Aula 13

BNB (Analista Bancário) Matemática - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

14 de Junho de 2023

Índice

MATRIZES

Matrizes

Introdução às matrizes

Podemos representar uma matriz tanto com colchetes "[ ]" quanto com parênteses "( )".

Matriz de **dimensão** m × n: m linhas e n colunas.

Elemento a_{ij}: o primeiro índice representa a linha e o segundo índice representa a coluna.

Representação de uma matriz pela lei de formação

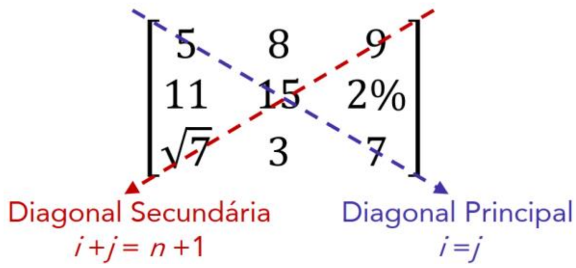
Cada elemento da matriz deve ser calculado por meio de uma fórmula apresentada.

Tipos de matrizes

Matriz linha: apresenta apenas uma linha. Dimensão da forma 1 × n.

Matriz coluna: apresenta apenas uma coluna. Dimensão da forma m × 1.

Matriz quadrada: apresenta o mesmo número de linhas e de colunas. Dimensão da forma n × n.



Matriz Retangular: número de linhas é diferente do número de colunas.

Matriz Diagonal: matriz quadrada em que todos os **elementos que não pertencem à diagonal principal** são iguais a **zero**.

Matriz Triangular: matriz quadrada em que todos os elementos acima ou abaixo de sua **diagonal principal** são nulos.

- **Matriz Triangular Superior**: todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.
- **Matriz Triangular Inferior**: todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

Matriz Identidade: elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os elementos fora da diagonal principal são zero.

Matriz Nula: todos os elementos são iguais a zero. É comum representar uma matriz nula quadrada pela letra O acrescida de um índice que indica a ordem da matriz. Ex: $O_3 \rightarrow$ matriz nula quadrada de ordem 3.

Operações com matrizes

Igualdade entre matrizes: duas matrizes são iguais quando apresentam a mesma dimensão **m×n** e seus elementos são idênticos e estão nas mesmas posições.

Adição e subtração de matrizes: é necessário que as matrizes tenham a mesma dimensão **m×n**. Para realizar a operação, basta somar/subtrair os termos que estão na mesma posição.

Multiplicação da matriz por um número real: multiplicar todos os elementos da matriz pelo número real.

Multiplicação de matrizes

1. Verificar se o **número de** colunas **da** primeira matriz é igual ao **número de** linhas **da** segunda. Se essa igualdade não se verificar, não é possível realizar o produto das matrizes.

2. Obter o esquema geral da matriz-produto, que apresenta a seguinte dimensão:

Número de linhas da primeira × Número de colunas da segunda

Colunas da 1ª = Linhas da 2ª

$$A_{2\times3} \quad B_{3\times4}$$

Produto: Linhas da 1ª e Colunas da 2ª

$$C_{2\times4}$$

3. Obter os elementos da matriz resultante a partir das linhas da primeira matriz e das colunas da segunda matriz.

O elemento c_{ij} da matriz-produto C é obtido por meio da linha $\boldsymbol{i}$ da primeira matriz e da coluna $\boldsymbol{j}$ da segunda matriz.

Propriedades da multiplicação de matrizes

A propriedade comutativa não vale para matrizes: $AB \neq BA$.

Propriedade associativa entre matrizes: $(AB)C = A(BC)$

Propriedade associativa entre matrizes e um número real: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Propriedade distributiva: $\boldsymbol{A}(B + C) = \boldsymbol{A}B + \boldsymbol{A}C$; $(B + C)\boldsymbol{A} = B\boldsymbol{A} + C\boldsymbol{A}$

Elemento neutro da multiplicação de matrizes: $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{I}A = \boldsymbol{A}$

Traço de uma matriz quadrada

O **traço** de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da sua diagonal principal. Se A é uma matriz quadrada, então o seu traço é representado por $tr(A)$.

- $tr\ (A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr\ (A - B) = tr(A) - tr(B)$
- $tr(\alpha A) = \alpha\ tr(A)$
- $tr\ (AB) = tr(BA)$

<table>
<tr><th>Matriz oposta</th></tr>
<tr><td>A matriz oposta de A é $-A$.</td></tr>
<tr><th>Matriz transposta, simétrica e antissimétrica</th></tr>
<tr><td>A transposta de uma matriz A (notação: A^t) corresponde à matriz cujas <u>linhas foram transformadas em colunas</u>.
$$(A^t)^t = A$$
$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$
$$(\boldsymbol{AB})^t = \boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t$$
$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

Matriz Simétrica: a matriz é igual a sua transposta $\rightarrow A = A^t$
• É quadrada; e
• Os elementos simétricos com relação à diagonal principal são <u>iguais</u>.
Matriz antissimétrica: $A^t = -A$
• É quadrada;
• A diagonal principal é nula; e
• Os elementos simétricos com relação à diagonal principal são <u>opostos</u>.</td></tr>
<tr><th>Matriz inversa</th></tr>
<tr><td>
$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

Uma matriz que não possui inversa é denominada <u>singular</u>.

Propriedades:
$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$
$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$$
$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$
$$(\boldsymbol{ABC})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

Matriz inversa como análogo da divisão: pode-se <u>multiplicar ambos os lados</u> de uma equação matricial pela inversa de uma matriz (A^{-1}) e, na sequência, usar a propriedade $A^{-1}A = I$.</td></tr>
<tr><th>Matriz ortogonal</th></tr>
<tr><td>Uma matriz A é dita ortogonal quando a sua <u>inversa</u> é igual a sua <u>transposta</u>:
$$A \text{ é ortogonal} \leftrightarrow A^{-1} = A^t$$</td></tr>
</table>

Introdução às matrizes

Noção básica

A ideia básica de uma matriz é **representar uma tabela de um modo mais formal**, com uma "**linguagem matemática**".

Suponha, por exemplo, que um concurseiro quer organizar em uma matriz **quantas horas ele pretende estudar** em cada dia da semana das próximas quatro semanas. Considere também que:

- As linhas representam os dias da semana: a primeira linha corresponde à **segunda-feira**, a segunda linha corresponde à **terça-feira**, e assim sucessivamente até a sétima linha, que corresponde ao **domingo**.
- As colunas representam as semanas: a primeira coluna corresponde à **primeira semana**, a segunda coluna corresponde à **segunda semana**, a terceira coluna corresponde à **terceira semana** e, por fim, a quarta coluna corresponde à **quarta semana**.

Nesse caso, o concurseiro pode representar a sua matriz do seguinte modo:

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccc} \text{1ª col. (1ª sem.)} & \text{2ª col. (2ª sem.)} & \text{3ª col. (3ª sem.)} & \text{4ª col. (4ª sem.)} \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{1ª linha (segunda)} \\ \text{2ª linha (terça)} \\ \text{3ª linha (quarta)} \\ \text{4ª linha (quinta)} \\ \text{5ª linha (sexta)} \\ \text{6ª linha (sábado)} \\ \text{7ª linha (domingo)} \end{array} &
\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Note que o elemento que está na 6ª linha e na 2ª coluna representa o número de horas que concurseiro planeja estudar no sábado da segunda semana: **11 horas**.

$$\begin{array}{rc}
 & \text{2ª coluna (2ª semana)} \\
 & \downarrow \\
\text{6ª linha (sábado)} \rightarrow & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Podemos representar uma matriz tanto com **colchetes** "[ ]" quanto com **parênteses** "( )". Portanto, a matriz em questão também pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Dimensão de uma matriz

Podemos dizer que uma **matriz de <u>dimensão</u>** $m \times n$ (lê-se: matriz de dimensão m por n) é uma matriz formada por **<u>elementos</u>** (ou **<u>entradas</u>**) distribuídos em m linhas e n colunas.

No exemplo que acabamos de mostrar, temos uma matriz composta por 7 linhas e por 4 colunas. Portanto, trata-se de uma **matriz** 7×4 (matriz 7 por 4). Vejamos mais quatro exemplos:

- $\begin{bmatrix} 11 & \sqrt[3]{3} & 7/9 \\ 6 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×3;
- $\begin{bmatrix} 5 & 11/12 & 1 & 5^3 \\ \sqrt{7} & 4 & 4 & 15 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×4;
- $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 11 & 13 \\ 17 & 19 \end{bmatrix}$ é uma matriz 4×2;
- $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×1.

FIQUE ATENTO!

A ordem correta é Nº de LINHAS × Nº de COLUNAS

Representação genérica dos elementos de uma matriz

Cada elemento de uma matriz apresenta uma determinada **localização** dentro dela. Essa localização é dada pela linha e pela coluna do elemento.

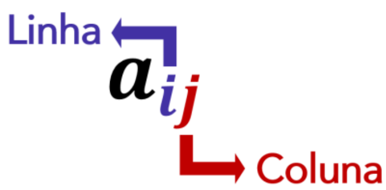
Considere a seguinte matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Genericamente, um elemento dessa matriz A pode ser representado por $\boldsymbol{a_{ij}}$, em que $\boldsymbol{i}$ representa a linha em que esse elemento se encontra e $\boldsymbol{j}$ representa a sua coluna.

FIQUE ATENTO!

O primeiro índice representa a linha e o segundo índice representa a coluna.



Por exemplo, o elemento a_{42} é aquele que está na linha 4 e na coluna 2. Portanto, $a_{42} = 4$.

$$\begin{array}{cc} & \text{2ª coluna} \\ & \downarrow \\ \text{4ª linha} \rightarrow & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

O elemento a_{24}, por sua vez, é aquele que está na linha 2 e na coluna 4. Portanto, $a_{24} = 3$.

$$\begin{array}{cc} & \text{4ª coluna} \\ & \downarrow \\ \text{2ª linha} \rightarrow & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Representação genérica de uma matriz

Uma matriz A de dimensão **m×n**, isto é, uma matriz A com **m** linhas e **n** colunas, pode ser representada genericamente das seguintes formas:

$$A_{m\times n}$$

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Representação de uma matriz pela lei de formação

Podemos representar uma matriz por meio de uma **lei de formação**. Nesse caso, cada elemento da matriz deve ser calculado por meio de uma fórmula apresentada.

Considere por exemplo, a seguinte matriz:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 3} \text{ tal que } a_{ij} = i + j^2$$

Note que a matriz A é 3×3, isto é, possui 3 linhas e 3 colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Para obter a matriz, devemos calcular cada um de seus elementos a_{ij} por meio da lei de formação apresentada, dada por $a_{ij} = i + j^2$.

$$a_{11} = 1 + 1^2 = 2$$

$$a_{12} = 1 + 2^2 = 5$$

$$a_{13} = 1 + 3^2 = 10$$

$$a_{21} = 2 + 1^2 = 3$$

$$a_{22} = 2 + 2^2 = 6$$

$$a_{23} = 2 + 3^2 = 11$$

$$a_{31} = 3 + 1^2 = 4$$

$$a_{32} = 3 + 2^2 = 7$$

$$a_{33} = 3 + 3^2 = 12$$

Portanto, a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 3 & 6 & 11 \\ 4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Vamos a um exercício.

(DNIT/2013) Os elementos de uma matriz $A_{3\times 2}$, isto é, com três linhas e duas colunas, são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} (i+j)^2, \text{se } i = j \\ i^2 + j^2, \quad \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Em que a_{ij} representa o elemento da matriz $A_{3\times 2}$ localizado na linha i e coluna j. Então, a soma dos elementos da primeira coluna de $A_{3\times 2}$ é igual a:

a) 17

b) 15

c) 12

d) 19

e) 13

Comentários:

Como a matriz A apresenta 3 linhas e 2 colunas, podemos representá-la genericamente do seguinte modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

A questão pede a soma dos elementos da primeira coluna de A:

$$a_{11} + a_{21} + a_{31}$$

Para a_{11}, temos $i = j$. Logo, $a_{11} = (1+1)^2 = 4$.

Para a_{21}, temos $i \neq j$. Logo, $a_{21} = 1^2 + 2^2 = 5$.

Para a_{31}, temos $i \neq j$. Logo, $a_{31} = 3^2 + 1^2 = 10$.

A questão pede a soma dos elementos da primeira coluna de A é:

$$4 + 5 + 10 = 19$$

Gabarito: Letra D.

Tipos de matrizes

Matriz linha

É uma matriz com **apenas uma linha**, ou seja, tem dimensão da forma $\mathbf{1} \times n$. Exemplos:

- $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha de dimensão $\mathbf{1} \times 3$.
- $\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} & \sqrt[2]{4} & \frac{11}{2} & 7 & 2 & 1 & 4^2 & \frac{13}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz linha de dimensão $\mathbf{1} \times 9$.

Matriz coluna

É uma matriz com **apenas uma coluna**, ou seja, tem dimensão da forma $m \times \mathbf{1}$. Exemplos:

- $\begin{bmatrix} -4 \\ \sqrt[5]{6} \\ 5^3 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna de dimensão $3 \times \mathbf{1}$.
- $\begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ \sqrt[2]{4} \\ -11 \\ 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna de dimensão $5 \times \mathbf{1}$.

Matriz quadrada

É uma matriz que apresenta o **mesmo número de linhas e de colunas**, ou seja, tem dimensão da forma $n \times n$. Exemplos:

- $\begin{bmatrix} 11 & 4^2 \\ 70\% & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de dimensão 2×2.
- $\begin{bmatrix} 7 & 5^3 & 3 \\ 4 & -8 & 22 \\ 11 & 4\% & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de dimensão 3×3.

Quando uma **matriz quadrada** apresenta **dimensão $n \times n$**, dizemos que essa matriz quadrada apresenta **ordem n**. Nos dois exemplos anteriores, temos uma matriz quadrada de ordem 2 e uma matriz quadrada de ordem 3, respectivamente.

Diagonais da matriz quadrada

Uma matriz quadrada apresenta duas diagonais: a **diagonal principal** e a **diagonal secundária**.

A diagonal principal é composta pelos elementos em que o número da linha é igual ao número da coluna, isto é, $\boldsymbol{i = j}$.

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 11 & 15 & 2\% \\ \sqrt{7} & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Para o exemplo em questão, os elementos da diagonal principal são $a_{11} = 5$, $a_{22} = 15$ e $a_{33} = 7$.

Já a diagonal secundária é composta por elementos cuja soma da linha e da coluna $(i + j)$ é igual à ordem da matriz (n) acrescida de uma unidade, isto é:

$$\boldsymbol{i + j = n + 1}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 11 & 15 & 2\% \\ \sqrt{7} & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Para o exemplo em questão, os elementos da diagonal secundária são $a_{13} = 9$, $a_{22} = 15$ e $a_{31} = \sqrt{7}$.

Matriz retangular

Uma matriz é retangular quando o número de linhas é diferente do número de colunas. Exemplos:

- $\begin{bmatrix} 3 & \frac{11}{2} \\ 3^3 & -11 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz retangular de dimensão 3×2.
- $\begin{bmatrix} 0 & 11 & 4 \\ -9 & 50\% & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz retangular de dimensão 2×3.

Matriz diagonal

A matriz diagonal é uma matriz quadrada em que todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero. Exemplos:

- $\begin{bmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$

Matriz triangular

Uma matriz triangular é uma **matriz quadrada** em que todos os elementos acima ou abaixo de sua **diagonal principal** são nulos.

Matriz triangular superior

Quando todos os elementos **abaixo** da **diagonal principal** forem **nulos**, temos uma **matriz triangular superior**. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 7 & 1 \\ \mathbf{0} & 9 & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Quando todos os elementos **acima** da **diagonal principal** forem **nulos**, temos uma **matriz triangular inferior**. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 8 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 9 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 3 & 9 & 5 & \mathbf{0} \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade ou matriz unidade

A **matriz identidade** (ou matriz unidade) é uma **matriz quadrada** cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os elementos fora da diagonal principal são zero. Exemplo:

$$I_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

A representação desse tipo de matriz é dada pela letra I acrescida de um índice que indica a ordem da matriz. Isso significa que I_3 é uma matriz identidade de ordem 3:

$$I_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Matriz nula

Matriz nula é a matriz que apresenta todos seus elementos iguais a zero. Exemplos:

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nula de dimensão 2×3.

- $O_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nula quadrada de ordem 3.

É comum representar uma matriz nula quadrada pela letra O acrescida de um índice que indica a ordem da matriz. Isso significa que **O_3 é uma matriz nula quadrada de ordem 3**.

Operações com matrizes

Igualdade entre matrizes

Duas matrizes são iguais quando:

- Apresentam a mesma dimensão $m \times n$;
- Seus elementos são idênticos e estão nas mesmas posições.

Por exemplo, as duas matrizes abaixo são iguais, pois apresentam a dimensão 3×3, bem como seus elementos são idênticos e estão nas mesmas posições:

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 11 & -3 \\ 7 & 4^2 & -4 \\ \sqrt{2} & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 11 & -3 \\ 7 & 4^2 & -4 \\ \sqrt{2} & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe agora a suposta igualdade:

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 11 & -3 \\ 7 & \mathbf{4^2} & -4 \\ \boldsymbol{y} & 5 & -1 \end{bmatrix} \overset{??}{=} \begin{bmatrix} 3/4 & 11 & -3 \\ 7 & \boldsymbol{x} & -4 \\ \boldsymbol{\sqrt{2}} & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Note que a igualdade só se verifica se $\boldsymbol{x = 4^2}$ e $\boldsymbol{y = \sqrt{2}}$. Caso contrário, as duas matrizes não serão iguais.

(Pref. N Horizonte/2019) O valor de $x + y$ que determina a igualdade entre as matrizes $\begin{bmatrix} 7 & x-y & -10 \\ 15 & 8 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -13 & 2x \\ -3x & 8 & 3y \end{bmatrix}$ é:

a) 5.

b) 3.

c) -5.

d) -8.

e) -13.

Comentários:

Note que as duas matrizes apresentam a mesma dimensão 2×3. Para que elas sejam iguais, seus elementos devem ser idênticos e devem estar nas mesmas posições. Para tanto, devemos ter:

$$\begin{cases} x - y = -13 \\ 2x = -10 \\ -3x = 15 \\ 3y = 24 \end{cases}$$

A partir da segunda e da quarta equação, podemos obter os valores de x e de y.

$$2x = -10 \ \rightarrow \boldsymbol{x = -5}$$

$$3y = 24 \ \rightarrow \boldsymbol{y = 8}$$

O valor de $x + y$ é:

$$(-5) + 8 = 3$$

O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

Observe que as outras equações se verificam para $\boldsymbol{x = -5}$ e $\boldsymbol{y = 8}$, pois, caso contrário, as matrizes não seriam iguais.

$$\boldsymbol{x - y} = (\boldsymbol{-5}) - \boldsymbol{8} = \boldsymbol{-13}$$

$$\boldsymbol{-3x} = -3 \times (\boldsymbol{-5}) = \boldsymbol{15}$$

Gabarito: Letra B.

Adição e subtração de matrizes

Para somar ou subtrair matrizes, é **necessário que elas tenham a mesma dimensão**. Note, portanto, que **não** é possível somarmos uma matriz de dimensão 3×5 com uma matriz de dimensão 4×3.

Feita essa observação, deve-se entender que **a soma entre duas matrizes é feita somando os termos que estão na mesma posição**.

Para a subtração, seguimos a mesma ideia, **subtraindo os elementos de uma matriz dos elementos de mesma posição da outra matriz**.

Suponha, por exemplo, que temos duas matrizes A e B dadas por:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{5} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{5} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{7} \end{bmatrix}$$

A soma $A + B$ é dada por:

$$A + B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{5} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{5} + (\boldsymbol{-3}) & \boldsymbol{-2} + \boldsymbol{3} & \boldsymbol{3} + (\boldsymbol{-2}) \\ \boldsymbol{-4} + \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} + \boldsymbol{1} & \boldsymbol{5} + \boldsymbol{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

Já a subtração $A - B$ é dada por:

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-(-3) & -2-3 & 3-(-2) \\ -4-2 & 1-1 & 5-7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -5 & 5 \\ -6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação da matriz por um número real

Para multiplicarmos uma matriz por um número real qualquer, **basta multiplicar todos os elementos dessa matriz pelo número real**. Considere, por exemplo, a seguinte matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 7 & -3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Ao **multiplicar** a matriz A **por 2**, obtemos a seguinte matriz:

$$2A = 2 \times \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 7 & -3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2\times(-3) & 2\times 2 & 2\times 5 \\ 2\times 1 & 2\times 3 & 2\times(-1) \\ 2\times 7 & 2\times(-3) & 2\times\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 10 \\ 2 & 6 & -2 \\ 14 & -6 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Pessoal, atenção redobrada com a multiplicação de matrizes. Essa é a parte que costuma gerar mais confusão entre os alunos.

Para multiplicar duas matrizes, devemos seguir os seguintes passos:

1. Verificar se o **número de colunas da primeira** matriz é igual ao **número de linhas da segunda**. Se essa igualdade não se verificar, não é possível realizar o produto das matrizes.

2. Obter o esquema geral da matriz-produto, que apresenta a seguinte dimensão:
   Número de linhas da primeira × Número de colunas da segunda

3. Obter os elementos da matriz resultante a partir das linhas da primeira matriz e das colunas da segunda matriz.

Professor, não entendi nada!!

Calma, caro aluno! Vamos resolver um exemplo.

Considere as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 450 & 200 \\ 400 & 150 & 150 & 450 \\ 250 & 300 & 100 & 700 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o produto $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$.

1. Verificar se o **número de** colunas **da** primeira matriz é igual ao **número de** linhas **da** segunda. Se essa igualdade não se verificar, não é possível realizar o produto das matrizes;

Note que a matriz A tem dimensão $2 \times \mathbf{3}$, e a matriz B tem dimensão $\mathbf{3} \times 4$. Observe, portanto, que o número de colunas da matriz $\boldsymbol{A}$ é igual ao número de linhas da matriz $\boldsymbol{B}$. Logo, **é possível realizar o produto** das matrizes $A_{2\times3}$ e $B_{3\times4}$.

