b 3$
b) $\log_b 12 = (\log_b 6)(\log_b 2)$
c) $\log_b 24 = (\log_b 3) + 3(\log_b 2)$
d) $\log_b(-10)^{-10} < 0$
e) $\log_b \sqrt[5]{4} = \frac{\log_b 5}{\log_b 4}$

6. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) A magnitude de um terremoto na escala Richter corresponde ao logaritmo (na base 10) da medida da amplitude de determinadas ondas sísmicas, sob características padronizadas, produzidas durante um terremoto.

O poder destrutivo de um terremoto é proporcional à potência 3/2 de sua amplitude. A razão do poder destrutivo entre dois terremotos, de escalas 5 e 6 na escala Ritcher, é de

a) $(10)^{1,5}$
b) $(10)^{-1,5}$
c) 1
d) $(1/100)^{-1,5}$
e) $(1/10)^{1,5}$

7. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Sejam x, M, N e P números reais positivos que tornam verdadeiras as igualdades

$$\frac{\log M}{2} = \frac{\log N}{6} = \frac{\log P}{4} = \log x$$

Qual é o valor de K para o qual

$$\frac{N^2}{\sqrt{MP}} = x^k$$

a) -1
b) 3
c) 4
d) 6
e) 9

8. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Se

$$y = \log_{81}\left(\frac{1}{27}\right) \;\; e \;\; x \in R_+$$

são tais que $x^y = 8$, então x é igual a:

a) 1/16
b) 1/2
c) $\log_3 8$
d) 2
e) 16

Gabarito

1. B
2. A
3. C
4. B
5. C
6. B
7. E
8. A

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Função Logarítmica

1. **(CESGRANRIO / FINEP - 2011) Sejam F e G funções reais definidas em domínios convenientes, de modo que existam números reais y_1 e y_2 tais que**

$$F(x) = y_1 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$G(x) = y_2 = x^3$$

Com as devidas restrições, a saber, $y_2 \neq 0$, podemos calcular $F(y_2)$ e, nesse caso, encontraremos

a) $-3y_1$
b) $-y_1$
c) y_1
d) $3y_1$
e) $(y_1)^3$

2. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Dada a função $f(x) = \log x$, de domínio R*+, têm-se $f(2) = 0,3$ e $f(3) = 0,48$. Se $f(p) = 1,38$, então p é igual a**

a) 12
b) 18
c) 24
d) 30
e) 36

GABARITO

1. D
2. C

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Equações Logarítmicas

1. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2018) Se x e y são números reais, tais que $2\log(x-2y) = \log x + \log y$, qual valor de x/y?**

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

2. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Se $\log x$ representa o logaritmo na base 10 de x, então o valor de n tal que $\log n = 3 - \log 2$ é**

a) 2.000
b) 1.000
c) 500
d) 100
e) 10

3. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2017) Qual o maior valor de k na equação**

$$\log(kx) = 2\log(x+3)$$

para que ela tenha exatamente uma raiz?

a) 0
b) 3
c) 6
d) 9
e) 12

4. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Em calculadoras científicas, a tecla log serve para calcular logaritmos de base 10. Por exemplo, se digitamos 100 e, em seguida, apertamos a tecla log, o resultado obtido é 2. A tabela a seguir apresenta alguns resultados, com aproximação de três casas decimais, obtidos por Pedro ao utilizar a tecla log de sua calculadora científica.**

Número digitado	Resultado obtido após apertar a tecla *log*
2	0,301
3	0,477
7	0,845

Utilizando-se os valores anotados por Pedro na tabela acima, a solução da equação $\log 6 + x = \log 28$ é:

a) 0,563
b) 0,669
c) 0,966
d) 1,623
e) 2,402

5. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Os valores de x que satisfazem ao sistema**

$$\begin{cases} y = \log(x-1) \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

São:

a) 1 ; -1
b) 1 ; 10
c) 10 ; 1/10
d) 10 ; 1/11
e) 11 ; 11/10

Gabarito

1. D
2. C
3. E
4. B
5. E

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Inequações Logarítmicas

1. **(CESGRANRIO / BR - 2015) A estabilidade de um determinado processo industrial é avaliada a partir de um índice N, que é um número real positivo. O processo é considerado estável se, e somente se,**

$$3 \leq \log_3(N) \leq 4$$

O processo é dito instável se, e somente se, o mesmo não for estável.

Dessa forma, o referido processo industrial é considerado instável se, e somente se, o índice N pertence ao conjunto

a) $]-\infty, 9[\ \cup\ ]12, +\infty[$
b) $]0, 27[\ \cup\ ]81, +\infty[$
c) $]0, 9[\ \cup\ ]12, +\infty[$
d) $]9, 12[$
e) $]27, 81[$

GABARITO

1. B

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.