2. Obter o esquema geral da matriz-produto, que apresenta a seguinte dimensão:
Número de linhas **da** primeira **× Número de** colunas **da** segunda

A matriz A tem dimensão $\mathbf{2} \times 3$, e a matriz B tem dimensão $3 \times \mathbf{4}$. Logo, a **matriz-produto apresenta a dimensão** $\mathbf{2} \times \mathbf{4}$. Temos o seguinte esquema geral:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} (\ ) & (\ ) & (\ ) & (\ ) \\ (\ ) & (\ ) & (\ ) & (\ ) \end{bmatrix}$$

Ou então, de maneira mais formal, poderíamos escrever:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$$

Lembre-se: o elemento c_{ij} está na linha i e na coluna j da matriz C.

Uma maneira prática de **memorizar os passos 1 e 2** é a seguinte:

Colunas da 1ª = Linhas da 2ª

$$A_{2\times 3} \quad B_{3\times 4}$$

Produto: Linhas da 1ª e Colunas da 2ª

$$C_{2\times 4}$$

3. Obter os elementos da matriz resultante a partir das linhas da primeira matriz e das colunas da segunda matriz.

Temos a seguinte matriz-produto:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$$

Obtenção de c_{11}

c_{11} → Primeira linha da primeira matiz, primeira coluna da segunda matriz

Para determinar o elemento da primeira linha e da primeira coluna da matriz-produto (c_{11}), devemos utilizar a primeira linha da primeira matriz e a primeira coluna da segunda matriz.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{100} & 200 & 450 & 200 \\ \mathbf{400} & 150 & 150 & 450 \\ \mathbf{250} & 300 & 100 & 700 \end{bmatrix}$$

Para obter o elemento c_{11}, realiza-se a seguinte operação:

$$c_{11} = \mathbf{3} \times \mathbf{100} + \mathbf{2} \times \mathbf{400} + \mathbf{1} \times \mathbf{250} = \mathbf{1350}$$

Vamos colocar esse novo elemento na nossa matriz-produto:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} \mathbf{1350} & (\ ) & (\ ) & (\ ) \\ (\ ) & (\ ) & (\ ) & (\ ) \end{bmatrix}$$

Obtenção de c_{12}

c_{12} → Primeira linha da primeira matiz, segunda coluna da segunda matriz

Para determinar o elemento da primeira linha e da segunda coluna da matriz-produto (c_{12}), devemos utilizar a primeira linha da primeira matriz e a segunda coluna da segunda matriz.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & \mathbf{200} & 450 & 200 \\ 400 & \mathbf{150} & 150 & 450 \\ 250 & \mathbf{300} & 100 & 700 \end{bmatrix}$$

Para obter o elemento c_{12}, realiza-se a seguinte operação:

$$c_{12} = \mathbf{3} \times \mathbf{200} + \mathbf{2} \times \mathbf{150} + \mathbf{1} \times \mathbf{300} = \mathbf{1200}$$

Vamos colocar esse novo elemento na nossa matriz-produto:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 1350 & \mathbf{1200} & (\ ) & (\ ) \\ (\ ) & (\ ) & (\ ) & (\ ) \end{bmatrix}$$

Obtenção de c_{13}

c_{13} $\rightarrow$ Primeira linha da primeira matiz, terceira coluna da segunda matriz

Para determinar o elemento da primeira linha e da terceira coluna da matriz-produto (c_{13}), devemos utilizar a primeira linha da primeira matriz e a terceira coluna da segunda matriz.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 200 & \mathbf{450} & 200 \\ 400 & 150 & \mathbf{150} & 450 \\ 250 & 300 & \mathbf{100} & 700 \end{bmatrix}$$

Para obter o elemento c_{13}, realiza-se a seguinte operação:

$$c_{13} = \mathbf{3} \times \mathbf{450} + \mathbf{2} \times \mathbf{150} + \mathbf{1} \times \mathbf{100} = \mathbf{1750}$$

Vamos colocar esse novo elemento na nossa matriz-produto:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 1350 & 1200 & \mathbf{1750} & (\ ) \\ (\ ) & (\ ) & (\ ) & (\ ) \end{bmatrix}$$

Obtenção de c_{14}

c_{14} $\rightarrow$ Primeira linha da primeira matiz, quarta coluna da segunda matriz

Para determinar o elemento da primeira linha e da quarta coluna da matriz-produto (c_{14}), devemos utilizar a primeira linha da primeira matriz e a quarta coluna da segunda matriz.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 450 & \mathbf{200} \\ 400 & 150 & 150 & \mathbf{450} \\ 250 & 300 & 100 & \mathbf{700} \end{bmatrix}$$

Para obter o elemento c_{14}, realiza-se a seguinte operação:

$$c_{14} = \mathbf{3} \times \mathbf{200} + \mathbf{2} \times \mathbf{450} + \mathbf{1} \times \mathbf{700} = \mathbf{2200}$$

Vamos colocar esse novo elemento na nossa matriz-produto:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 1350 & 1200 & 1750 & \mathbf{2200} \\ (\ ) & (\ ) & (\ ) & (\ ) \end{bmatrix}$$

Obtenção de c_{21}

c_{21} $\rightarrow$ Segunda linha da primeira matiz, primeira coluna da segunda matriz

Para determinar o elemento da segunda linha e da primeira coluna da matriz-produto (c_{21}), devemos utilizar a segunda linha da primeira matriz e a primeira coluna da segunda matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{100} & 200 & 450 & 200 \\ \mathbf{400} & 150 & 150 & 450 \\ \mathbf{250} & 300 & 100 & 700 \end{bmatrix}$$

Para obter o elemento c_{21}, realiza-se a seguinte operação:

$$c_{21} = \mathbf{1} \times \mathbf{100} + \mathbf{3} \times \mathbf{400} + \mathbf{3} \times \mathbf{250} = \mathbf{2050}$$

Vamos colocar esse novo elemento na nossa matriz-produto:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 1350 & 1200 & 1750 & 2200 \\ \mathbf{2050} & (\ ) & (\ ) & (\ ) \end{bmatrix}$$

Obtenção de c_{22}

c_{22} $\rightarrow$ Segunda linha da primeira matiz, segunda coluna da segunda matriz

Para determinar o elemento da segunda linha e da segunda coluna da matriz-produto (c_{22}), devemos utilizar a segunda linha da primeira matriz e a segunda coluna da segunda matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & \mathbf{200} & 450 & 200 \\ 400 & \mathbf{150} & 150 & 450 \\ 250 & \mathbf{300} & 100 & 700 \end{bmatrix}$$

Para obter o elemento c_{22}, realiza-se a seguinte operação:

$$c_{22} = \mathbf{1} \times \mathbf{200} + \mathbf{3} \times \mathbf{150} + \mathbf{3} \times \mathbf{300} = \mathbf{1550}$$

Vamos colocar esse novo elemento na nossa matriz-produto:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 1350 & 1200 & 1750 & 2200 \\ 2050 & \mathbf{1550} & (\ ) & (\ ) \end{bmatrix}$$

Obtenção de c_{23}

c_{23} → Segunda linha da primeira matiz, terceira coluna da segunda matriz

Para determinar o elemento da segunda linha e da terceira coluna da matriz-produto (c_{23}), devemos utilizar a segunda linha da primeira matriz e a terceira coluna da segunda matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 200 & \mathbf{450} & 200 \\ 400 & 150 & \mathbf{150} & 450 \\ 250 & 300 & \mathbf{100} & 700 \end{bmatrix}$$

Para obter o elemento c_{23}, realiza-se a seguinte operação:

$$c_{23} = \mathbf{1} \times \mathbf{450} + \mathbf{3} \times \mathbf{150} + \mathbf{3} \times \mathbf{100} = \mathbf{1200}$$

Vamos colocar esse novo elemento na nossa matriz-produto:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 1350 & 1200 & 1750 & 2200 \\ 2050 & 1550 & \mathbf{1200} & (\ ) \end{bmatrix}$$

Obtenção de c_{24}

c_{24} → Segunda linha da primeira matiz, quarta coluna da segunda matriz

Para determinar o elemento da segunda linha e da quarta coluna da matriz-produto (c_{24}), devemos utilizar a segunda linha da primeira matriz e a quarta coluna da segunda matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 450 & \mathbf{200} \\ 400 & 150 & 150 & \mathbf{450} \\ 250 & 300 & 100 & \mathbf{700} \end{bmatrix}$$

Para obter o elemento $c_{\mathbf{24}}$, realiza-se a seguinte operação:

$$c_{\mathbf{24}} = \mathbf{1} \times \mathbf{200} + \mathbf{3} \times \mathbf{450} + \mathbf{3} \times \mathbf{700} = \mathbf{3650}$$

Vamos colocar esse novo elemento na nossa matriz-produto:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 1350 & 1200 & 1750 & 2200 \\ 2050 & 1550 & 1200 & \mathbf{3650} \end{bmatrix}$$

Pronto! Acabamos de realizar o produto das matrizes A e B.

$$A \times B = C$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 100 & 200 & 450 & 200 \\ 400 & 150 & 150 & 450 \\ 250 & 300 & 100 & 700 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1350 & 1200 & 1750 & 2200 \\ 2050 & 1550 & 1200 & 3650 \end{bmatrix}$$

*Professor... você levou **QUATRO PÁGINAS** para calcular os oito elementos!!*

Calma, caro aluno. Levamos quatro páginas porque fizemos passo a passo. Em resumo, o que você precisa saber é o seguinte:

ATENÇÃO
DECORE!

O elemento da linha i e da coluna j da **matriz-produto C** é obtido por meio da linha i da primeira matriz e da coluna j da segunda matriz.

c_{11} → Linha 1 da primeira matriz e coluna 1 da segunda matriz;

c_{12} → Linha 1 da primeira matriz e coluna 2 da segunda matriz;

c_{13} → Linha 1 da primeira matriz e coluna 3 da segunda matriz;

c_{14} → Linha 1 da primeira matriz e coluna 4 da segunda matriz;

c_{21} → Linha 2 da primeira matriz e coluna 1 da segunda matriz;

c_{22} → Linha 2 da primeira matriz e coluna 2 da segunda matriz;

c_{23} → Linha 2 da primeira matriz e coluna 3 da segunda matriz;

c_{24} → Linha 2 da primeira matriz e coluna 4 da segunda matriz.

Na hora da prova, ao se deparar com o seguinte produto:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 100 & 200 & 450 & 200 \\ 400 & 150 & 150 & 450 \\ 250 & 300 & 100 & 700 \end{bmatrix}$$

Você deve realizar as contas assim:

$$= \begin{bmatrix} (3.100 + 2.400 + 1.250) & (3.200 + 2.150 + 1.300) & (3.450 + 2.150 + 1.100) & (3.200 + 2.450 + 1.700) \\ (1.100 + 3.400 + 3.250) & (1.200 + 3.150 + 3.300) & (1.450 + 3.150 + 3.100) & (1.200 + 3.450 + 3.700) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1350 & 1200 & 1750 & 2200 \\ 2050 & 1550 & 1200 & 3650 \end{bmatrix}$$

(MPE SC/2022) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

A soma dos elementos da matriz A^2 é:

a) 10;

b) 12;

c) 15;

d) 23;

e) 30.

Comentários:

Note que a matriz A^2 é:

$$A^2 = A \times A$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{2.2 + 1.3} & \mathbf{2.1 + 1.1} \\ \mathbf{3.2 + 1.3} & \mathbf{3.1 + 1.1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Logo, a soma dos elementos da matriz A^2 é:

$$7 + 3 + 9 + 4$$
$$= 23$$

Gabarito: Letra D.

(Pref. SJC/2019) Sobre as matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{p \times q}$ é correto afirmar que existe a operação:

a) A + B, se n = p

b) B – A, se n = p

c) A · B, se m = q

d) B · A, se m = q

e) A ÷ B, se n = p

Comentários:

Vamos analisar cada alternativa.

a) ERRADO. Temos a soma das duas matrizes, que só é possível se elas apresentarem a mesma dimensão. Para tanto, deveríamos ter $\boldsymbol{m = p}$ **e** $\boldsymbol{n = q}$.

b) ERRADO. Temos uma subtração de matrizes, que só é possível se elas apresentarem a mesma dimensão. Para tanto, deveríamos ter $\boldsymbol{m = p}$ **e** $\boldsymbol{n = q}$.

c) ERRADO. Temos uma multiplicação de matrizes, que só é possível se o número de colunas da primeira (n) for igual ao número de linhas da segunda (p). Para tanto, deveríamos ter $\boldsymbol{n = p}$.

d) CERTO. Temos uma multiplicação de matrizes, que só é possível se o número de colunas da primeira (q) for igual ao número de linhas da segunda (m). Esse é o caso apresentado na alternativa, em que $\boldsymbol{m = q}$.

e) ERRADO. Não existe divisão de matrizes.

Gabarito: Letra D.

(Pref. Dois Córregos/2019) O produto das matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, nessa ordem

a) não existe, pois elas têm os números de linhas diferentes, assim como os números de colunas.

b) não existe, pois o número de linhas da primeira matriz do produto é diferente do número de colunas da segunda matriz.

c) existe, e é igual a $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

d) existe, e é igual a $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$.

e) existe, e é igual a $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$.

Comentários:

Lembre-se que, multiplicar duas matrizes, devemos seguir os seguintes passos:

1. Verificar se o **número de colunas da primeira** matriz é igual ao **número de linhas da segunda**. Se essa igualdade não se verificar, não é possível realizar o produto das matrizes.

2. Obter o esquema geral da matriz-produto, que apresenta a seguinte dimensão:

Número de linhas da primeira × Número de colunas da segunda

3. Obter os elementos da matriz resultante a partir das linhas da primeira matriz e das colunas da segunda matriz.

Note que a primeira matriz apresenta dimensão $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$, e a segunda matriz apresenta dimensão $\mathbf{3} \times \mathbf{2}$. Isso significa que:

1. O número de colunas da primeira matriz $(\mathbf{3})$ é igual ao número de linhas da segunda $(\mathbf{3})$ e, portanto, o produto existe.

2. A matriz-produto apresenta dimensão $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$.

Temos, então, que a matriz-produto apresenta o seguinte esquema geral:

$$\begin{bmatrix} (\ ) & (\ ) \\ (\ ) & (\ ) \end{bmatrix}$$

Vamos agora para o terceiro passo:

3. Obter os elementos da matriz resultante a partir das linhas da primeira matriz e das colunas da segunda matriz.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbf{1}.\mathbf{0} + \mathbf{5}.\mathbf{2} + \mathbf{3}.\mathbf{0}) & (\mathbf{1}.\mathbf{1} + \mathbf{5}.\mathbf{0} + \mathbf{3}.\mathbf{1}) \\ (\mathbf{4}.\mathbf{0} + \mathbf{2}.\mathbf{2} + \mathbf{6}.\mathbf{0}) & (\mathbf{4}.\mathbf{1} + \mathbf{2}.\mathbf{0} + \mathbf{6}.\mathbf{1}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra D.

Propriedades da multiplicação de matrizes

A propriedade comutativa não vale para matrizes

Antes de apresentarmos as propriedades da multiplicação de matrizes, vamos mostrar uma propriedade que não pode ser utilizada para matrizes.

Na álgebra comum, a propriedade comutativa para a multiplicação de números nos diz que "a ordem dos fatores não altera o produto". Isso significa que:

$$150 \times 311 = 311 \times 150$$

Para o caso das matrizes, essa propriedade não ocorre. O produto da matriz A pela matriz B é diferente do produto da matriz B pela matriz A (a não ser que a igualdade ocorra por uma grande coincidência). Isso significa que:

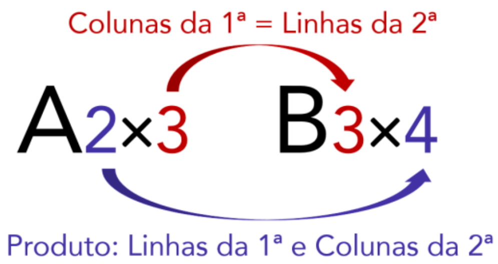
$$AB \neq BA$$

INDO MAIS FUNDO!

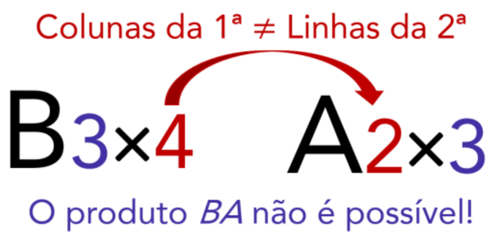
Perceba que em alguns casos **o produto AB existe** e o **produto BA não existe**.

Considere a matriz $A_{2\times3}$ de ordem 2×3 e a matriz $B_{3\times4}$ de ordem 3×4.

Note que **o produto AB existe**, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.



Por outro lado, **o produto BA não é possível**, pois o número de colunas de B não é igual ao número de linhas de A.



Propriedade associativa

Propriedade associativa entre matrizes

Na álgebra comum, a propriedade associativa para a multiplicação de números nos diz que podemos agrupar números que estão sendo multiplicados da forma que nos for conveniente.

Por exemplo, ao realizar a multiplicação $2\times3\times5$, podemos realizar de duas maneiras:

- $(2\times3)\times5$; ou
- $2\times(3\times5)$.

Isso significa que:

$$(2\times3)\times5=2\times(3\times5)$$

Para a multiplicação de matrizes, temos a mesma propriedade.

Para o caso em que é possível o produto das matrizes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$, nessa ordem, podemos realizar o produto ABC de duas formas:

- Realizar o produto AB e depois multiplicar pela matriz C; ou
- Realizar o produto BC e depois realizar o produto de A com o resultado BC.

Em linguagem matemática, temos:

$$(AB)C = A(BC)$$

Propriedade associativa entre matrizes e um número real

Se α for um número real e A e B forem matrizes em que o produto AB é possível, então:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

Exemplo:

$$3(AB) = (3A)B = A(3B)$$

Propriedade distributiva

Propriedade distributiva **pela esquerda**

Na álgebra comum, a propriedade distributiva **pela esquerda** ocorre quando realizamos a seguinte operação:

$$\mathbf{2} \times (3 + 5) = \mathbf{2} \times 3 + \mathbf{2} \times 5$$

Temos a mesma propriedade quando realizamos a operação contrária, conhecida por "**colocar o número em evidência**":

$$\mathbf{2} \times 3 + \mathbf{2} \times 5 = \mathbf{2} \times (3 + 5)$$

Para matrizes, é válida a propriedade distributiva **pela esquerda**:

$$\boldsymbol{A}(B + C) = \boldsymbol{A}B + \boldsymbol{A}C$$

A mesma propriedade ocorre quando "**colocamos uma matriz em evidência**":

$$\boldsymbol{A}B + \boldsymbol{A}C = \boldsymbol{A}(B + C)$$

Propriedade distributiva pela direita

Na álgebra comum, a propriedade distributiva **pela direita** ocorre quando realizamos a seguinte operação:

$$(3+5)\times \mathbf{2} = 3\times \mathbf{2} + 5\times \mathbf{2}$$

Temos a mesma propriedade quando realizamos a operação contrária, conhecida por "**colocar o número em evidência**":

$$3\times \mathbf{2} + 5\times \mathbf{2} = \ (3+5)\times \mathbf{2}$$

Para matrizes, é válida a propriedade distributiva **pela direita**:

$$(B+C)\boldsymbol{A} = B\boldsymbol{A} + C\boldsymbol{A}$$

A mesma propriedade ocorre quando "**colocamos uma matriz em evidência**":

$$B\boldsymbol{A} + C\boldsymbol{A} = (B+C)\boldsymbol{A}$$

Vimos no tópico anterior que, para a **álgebra**, é válida a **propriedade comutativa**. Portanto, 2 pode comutar com $(3+5)$:

$$\mathbf{2}\times(3+5) = (3+5)\times \mathbf{2}$$

Note, porém, que a **multiplicação de matrizes não** goza da **propriedade comutativa**. Portanto, A não comuta com $(B+C)$:

$$\boldsymbol{A}(B+C) \neq (B+C)\boldsymbol{A}$$

Isso porque $\boldsymbol{A}(B+C)$ é igual a $\boldsymbol{A}B + \boldsymbol{A}C$. Já $(B+C)\boldsymbol{A}$ é igual a $B\boldsymbol{A} + C\boldsymbol{A}$.

Elemento neutro da multiplicação de matrizes

Quanto temos uma matriz quadrada de ordem n $(A_{n\times n})$, a multiplicação dessa matriz pela matriz identidade de ordem n (I_n) corresponde à própria matriz original:

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Traço de uma matriz quadrada

O **traço** de uma **matriz quadrada** é a soma dos elementos da sua diagonal principal. Se A é uma matriz quadrada, então o seu traço é representado por $tr(A)$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 7 & 2 \\ 5 & \mathbf{4} & 1 \\ 3 & 1 & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = \mathbf{3} + \mathbf{4} + \mathbf{4} = 11$$

Propriedades do traço de uma matriz

Considere as matrizes quadradas de mesma ordem A e B e o número real α. O traço de uma matriz apresenta as seguintes propriedades:

- $tr\ (A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr\ (A - B) = tr(A) - tr(B)$
- $tr(\alpha A) = \alpha \times tr(A)$
- $tr\ (AB) = tr(BA)$

Matriz oposta

Dada uma matriz A, a sua **matriz oposta** é $\boldsymbol{-A}$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 6 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Oposta de A:

$$\boldsymbol{-A} = \begin{bmatrix} -3 & -(-7) & -6 \\ -(-5) & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -(-4) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{-A} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & -6 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta, simétrica e antissimétrica

Matriz transposta

A **transposta** de uma matriz A corresponde à matriz cujas linhas foram transformadas em colunas.

- A primeira linha de A se torna a primeira coluna de A^t;
- A segunda linha de A se torna a segunda coluna de A^t;
- A terceira linha de A se torna a terceira coluna de A^t;
- Etc.

A representação da matriz transposta é simbolizada por A^T ou A^t. Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-7} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{bmatrix}$$

Propriedades da matriz transposta

A matriz transposta goza das seguintes propriedades:

- A transposta da transposta corresponde à matriz original:

$$(A^t)^t = A$$

- Transposta do produto de uma matriz por um número real:

$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$

- Transposta do produto de matrizes:

$$(\boldsymbol{AB})^t = \boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t$$

- Transposta da soma:

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

Matriz simétrica

Uma matriz A é dita **simétrica** quando ela é igual a sua transposta:

$$A = A^t$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Uma matriz é simétrica quando:

- É quadrada; e
- Os **elementos simétricos com relação à diagonal principal são iguais**.

Veja mais atentamente o exemplo anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Matriz antissimétrica

Uma matriz A é dita **antissimétrica** quando:

$$A^t = -A$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

Uma matriz é antissimétrica quando:

- É quadrada;
- A diagonal principal é nula; e
- Os **elementos simétricos com relação à diagonal principal são opostos**.

Veja mais atentamente o exemplo anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(SEDF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$, julgue o próximo item.

Se $B = \begin{bmatrix} 0 & x & -7 \\ 1 & 0 & z \\ y & 10 & 0 \end{bmatrix}$ e a matriz $A + B$ for simétrica, então $x + y + z = 0$.

Comentários:

Primeiramente, vamos determinar $A + B$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & -7 \\ 1 & 0 & z \\ y & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0 & 0+x & 10-7 \\ 4+1 & 10+0 & 20+z \\ 0+y & 2+10 & 40+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & x & 3 \\ 5 & 10 & 20+z \\ y & 12 & 40 \end{bmatrix}$$

Para uma matriz ser **simétrica**, ela deve ser quadrada e **os elementos simétricos com relação à diagonal principal devem ser <u>iguais</u>**.

Observe novamente a matriz $A + B$:

$$\begin{bmatrix} 2 & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{5} & 10 & \boldsymbol{20+z} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{12} & 40 \end{bmatrix}$$

Para ela ser simétrica, devemos ter:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ 20 + z = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -8 \end{cases}$$

Logo, $x + y + z = 5 + 3 + (-8) = 0$.

Gabarito: CERTO.

(AFRFB/2014) A matriz quadrada A, definida genericamente por $A = a_{ij}$, é dada por $a_{11} = 0$; $a_{12} = -4$; $a_{13} = 2$; $a_{21} = x$; $a_{22} = 0$; $a_{23} = (1 - z)$; $a_{31} = y$; $a_{32} = 2z$ e, por último, $a_{33} = 0$. Desse modo, para que a matriz A seja uma matriz antissimétrica, os valores de a_{21}, a_{23}, a_{31} e a_{32} deverão ser, respectivamente, iguais a:

a) $4;\ -2;\ -2;\ -2$.

b) $4;\ -2;\ 2;\ -2$.

c) $4;\ 2;\ -2;\ -2$.

d) $-4;\ -2;\ 2;\ -2.$

e) $-4;\ -2;\ -2;\ -2.$

Comentários:

Vamos montar a matriz em questão.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1-z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix}$$

Para uma matriz ser **antissimétrica**, ela deve ser quadrada, a diagonal principal deve ser nula, e **os elementos simétricos com relação à diagonal principal devem ser <u>opostos</u>**.

Observe novamente a matriz A:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x} & 0 & \mathbf{1-\boldsymbol{z}} \\ \boldsymbol{y} & \mathbf{2\boldsymbol{z}} & 0 \end{bmatrix}$$

Para ela ser antissimétrica, devemos ter:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = -(\mathbf{-4}) \\ \boldsymbol{y} = \mathbf{-2} \\ \mathbf{2\boldsymbol{z}} = -(\mathbf{1} - \boldsymbol{z}) \end{cases}$$

Portanto, $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$, $\boldsymbol{y} = \mathbf{-2}$, e:

$$2z = -(1-z)$$

$$2z = -1 + z$$

$$2z - z = -1$$

$$\boldsymbol{z} = \mathbf{-1}$$

Obtidos os valores de x, y e z, temos a seguinte matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1-z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ \mathbf{4} & 0 & \mathbf{2} \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, os valores de $\boldsymbol{a_{21}}$, $\boldsymbol{a_{23}}$, a_{31} e a_{32} deverão ser, respectivamente, iguais a $\mathbf{4}, \mathbf{2}, -2, -2$.

Gabarito: Letra C.

Matriz inversa

Definição

A **inversa de uma matriz A** (notação: A^{-1}) é aquela matriz que, quando multiplicada pela matriz A, tem como resultado a matriz identidade:

$$A^{-1}A = I_n$$

Além disso, como **uma matriz comuta com a sua inversa**, podemos dizer que a matriz A, quando multiplicada pela sua inversa A^{-1}, tem como resultado a matriz identidade:

$$AA^{-1} = I_n$$

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

Uma matriz que **não possui inversa** é denominada singular.

A não possui inversa ↔ A é singular

Caso o assunto **determinantes** faça parte do seu edital, veremos que uma matriz é **inversível** (possui inversa) quando o seu **determinante é diferente de zero**. Caso contrário, isto é, **caso a matriz tenha determinante zero**, ela é **singular** (não possui inversa).

Vamos a um exemplo que pode ser cobrado em prova:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determine a matriz inversa de A.

Considere, genericamente, que $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Nesse caso:

$$AA^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando o produto de matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} 1a + 3c & 1b + 3d \\ 0a + 2c & 0b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1a+3c & 1b+3d \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como as duas matrizes são iguais, seus elementos são iguais:

$$\begin{cases} 1a+3c=1 \\ 1b+3d=0 \\ 2c=0 \\ 2d=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1a+3c=1 \\ 1b+3d=0 \\ \boldsymbol{c=0} \\ \boldsymbol{d=\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Sabemos que $c = 0$. Temos que:

$$1a+3c=1$$

$$1a+0=1$$

$$\boldsymbol{a=1}$$

Sabemos que $d = \frac{1}{2}$. Temos que:

$$1b+3d=0$$

$$b=-3d$$

$$\boldsymbol{b=-\frac{3}{2}}$$

Portanto, a matriz inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é dada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Vamos resolver dois exercícios:

(ANPEC/2018) Classifique a afirmação abaixo segundo a sua veracidade:

Se uma matriz tem inversa, então ela é singular.

Comentários:

Uma matriz é singular quando ela não possui inversa.

Gabarito: ERRADO.

(MPE SP/2019) A inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ é:

a) $\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}33 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0{,}33 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$

Comentários:

Considere, genericamente, que $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Nesse caso:

$$AA^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando o produto de matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} 2a + 5c & 2b + 5d \\ 1a + 3c & 1b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como as duas matrizes são iguais, seus elementos são iguais:

$$\begin{cases} 2a + 5c = 1 \\ 2b + 5d = 0 \\ 1a + 3c = 0 \\ 1b + 3d = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a terceira equação por -2 e somando com a primeira, temos:

$$\begin{cases} 2a + 5c = 1 \\ \underline{-2a - 6c = 0} \\ -c = 1 \end{cases}$$

Portanto, $\boldsymbol{c = -1}$.

Da terceira equação, temos:

$$a + 3c = 0$$

$$a - 3 = 0$$

$$\boldsymbol{a = 3}$$

Multiplicando a quarta equação por -2 e somando com a segunda, temos:

$$\begin{cases} 2b + 5d = 0 \\ \underline{-2b - 6d = -2} \\ -d = -2 \end{cases}$$

Portanto, $\boldsymbol{d = 2}$.

Da quarta equação, temos:

$$1b + 3d = 1$$

$$b + 6 = 1$$

$$\boldsymbol{b = -5}$$

Logo, a matriz inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra B.

Propriedades da matriz inversa

Inversa da inversa

A matriz inversa da inversa de A é a própria matriz A:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Inversa da transposta × Transposta da inversa

A matriz inversa da transposta de A é igual a matriz transposta da inversa de A:

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

Inversa do produto de uma matriz por um número real

Considerando uma matriz A inversível e um número real α, temos:

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$$

Exemplo:

$$(3A)^{-1} = \frac{1}{3} A^{-1}$$

Inversa do produto de matrizes

Considerando duas matrizes A e B inversíveis, a inversa do produto AB é:

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

Para mais termos, segue-se a mesma lógica:

$$(\boldsymbol{ABC})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

Matriz inversa como análogo da divisão

Pessoal, a primeira coisa que devemos saber é que **não existe a operação de divisão para matrizes**. Feita essa observação, vamos entender o porquê de a matriz inversa ser o análogo da divisão.

Considere que, em um problema de álgebra, você chegue na seguinte equação:

$$3x = 9$$

O que você faz para obter o valor de x? Ao "jogar o 3 para o outro lado da equação", na verdade você está dividindo ambos os lados da equação por 3:

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

Agora vamos para um problema de matrizes. Suponha que você tenha as matrizes quadradas A e B e que você queira determinar uma matriz X em que:

$$\boldsymbol{AX = B}$$

Note que **não podemos dividir ambos os lados da equação matricial por A**, pois não existe a operação de divisão para matrizes. Observe, porém, que **podemos multiplicar ambos os lados da equação por A^{-1} pela esquerda** (caso a matriz A seja inversível, isto é, caso ela não seja singular). Assim:

$$\boldsymbol{A^{-1}AX = A^{-1}B}$$

Note que, por definição de matriz inversa, $A^{-1}A = I$. Portanto:

$$IX = A^{-1}B$$

A matriz identidade I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes e, por isso, $IX = X$. Logo, ficamos com:

$$X = A^{-1}B$$

Isso significa que a matriz X que queremos determinar é o produto da inversa de A pela matriz B.

(SEFAZ MG/2005) A, B e C são matrizes quadradas de mesma ordem, não singulares e diferentes da matriz identidade. A matriz C é igual ao produto $A\ Z\ B$, onde Z é também uma matriz quadrada. A matriz Z, portanto, é igual a:

a) $A^{-1}BC$

b) $AC^{-1}B^{-1}$

c) $A^{-1}\ C\ B^{-1}$

d) $A\ B\ C^{-1}$

e) $C^{-1}\ B^{-1}\ A^{-1}$

Comentários:

ESTA É DIFÍCIL!

Note que todas as matrizes são quadradas, de mesma ordem e admitem inversa (pois não são singulares).

A matriz C é igual ao produto AZB. Logo:

$$AZB = C$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação por A^{-1} pela esquerda, temos:

$$\boldsymbol{A^{-1}}AZB = \boldsymbol{A^{-1}}C$$

$$(\boldsymbol{A^{-1}}A)ZB = \boldsymbol{A^{-1}}C$$

$$(I)ZB = \boldsymbol{A^{-1}}C$$

$$ZB = \boldsymbol{A^{-1}}C$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação por B^{-1} pela direita, temos:

$$ZB\boldsymbol{B^{-1}} = \boldsymbol{A^{-1}}C\boldsymbol{B^{-1}}$$

$$Z(B\boldsymbol{B^{-1}}) = \boldsymbol{A^{-1}}C\boldsymbol{B^{-1}}$$

$$Z(I) = \boldsymbol{A^{-1}}C\boldsymbol{B^{-1}}$$

$$Z = \boldsymbol{A^{-1}}C\boldsymbol{B^{-1}}$$

Portanto, a matriz Z é igual a $A^{-1}CB^{-1}$.

Gabarito: Letra C.

(Pref Paulínia/2021) Considere a equação matricial $\boldsymbol{A^2X^{-1}B^{-1} = AC}$, onde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{X}$ são matrizes quadradas invertíveis e de mesma ordem.

A solução X é igual a

a) $AB^{-1}C^{-1}$

b) $AC^{-1}C^{-1}$

c) $CA^{-1}B$

d) $A^{-1}BC$

e) $B^{-1}C^{-1}A$

Comentários:

Sabemos que todas as matrizes quadradas são inversíveis e de mesma ordem. Note que:

$$A^2X^{-1}B^{-1} = AC$$
$$AAX^{-1}B^{-1} = AC$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação por $\boldsymbol{A^{-1}}$, pela esquerda, temos:

$$\boldsymbol{A^{-1}}AAX^{-1}B^{-1} = \boldsymbol{A^{-1}}AC$$
$$(A^{-1}A)AX^{-1}B^{-1} = (A^{-1}A)C$$
$$(I)AX^{-1}B^{-1} = (I)C$$
$$AX^{-1}B^{-1} = C$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação novamente por $\boldsymbol{A^{-1}}$, pela esquerda, temos:

$$\boldsymbol{A^{-1}}AX^{-1}B^{-1} = \boldsymbol{A^{-1}}C$$
$$(A^{-1}A)X^{-1}B^{-1} = A^{-1}C$$
$$(I)X^{-1}B^{-1} = A^{-1}C$$
$$X^{-1}B^{-1} = A^{-1}C$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação por $\boldsymbol{X}$, pela esquerda, temos:

$$\boldsymbol{X}X^{-1}B^{-1} = \boldsymbol{X}A^{-1}C$$
$$(XX^{-1})B^{-1} = XA^{-1}C$$
$$(I)B^{-1} = XA^{-1}C$$
$$B^{-1} = XA^{-1}C$$

Logo:

$$XA^{-1}C = B^{-1}$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação por $\boldsymbol{C^{-1}}$, pela direita, temos:

$$XA^{-1}C\ \boldsymbol{C^{-1}} = B^{-1}\ \boldsymbol{C^{-1}}$$
$$XA^{-1}(C\ C^{-1}) = B^{-1}\ C^{-1}$$
$$XA^{-1}(I) = B^{-1}\ C^{-1}$$
$$XA^{-1} = B^{-1}\ C^{-1}$$

Finalmente, ao multiplicar ambos os lados da equação por $\boldsymbol{A}$, pela direita, temos:

$$XA^{-1}\boldsymbol{A} = B^{-1}\,C^{-1}\boldsymbol{A}$$

$$X(A^{-1}A) = B^{-1}\,C^{-1}A$$

$$X(I) = B^{-1}\,C^{-1}A$$

$$\boldsymbol{X = B^{-1}\,C^{-1}A}$$

Gabarito: Letra E.

Matriz ortogonal

Uma matriz A é dita **ortogonal** quando a sua inversa é igual a sua transposta:

$$A \text{ é ortogonal} \leftrightarrow A^{-1} = A^t$$

Sabemos que, pela definição de matriz inversa:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Quando a matriz A é **ortogonal**, uma vez que $\boldsymbol{A^{-1} = A^t}$, temos:

$$A^tA = AA^t = I$$

(TRANSPETRO/2018) A inversa de uma matriz ortogonal é igual à sua

A) adjunta

B) adjunta transposta

c) cofatora

d) cofatora transposta

e) transposta

Comentários:

Uma matriz é ortogonal quando a sua inversa é igual a sua transposta.

Gabarito: Letra E.

(ANPEC/1998) Uma matriz A, quadrada de dimensão n é dita ortogonal quando $A^tA = AA^t = I_n$, onde o superescrito t denota transposição e I_n é a identidade de dimensão n. Considere uma matriz ortogonal A de ordem n. Classifique como certo ou errado a afirmação (sobre A) abaixo:

Sua inversa e sua transposta são também matrizes ortogonais.

Comentários:

Note que **a matriz A é ortogonal**. Isso significa que:

$$\boldsymbol{A^{-1} = A^t}$$

Devemos responder duas perguntas:

- A matriz A^{-1} é ortogonal?
- A matriz A^t é ortogonal?

Para que A^{-1} seja ortogonal, devemos ter que a sua inversa $(A^{-1})^{-1}$ seja igual a sua transposta $(A^{-1})^t$.

A única informação que temos ao certo é que $A^{-1} = A^t$. Fazendo a transposta em ambos os lados da equação, temos:

$$(A^{-1})^t = (A^t)^t$$

Como $(A^t)^t = A$, temos:

$$(A^{-1})^t = A$$

Observe que $A = (A^{-1})^{-1}$. Logo:

$$(A^{-1})^t = (A^{-1})^{-1}$$

Portanto, é verdade que A^{-1} é ortogonal, pois a sua inversa $(A^{-1})^{-1}$ é igual a sua transposta $(A^{-1})^t$.

Como A^{-1} é ortogonal, A^t também é. Sabemos, pelos dados do problema, que $A^{-1} = A^t$. Como já obtemos que $(A^{-1})^t = (A^{-1})^{-1}$, basta substituir A^{-1} por A^t:

$$(A^{-1})^t = (A^{-1})^{-1}$$
$$(A^t)^t = (A^t)^{-1}$$

Portanto, também é verdade que A^t é ortogonal, pois a sua inversa $(A^t)^{-1}$ é igual a sua transposta $(A^t)^t$.

Gabarito: CERTO.

DETERMINANTES

Determinantes

Noção básica e representação

Um **determinante** é um **número** calculado a partir de uma **matriz quadrada**. Representado por duas barras "| |".

Determinante de matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz de ordem 1 é o próprio elemento da matriz.

Determinante de matriz de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc}$$

$$(\text{Produto dos elementos da diagonal principal}) - (\text{Produto dos elementos da diagonal secundária})$$

Determinante de matriz de ordem 3

Regra de Sarrus

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\det A = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}] - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}]$$

Obtenção do determinante de matrizes de qualquer ordem

Menor complementar

O **menor complementar de um elemento** a_{ij} de uma matriz A é o **determinante** D_{ij} da matriz obtida eliminando-se a linha i e a coluna j da matriz A.

Cofator ou complemento algébrico

O **cofator do elemento** a_{ij} de uma matriz A é um **número** representado por A_{ij} calculado do seguinte modo:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

Teorema de Laplace

O **determinante** de uma matriz A é a **soma** dos **produtos dos elementos** de uma fila qualquer (linha ou coluna) **pelos seus respectivos cofatores**.

1. Escolher uma fila (linha ou coluna), preferencialmente a que tiver mais zeros;

2. Realizar o produto de cada elemento da fila pelo seu respectivo cofator; e

3. Somar os produtos obtidos.

Propriedades dos determinantes
• **Teorema de Binet**: $\det(AB) = \det A \times \det B$ • **Determinante da matriz inversa:** $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ • **Determinante da matriz transposta:** $\det A^t = \det A$ • **Multiplicação de uma fila por uma constante:** ao **multiplicar uma fila** (**linha ou coluna**) de uma matriz **por uma constante k**, o **determinante** dessa nova matriz **também fica multiplicado por k**. • **Multiplicação da matriz por uma constante:** $\det(kA) = k^n \det A$ • **Determinante de matriz triangular ou de matriz diagonal:** o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal. • **Fila nula:** uma matriz que apresenta uma **fila** (linha ou coluna) **cujos elementos são todos zero** apresenta **determinante zero.** • **Filas paralelas iguais:** uma matriz com **filas paralelas iguais** (linhas ou colunas) apresenta **determinante zero.** • **Filas paralelas proporcionais:** uma matriz com **filas paralelas proporcionais** (linhas ou colunas) apresenta **determinante zero.** • **Troca de filas paralelas:** ao trocarmos uma fila (linha ou coluna) de lugar com outra fila paralela, **o determinante muda de sinal**. • **Combinação linear de filas:** quando uma matriz apresenta uma fila (linha ou coluna) que é combinação linear de outras filas, o seu **determinante é zero.**
Teorema de Jacobi
Ao **multiplicar uma fila por qualquer número** e **somar esse resultado a uma outra fila paralela qualquer**, o valor do **determinante não se altera**. Em outras palavras, **podemos trocar uma fila qualquer por uma combinação linear que contenha a fila original**.
Regra de Chió
• Fazer com que o elemento a_{11} seja igual a 1; • **Zerar todos os elementos da primeira linha**, **à exceção de a_{11}**, **fazendo uso da primeira coluna**; • Feita a operação anterior, o determinante em questão é igual ao **menor complementar D_{11}**; • Repita o processo, se necessário, para reduzir a ordem do determinante mais uma vez.
Matriz inversa
$\text{A é inversível} \leftrightarrow \det A \neq 0$ $\text{A é singular} \leftrightarrow \det A = 0$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Noção básica e representação

Pessoal, a aplicação prática de determinantes surge quando estudamos **sistemas lineares**, que será visto na sequência, caso faça parte do seu edital.

Nesse momento, deve-se entender que **um determinante _é um número_** calculado a partir de uma **matriz quadrada**.

Considere uma matriz A dada por $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Seu determinante, como veremos adiante, é o número 11. A representação do determinante de A pode ser feita de duas formas:

- $\det A = 11$; ou
- $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11$.

FIQUE ATENTO!

Vimos na seção de matrizes que podemos representá-las tanto com colchetes "[ ]" quanto com parênteses "( )". A **matriz $\boldsymbol{A}$**, portanto, **pode ser representada dessas duas formas**:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Já o **determinante da matriz $\boldsymbol{A}$ é representado por duas barras** "| |", e o seu cálculo corresponde a um número.

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

Determinante de matriz de ordem 1

Uma matriz quadrada de ordem 1 é uma matriz que apresenta uma única linha e uma única coluna. Exemplo:

$$A_{1\times1} = [7]$$

O determinante de uma matriz de ordem 1 é o próprio elemento da matriz. Exemplos:

- $A = [3] \ \rightarrow \det A = 3$;
- $B = [\sqrt{5}] \ \rightarrow \det B = \sqrt{5}$;
- $C = [-2] \rightarrow \det C = -2$.

Determinante de matriz de ordem 2

Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 2, devemos realizar a seguinte operação:

$$(\text{Produto dos elementos da diagonal principal}) - (\text{Produto dos elementos da diagonal secundária})$$

Considere a matriz de ordem 2 genérica, dada por $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Seu determinante é dado por:

$$\det A = \boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc}$$

Vamos a um exemplo numérico: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\det A = [\mathbf{4} \times \mathbf{2}] - [\mathbf{3} \times (\mathbf{-1})]$$

$$= 8 - (-3)$$

$$= 11$$

(Pref. N Horizonte/2019) O número real que verifica se o valor do determinante da matriz $\begin{bmatrix} x^2 & 4 \\ 9 & 2x \end{bmatrix}$ é igual a 18 é:

a) 54.

b) 36.

c) 27.

d) 9.

e) 3.

Comentários:

O determinante da matriz em questão é dado pela seguinte operação:

$$(\text{Produto dos elementos da diagonal principal}) - (\text{Produto dos elementos da diagonal secundária})$$

Para que o valor do determinante seja igual a 18, devemos ter:

$$(\boldsymbol{x^2} \times \mathbf{2}\boldsymbol{x}) - (\mathbf{4} \times \mathbf{9}) = 18$$

$$2x^3 - 36 = 18$$

$$2x^3 = 54$$

$$x^3 = 27$$

$$x^3 = 3^3$$

$$x = 3$$

Gabarito: Letra E.

Determinante de matriz de ordem 3

Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3, vamos utilizar a **regra de Sarrus**. Considere a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Para aplicar a **regra de Sarrus**, devemos <u>repetir as duas primeiras colunas da matriz</u> após a terceira coluna:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & -2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & 4 \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-3} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-3} \end{matrix}$$

Nesse momento, vamos dividir o cálculo em 2:

- **Parte positiva**;
- **Parte negativa**.

A **parte positiva** é obtida por meio das **diagonais para a direita**. Para obtê-la, multiplicamos os elementos dessas diagonais e somamos os valores.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \\ -5 & -3 \end{matrix}$$

$$[\mathbf{4}.(\mathbf{-1}).\mathbf{1} + \mathbf{2}.\mathbf{4}.(\mathbf{-5}) + (\mathbf{-2}).\mathbf{3}.(\mathbf{-3})]$$

$$= [(\mathbf{-4}) + (\mathbf{-40}) + \mathbf{18}]$$

$$= -26$$

A **parte negativa** é obtida por meio das **diagonais para a esquerda**. Para obtê-la, multiplicamos os elementos dessas diagonais e somamos os valores.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \\ -5 & -3 \end{matrix}$$

$$[(\mathbf{-2}).(\mathbf{-1}).(\mathbf{-5}) + \mathbf{4}.\mathbf{4}.(\mathbf{-3}) + \mathbf{2}.\mathbf{3}.\mathbf{1}]$$

$$= [(\mathbf{-10}) + (\mathbf{-48}) + \mathbf{6}]$$

$$= -52$$

Para obter o determinante, tomamos a **parte positiva** e <u>subtraímos</u> a **parte negativa**.

$$\det \mathrm{A} = (\text{Parte positiva}) - (\text{Parte negativa})$$

$$= (-26) - (-52)$$

$$= -26 + 52$$

$$= 26$$

De modo genérico, temos a seguinte representação da **regra de Sarrus**:

FIQUE ATENTO!

Regra de Sarrus

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right] \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\det A = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}] - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}]$$

(CRM PR/2014) Qual deve ser o valor de X para que o determinante seja 0,5?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & X & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) 0,5

b) 1

c) 1,5

d) 2

e) 2,5

Comentários:

Vamos aplicar a **regra de Sarrus** no determinante em questão. Primeiramente, devemos repetir as duas primeiras colunas da matriz após a terceira coluna:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & X & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & X \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Em seguida devemos calcular a **parte positiva** e a **parte negativa** para, na sequência, realizar a subtração:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & X & 6 & 2 & X \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$[\mathbf{1.X.1+3.6.0+5.2.1}]-[\mathbf{5.X.0+1.6.1+3.2.1}]$$

$$=[X+10]-[6+6]$$

$$=X-2$$

Portanto, o determinante em questão é $X-2$. O valor de X para que o determinante seja igual a 0,5 é:

$$X-2=0{,}5$$

$$X=2{,}5$$

Gabarito: Letra E.

Obtenção do determinante de matrizes de qualquer ordem

Para que possamos calcular o determinante de matrizes de ordem superiores a 3, devemos compreender primeiramente os conceitos de **menor complementar** e de **cofator** (ou **complemento algébrico**).

Menor complementar

Considere uma matriz A de <u>ordem maior ou igual a 2</u>.

O **menor complementar** **<u>de um elemento</u>** qualquer dessa matriz A é o **<u>determinante</u>** $\boldsymbol{D_{ij}}$ da matriz resultante ao se <u>eliminar a linha e a coluna em que esse elemento se encontra</u>.

> Em outras palavras, o **menor complementar** **<u>de um elemento</u>** a_{ij} de uma matriz A é o **<u>determinante</u>** $\boldsymbol{D_{ij}}$ da matriz obtida <u>eliminando-se a linha i e a coluna j da matriz A</u>.

Professor, não entendi nada!

Calma, amigo. Essas coisas só se entendem com um exemplo mesmo!

Considere a seguinte matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular o **menor complementar** **<u>do elemento</u>** a_{12}, isto é, para obter calcular o **<u>determinante</u>** $\boldsymbol{D_{12}}$, precisamos eliminar a linha e a coluna do elemento a_{12}.

Note que $a_{12} = 2$, e esse elemento está na <u>primeira linha</u> e na <u>segunda coluna</u> da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{-2} \\ \mathbf{3} & \cancel{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-5} & \cancel{-3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Logo, o determinante D_{12} correspondente ao **menor complementar** de a_{12} é:

$$D_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

$$D_{12} = [\mathbf{3} \times \mathbf{1}] - [\mathbf{4} \times (\mathbf{-5})]$$

$$D_{12} = 3 - (-20)$$

$$D_{12} = 23$$

(MPOG/2005) O menor complementar de um elemento genérico x_{ij} de uma matriz X é o determinante que se obtém suprimindo a linha e a coluna em que esse elemento se localiza. Uma matriz $Y = y_{ij}$, de terceira ordem, é a matriz resultante da soma das matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Sabendo-se que (a_{ij}) = $(i+j)^2$ e que $b_{ij} = i^2$, então o menor complementar do elemento y_{23} é igual a:

A) 0

b) -8

c) -80

d) 8

e) 80

Comentários:

A matriz Y é a soma as matrizes A e B.

Os elementos da matriz A são dados por $a_{ij} = (i+j)^2$. Logo:

$$a_{11} = (1+1)^2 = 4\,;\quad a_{12} = (1+2)^2 = 9\,;\quad a_{13} = (1+3)^2 = 16$$
$$a_{21} = (2+1)^2 = 9\,;\quad a_{22} = (2+2)^2 = 16\,;\quad a_{23} = (2+3)^2 = 25$$
$$a_{31} = (3+1)^2 = 16\,;\quad a_{32} = (3+2)^2 = 25\,;\quad a_{33} = (3+3)^2 = 9$$

Portanto, a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \\ 16 & 25 & 36 \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz B são dados por $b_{ij} = i^2$. Logo:

$$b_{11} = 1^2 = 1\,;\quad b_{12} = 1^2 = 1\,;\quad b_{13} = 1^2 = 1$$
$$b_{21} = 2^2 = 4;\quad b_{22} = 2^2 = 4;\quad b_{23} = 2^2 = 4$$
$$b_{31} = 3^2 = 9;\quad b_{32} = 3^2 = 9;\quad b_{33} = 3^2 = 9$$

Portanto, a matriz B é dado por:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

A matriz Y é a soma das matrizes A e B:

$$Y = A + B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \\ 16 & 25 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 17 \\ 13 & 20 & 29 \\ 25 & 34 & 45 \end{bmatrix}$$

Perceba que o elemento y_{23} é igual a 29. O **menor complementar** de y_{23} é o determinante da matriz que se obtém eliminando a **linha 2** e a **coluna 3**:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{10} & \cancel{17} \\ \cancel{13} & \cancel{20} & \cancel{29} \\ \mathbf{25} & \mathbf{34} & \cancel{45} \end{bmatrix}$$

Logo, o determinante $\boldsymbol{D_{23}}$ correspondente ao **menor complementar** de y_{23} é:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{10} \\ \mathbf{25} & \mathbf{34} \end{vmatrix}$$

$$= [\mathbf{5} \times \mathbf{34}] - [\mathbf{10} \times \mathbf{25}]$$

$$= -80$$

Gabarito: Letra C.

Cofator ou complemento algébrico

Considere uma matriz A de ordem maior ou igual a 2.

O **cofator de um elemento** a_{ij} dessa matriz A é um **número** representado por A_{ij} calculado do seguinte modo:

$$A_{\boldsymbol{ij}} = (-1)^{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}} D_{\boldsymbol{ij}}$$

Onde D_{ij} é o **menor complementar** do elemento a_{ij}.

Utilizando como exemplo a mesma matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos que o **cofator do elemento** a_{12} é dado por:

$$A_{\mathbf{12}} = (-1)^{\mathbf{1}+\mathbf{2}} D_{\mathbf{12}}$$

Do item anterior, já obtemos que o **menor complementar** $\boldsymbol{D_{12}}$ é igual a 23. Logo:

$$A_{12} = (-1)^3 \times 23$$

$$A_{12} = (-1) \times 23$$

$$A_{12} = -23$$

Portanto, o **cofator do elemento** a_{12} é $\boldsymbol{A_{12} = -23}$.

Teorema de Laplace

O **Teorema de Laplace** serve para obtermos o **determinante** de qualquer matriz quadrada de ordem maior ou igual a 2.

Vamos conceituar o teorema:

TOME NOTA!

O **determinante** de uma matriz A é a soma dos **produtos dos elementos** de uma fila qualquer (linha ou coluna) **pelos seus respectivos cofatores**.

Vejamos o teorema com mais detalhes. Em resumo, ele consiste em seguir 3 passos:

1. **Escolher uma fila (linha ou coluna), preferencialmente a que tiver mais zeros;**
2. **Realizar o produto de cada elemento da fila pelo seu respectivo cofator; e**
3. **Somar os produtos obtidos.**

Vamos realizar um exemplo para que tudo fique mais claro.

EXEMPLIFICANDO

Calcule o determinante de $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \\ 5 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Note que temos uma matriz quadrada de ordem 4. Seu determinante **não pode** ser obtido pela **regra de Sarrus**. Nesse caso, devemos seguir os três passos do **Teorema de Laplace**.

1. Escolher uma fila (linha ou coluna), preferencialmente a que tiver mais zeros:

Vamos escolher a terceira coluna, pois ela apresenta três zeros.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \mathbf{3} & 1 \\ -1 & 2 & \mathbf{0} & 8 \\ 5 & -1 & \mathbf{0} & 6 \\ 2 & 4 & \mathbf{0} & 3 \end{bmatrix}$$

2. Realizar o produto de cada elemento da fila pelo seu respectivo cofator

Lembre-se que o **cofator** é definido como $A_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$. Devemos, portanto, calcular os seguintes produtos:

$$a_{13}A_{13} \qquad a_{23}A_{23} \qquad a_{33}A_{33} \qquad a_{43}A_{43}$$

Cálculo de $a_{13}A_{13}$

$$a_{13}A_{13} = 3 \times A_{13}$$
$$= 3 \times (-1)^{1+3}D_{13}$$
$$= 3 \times (-1)^4 \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{1} \\ -1 & 2 & \cancel{0} & 8 \\ 5 & -1 & \cancel{0} & 6 \\ 2 & 4 & \cancel{0} & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 5 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **regra de Sarrus** em $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 5 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, obtém-se 197.

Logo:

$$a_{21}A_{21} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 5 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$
$$3 \times 197$$
$$= 591$$

Cálculo de $a_{23}A_{23}$

Note que o elemento a_{23} é zero, de modo que o produto $a_{23}A_{23}$ será zero:

$$a_{23}A_{23} = 0 \times A_{23} = 0$$

Cálculo de $a_{33}A_{33}$

Note que o elemento a_{33} é zero, de modo que o produto $a_{33}A_{33}$ será zero:

$$a_{33}A_{33} = 0 \times A_{33} = 0$$

Cálculo de $a_{44}A_{43}$

Note que o elemento a_{43} é zero, de modo que o produto $a_{43}A_{43}$ será zero:

$$a_{43}A_{43} = 0 \times A_{43} = 0$$

3. <u>Somar os produtos obtidos</u>

Por fim, para obter o determinante, soma-se os produtos obtidos:

$$\begin{aligned}\det A &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43}\\ &= 591 + 0 + 0 + 0\\ &= 591\end{aligned}$$

Logo, **determinante de A** é **591**.

Destaca-se a **importância de se selecionar a fila** (linha ou coluna) **com o maior número de zeros**. Caso tivéssemos selecionado outra fileira, o trabalho teria sido muito maior, pois teríamos que calcular mais determinantes de ordem 3. Vejamos:

EXEMPLIFICANDO

Calcule o determinante de $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 8\\ 5 & -1 & 0 & 6\\ 2 & 4 & 0 & 3\end{bmatrix}$

1. Escolher uma fila (linha ou coluna), preferencialmente a que tiver mais zeros

Vamos supor que tenhamos escolhido a segunda linha, que <u>**não é**</u> a fila que apresenta mais zeros.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 1\\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{8}\\ 5 & -1 & 0 & 6\\ 2 & 4 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

2. Realizar o produto de cada elemento da fila pelo seu respectivo cofator; e

3. Somar os produtos obtidos.

Nesse caso, o determinante seria calculado da seguinte forma:

$$\det A = \mathbf{a_{21}}A_{21} + \mathbf{a_{22}}A_{22} + \mathbf{a_{23}}A_{23} + \mathbf{a_{24}}A_{24}$$

$$(\mathbf{-1}).(-1)^{2+1}D_{21} + \mathbf{2}.(-1)^{2+2}D_{22} + \mathbf{0}.(-1)^{2+3}D_{23} + \mathbf{8}.(-1)^{2+4}D_{24}$$

$$= D_{21} + 2D_{22} + 8D_{24}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 8\\ 5 & -1 & 0 & 6\\ 2 & 4 & 0 & 3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 8\\ 5 & -1 & 0 & 6\\ 2 & 4 & 0 & 3\end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 8\\ 5 & -1 & 0 & 6\\ 2 & 4 & 0 & 3\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 6\\ 4 & 0 & 3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1\\ 5 & 0 & 6\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3\\ 5 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 0\end{vmatrix}$$

Aplicando a **regra de Sarrus** para os três determinantes, obtém-se **81**, **−9** e **66**, respectivamente. Portanto:

$$\det A = \mathbf{81} + 2 \times (\mathbf{-9}) + 8 \times \mathbf{66}$$
$$= 81 - 18 + 528$$
$$= 591$$

Note que chegamos no mesmo resultado, porém foram necessárias 3 aplicações da **regra de Sarrus**.

Vamos resolver um problema de concurso público.

(SEFAZ-RS/2014) O determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ é}$$

a) −32

b) −26

c) 14

d) 16

e) 28

Comentários:

Devemos calcular um determinante de ordem 4. Para tanto, faremos uso do **Teorema de Laplace**.

1. Escolher uma fila (linha ou coluna), preferencialmente a que tiver mais zeros;

Selecionaremos a quarta coluna, pois ela é a fila que mais apresenta zeros.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 1 & \mathbf{0} \\ 2 & -3 & 2 & \mathbf{1} \\ 2 & 1 & 1 & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

2. Realizar o produto de cada elemento da fila pelo seu respectivo cofator; e

3. Somar os produtos obtidos.

O determinante de A é dado por:

$$\det A = \boldsymbol{a_{14}} A_{14} + \boldsymbol{a_{24}} A_{24} + \boldsymbol{a_{34}} A_{34} + \boldsymbol{a_{44}} A_{44}$$
$$= \mathbf{0}.A_{14} + \mathbf{0}.A_{24} + \mathbf{1}.A_{34} + \mathbf{4}A_{44}$$
$$= A_{34} + 4A_{44}$$
$$= (-1)^{3+4} D_{34} + 4 \times (-1)^{4+4} D_{44}$$
$$= (-1)^7 D_{34} + 4 \times (-1)^8 D_{44}$$
$$= \mathbf{-}D_{34} + \mathbf{4}D_{44}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} + \mathbf{4}\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Vamos aplicar a **regra de Sarrus** no primeiro determinante D_{34}:

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{array}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_{34} = [\mathbf{1.3.1 + 2.1.2 + 1.2.1}] - [\mathbf{1.3.2 + 1.1.1 + 2.2.1}]$$

$$D_{34} = [3 + 4 + 2] - [6 + 1 + 4]$$

$$D_{34} = 9 - 11$$

$$\boldsymbol{D_{34} = -2}$$

Vamos agora aplicar a **regra de Sarrus** no segundo determinante D_{44}:

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{array}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_{44} = [\mathbf{1.3.2 + 2.1.2 + 1.2.(-3)}] - [\mathbf{1.3.2 + 1.1.(-3) + 2.2.2}]$$

$$D_{44} = [6 + 4 - 6] - [6 - 3 + 8]$$

$$D_{44} = 4 - 11$$

$$\boldsymbol{D_{44} = -7}$$

Voltando ao cálculo do determinante de A, temos:

$$\det A = -\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} + \mathbf{4}\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

$$= -(-2) + 4 \times (-7)$$

$$= 2 - 28$$

$$= -26$$

Gabarito: Letra B.

Propriedades dos determinantes

Teorema de Binet

O **teorema de Binet** nos diz que o determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos determinantes das duas matrizes.

$$\det(AB) = \det A \times \det B$$

Esse teorema também pode ser aplicado para mais matrizes:

$$\det(ABC) = \det A \times \det B \times \det C$$

(MPE-RS/2010) Considere as matrizes $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$.

Sendo Q o produto das matrizes M e P, nessa ordem, ou seja, $Q = MP$, o determinante da matriz Q é igual a:

a) $\frac{1}{180}$

b) $\frac{1}{240}$

c) $\frac{1}{360}$

d) $\frac{1}{540}$

e) $\frac{1}{720}$

Comentários:

Note que a questão pede o determinante da matriz MP. Não é necessário calcular o produto das matrizes, pois, pelo **Teorema de Binet**, sabemos que:

$$\det(MP) = \det M \times \det P$$

O determinante da matriz M é dado por:

$$\det M = \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right] - \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\right] = \frac{1}{12} - \frac{1}{10} = \frac{5-6}{60} = -\frac{1}{60}$$

O determinante da matriz P é dado por:

$$\det P = \left[\frac{2}{5} \times \frac{5}{4}\right] - \left[\frac{2}{3} \times 1\right] = \frac{2}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3-4}{6} = -\frac{1}{6}$$

Logo, o determinante de $Q = MP$ é dado por:

$$\det(MP) = \det M \times \det P$$

$$= \left(-\frac{1}{60}\right) \times \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{360}$$

Gabarito: Letra C.

Determinante da matriz inversa

O **determinante da matriz inversa** é o inverso do determinante da matriz original.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

INDO MAIS FUNDO!

Essa propriedade é uma consequência do **Teorema de Binet**.

Pela definição de matriz inversa, temos que:

$$AA^{-1} = I$$

Logo, o determinante do produto é:

$$\det(AA^{-1}) = \det I$$

Veremos mais adiante que o **determinante de uma matriz diagonal é o produto dos elementos da diagonal**. No caso da **matriz identidade**, esse produto será $\underbrace{1 \times 1 \times \dots \times 1}_{\substack{n \text{ vezes} \\ (\text{matriz de ordem } n)}} = 1$. Portanto, $\det I = 1$.

Além disso, pelo **Teorema de Binet**, temos que $\det(A^{-1}A) = \det A \times \det A^{-1}$. Logo:

$$\det(AA^{-1}) = \det I$$

$$\det A \times \det A^{-1} = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Determinante da matriz transposta

O **determinante da matriz transposta** é igual ao determinante da matriz original.

$$\det A^t = \det A$$

(TRT 11/2017) Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, então o determinante da inversa da matriz transposta de A é igual a

a) −0,20

b) −0,40

c) −0,25

d) −0,50

e) −1,00

Comentários:

A questão pergunta pelo determinante da **inversa da transposta**.

$$A \rightarrow \underbrace{A^t}_{\text{transposta}} \rightarrow \underbrace{(A^t)^{-1}}_{\text{inversa da transposta}}$$

O determinante da matriz A é dado por:

$$\det A = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

$$= [\mathbf{1} \times \mathbf{1}] - [\mathbf{3} \times \mathbf{2}]$$

$$= 1 - 6$$

$$= -5$$

Lembre-se que $\mathbf{\det A^t = \det A}$. Logo, o determinante da **inversa da transposta** é:

$$\det(A^t)^{-1} = \frac{1}{\mathbf{\det(A^t)}}$$

$$= \frac{1}{\mathbf{\det A}}$$

$$= \frac{1}{-5}$$

$$= -0{,}2$$

Gabarito: Letra A.

Multiplicação de uma fila por uma constante

Ao **multiplicar uma fila** (linha ou coluna) de uma matriz **por uma constante k**, o **determinante** dessa nova matriz **também fica multiplicado por k**.

EXEMPLIFICANDO

<u>**Exemplo**</u>: considere a seguinte matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3 \times 3 - 2 \times 1 = 7$$

Multiplicando uma das filas de A por 5, obtemos uma nova matriz, que chamaremos de A'. Observe que o determinante de A' fica multiplicado por 5. Veja:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & \mathbf{5} \times 2 \\ 1 & \mathbf{5} \times 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\det A' = 2 \times 15 - 10 \times 1$$

$$= 45 - 10$$

$$= 35$$

Uma consequência interessante dessa propriedade é realizar a operação inversa, <u>removendo um fator comum de dentro do determinante</u>. Veja:

$$\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{5} \times 2 \\ 1 & \mathbf{5} \times 3 \end{vmatrix} = \mathbf{5} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Multiplicação da matriz por uma constante

Ao multiplicar <u>**uma matriz**</u> de <u>**ordem n**</u> por uma **constante k**, o determinante dessa nova matriz fica **multiplicado por k^n**.

$$\det(kA) = k^n \det A$$

<u>**Exemplo**</u>: considere a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, cujo determinante é 7.

A matriz $3A$ é dada por:

$$3A = 3 \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \times 3 & \mathbf{3} \times 2 \\ \mathbf{3} \times 1 & \mathbf{3} \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

O determinante de $3A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ é:

$$\det 3A = [9 \times 9] - [6 \times 3] = 63$$

Note que o novo determinante é 9 vezes o determinante original, isto é:

$$\det(3A) = 3^2 \det A$$

Note que, ao multiplicar uma matriz de ordem n por uma constante k, na verdade **estamos multiplicando cada uma das suas n linhas (ou colunas) por k**. Por isso, o novo determinante acaba sendo multiplicado por:

$$\underbrace{k \times k \times \ldots \times k}_{n \text{ vezes}} = k^n$$

(MPE SC/2022) Seja A uma matriz 4 x 4 cujo determinante é igual a 2.

O determinante da matriz 3A é igual a:

a) 6;

b) 12;

c) 24;

d) 64;

e) 162.

Comentários:

Sabemos que, ao multiplicar **uma matriz** de **ordem n** por uma **constante k**, o determinante dessa nova matriz fica **multiplicado por k^n**.

$$\det(kA) = k^n \det A$$

Como a matriz A é de ordem $n = 4$, temos:

$$\det(3A) = 3^4 \det A$$

$$\det(3A) = 81 \times 2$$

$$\det(3A) = 162$$

Gabarito: Letra E.

(Pref. Gramado/2019) Considerando que a Matriz A seja quadrada de ordem 2 e que tenha determinante igual a 2, o determinante da matriz $3A$ é:

a) 2.

b) 6.

c) 9.

d) 18

e) 54

Comentários:

A matriz A apresenta ordem $n = 2$ e determinante $\det A = 2$.

Temos que:

$$\det 3A = 3^n \det A$$
$$= 3^2 \times 2$$
$$= 9 \times 2$$
$$= 18$$

Gabarito: Letra E.

(MPOG/2008) Uma matriz X de quinta ordem possui determinante igual a 10. A matriz B é obtida multiplicando-se todos os elementos da matriz X por 10. Desse modo, o determinante da matriz B é igual a:

a) 10^{-6}

b) 10^5

c) 10^{10}

d) 10^6

e) 10^3

Comentários:

A matriz X apresenta ordem $n = 5$ e determinante $\det X = 10$.

A matriz B é obtida multiplicando-se todos os elementos da matriz X por 10. Logo:

$$B = 10X$$

O determinante da matriz B é:

$$\det B = \det 10X$$
$$= 10^n \det X$$
$$= 10^5 \times 10$$
$$= 10^6$$

Gabarito: Letra D.

Determinante de matriz triangular ou de matriz diagonal

O determinante de uma **matriz triangular** ou de uma **matriz diagonal** é o produto dos elementos da diagonal principal. Exemplos:

- $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \times 1 \times 3 = 18$

- $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 5 \times 2 = 30$

- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 5 \times 3 = 30$

- $\det I_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

(IF Baiano/2019) Seja $A_{3\times3}$ uma matriz que pode ser decomposta como o produto de outras duas matrizes $L_{3\times3}$ e $U_{3\times3}$, onde L é uma matriz triangular inferior, com $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$, e U, uma matriz triangular superior, tal que $A = L.U$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Calcule o determinante da matriz U.

a) $det\ U = -13$

b) $det\ U = -9$

c) $det\ U = -2$

d) $det\ U = 3$

e) $det\ U = 5$

Comentários:

Note que $A = LU$. Pelo **Teorema de Binet**, temos:

$$\det A = \det LU$$

$$\det A = \det L \times \det U$$

Isolando $\det U$, ficamos com:

$$\frac{\det A}{\det L} = \det U$$

$$\boldsymbol{\det U = \frac{\det A}{\det L}}$$

Como L é uma matriz **triangular inferior**, deu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

$$\boldsymbol{\det L} = l_{11} \times l_{22} \times l_{33}$$

$$= 1 \times 1 \times 1$$

$$\boldsymbol{= 1}$$

A é uma matriz 3×3 conhecida. Para obter o seu determinante, podemos utilizar a **regra de Sarrus**.

$$\left|\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\boldsymbol{\det A} = [\mathbf{5.1.3} + \mathbf{2.4.1} + \mathbf{1.3.1}] - [\mathbf{1.1.1} + \mathbf{5.4.1} + \mathbf{2.3.3}]$$

$$= [15 + 8 + 3] - [1 + 20 + 18]$$

$$= 26 - 39$$

$$= \boldsymbol{-13}$$

Logo:

$$\boldsymbol{\det U = \frac{\det A}{\det L} = \frac{-13}{1} = -13}$$

Gabarito: Letra A.

Fila nula

Uma matriz que apresenta uma fila (linha ou coluna) cujos **elementos são todos zero** apresenta **determinante zero**. Exemplos:

- $\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 3 & \mathbf{0} \end{vmatrix} = 0$
- $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 5 & \sqrt{11} & \pi \end{vmatrix} = 0$
- $\begin{vmatrix} 3 & 2 & \mathbf{0} & 1 \\ -1 & 2 & \mathbf{0} & 8 \\ 5 & -1 & \mathbf{0} & 6 \\ 2 & 4 & \mathbf{0} & 3 \end{vmatrix} = 0$

Filas paralelas iguais

Uma matriz com **filas paralelas iguais** (linhas ou colunas) apresenta **determinante zero**. Exemplos:

- $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = 0$
- $\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ 5 & \sqrt{11} & \pi \end{vmatrix} = 0$
- $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & 2 & \mathbf{1} & 8 \\ \mathbf{1} & -1 & \mathbf{1} & 6 \\ \mathbf{1} & 4 & \mathbf{1} & 3 \end{vmatrix} = 0$

Filas paralelas proporcionais

Uma matriz com **filas paralelas proporcionais** (linhas ou colunas) apresenta **determinante zero**. Exemplos:

- $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{9} \end{vmatrix} = 0$, pois a segunda coluna é 3 vezes a primeira coluna.
- $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0,5} & \mathbf{1} & \mathbf{1,5} \\ 5 & \sqrt{11} & \pi \end{vmatrix} = 0$, pois a primeira linha é o dobro da segunda linha.
- $\begin{vmatrix} \mathbf{4} & 2 & \mathbf{20} & 1 \\ \mathbf{1} & 2 & \mathbf{5} & 8 \\ \mathbf{2} & -1 & \mathbf{10} & 6 \\ \mathbf{3} & 4 & \mathbf{15} & 3 \end{vmatrix} = 0$, pois a terceira coluna é 5 vezes a primeira coluna.

Troca de filas paralelas

Ao trocarmos uma fila (linha ou coluna) de lugar com outra fila paralela, **o determinante muda de sinal**.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 20 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -20$$

Professor, e se trocarmos as filas de novo?

Nesse caso, o sinal muda novamente!

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 271 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -271 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 271$$

(MPE SC/2022) Considere as matrizes $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2a & c & 3b \\ 2d & f & 3e \\ 2g & k & 3h \end{bmatrix}$.

Sendo $det(A)$ e $det(B)$ os determinantes das matrizes A e B, respectivamente, tem-se que:

a) $det(A) = 6 \times det(B)$;

b) $det(A) = -6 \times det(B)$;

c) $det(B) = 6 \times det(A)$;

d) $det(B) = -6 \times det(A)$;

e) $det(A) = det(B)$.

Comentários:

Sabemos que, ao **multiplicar uma fila** (linha ou coluna) de uma matriz **por uma constante k**, o **determinante** dessa nova matriz **também fica multiplicado por k**.

Uma consequência interessante dessa propriedade é realizar a operação inversa, <u>removendo um fator comum de dentro do determinante</u>.

Veja que:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2a & c & 3b \\ 2d & f & 3e \\ 2g & k & 3h \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = 2 \times \begin{vmatrix} a & c & 3b \\ d & f & 3e \\ g & k & 3h \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & k & h \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = 6 \times \underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{h} \end{vmatrix}}_{x}$$

Note que $x = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{h} \end{vmatrix}$ é muito parecido com $\det(A)$. A diferença é que <u>a segunda e a terceira coluna estão trocadas.</u>

Sabemos que ao trocarmos uma fila (linha ou coluna) de lugar com outra fila paralela, **o determinante muda de sinal**. Logo:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{h} \end{vmatrix} = x \to \underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{k} \end{vmatrix}}_{\det(A)} = -x$$

Portanto:

$$\det(A) = -x$$

$$x = -\det(A)$$

Consequentemente, temos que $\det(B)$ é dado por:

$$\det(B) = 6 \times \underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{h} \end{vmatrix}}_{x}$$

$$\det(B) = -6 \times det\ (A)$$

Gabarito: Letra D.

Combinação linear de filas

Primeiramente, vamos entender o que é uma combinação linear.

Podemos dizer a primeira linha L_1 de uma matriz, por exemplo, é combinação linear de outras linhas L_2, L_3 e L_4 **quando existem valores reais $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$** e **$\boldsymbol{c}$ tais que**:

$$L_1 = aL_2 + bL_3 + cL_4$$

Exemplo: considere a matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{13} & \mathbf{8} \end{bmatrix}$$

Note que a terceira linha $L_3 = [\mathbf{6} \quad \mathbf{13} \quad \mathbf{8}]$ é uma combinação linear da primeira linha $L_1 = [\mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{1}]$ e da segunda linha $L_2 = [\mathbf{3} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{7}]$, pois $L_3 = 3L_1 + L_2$.

Vejamos:

$$3L_1 + L_2$$

$$= 3[\mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{1}] + [\mathbf{3} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{5}]$$

$$= [3 \quad 6 \quad 3] + [3 \quad 7 \quad 5]$$

$$= [6 \quad 13 \quad 8]$$

$$= L_3$$

Também podemos ter combinações lineares com colunas. Considere a seguinte matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{11} \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{9} \\ 2 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ 3 & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{12} \end{bmatrix}$$

Note que a quarta coluna $C_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{11} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{12} \end{bmatrix}$ é combinação linear da segunda coluna $C_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}$ e da terceira coluna $C_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}$, pois $C_4 = 2C_2 + C_3$.

Vejamos:

$$2C_2 + C_3$$

$$= 2\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$= C_4$$

Entendida a ideia de combinação linear entre linhas e entre colunas, devemos saber que **quando uma matriz apresenta uma fila (linha ou coluna) que é combinação linear de outras filas, o seu determinante é zero**.

Nos exemplos em questão, a matriz A e a matriz B apresentam determinantes nulos.

(TJ PR/2009) Calcule o determinante de $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

a) 11

b) -11

c) 0

d) 5

Comentários:

E aí, concurseiro? Vai aplicar o **Teorema de Laplace** nesse determinante 4×4? Negativo!

Note que a **linha 1** é a soma da **linha 3** com a **linha 4**, isto é, $L_1 = L_3 + L_4$.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ \mathbf{4} & \mathbf{-4} & \mathbf{-6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

Como temos uma linha que é combinação linear de outras duas, o determinante é zero.

Gabarito: Letra C

Teorema de Jacobi

O **Teorema de Jacobi** é uma ferramenta poderosíssima. Isso porque esse teorema nos permite **manipular os determinantes** de modo a aplicar as propriedades vistas até então.

Esse teorema nos diz que ao **multiplicar uma fila por qualquer número** e **somar esse resultado a uma outra fila paralela qualquer**, o valor do **determinante não se altera**.

Em outras palavras, **podemos trocar uma fila qualquer por uma combinação linear que contenha a fila original**.

Vejamos um exemplo:

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Note que temos um determinante de ordem 4. Poderíamos aplicar o **Teorema de Laplace** diretamente para resolver o problema, porém note que seria bastante trabalhosa a resolução, visto que não temos uma fileira com três zeros.

Para resolver o determinante, **vamos fazer "surgir alguns zeros" com o Teorema de Jacobi**. Lembre-se que ao **multiplicar uma fila por qualquer número** e **somar esse resultado a uma outra fila paralela qualquer**, **o valor do determinante não se altera**.

Primeiramente, vamos multiplicar a primeira coluna (C_1) por (-2) e somar à segunda coluna (C_2).

Em outras palavras, **vamos substituir** $\boldsymbol{C_2}$ por $\boldsymbol{C_2} + \boldsymbol{(-2)C_1}$.

Para facilitar a comunicação, vamos descrever essa substituição assim: $\boldsymbol{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1}$.

×(−2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Note também que podemos substituir C_4 por $C_4 + (-2)C_3$, isto é, podemos realizar a operação $\boldsymbol{C_4 \leftarrow C_4 - 3C_3}$.

$$\begin{array}{c} \times(-2) \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \overset{C_4 \leftarrow C_4 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Observe que o determinante da matriz original corresponde a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Note que agora podemos aplicar o **Teorema de Laplace** com mais facilidade. Ao selecionar a **segunda coluna**, temos que o determinante é dado por:

$$\det A = 0 \times A_{12} + 0 \times A_{22} + 1 \times A_{32} + 0 \times A_{42}$$
$$= 1 \times A_{32}$$
$$= (-1)^{3+2} D_{32}$$
$$= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Vamos aplicar a **regra de Sarrus** no determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_{32} = [\mathbf{1.1.1 + 1.1.1 + 0.4.1}] - [\mathbf{0.1.1 + 1.1.1 + 1.4.1}]$$
$$D_{32} = 2 - 5$$
$$D_{32} = -3$$

Note que $\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Portanto:

$$\det A = -(-3)$$
$$\det A = 3$$

Regra de Chió

A **Regra de Chió** é uma regra que permite com que um determinante tenha a sua ordem reduzida. Trata-se de uma aplicação do **Teorema de Jacobi**.

Vamos ver a aplicação da regra na prática. Considere o determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

O primeiro passo e **fazer com que o elemento a_{11} seja igual a 1**. Realizando a operação $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3$, temos:

$$\begin{array}{c} \times(-2) \\ \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 2 & \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{4} & 8 & \mathbf{1} & 3 \\ \mathbf{3} & 7 & \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{1} & 2 & \mathbf{2} & 3 \end{vmatrix} \end{array} \overset{C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 \\ \mathbf{2} & 8 & 1 & 3 \\ \mathbf{1} & 7 & 1 & 2 \\ \mathbf{-3} & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

A partir desse momento, devemos **zerar todos os elementos da primeira linha**, **à exceção do elemento a_{11}**, **fazendo uso da primeira coluna**.

Para tanto, vamos realizar as seguintes substituições, nessa ordem:

- $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$;
- $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$; e
- $C_4 \leftarrow C_4 - 2C_1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 & 2 \\ 2 & \mathbf{4} & 1 & 3 \\ 1 & \mathbf{5} & 1 & 2 \\ -3 & \mathbf{8} & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 \\ 2 & 4 & \mathbf{-1} & 3 \\ 1 & 5 & \mathbf{0} & 2 \\ -3 & 8 & \mathbf{5} & 3 \end{vmatrix} \overset{C_4 \leftarrow C_4 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 4 & -1 & \mathbf{-1} \\ 1 & 5 & 0 & \mathbf{0} \\ -3 & 8 & 5 & \mathbf{9} \end{vmatrix}$$

Ficamos com:

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

Ao aplicar o **Teorema de Laplace** na primeira linha, temos:

$$\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

Como na **Regra de Chió** temos o sempre o elemento $a_{11} = 1$ e os demais elementos da primeira linha iguais a zero, ficamos com $\det A = D_{11}$:

$$\det A = 1A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + 0A_{14}$$

$$\det A = A_{11}$$

$$\det A = (-1)^{1+1} D_{11}$$

$$\boldsymbol{\det A = D_{11}}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

Veja, portanto, que a **Regra de Chió** reduziu a ordem do determinante de 4 para 3, pois tínhamos o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Esse determinante foi reduzido a:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

Poderíamos continuar utilizando a **Regra de Chió** para reduzir a ordem do determinante de 3 para 2. Porém, como já temos um determinante de ordem 3, podemos aplicar a **regra de Sarrus**.

$$\left|\begin{matrix} 4 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \\ 8 & 5 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\mathbf{[4.0.9 + (-1).0.8 + (-1).5.5] - [(-1).0.8 + 4.0.5 + (-1).5.9]}$$

$$= [0 + 0 - 25] - [0 + 0 - 45]$$

$$= -25 + 45$$

$$= 20$$

Em resumo, a **Regra de Chió** consiste nos seguintes passos:

- Fazer com que o elemento a_{11} seja igual a 1;
- **Zerar todos os elementos da primeira linha**, **à exceção de a_{11}**, **fazendo uso da primeira coluna**;
- Feita a operação anterior, o determinante em questão é igual ao **menor complementar D_{11}**;
- Repita o processo, se necessário, para reduzir a ordem do determinante mais uma vez.

Nesse momento, vamos resolver uma questão que já fizemos por **Teorema de Laplace**, dessa vez por meio da **Regra de Chió**.

(SEFAZ-RS/2014) O determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ é}$$

a) -32

b) -26

c) 14

d) 16

e) 28

Comentários:

Temos um determinante de ordem 4. Dessa vez, vamos utilizar a **Regra de Chió**.

Fazer com que o elemento a_{11} seja igual a 1

Note que **o elemento a_{11} já é igual a 1**.

Zerar todos os elementos da primeira linha, à exceção de a_{11}, fazendo uso da primeira coluna

Para tanto, vamos realizar as seguintes substituições, nessa ordem:

$C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$; e

$C_3 \leftarrow C_3 - C_1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 2 & \mathbf{-1} & 1 & 0 \\ 2 & \mathbf{-7} & 2 & 1 \\ 2 & \mathbf{-3} & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\ 2 & -1 & \mathbf{-1} & 0 \\ 2 & -7 & \mathbf{0} & 1 \\ 2 & -3 & \mathbf{-1} & 4 \end{vmatrix}$$

Observe que o determinante ficou reduzido a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

<u>**Feita a operação anterior, o determinante em questão é igual ao menor complementar**</u> $\boldsymbol{D_{11}}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **regra de Sarrus**, temos:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & -1 \\ -7 & 0 \\ -3 & -1 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\det A = [(-\mathbf{1}).\mathbf{0}.\mathbf{4} + (-\mathbf{1}).\mathbf{1}.(-\mathbf{3}) + 0.(-\mathbf{7}).(-\mathbf{1})] - [\mathbf{0}.\mathbf{0}.(-\mathbf{3}) + (-\mathbf{1}).\mathbf{1}.(-\mathbf{1}) + (-\mathbf{1}).(-\mathbf{7}).\mathbf{4}]$$

$$\det A = [0 + 3 + 0] - [0 + 1 + 28]$$

$$\det A = 3 - 29$$

$$\det A = -26$$

O determinante da matriz A, portanto, é igual a -26.

Gabarito: Letra B.

Matriz inversa

No tópico de matrizes, definimos que a **inversa** de uma matriz A é aquela matriz que, quando multiplicada pela matriz A, tem como resultado a matriz identidade:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Agora que sabemos como calcular determinantes, você precisa saber que uma **matriz A é inversível** (ou **invertível**) quando o **determinante é diferente de zero**, isto é:

$$\text{A é inversível} \leftrightarrow \det \text{A} \neq 0$$

Vimos também que uma matriz que **não é inversível** é denominada **singular**. Nesse caso:

$$\text{A é singular} \leftrightarrow \det \text{A} = 0$$

Para uma matriz 2×2, temos uma fórmula para encontrar a matriz inversa. Considerando uma matriz $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$, ela admite inversa quando $\det A \neq 0$ e sua inversa é:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & -\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & -\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$$

Vamos resolver dois exercícios sobre matriz inversa:

(SEDF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$, julgue o próximo item.

A matriz A é inversível.

Comentários:

Vamos calcular o determinante de A. Se o valor for diferente de zero, então a matriz é inversível.

Aplicando a **regra de Sarrus**, temos:

$$\left| \begin{matrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 4 & 10 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = [\mathbf{2.10.40 + 0.20.0 + 10.4.2}] - [\mathbf{10.10.0 + 2.20.2 + 0.4.40}]$$

$$\det A = [800 + 0 + 80] - [0 + 80 + 0]$$

$$\det A = 880 - 80$$

$$\det A = 800$$

Como o determinante é diferente de zero, trata-se de uma matriz inversível.

Gabarito: CERTO.

(MPE SP/2019) A inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ é:

a) $\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}33 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0{,}33 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$

Comentários:

Resolvermos essa questão no capítulo sobre matrizes. Dessa vez, vamos utilizar a fórmula apresentada.

Temos que a inversa de uma matriz $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$ é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$$

.

A matriz em questão é $B = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$, e seu determinante é:

$$\det B = [\mathbf{2} \times \mathbf{3}] - [\mathbf{5} \times \mathbf{1}] = 1$$

A inversa de B é:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra B.

Para finalizar a parte teórica de determinantes, vamos resolver uma questão que envolve diversas propriedades aprendidas.

(Pref. Gov. Celso Ramos/2017) Considere as proposições:

I) $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 13 & -21 \\ -2 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$

II) $\begin{vmatrix} 1/2 & \pi & 13 & 25 \\ -7 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & -8 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$

III) A matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 9 \\ 6 & -3 & 4 & -1 \\ 10 & -11 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ é singular, isto é, não possui inversa.

IV) O conjunto solução da equação $\begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ possui dois elementos cujo produto é igual a -2.

Está(ão) CORRETA(S) a(s) proposição(ões):

a)Apenas as alternativas **I** e **II** estão corretas.

b)Apenas **II** e **IV**.

c)Apenas a alternativa **II** está correta.

d)Apenas **I, III** e **IV**.

e)Apenas **II, III** e **IV**.

Comentários:

Vamos analisar cada proposição individualmente.

I) ERRADA.

Veja que o determinante apresentado de assemelha muito a uma matriz triangular superior, exceto pelo elemento $a_{21} = -2$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & 13 & -21 \\ -2 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Para resolver **transformar** esse determinante em um determinante de **matriz triangular**, podemos aplicar o **Teorema de Jacobi** realizando a substituição $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{7} & \mathbf{13} & \mathbf{-21} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} -2 & 7 & 13 & -21 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{-8} & \mathbf{29} \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

O determinante resultante corresponde ao determinante de uma **matriz triangular superior**.

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & 13 & -21 \\ 0 & -6 & -8 & 29 \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \times (-6) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times 3 = 18$$

Logo, o item está errado, pois o determinante em questão é 18.

II) CERTO.

Trata-se de um determinante que apresenta uma **fila nula**. Portanto, o determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} 1/2 & \pi & 13 & 25 \\ -7 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & -8 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

III) CERTO.

Para a matriz em questão ser **singular**, o **determinante deve ser zero**.

Note que **temos uma fila é combinação linear de outras duas**, pois $L3 = (-2)L1 + L2$. Portanto, o **determinante de A é nulo** e, consequentemente, trata-se de uma matriz singular.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 9 \\ 6 & -3 & 4 & -1 \\ 10 & -11 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

IV) CERTO.

Primeiramente, vamos aplicar a **regra de Sarrus** em $\begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & x \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} x & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix}$$

Parte Negativa Parte Positiva

$$= [x.2.x + 1.(-1).4 + (-2).3.1] - [(-2).2.4 + x.(-1).1 + 1.3.x]$$

$$= [2x^2 - 4 - 6] - [-16 - x + 3x]$$

$$= [2x^2 - 10] - [2x - 16]$$

$$= 2x^2 - 2x + 6$$

Agora vamos calcular o determinante $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = [(-2) \times 4] - [2 \times 1] = -10$$

Portanto, a equação requerida é:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2x^2 - 2x + 6) + (-10) = 0$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

Da teoria de equações do segundo grau, sabemos que o produto das raízes é $\frac{c}{a}$. Logo:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{2} = -2$$

O item, portanto, está correto.

Por fim, temos que apenas os **itens II, III e IV estão certos**.

Gabarito: Letra E.

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Matrizes

FGV

1.(FGV/SEAD-AP/2022) Seja A a matriz 2×2 onde cada elemento é $a_{ij} = i + j$.

A soma dos elementos da matriz A^2 é

a) 12.

b) 38.

c) 56.

d) 74.

e) 144.

Comentários:

Genericamente, a matriz A pode ser representada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Considerando a lei de formação $a_{ij} = i + j$, temos os seguintes elementos:

$$a_{11} = 1 + 1 = 2$$
$$a_{12} = 1 + 2 = 3$$
$$a_{21} = 2 + 1 = 3$$
$$a_{22} = 2 + 2 = 4$$

Portanto, temos a seguinte matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

A matriz A^2 é dada pelo produto da matriz A por ela mesma.

$$A^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{2}.\mathbf{2} + \mathbf{3}.\mathbf{3} & \mathbf{2}.\mathbf{3} + \mathbf{3}.\mathbf{4} \\ \mathbf{3}.\mathbf{2} + \mathbf{4}.\mathbf{3} & \mathbf{3}.\mathbf{3} + \mathbf{4}.\mathbf{4} \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 18 & 25 \end{bmatrix}$$

Logo, a soma dos elementos da matriz A^2 é:

$$13 + 18 + 18 + 25$$

$$= 74$$

Gabarito: Letra D.

2.(FGV/TCE-TO/2022) Para um dia de treinamento, os funcionários de uma empresa foram alocados em três salas: Sala 1, Sala 2 e Sala 3. Tendo sido realizada a primeira parte do treinamento, foi feito um intervalo, após o qual os funcionários puderam escolher livremente qualquer sala para a segunda parte do treinamento.

Na matriz A abaixo, cada elemento a_{ij} representa o número de funcionários que estavam na Sala i e foram para a Sala j após o intervalo.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

É correto concluir que:

a) a Sala 1 terminou com 2 funcionários a mais que no início;

b) a Sala 2 terminou com 20 funcionários;

c) a Sala 3 terminou com 3 funcionários a mais que no início;

d) a Sala 1 iniciou com 15 funcionários;

e) uma das salas terminou com o mesmo número de funcionários que tinha no início.

Comentários:

Na matriz apresentada, o elemento a_{ij}, posicionado na linha i e na coluna j, representa o número de funcionários que **estavam na Sala i** e, após o intervalo, **passaram a estar na Sala j**.

Na **linha 1**, temos o total de funcionários que **estavam na sala 1** e, após o intervalo, **passaram a estar nas três diferentes salas**.

- $a_{11} = 5$ funcionários **estavam na sala 1** e, após o intervalo, permaneceram na sala 1;
- $a_{12} = 2$ funcionários **estavam na sala 1** e, após o intervalo, passaram a estar na sala 2;
- $a_{13} = 7$ funcionários **estavam na sala 1** e, após o intervalo, passaram a estar na sala 3.

Perceba, portanto, que o **total de funcionários que estavam na sala 1 na primeira parte do treinamento** corresponde à **soma dos elementos da linha 1**:

$$5 + 2 + 7 = 14$$

Na **coluna 1**, temos o total de funcionários que **estavam nas três salas** e, após o intervalo, **passaram a estar na sala 1**.

- $a_{11} = 5$ funcionários estavam na sala 1 e, após o intervalo, **permaneceram na sala 1**;
- $a_{21} = 4$ funcionários estavam na sala 2 e, após o intervalo, **passaram a estar na sala 1**;
- $a_{31} = 3$ funcionários estavam na sala 3 e, após o intervalo, **passaram a estar na sala 1**.

Perceba, portanto, que o **total de funcionários que permaneceram ou passaram a estar na sala 1 na segunda parte do treinamento** corresponde à **soma dos elementos da coluna 1**:

$$5 + 4 + 3 = 12$$

Vamos fazer essa análise para as demais salas. Sabemos que:

- A **soma dos elementos da linha i** corresponde ao total de funcionários que **estavam na Sala i na primeira parte do treinamento**;
- A **soma dos elementos da coluna j** corresponde ao total de funcionários que, após o intervalo, **permaneceram ou passaram a estar na Sala j na segunda parte do treinamento**.

Temos, portanto, o seguinte esquema:

Sala	**Antes do intervalo** (soma dos elementos da linha)	**Após o intervalo** (soma dos elementos da coluna)	**Saldo** (Final — Inicial)
1	5+2+7 = **14**	5+4+3 = **12**	12 — 14 = **—2**
2	4+9+6 = **19**	2+9+8 = **19**	19 — 19 = **0**
3	3+8+10 = **21**	7+6+10 = **23**	23—21 = **2**

Note, portanto, que é correto afirmar que **uma das salas terminou com o mesmo número de funcionários que tinha no início**. Trata-se da **Sala 2**.

Gabarito: Letra E.

3.(FGV/MPE SC/2022)

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

A soma dos elementos da matriz A^2 é:

a) 10;

b) 12;

c) 15;

d) 23;

e) 30.

Comentários:

Note que a matriz A^2 é:

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.2 + 1.3 & 2.1 + 1.1 \\ 3.2 + 1.3 & 3.1 + 1.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Logo, a soma dos elementos da matriz A^2 é:

$$7 + 3 + 9 + 4$$

$$= 23$$

Gabarito: Letra D.

4. (FGV/Pref Paulínia/2021) Considere a equação matricial $A^2X^{-1}B^{-1} = AC$, onde A, B, C e X são matrizes quadradas invertíveis e de mesma ordem.

A solução X é igual a

a) $AB^{-1}C^{-1}$

b) $AC^{-1}C^{-1}$

c) $CA^{-1}B$

d) $A^{-1}BC$

e) $B^{-1}C^{-1}A$

Comentários:

Sabemos que todas as matrizes quadradas **são inversíveis** e de mesma ordem. Note que:

$$A^2X^{-1}B^{-1} = AC$$

$$AAX^{-1}B^{-1} = AC$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação por $\boldsymbol{A^{-1}}$, **pela esquerda**, temos:

$$\boldsymbol{A^{-1}}AAX^{-1}B^{-1} = \boldsymbol{A^{-1}}AC$$

$$(A^{-1}A)AX^{-1}B^{-1} = (A^{-1}A)C$$

$$(I)AX^{-1}B^{-1} = (I)C$$

$$AX^{-1}B^{-1} = C$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação novamente por $\boldsymbol{A^{-1}}$, **pela esquerda**, temos:

$$\boldsymbol{A^{-1}}AX^{-1}B^{-1} = \boldsymbol{A^{-1}}C$$

$$(A^{-1}A)X^{-1}B^{-1} = A^{-1}C$$

$$(I)X^{-1}B^{-1} = A^{-1}C$$

$$X^{-1}B^{-1} = A^{-1}C$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação por $\boldsymbol{X}$, pela esquerda, temos:

$$\boldsymbol{X}X^{-1}B^{-1} = \boldsymbol{X}A^{-1}C$$

$$(XX^{-1})B^{-1} = XA^{-1}C$$

$$(I)B^{-1} = XA^{-1}C$$

$$B^{-1} = XA^{-1}C$$

Logo:

$$XA^{-1}C = B^{-1}$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação por $\boldsymbol{C^{-1}}$, pela direita, temos:

$$XA^{-1}C\ \boldsymbol{C^{-1}} = B^{-1}\ \boldsymbol{C^{-1}}$$

$$XA^{-1}(C\ C^{-1}) = B^{-1}\ C^{-1}$$

$$XA^{-1}(I) = B^{-1}\ C^{-1}$$

$$XA^{-1} = B^{-1}\ C^{-1}$$

Finalmente, ao multiplicar ambos os lados da equação por $\boldsymbol{A}$, pela direita, temos:

$$XA^{-1}\boldsymbol{A} = B^{-1}\ C^{-1}\boldsymbol{A}$$

$$X(A^{-1}A) = B^{-1}\ C^{-1}A$$

$$X(I) = B^{-1}\ C^{-1}A$$

$$X = B^{-1}\,C^{-1}A$$

Gabarito: Letra E.

5.(FGV/Pref. Salvador/2019) Considere as matrizes $A_{2\times 3}$ e $B_{2\times 2}$.

Sobre essas matrizes é correto afirmar que

a) Existe a soma $A + B$ e é uma matriz 4×5.

b) Existe o produto AB e é uma matriz 4×6.

c) Existe o produto BA e é uma matriz 4×6.

d) Não existe o produto AB.

e) Não existe o produto BA.

Comentários:

Vamos comentar as alternativas.

a) Existe a soma $A + B$ e é uma matriz 4×5. ERRADO.

Para **somar** ou **subtrair** matrizes, é **necessário que elas tenham a mesma dimensão**. Como a matriz A apresenta dimensão 2×3 e a matriz B apresenta dimensão 2×2, a soma $A + B$ não é possível.

b) Existe o produto AB e é uma matriz 4×6. ERRADO.

d) Não existe o produto AB. CERTO.

Para multiplicar matrizes, deve-se verificar se o **número de colunas da primeira** matriz é igual ao **número de linhas da segunda**. Se essa igualdade não se verificar, não é possível realizar o produto das matrizes.

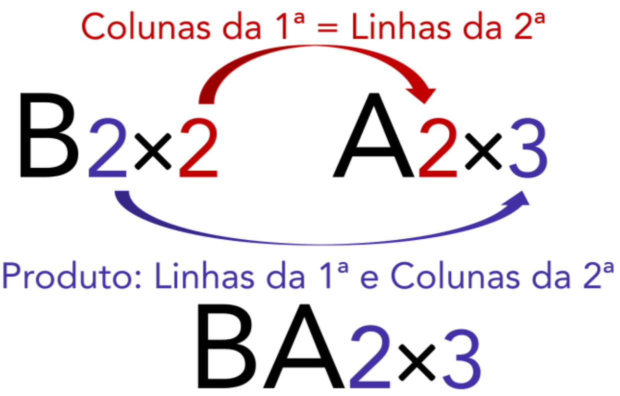
Veja, portanto, que **o produto AB não existe**, pois $A_{2\times 3}$ apresenta **3 colunas** e $B_{2\times 2}$ apresenta **2 linhas**. Logo, o **gabarito** é **letra D**.

c) Existe o produto BA e é uma matriz 4×6. ERRADO.

e) Não existe o produto BA. ERRADO.

Para fins didáticos, vamos verificar o produto BA.

Note que o **número de colunas da primeira** matriz (matriz $B_{2\times 2}$, 2 colunas) é igual ao **número de linhas da segunda** (matriz $A_{2\times 3}$, 2 linhas). Logo, o produto AB é possível. Observe, porém, que a matriz-produto apresenta a **dimensão 2×3**, não 4×6.



Gabarito: Letra D.

Cebraspe

Texto para as questões 06 e 07

Um importante algoritmo para a resolução de problemas que envolvem matrizes (por exemplo, resolução de sistemas lineares, cálculo da matriz inversa, determinantes etc.) consiste em efetuar operações elementares sobre as linhas da matriz. Essas operações incluem multiplicação de uma linha da matriz por um número não nulo; adição a uma linha de um múltiplo de outra linha; permutação de linhas. Com relação a essas operações, considere a matriz B obtida da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ depois de efetuada a seguinte sequência de operações elementares: substituição da linha 3 pela linha 3 menos a linha 2; substituição da linha 2 pela linha 2 menos duas vezes a linha 1. Com base nessas informações, julgue o item que se segue, acerca da matriz B.

6. (CESPE/CBM DF/2011) Na linha 3 da matriz B, há apenas um elemento nulo.

7. (CESPE/CBM DF/2011) A soma dos elementos da linha 2 da matriz B é igual a 1.

Comentários:

Vamos obter a matriz B por meio das operações propostas. Primeiramente, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Substituição da linha 3 pela linha 3 menos a linha 2.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ 2 - \mathbf{2} & -1 - (\mathbf{-1}) & -1 - (\mathbf{-2}) \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Substituição da linha 2 pela linha 2 menos duas vezes a linha 1.

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ 2 - 2 \times (\mathbf{1}) & -1 - 2 \times (\mathbf{0}) & -2 - 2 \times (\mathbf{-2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questão 06

Veja que na **linha 3** da matriz B **há dois elementos nulos**. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Questão 07

A soma dos elementos da linha 2 da matriz B é:

$$0 + (-1) + 2 = 1$$

O **gabarito**, portanto, é **CERTO**.

Gabarito: 06 - ERRADO. 07 - CERTO.

8. (CESPE/PC-DF/2013) Considere que a empresa X tenha disponibilizado um aparelho celular a um empregado que viajou em missão de 30 dias corridos. O custo do minuto de cada ligação, para qualquer telefone, é de R$ 0,15. Nessa situação, considerando que a empresa tenha estabelecido limite de R$ 200,00 e que, após ultrapassado esse limite, o empregado arcará com as despesas, julgue o item a seguir.

Considere que, em uma nova missão, o preço das ligações tenha passado a depender da localidade, mesma cidade ou cidade distinta da de origem da ligação, e do tipo de telefone para o qual a ligação tenha sido feita, celular, fixo ou rádio. As tabelas abaixo mostram quantas ligações de cada tipo foram feitas e o valor de cada uma:

	celular	fixo	rádio
mesma cidade	6	3	1
cidade distinta	7	1	3

Tabela I: número de ligações realizadas por tipo de telefone

	mesma cidade	cidade distinta
celular	0,20	0,50
fixo	0,15	0,30
rádio	0,20	0,20

Tabela II: preço de cada ligação, em reais

Nessas condições, se $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ for a matriz formada pelos dados da tabela I, e $B = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,50 \\ 0,15 & 0,30 \\ 0,20 & 0,20 \end{bmatrix}$ for a matriz formada pelos dados da tabela II, então a soma de todas as entradas da matriz A × B será igual ao valor total das ligações efetuadas.

Comentários:

O preço total a ser pago seria dado pelo seguinte:

Mesma cidade: $6 \times 0{,}20 + 3 \times 0{,}15 + 1 \times 0{,}20 = 1{,}85$

Cidades diferentes: $7 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}30 + 3 \times 0{,}20 = 4{,}40$

Total: $1{,}85 + 4{,}40 = R\$\, 6{,}85$

Porém, na multiplicação de matrizes, vamos ter o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}50 \\ 0{,}15 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \times 0{,}20 + 3 \times 0{,}15 + 1 \times 0{,}20 & 6 \times 0{,}5 + 3 \times 0{,}30 + 1 \times 0{,}20 \\ 7 \times 0{,}20 + 1 \times 0{,}15 + 3 \times 0{,}20 & 7 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}30 + 3 \times 0{,}20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}85 & 4{,}10 \\ 2{,}15 & 4{,}40 \end{bmatrix}$$

Vemos que apenas a **diagonal principal** possui valores condizentes com o anterior, enquanto a diagonal secundária corresponde a cobranças cruzadas, isto é, cobrar o preço de ligações de mesma cidade para ligações em cidades diferentes, e vice e versa.

Assim, o **valor total das ligações efetuadas** será o **traço da matriz**, isto é, a <u>soma dos elementos da diagonal principal</u>. **Não** se trata da **soma de todos os elementos** da matriz.

Gabarito: ERRADO.

9. (CESPE/SEDF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$**, julgue o próximo item.**

Se $C = [C_{ij}]$**, 1 ≤ i , j ≤ 3, tal que** $C = A^2$ **, então** $C_{23} - C_{22} > 500$**.**

Comentários:

Temos que:

$$C = A^2$$
$$= A \times A$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$$

A questão pergunta pela subtração de dois elementos da matriz C: $C_{23} - C_{22}$. Note que não precisamos obter a matriz inteira. Lembre-se que:

> O elemento da **linha i** e da **coluna j** da **matriz-produto C** é obtido por meio da **linha i da primeira matriz** e da **coluna j da segunda matriz**.

Para obter o elemento C_{22}, faremos uso da **segunda linha da primeira matriz** e da **segunda coluna da segunda matriz**.

- $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ \mathbf{4} & \mathbf{10} & \mathbf{20} \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{0} & 10 \\ 4 & \mathbf{10} & 20 \\ 0 & \mathbf{2} & 40 \end{bmatrix}$$

$$C_{22} = \mathbf{4} \times \mathbf{0} + \mathbf{10} \times \mathbf{10} + \mathbf{20} \times \mathbf{2} = 140$$

Para obter o elemento C_{23}, faremos uso da **segunda linha da primeira matriz** e da **terceira coluna da segunda matriz**.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ \mathbf{4} & \mathbf{10} & \mathbf{20} \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & \mathbf{10} \\ 4 & 10 & \mathbf{20} \\ 0 & 2 & \mathbf{40} \end{bmatrix}$$

$$C_{23} = \mathbf{4} \times \mathbf{10} + \mathbf{10} \times \mathbf{20} + \mathbf{20} \times \mathbf{40} = 1.040$$

Portanto, $C_{23} - C_{22} = 1040 - 140 = \mathbf{900}$. Trata-se de um número **maior do que 500**.

Gabarito: CERTO.

10. (CESPE/IBAMA/2013) Julgue o item subsequente, relacionado a problemas aritméticos, geométricos e matriciais.

Considere que A e B sejam matrizes distintas, de ordem 2×2, com entradas reais e, em cada matriz, três das quatro entradas sejam iguais a zero. Além disso, considere também que $A \times A = B \times B = A \times B = O$, em que O é a matriz nula, isto é, a matriz em que todas as entradas são iguais a zero. Nesse caso, necessariamente, $A = O$ ou $B = O$.

Comentários:

Temos duas matrizes A e B de ordem 2 em que ao menos três dos quatro elementos (entradas) é igual a zero. Além disso, O é a matriz nula (de ordem 2).

Em resumo, a questão pergunta o seguinte:

$$\textbf{Se } \begin{cases} AA = O \\ BB = O \\ AB = O \end{cases}, \textbf{ então necessariamente } \boldsymbol{A} \textbf{ ou } \boldsymbol{B} \textbf{ é a matriz nula?}$$

Pessoal, para responder a essa pergunta, devemos utilizar um contraexemplo.

Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$AA = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.0 + 1.0} & \mathbf{0.1 + 1.0} \\ \mathbf{0.0 + 0.0} & \mathbf{0.1 + 0.0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

$$BB = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.0 + 2.0} & \mathbf{0.2 + 2.0} \\ \mathbf{0.0 + 0.0} & \mathbf{0.2 + 0.0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.0 + 1.0} & \mathbf{0.2 + 1.0} \\ \mathbf{0.0 + 0.0} & \mathbf{0.2 + 0.0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Note que **encontramos duas matrizes A e B** que desmentem a afirmação do enunciado, pois temos **$AA = BB = AB = O$ com A e B diferentes da matriz nula**. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Gabarito: ERRADO.

FCC

11.(FCC/TRT 22/2022) Cada um dos números 1, 2, 3 e 4 foram colocados em um quadriculado 2 × 2. Se a soma da primeira linha é 3 e a soma da diagonal principal (da esquerda para a direita) é 4, então a soma da primeira coluna é

a) 5.

b) 4.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

Comentários:

Devemos inserir os números **1, 2, 3 e 4** em um **quadriculado 2×2**. Note que, para a soma da primeira linha ser 3, **os números 1 e 2 devem estar na primeira linha**, que podem estar dispostos de duas formas:

$$\begin{matrix}[1] & [2] \\ [\ ] & [\ ]\end{matrix} \text{ ou } \begin{matrix}[1] & [2] \\ [\ ] & [\ ]\end{matrix}$$

Ainda segundo o enunciado, a soma da diagonal principal (da esquerda para a direita) é 4. Para a soma ser 4, **a diagonal principal deve apresentar os números 1 e 3**. Isso significa que, **na primeira linha**, a disposição correta é:

$$\begin{matrix}[1] & [2] \\ [\ ] & [\ ]\end{matrix}$$

Logo, até o momento, temos o seguinte quadriculado 2×2:

$$\begin{matrix}[1] & [2] \\ [\ ] & [3]\end{matrix}$$

Resta apenas o número 4 para ser inserido no quadriculado 2×2. Ficamos com:

$$\begin{matrix}[1] & [2] \\ [4] & [3]\end{matrix}$$

Logo, a soma da primeira coluna é:

$$1 + 4 = 5$$

Gabarito: Letra A.

12.(FCC/IBMEC/2019) Sejam x, y, z e w os números reais que satisfazem a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} x - 2y & z - w \\ 2z - w & x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Então, a soma $x + y + z + w$ é igual a

a) -1

b) 0

c) 2

d) 5

e) 3

Comentários:

Para a igualdade de matrizes, devemos igualar os elementos que estão nas mesmas posições. Logo:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z - w = 1 \\ 2z - w = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Somando a **primeira** equação com o **dobro da quarta** equação, temos:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + 2y = 6 \\ \hline 3x = 6 \end{cases}$$

Logo, temos $3x = 6$ e, portanto, $x = 2$.

Substituindo $x = 2$ na **quarta** equação, temos:

$$x + y = 3$$

$$2 + y = 3$$

$$y = 1$$

Somando a **segunda** equação **multiplicada por -1** com a **terceira** equação, temos:

$$\begin{cases} -z + w = -1 \\ 2z - w = 1 \\ \hline z = 0 \end{cases}$$

Substituindo $z = 0$ na **segunda** equação, temos:

$$z - w = 1$$

$$0 - w = 1$$

$$w = -1$$

Finalmente, a soma requerida é:

$$x + y + z + w$$

$$= 2 + 1 + 0 + (-1)$$

$$= 2$$

Gabarito: Letra C.

13. (FCC/TRT 11/2017) Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem 2 em que

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 \\ m^2 - 6m & n^2 + 6 \end{bmatrix}}$$

e

$$\boldsymbol{B = \begin{bmatrix} 3m - 2 & 2n \\ -5 & 5n \end{bmatrix}}.$$

Se $A = B$, então considerando os valores reais de m e n que tornam verdadeira esta igualdade, verifica-se que mn é igual a

a) 3

b) 4

c) 2

d) 6

e) 1

Comentários:

Temos que $A = B$:

$$\begin{bmatrix} m^2 & n^2 \\ m^2 - 6m & n^2 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3m - 2 & 2n \\ -5 & 5n \end{bmatrix}$$

Para a igualdade de matrizes, devemos igualar os elementos que estão nas mesmas posições. **Logo**, **as quatro equações a seguir devem ser satisfeitas**:

$$\begin{cases} m^2 = 3m - 2 \\ n^2 = 2n \\ m^2 - 6m = -5 \\ n^2 + 6 = 5n \end{cases}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$n^2 = 2n$$

$$n^2 - 2n = 0$$

$$n(n-2) = 0$$

Portanto, **até o momento**, $\boldsymbol{n}$ **pode ser 0 ou 2**.

Da **quarta equação**, temos:

$$n^2 + 6 = 5n$$

Testando os valores que encontramos de n, note que $n = 0$ não satisfaz essa equação e $n = 2$ satisfaz.

$$0^2 + 6 \neq 5.0$$

$$2^2 + 6 = 5.2$$

Portanto, **devemos ter $\boldsymbol{n = 2}$** para que a segunda e a quarta equação sejam simultaneamente satisfeitas.

Da **primeira equação**, temos:

$$m^2 = 3m - 2$$

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

Aplicando a Fórmula de Bháskara, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4.1.2$$

$$\Delta = 9 - 8$$

$$\Delta = 1$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$m = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.1}$$

$$m = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$m_1 = 2\ ; m_2 = 1$$

Portanto, **<u>até o momento</u>,m pode ser 1 ou 2**.

Da **<u>terceira equação</u>**, temos:

$$\boldsymbol{m^2 - 6m = -5}$$

Testando os valores que encontramos de m, note que $m = 2$ não satisfaz essa equação e $m = 1$ satisfaz.

$$2^2 - 6.2 \neq -5$$

$$1^2 - 6.1 = -5$$

Portanto, **devemos ter $m = 1$** para que <u>primeira</u> e a <u>terceira</u> equação sejam simultaneamente satisfeitas.

Finalmente, observe que com $\boldsymbol{m = 1}$ e $\boldsymbol{n = 2}$ as quatro equações são satisfeitas e, portanto, ocorre a igualdade entre as matrizes. Logo, o produto mn é:

$$mn = 1.2 = 2$$

Gabarito: Letra C.

14.(FCC/SEDU ES/2018) A multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa em geral, porém, existem exemplos de matrizes que comutam na multiplicação. Um exemplo de duas matrizes que comutam na multiplicação é:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Comentários:

Duas matrizes A e B comutam quando $AB = BA$.

Conforme afirmado no enunciado, a multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa, isto é, **não** podemos dizer que $AB = BA$ é uma regra geral que sempre pode ser aplicada.

Para assinalar a alternativa correta, **poderíamos**, para cada alternativa, **calcular o produto das matrizes duas vezes**, **na ordem direta e na ordem contrária**, **e verificar se os produtos são iguais**.

Ocorre que, como forma de **economizar tempo**, **vamos calcular apenas o elemento da primeira linha e da primeira coluna de cada matriz-produto**.

Alternativa A

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{4} & 3 \\ \mathbf{2} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow p_{11} = \mathbf{1}.\mathbf{4} + \mathbf{2}.\mathbf{2} = 8$$

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{3} & 4 \end{bmatrix} \rightarrow q_{11} = \mathbf{4}.\mathbf{1} + \mathbf{3}.\mathbf{3} = 13$$

Como os elementos da primeira linha e da primeira coluna dos produtos são distintos, as matrizes não comutam. Podemos **eliminar a alternativa A**.

Alternativa B

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{2} & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow p_{11} = \mathbf{1}.\mathbf{2} + \mathbf{2}.\mathbf{2} = 5$$

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 2 \\ \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow q_{11} = \mathbf{2}.\mathbf{1} + \mathbf{1}.\mathbf{1} = 3$$

Como os elementos da primeira linha e da primeira coluna dos produtos são distintos, as matrizes não comutam. Podemos **eliminar a alternativa B**.

Alternativa C

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 2 \\ \mathbf{0} & 3 \end{bmatrix} \rightarrow p_{11} = \mathbf{1}.\mathbf{3} + \mathbf{2}.\mathbf{0} = 3$$

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow q_{11} = \mathbf{3}.\mathbf{1} + \mathbf{2}.\mathbf{0} = 3$$

Os elementos da primeira linha e da primeira coluna dos produtos são iguais. Logo, essa alternativa é uma **possível resposta**.

Alternativa D

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow p_{11} = \mathbf{1}.\mathbf{1} + \mathbf{1}.\mathbf{1} = 1$$

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow q_{11} = \mathbf{1}.\mathbf{1} + \mathbf{1}.\mathbf{1} = 1$$

Os elementos da primeira linha e da primeira coluna dos produtos são iguais. Logo, essa alternativa é uma **possível resposta**.

Alternativa E

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow p_{11} = 1.0 + 7.0 = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow q_{11} = 0.1 + 1.2 = 2$$

Como os elementos da primeira linha e da primeira coluna dos produtos são distintos, as matrizes não comutam. Podemos **eliminar a alternativa E**.

Veja que nos restam as **alternativas C e D** como **possíveis respostas**. Nesse momento, **vamos verificar se as matrizes da alternativa C comutam**.

O produto na ordem em que as matrizes aparecem na alternativa C é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1.3 + 2.0) & (1.2 + 2.3) \\ (0.3 + 1.0) & (0.2 + 1.3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

O produto na ordem contrária é:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3.1 + 2.0) & (3.2 + 2.1) \\ (0.1 + 3.0) & (0.2 + 3.1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Como os produtos na ordem direta e na ordem contrária são iguais, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ comutam. O **gabarito**, portanto, é **letra C**.

Gabarito: Letra C.

Vunesp

15.(VUNESP/EsFCEx/2021) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Se $B = A^2 + 2A$, então o valor de $a \cdot b$ é igual a:

a) -3

b) -2

c) -1

d) 3

e) 5

Comentários:

A matriz A^2 é dada por:

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a.a + 1.0 & a.1 + 1.b \\ 0.a + b.0 & 0.1 + b.b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$B = A^2 + 2A$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \times a & 2 \times 1 \\ 2 \times 0 & 2 \times b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a & 2 \\ 0 & 2b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + 2a & a+b+2 \\ 0 & b^2 + 2b \end{bmatrix}$$

Igualando os elementos de mesma posição, temos:

$$\begin{cases} a^2 + 2a = 15 \\ a + b + 2 = 4 \\ b^2 + 2b = -1 \end{cases}$$

A partir da última equação, temos:

$$b^2 + 2b = -1$$

$$b^2 + 2b + 1 = 0$$

$$(b + 1)^2 = 0$$

$$\boldsymbol{b = -1}$$

A partir da segunda equação, temos:

$$a + b + 2 = 4$$

$$a + (\boldsymbol{-1}) + 2 = 4$$

$$a + 1 = 4$$

$$a = 3$$

Portanto, o produto $a \times b$ é:

$$3 \times (-1) = -3$$

Gabarito: Letra A.

16. (VUNESP/PC-SP/2014) Considere as matrizes $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Em relação a MN, que é o produto da matriz M pela matriz N, é correto afirmar que

a) $MN = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $MN = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 23 \end{pmatrix}$

c) $MN = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $MN = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

e) $MN = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Comentários:

Temos uma **matriz M** de **dimensão 3×3** e uma **matriz N** de **dimensão 3×1**. Queremos obter o produto MN. Note que:

- O **número de <u>colunas</u>** da **<u>primeira</u>** matriz é igual ao **número de <u>linhas</u>** da **<u>segunda</u>**. Portanto, o produto é possível.
- A matriz-produto MN deve apresentar a seguinte dimensão:

Número de <u>linhas</u> da <u>primeira</u> (3) × Número de <u>colunas</u> da <u>segunda</u> (1)

Temos apenas uma resposta que apresenta uma matriz 3×1, motivo pelo qual o **gabarito** é **letra E**.

Para fins didáticos, podemos realizar o produto:

$$MN = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{2}.(\mathbf{-1}) + (\mathbf{-1}).\mathbf{0} + \mathbf{1}.\mathbf{2} \\ \mathbf{0}.(\mathbf{-1}) + \mathbf{2}.\mathbf{0} + \mathbf{1}.\mathbf{2} \\ \mathbf{1}.(\mathbf{-1}) + (\mathbf{-2}).\mathbf{0} + \mathbf{2}.\mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra E.

17. (VUNESP/Pref. Sertãozinho/2018) O produto da matriz $\boldsymbol{A_{2\times3} = (a_{i,j}) = i - j}$ pela matriz $\boldsymbol{B_{3\times2} = (b_{i,j}) = i + j}$ é a matriz

a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -11 & -14 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Comentários:

A matriz $A_{2\times3}$ apresenta a lei de formação $a_{ij} = i - j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-1 & 1-2 & 1-3 \\ 2-1 & 2-2 & 2-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz $B_{3\times2}$ apresenta a lei de formação $a_{ij} = i + j$.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \\ 3+1 & 3+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Para realizar o produto de $A_{2\times3}$ com $B_{3\times2}$, note que:

- O **número de <u>colunas</u> da <u>primeira</u>** matriz é igual ao **número de <u>linhas</u> da <u>segunda</u>**. Portanto, o produto é possível.
- A matriz-produto AB deve apresentar a dimensão 2×2:

Número de <u>linhas</u> da <u>primeira</u> (2) $\times$ **Número de <u>colunas</u> da <u>segunda</u>** (2)

Logo, a matriz-produto AB é:

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}.\mathbf{2} + (\mathbf{-1}).\mathbf{3} + (\mathbf{-2}).\mathbf{4} & \mathbf{0}.\mathbf{3} + (\mathbf{-1}).\mathbf{4} + (\mathbf{-2}).\mathbf{5} \\ \mathbf{1}.\mathbf{2} + \mathbf{0}.\mathbf{3} + (\mathbf{-1}).\mathbf{4} & \mathbf{1}.\mathbf{3} + \mathbf{0}.\mathbf{4} + (\mathbf{-1}).\mathbf{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -11 & -14 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra D.

18.(VUNESP/MPE SP/2019) Sejam A e B duas matrizes quadradas quaisquer, de mesma ordem, e α um número real qualquer. Nessas condições, é correto afirmar que

a) $AB = BA$

b) $AB^{-1} = \frac{A}{B}$

c) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$

d) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$

e) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

Comentários:

Pessoal, prestam muita atenção no enunciado. A única informação que ele nos dá é que A e B são duas matrizes **quadradas** **quaisquer** de **mesma ordem** e que α é um número real.

Vamos analisar as alternativas.

a) $\boldsymbol{AB = BA}$. **ERRADO**.

O produto de matrizes não goza da propriedade comutativa, de modo que não se pode afirmar que $AB = BA$.

b) $\boldsymbol{AB^{-1} = \frac{A}{B}}$. **ERRADO**.

Não existe divisão de matrizes.

c) $\boldsymbol{\alpha(AB) = (\alpha A)B}$. **CERTO**.

Trata-se da propriedade associativa entre matrizes e um número real, que é válida quando o produto AB é possível. No caso da questão, o produto é possível, pois temos duas matrizes **quadradas** de **mesma ordem**.

d) $\boldsymbol{(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}}$. ERRADO.

Essa alternativa é uma pegadinha das boas. Note que a propriedade $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$ **é válida somente quando a matriz A é inversível, isto é, quando $\det A \neq 0$**.

O enunciado afirma que A pode ser uma matriz **quadrada** **qualquer**. Por esse motivo, o item está **ERRADO**.

e) $\boldsymbol{(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}}$. ERRADO.

O enunciado afirma que A e B são duas matrizes **quadradas** **quaisquer** de **mesma ordem**. Portanto, não necessariamente elas são inversíveis. Além disso, a propriedade correta, para A e B inversíveis, é:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Gabarito: Letra C.

Outras Bancas

19.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) A Tabela I apresenta as quantidades médias de combustível, em litros, vendidas semanalmente em três postos de abastecimento de uma mesma rede. O preço praticado em um dos postos é o mesmo praticado pelos outros dois.

Esses preços, por litro, em duas semanas consecutivas, estão apresentados na Tabela II.

Tabela I

	Posto 1	Posto 2	Posto 3
Etanol	20.200	22.000	21.000
Gasolina	32.000	33.600	35.000
Diesel	18.000	23.000	24.500

Tabela II

	Semana 1	Semana 2
Etanol	R$ 2,48	R$ 2,52
Gasolina	R$ 2,69	R$ 2,71
Diesel	R$ 1,98	R$ 2,02

Com os dados das Tabelas I e II são montadas as matrizes A e B a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 20.200 & 22.000 & 21.000 \\ 32.000 & 33.600 & 35.000 \\ 18.000 & 23.000 & 24.500 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2,48 & 2,52 \\ 2,69 & 2,71 \\ 1,98 & 2,02 \end{bmatrix}$$

Seja $C_{2\times3}$ a matriz que apresenta os valores médios arrecadados em cada um dos três postos, por semana, com a venda de combustíveis.

Identificando-se A^t e B^t como as matrizes transpostas de A e de B, respectivamente, a matriz C é definida pela operação

a) $A\,.\,B$

b) $A^t B^t$

c) $B\,.\,A$

d) $B^t A$

e) $B^t A^t$

Comentários:

Note que a **matriz A** é de dimensão 3×3 e a **matriz B** é de dimensão 3×2. Além disso, a **matriz A^t** também é de dimensão 3×3, e a **matriz B^t** é de dimensão 2×3.

Deseja-se obter uma **matriz C**, de dimensão 2×3, por meio de um produto. Lembre-se que o esquema geral da matriz-produto apresenta a seguinte dimensão:

Número de linhas da primeira × Número de colunas da segunda

Isso significa que a **primeira matriz do produto deve ter 2 linhas**. Portanto, **essa matriz é B^t**. Nesse caso, elimina-se as alternativas A, B e C. Resta-nos duas possibilidades:

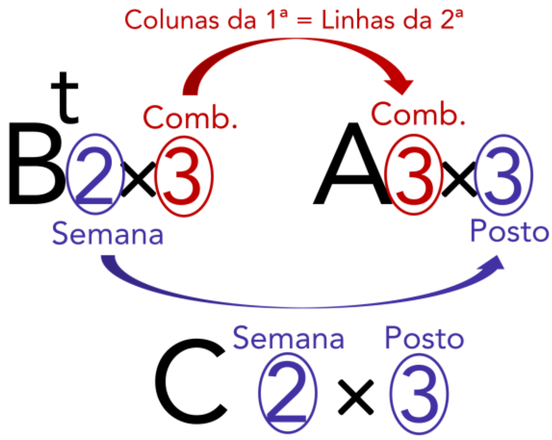
- $B^t A$; ou
- $B^t A^t$.

Observe agora o que a matriz C representa: **os valores arrecadados em cada um dos três postos, por semana**. Em resumo, queremos uma matriz $C_{2\times3}$ que represente o seguinte:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{Posto 1} & \text{Posto 2} & \text{Posto 3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Semana 1} \\ \text{Semana 2} \end{array} & \begin{bmatrix} (\ ) & (\ ) & (\ ) \\ (\ ) & (\ ) & (\ ) \end{bmatrix} \end{array}$$

Isso significa que as **linhas** da **primeira** **matriz** devem ser **semanas** e as **colunas** da **segunda** **matriz** devem ser **postos de gasolina**.

Já sabemos que a primeira matriz é B^t. Para as **colunas** da **segunda** matriz serem **postos de gasolina**, essa matriz deve ser a **matriz A**.



Portanto, **a matriz C é definida por B^tA**.

Gabarito: Letra D.

20. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denotando por A^t a matriz transposta de A, a matriz $(A^tA) - (B + B^t)$ é

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Comentários:

Temos que a transposta de A é dada por $A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Para realizar o produto A^tA, note que:

- O produto é possível, pois o **número de colunas da primeira** matriz (A^t) é igual ao **número de linhas da segunda** (A);
- A matriz-produto apresenta a dimensão 4×4:

Número de linhas da primeira × Número de colunas da segunda

$$A^tA = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

$$A^tA = \begin{bmatrix} \mathbf{1.1} & \mathbf{1.2} & \mathbf{1.3} & \mathbf{1.4} \\ \mathbf{2.1} & \mathbf{2.2} & \mathbf{2.3} & \mathbf{2.4} \\ \mathbf{3.1} & \mathbf{3.2} & \mathbf{3.3} & \mathbf{3.4} \\ \mathbf{4.1} & \mathbf{4.2} & \mathbf{4.3} & \mathbf{4.4} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^tA} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{12} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{12} & \mathbf{16} \end{bmatrix}$$

Temos que a transposta de B é dada por $B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}$.

Logo:

$$B + B^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Somando cada elemento de mesma posição, temos:

$$\boldsymbol{B + B^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}}$$

Logo, a matriz resultante da operação $(A^tA) - (B + B^t)$ é:

$$(A^tA) - (B + B^t) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{12} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{12} & \mathbf{16} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{12} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{12} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Subtraindo os elementos da segunda matriz dos elementos de mesma posição da primeira matriz, temos:

$$(A^tA) - (B + B^t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra C.

21.(CESGRANRIO/BASA/2014) Seja $A_{3\times3}$ uma matriz quadrada de ordem 3. O elemento da matriz $A_{3\times3}$, que ocupa a linha i e a coluna j, é representado por a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$.

Acerca dos elementos da matriz $A_{3\times3}$, sabe-se que:

- **Quatro elementos são iguais a 0 e os cinco restantes são iguais a 1;**
- **Para todos os valores de i e j, tem-se $a_{ij} = a_{ji}$.**

Os possíveis valores da soma $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ são:

a) 0 e 1

b) 0 e 2

c) 0 e 3

d) 1 e 3

e) 2 e 3

Comentários:

Temos uma matriz quadrada A de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A questão pergunta pela **soma dos elementos da diagonal $a_{11} + a_{22} + a_{33}$.**

Observe que $a_{ij} = a_{ji}$. Isso significa que a matriz é simétrica. Logo:

$$a_{12} = a_{21} \quad ; \quad a_{13} = a_{31} \quad ; \quad a_{23} = a_{32}$$

Note que temos apenas 4 elementos que podem ser zero.

Vamos verificar todas as possibilidades de atribuir zeros a a_{12}, a_{13} e a_{23}.

- **Não** se pode atribuir zeros a a_{12}, a_{13} e a_{23} simultaneamente, pois nesse caso a_{21}, a_{31} e a_{32} também seriam zero, totalizando 6 elementos iguais a zero.

Esse caso apresentado é impossível. Vamos aos próximos.

- Se a_{12} e a_{13} forem zero, a_{21} e a_{31} também serão, de modo que teremos usado todos os 4 zeros.
- Se a_{12} e a_{23} forem zero, a_{21} e a_{32} também serão, de modo que teremos usado todos os 4 zeros.
- Se a_{13} e a_{23} forem zero, a_{31} e a_{32} também serão, de modo que teremos usado todos os 4 zeros.

Nesses três casos, os elementos da diagonal serão todos iguais a 1, de modo que **a soma $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ será igual a 3.**

- Se apenas a_{12} for zero, a a_{21} também será, de modo que $a_{13} = a_{31} = 1$ e $a_{23} = a_{32} = 1$.
- Se apenas a_{13} for zero, a a_{31} também será, de modo que $a_{12} = a_{21} = 1$ e $a_{23} = a_{32} = 1$.
- Se apenas a_{23} for zero, a a_{32} também será, de modo que $a_{12} = a_{21} = 1$ e $a_{13} = a_{31} = 1$.

Nesses três casos, usamos 4 vezes o número 1, de modo que resta apenas um número 1 para ser usado na diagonal. Nesses casos, **a soma $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ será igual a 1**.

Por fim, veja que:

- Se nenhum dos elementos a_{12}, a_{13} e a_{23} for zero, então eles serão iguais a 1, de modo que a_{21}, a_{32} e a_{32} também serão iguais a 1. Trata-se de um caso impossível, pois podemos ter apenas 5 elementos iguais a 1.

Note, portanto, que esgotamos todos os casos e chegamos à conclusão de que **os possíveis valores da soma $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ é 1 e 3.**

Gabarito: Letra D.

22. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) Considere a matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz

a) é singular.

b) é simétrica.

c) é igual à sua inversa.

d) não tem inversa.

e) tem determinante positivo.

Comentários:

Note que os elementos simétricos com relação à diagonal principal são iguais. Temos, portanto, uma matriz simétrica.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra B.

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Determinantes

FGV

1.(FGV/MPE SC/2022) Seja A uma matriz 4 x 4 cujo determinante é igual a 2.

O determinante da matriz 3A é igual a:

a) 6;

b) 12;

c) 24;

d) 64;

e) 162.

Comentários:

Sabemos que, ao multiplicar **uma matriz** de **ordem n** por uma **constante k**, o determinante dessa nova matriz fica **multiplicado por k^n**.

$$\det(kA) = k^n \det A$$

Como a matriz A é de ordem $n = 4$, temos:

$$\det(3A) = 3^4 \det A$$

$$\det(3A) = 81 \times 2$$

$$\det(3A) = 162$$

Gabarito: Letra E.

2. (FGV/MPE SC/2022) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2a & c & 3b \\ 2d & f & 3e \\ 2g & k & 3h \end{bmatrix}$.

Sendo $det(A)$ e $det(B)$ os determinantes das matrizes A e B, respectivamente, tem-se que:

a) $det(A) = 6 \times det(B)$;

b) $det(A) = -6 \times det(B)$;

c) $det(B) = 6 \times det(A)$;

d) $det(B) = -6 \times det(A)$;

e) $det(A) = det(B)$.

Comentários:

Sabemos que, ao **multiplicar uma fila** (linha ou coluna) de uma matriz **por uma constante k**, o **determinante** dessa nova matriz **também fica multiplicado por k**.

Uma consequência interessante dessa propriedade é realizar a operação inversa, removendo um fator comum de dentro do determinante.

Veja que:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2a & c & 3b \\ 2d & f & 3e \\ 2g & k & 3h \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = 2 \times \begin{vmatrix} a & c & 3b \\ d & f & 3e \\ g & k & 3h \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{h} \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = 6 \times \underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{h} \end{vmatrix}}_{x}$$

Note que $x = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{h} \end{vmatrix}$ é muito parecido com $\det(A)$. A diferença é que a segunda e a terceira coluna estão trocadas.

Sabemos que ao trocarmos uma fila (linha ou coluna) de lugar com outra fila paralela, **o determinante muda de sinal**. Logo:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{h} \end{vmatrix} = x \rightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{k} \end{vmatrix}}_{\det(A)} = -x$$

Portanto:

$$\det(A) = -x$$

$$x = -\det(A)$$

Consequente, temos que $\det(B)$ é dado por:

$$\det(B) = 6 \times \underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{h} \end{vmatrix}}_{x}$$

$$\det(B) = -6 \times det\ (A)$$

Gabarito: Letra D.

3.(FGV/SAD PE/2009) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$ é:

a) 22

b) 9

c) 0

d) -6

e) -10

Comentários:

Vamos desenvolver o determinante pela **regra de Sarrus:**

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\det M = [\mathbf{2.1.3 + 1.2.1 + 5.3.0}] - [\mathbf{5.1.1 + 2.2.0 + 1.3.3}]$$

$$= [6 + 2 + 0] - [5 + 0 + 9]$$

$$= 8 - 14$$

$$= -6$$

Gabarito: Letra D.

Cebraspe

4.(CESPE/IFF/2018) Considere que k seja um número real e que o determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ seja igual a 27. Nesse caso, se $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ então o determinante da matriz B − A, será igual a:

a) 30.

b) 0.

c) 3.

d) 6.

e) 10.

Comentários:

O determinante de B é dado pelo produto dos termos da diagonal principal menos o produto dos termos da diagonal secundária:

$$\det B = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \boldsymbol{k} \\ \mathbf{3} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$$

$$27 = [\mathbf{3} \times \mathbf{9}] - [\boldsymbol{k} \times \mathbf{3}]$$

$$27 = 27 - 3k$$

$$k = 0$$

Logo, a matriz B é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

A matriz $B - A$ é:

$$B - A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-3 & 0-(-1) \\ 3-9 & 9-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Novamente, para calcular $\det(B - A)$, devemos realizar produto dos termos da diagonal principal e subtrair o produto dos termos da diagonal secundária:

$$\det(B - A) = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$$

$$\det(B - A) = [\mathbf{0} \times \mathbf{3}] - [\mathbf{1} \times (\mathbf{-6})]$$

$$\det(B - A) = 0 - (-6)$$

$$\det(B - A) = 6$$

Gabarito: Letra D.

5.(CESPE/SEDUC AL/2018) Julgue o item que se seguem, relativos a matrizes e sistemas lineares.

Se a é um número real e se o determinante da matriz $P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ for igual a zero, então $a = -2$ ou $a = 1$.

Comentários:

A matriz P é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \times 0 & 2 \times (-1) \\ 2 \times (-1) & 2 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+0 & 1-2 \\ 0-2 & a-1+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & -1 \\ -2 & a+1 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\det P = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & -1 \\ -2 & a+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$[a \times (a+1)] - [(-1) \times (-2)] = 0$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

Note que **as raízes dessa equação do segundo grau em a são de fato -2 e 1**, pois:

$$(-2)^2 + (-2) - 2 = 0$$

$$1^2 + 1 - 2 = 0$$

Logo, se $\det P = 0$, devemos ter $a = -2$ ou $a = 1$.

Gabarito: CERTO.

6.(CESPE/SEDF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$, julgue o próximo item.

Se $B = \frac{1}{2}A$, então o determinante de B é maior que 200.

Comentários:

Pessoal, para resolver esse problema, podemos obter a matriz B e calcular o seu determinante diretamente pela **regra de Sarrus**.

Ocorre que, na prova que cobrou essa questão, houve a necessidade de calcular o determinante de A. Então, para responder ao item, vamos obter $\det(A)$ e em seguida obteremos o $\det(B)$ a partir de $\det(A)$.

Aplicando a **regra de Sarrus** no determinante de A, temos:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 4 & 10 \\ 0 & 2 \end{array}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} = [\mathbf{2.10.40 + 0.20.0 + 10.4.2}] - [\mathbf{10.10.0 + 2.20.2 + 0.4.40}]$$

$$\det A = [800 + 0 + 80] - [0 + 80 + 0]$$

$$\det A = 880 - 80$$

$$\det A = 800$$

Sabemos que, ao multiplicar <u>**uma matriz**</u> de <u>**ordem n**</u> por uma **constante k**, o determinante dessa nova matriz fica **multiplicado por k^n**.

$$\det(kA) = k^n \det A$$

Logo:

$$\det B = \det\left(\frac{1}{2}A\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \det A$$

$$= \frac{1}{8} \times 800$$

$$= 100$$

Portanto, o determinante de B é **menor** do que 200.

Gabarito: ERRADO.

Texto para as questões 07 a 09

Considerando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, julgue os itens a seguir.

7. (CESPE/SEDU-ES/2012) Como $[det\ B]^2 = det\ B$, então $det\ B = 1$.

8. (CESPE/SEDU-ES/2012) É correto afirmar que $\det[A \times B \times C] = \det B$.

9. (CESPE/SEDU-ES/2012) $\det A^2 = 196$.

Comentários:

Questão 07

Lembre-se que se uma fila (linha ou coluna) de uma matriz é formada apenas por zeros, seu determinante é nulo. Isso significa que $\det B = 0$ e $(\det B)^2 = 0^2 = 0$.

O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Questão 08

Aplicando o **teorema de Binet**, temos:

$$\det[A \times B \times C] = \det A \times \det B \times \det C$$

Como $\det B = 0$, ficamos com:

$$\det[A \times B \times C] = \det A \times \mathbf{0} \times \det C$$

$$\det[A \times B \times C] = \mathbf{0}$$

Logo, o **gabarito** da questão é **CERTO**, pois $\det[A \times B \times C] = \det B = 0$.

Questão 09

Temos que $\det A^2 = \det(A \times A)$. Pelo **teorema de Binet**:

$$\det(A \times A) = \det A \times \det A$$

$$= (\det A)^2$$

Note, portanto, que $\det A^2 = (\det A)^2$.

Vamos calcular o determinante de A. Pela **regra de Sarrus**:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{array}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\det A = [2.0.0 + (-1).4.2 + 5.1.2] - [\mathbf{5.0.2 + 2.4.2 + (-1).1.0}]$$

$$\det A = [0 - 8 + 10] - [0 + 16 + 0]$$

$$\det A = -14$$

Logo:

$$\det A^2 = (\det A)^2$$
$$= (-14)^2 = 196$$

O **gabarito**, portanto, é **CERTO**.

Gabarito: 07 - ERRADO. 08 - CERTO. 09 - CERTO.

10.(CESPE/IFF/2018) Considere que A, B e C sejam matrizes quadradas, de mesma dimensão e com entradas reais. Assinale a opção correta a respeito das propriedades dessas matrizes, assumindo que $\det(X)$ é o determinante da matriz X e X^t é a matriz transporta da matriz X.

a) Se a matriz A for antissimétrica, isto é, se $A^t = -A$, então $\det(A) = 0$.

b) Se A não for matriz nula e se $AB = AC$, então $B = C$.

c) Se $(A + B)^2 = (B - A)^2$, então $AB = -BA$.

d) Se $AB \neq BA$, então $det(AB) \neq det(BA)$.

e) $det(2A) = 2det(A)$.

Comentários:

Vamos analisar cada alternativa.

a) Se a matriz A for antissimétrica, isto é, se $A^t = -A$, então $\det(A) = 0$. ERRADO.

Uma matriz é antissimétrica quando $A^t = -A$. Em outras palavras, uma matriz é antissimétrica quando a diagonal principal deve ser nula e os elementos simétricos com relação à diagonal principal são opostos.

Podemos verificar que a afirmação é falsa com um **contraexemplo**. Note que a matriz abaixo é antissimétrica e o determinante é diferente de zero:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\det A = [\mathbf{0}.\mathbf{0}] - [(\mathbf{-1}).\mathbf{1}]$$

$$= 0 - (-1)$$

$$= 1$$

b) Se A não for matriz nula e se $AB = AC$, então $B = C$. ERRADO.

Essa relação só é válida se A for uma matriz inversível. Isso porque, se a matriz for inversível, podemos multiplicar ambos os lados da equação $AB = AC$ por A^{-1} pela esquerda:

$$A^{-1}AB = A^{-1}AC$$

$$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$$

$$IB = IC$$

$$B = C$$

Vamos mostrar que a afirmação é falsa com um **contraexemplo**. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, **temos um caso em que A não é a matriz nula**, **$AB = AC$ e B é diferente de C**.

c) Se $(A + B)^2 = (B - A)^2$, então $AB = -BA$. CERTO.

Vamos desenvolver a igualdade:

$$(A + B)^2 = (B - A)^2$$
$$(A + B)(A + B) = (B - A)(B - A)$$
$$\boldsymbol{A.A} + AB + BA + \boldsymbol{B.B} = \boldsymbol{B.B} - BA - AB + \boldsymbol{A.A}$$

Simplificando os termos comuns, ficamos com:

$$AB + BA = -BA - AB$$

$$AB + AB = -BA - BA$$

$$2AB = -2BA$$

$$AB = -BA$$

d) Se $AB \neq BA$, então $det(AB) \neq det(BA)$. ERRADO.

Para mostrar que essa alternativa está errada, vamos mostrar um **contraexemplo**. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que, para esse contraexemplo, $AB \neq BA$ e $\det(AB) = \det(BA)$.

e) $det(2A) = 2det(A)$. ERRADO.

Sabemos que, ao multiplicar **uma matriz** de **ordem n** por uma **constante k**, o determinante dessa nova matriz fica **multiplicado por k^n**. Logo:

$$\det(2A) = 2^n \det A$$

Gabarito: Letra C.

▪

11.(CESPE/SEDUC AL/2018) Julgue o item que se seguem, relativos a matrizes e sistemas lineares.

Se P for uma matriz simétrica, então P será inversível.

Comentários:

Uma matriz é **inversível** quando o seu **determinante é diferente de zero**.

Não há correlação entre o fato de uma matriz ser simétrica com o fato de ela apresentar determinante diferente de zero.

Para mostrar que a afirmação está errada, pode-se usar como **contraexemplo** a matriz $\boldsymbol{P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$.

Note que se trata de uma matriz simétrica, pois $P^t = P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Veja, porém, que $\det P = 0$ e, portanto, essa matriz não é inversível.

Gabarito: ERRADO

12. (CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se que $det(A) = -1$ e, consequentemente, A é uma matriz inversível.

Comentários:

Temos um determinante de ordem 4. Para calculá-lo, vamos usar a **regra de Chió**.

Fazer com que o elemento a_{11} seja igual a 1

Note que o elemento $\boldsymbol{a_{11}}$ já é igual a $\mathbf{1}$.

Zerar todos os elementos da primeira linha, à exceção de a_{11}, fazendo uso da primeira coluna

Para tanto, vamos realizar as seguintes substituições, nessa ordem:

- $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$
- $C_4 \leftarrow C_4 - C_1$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{2} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{vmatrix} \overset{C_4 \leftarrow C_4 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 2 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

Observe que o determinante ficou reduzido a:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Feita a operação anterior, o determinante em questão é igual ao menor complementar D_{11}

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Podemos agora calcular o determinante de A pela **regra de Sarrus**. Observe, porém, que é mais conveniente aplicar o **Teorema de Laplace** na **primeira coluna**, pois o determinante fica reduzido a D_{11}.

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$= 1A_{11} + 0.A_{21} + 0.A_{31}$$

$$= A_{11}$$

$$= (-1)^{1+1}D_{11}$$

$$= D_{11}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

$$= [\mathbf{1.0}] - [\mathbf{1.1}]$$

$$= -1$$

Temos, portanto, que $\det A = -1$. Além disso, a matriz **A é inversível**, pois o seu determinante é diferente de zero.

Gabarito: CERTO.

FCC

13.(FCC/PM SE/2005) A solução real da equação $\begin{vmatrix} 2x & -1 & 0 \\ x & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ é

a) 1

b) 0

c) -1

d) -2

e) -3

Comentários:

Vamos desenvolver o determinante pela **regra de Sarrus:**

$$\left|\begin{matrix} 2x & -1 & 0 \\ x & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2x & -1 \\ x & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\det M = [\mathbf{2x.2.1 + (-1).1.3 + 0.x.1}] - [\mathbf{0.2.3 + 2x.1.1 + (-1).x.1}]$$

$$= [4x - 3] - [2x - x]$$

$$= 4x - 3 - x$$

$$= 3x - 3$$

A equação em questão é dada por $\det M = 0$.

$$\det M = 0$$

$$3x - 3 = 0$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Gabarito: Letra A.

Vunesp

14.(VUNESP/CM Barretos/2010) Considere a matriz real:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

O determinante de $\boldsymbol{A}$ vale

a) 1

b) 2

c) -1

d) -2

e) 3

Comentários:

Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 2, devemos realizar a seguinte operação:

$$(\text{Produto dos elementos da diagonal principal}) - (\text{Produto dos elementos da diagonal secundária})$$

Logo:

$$\det A = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$$
$$= [\mathbf{3} \times \mathbf{3}] - [\mathbf{4} \times \mathbf{2}]$$
$$= 9 - 8$$
$$= 1$$

Gabarito: Letra A.

15. (VUNESP/CM Barretos/2010) Para que o determinante da matriz

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \mathbf{4} \\ \mathbf{8} & \mathbf{2}\boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$

seja nulo, o valor de $\boldsymbol{x}$ deve ser

a) 1 ou -1

b) 2 ou -2

c) 3 ou -3

d) 4 ou -4

e) 5 ou -5

Comentários:

Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 2, devemos realizar a seguinte operação:

$$(\text{Produto dos elementos da diagonal principal}) - (\text{Produto dos elementos da diagonal secundária})$$

Para o determinante ser nulo, devemos ter:

$$\det B = 0$$
$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \mathbf{4} \\ \mathbf{8} & \mathbf{2}\boldsymbol{x} \end{vmatrix} = 0$$
$$[\boldsymbol{x} \times \mathbf{2}\boldsymbol{x}] - [\mathbf{4} \times \mathbf{8}] = 0$$
$$2x^2 - 32 = 0$$
$$2x^2 = 32$$
$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

Portanto, o valor de x deve ser 4 ou -4.

Gabarito: Letra D.

16.(VUNESP/PC SP/2013) Considere a matriz

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} x & 1 & k \\ 0 & x & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

e a equação em x dada por $\det M = 0$.

Sendo k uma constante real, pode-se afirmar sobre a equação que

a) tem raízes $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$ para $k = 0$.

b) é uma equação de 2.º grau.

c) tem uma raiz real para $k \neq -0{,}5$.

d) não possui raízes reais.

e) sua raiz é dada por $2k + 1$ para todo k.

Comentários:

Aplicando a **regra de Sarrus** no determinante de M, temos:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x & 1 & k & x & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right.$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\det M = [\boldsymbol{x.x.0 + 1.1.2 + k.0.1}] - [\boldsymbol{k.x.2 + x.1.1 + 1.0.0}]$$

$$\det M = [2] - [2kx + x]$$

$$\det M = [2] - [x(2k + 1)]$$

$$\det M = 2 - x(2k + 1)$$

A equação é dada por $\det M = 0$.

$$\det M = 0$$

$$2 - x(2k + 1) = 0$$

$$x(2k + 1) = 2$$

Se $(2k+1)$ **for diferente de zero**, isto é, se $k \neq -0,5$, podemos "passar para o outro lado da equação" o termo $(2k+1)$. Nesse caso, temos a seguinte raiz da equação:

$$x = \frac{2}{(2k+1)}$$

Portanto, é correto afirmar que a equação tem uma raiz real para $k \neq -0,5$.

Gabarito: Letra C.

17. (VUNESP/DESENVOLVE/2014) Considere duas matrizes quadradas de mesma ordem A e B e os produtos matriciais entre elas, AB e BA. Se $\det(M)$ representa o determinante da matriz M e $\text{tr}(M)$ o seu traço, é correto afirmar que:

a) $det(AB) = det(A) \times det(B)$ e $tr(AB) = tr(A) \times tr(B)$.

b) $det(AB) = det(A) \times det(B)$ e $tr(AB) = tr(A) + tr(B)$.

c) $det(AB) = det(BA)$ e $tr(AB) = tr(A) \times tr(B)$.

d) $det(AB) = det(BA)$ e $tr(AB) = tr(A) + tr(B)$.

e) $det(AB) = det(A) \times det(B)$ e $tr(AB) = tr(BA)$.

Comentários:

Pelo **teorema de Binet**, sabemos que:

$$\det(AB) = \det A \times \det B$$

$$\det(BA) = \det B \times \det A = \det A \times \det B$$

Portanto, quanto aos determinantes, todas as alternativas fazem afirmações corretas, pois:

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \times \det B$$

Quanto ao traço, temos as seguintes propriedades:

- $tr\ (A+B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr\ (A-B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(\alpha A) = \alpha \times tr(A)$
- $tr\ (AB) = tr(BA)$

Observe, portanto, que o **gabarito** é a **letra E**:

$$det(AB) = det(A) \times det(B) \text{ e } \boldsymbol{tr(AB) = tr(BA)}$$

Gabarito: Letra E.

Outras Bancas

18. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) Na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & n & p \\ m^2 & n^2 & p^2 \end{bmatrix}$, m, n e p são números inteiros ímpares consecutivos tais que $m < n < p$.

O valor de $\det A + \sqrt{\det A} + \sqrt[4]{\det A}$ é:

a) 2

b) 8

c) 16

d) 20

e) 22

Comentários:

Pessoal, a questão nos diz que m, n e p são <u>ímpares consecutivos</u> com $m < n < p$. Com base nisso, devemos calcular o determinante de A para obter o valor da expressão requerida.

Como devemos marcar uma **única resposta correta**, sabemos de antemão que **o determinante de A não mudará em função dos valores de m, n e p**, contanto que respeitemos o fato deles serem <u>ímpares consecutivos</u> com $m < n < p$.

Nesse caso, podemos fazer $m = 1, n = 3$ e $p = 5$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1^2 & 3^2 & 5^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & 25 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **regra de Sarrus** no determinante, temos:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & 25 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\det A = [\mathbf{1.3.25 + 1.5.1 + 1.1.9}] - [\mathbf{1.3.1 + 1.5.9 + 1.1.25}]$$
$$= [75 + 5 + 9] - [3 + 45 + 25]$$
$$= 89 - 73$$
$$= 16$$

Temos que $\det A = 16$. Logo:

$$\det A + \sqrt{\det A} + \sqrt[4]{\det A}$$
$$= 16 + \sqrt{16} + \sqrt[4]{16}$$

$$= 16 + 4 + 2$$
$$= 22$$

Gabarito: Letra E.

19.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Sejam A uma matriz quadrada de ordem 2 e B uma matriz quadrada de ordem 3, tais que $\det A \,.\, \det B = 1$.

O valor de $\det(3A)\,.\,\det(2B)$ é

a) 5

b) 6

c) 36

d) 72

e) 108

Comentários:

Sabemos que ao multiplicar **uma matriz** de **ordem n** por uma **constante k**, o determinante dessa nova matriz fica **multiplicado por k^n**.

$$\det(kA) = k^n \det A$$

A matriz A é de **ordem 2**. Logo, $\det(3A) = 3^{2} \det(A)$.

A matriz B é de **ordem 3**. Logo, $\det(2B) = 2^{3} \det(B)$.

Sabemos que $\det A \times \det B = 1$. Portanto, o produto requerido é:

$$\det(3A) \times \det(2B)$$
$$= 3^2 \det(A) \times 2^3 \det(B)$$
$$= 9 \det(A) \times 8 \det(B)$$
$$= (9 \times 8) \times (\det A \times \det B)$$
$$= 72 \times 1$$
$$= 72$$

Gabarito: Letra D.

20.(CESGRANRIO/EPE/2014) Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Qual é o valor do determinante da matriz inversa da transposta de M ?

a) -2

b) $-1/2$

c) $1/2$

d) 1

e) 2

Comentários:

A questão pergunta pelo determinante da **inversa da transposta**.

$$M \rightarrow \underbrace{M^t}_{\text{transposta}} \rightarrow \underbrace{(M^t)^{-1}}_{\text{inversa da transposta}}$$

O determinante da matriz M é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$$

$$= [\mathbf{1} \times \mathbf{4}] - [\mathbf{2} \times \mathbf{3}]$$

$$= 4 - 6$$

$$= -2$$

Lembre-se que $\mathbf{det}\, \boldsymbol{M^t} = \mathbf{det}\, \boldsymbol{M}$. Logo, o determinante da **inversa da transposta** é:

$$\det(M^t)^{-1} = \frac{1}{\mathbf{det(\boldsymbol{M^t})}}$$

$$= \frac{1}{\mathbf{det}\, \boldsymbol{M}}$$

$$= \frac{1}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Gabarito: Letra B.

21.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) O determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é:

a) 8

b) 12

c) 15

d) 24

e) 36

Comentários:

Para resolver um determinante de ordem 4, deve-se utilizar o **Teorema de Laplace**. Antes de aplicar esse teorema, vamos usar o **Teorema de Jacobi** para aumentar o número de zeros em uma fileira.

Substituindo a coluna 1 $(\boldsymbol{C_1})$ por $\boldsymbol{C_1} - \boldsymbol{C_3}$, ficamos com:

$$\det M = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & 1 & \mathbf{0} & 3 \\ \mathbf{1} & -1 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{0} & -2 & \mathbf{0} & 4 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{2} & 1 & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & -1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & -2 & 0 & 4 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando o **Teorema de Laplace** na primeira coluna do determinante anterior, ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathbf{\det \boldsymbol{M}} &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &= 2A_{11} + 0A_{21} + 0A_{31} \\ &= 2A_{11} \\ &= 2 \times (-1)^{1+1} D_{11} \\ &= 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{2} \times \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando a **regra de Sarrus** no determinante, temos:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$[(-\mathbf{1}).\mathbf{0}.\mathbf{1} + \mathbf{1}.\mathbf{4}.\mathbf{0} + \mathbf{0}.(-\mathbf{2}).\mathbf{1}] - [\mathbf{0}.\mathbf{0}.\mathbf{0} + (-\mathbf{1}).\mathbf{4}.\mathbf{1} + \mathbf{1}.(-\mathbf{2}).\mathbf{1}]$$

$$\begin{aligned} &= [0 + 0 + 0] - [0 - 4 - 2] \\ &= 0 - (-6) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Portanto, o determinante de M é:

$$\mathbf{\det \boldsymbol{M} = 2} \times \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 6 = 12$$

Gabarito: Letra B.

22.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Sejam A e B duas matrizes quadradas 2×2, tal que $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$, e $A.B = I$, onde I é a matriz identidade 2×2. Assim, a soma dos elementos da matriz B é igual a

a) 5/16

b) 7/16

c) 9/16

d) 11/16

e) 13/16

Comentários:

Sabemos que, pela definição de matriz inversa, $AA^{-1} = I$. Como $A.B = I$, temos que B é a inversa de A.

Temos que a inversa de uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

A matriz em questão é $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$, e seu determinante é:

$$\det A = [2 \times 6] - [4 \times (-1)] = 12 - (-4) = 16$$

Temos que:

$$B = A^{-1}$$

$$= \frac{1}{\det A} \times \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -(-1) & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} \times \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{6}{16} & -\frac{4}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{2}{16} \end{bmatrix}$$

Logo, a soma dos elementos de B é:

$$\frac{6}{16} + \left(-\frac{4}{16}\right) + \frac{1}{16} + \frac{2}{16}$$

$$= \frac{6 - 4 + 1 + 2}{16}$$

$$= \frac{5}{16}$$

Gabarito: Letra A.

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Matrizes

FGV

1.(FGV/SEAD-AP/2022) Seja A a matriz 2×2 onde cada elemento é $a_{ij} = i + j$.

A soma dos elementos da matriz A^2 é

a) 12.

b) 38.

c) 56.

d) 74.

e) 144.

2.(FGV/TCE-TO/2022) Para um dia de treinamento, os funcionários de uma empresa foram alocados em três salas: Sala 1, Sala 2 e Sala 3. Tendo sido realizada a primeira parte do treinamento, foi feito um intervalo, após o qual os funcionários puderam escolher livremente qualquer sala para a segunda parte do treinamento.

Na matriz A abaixo, cada elemento a_{ij} representa o número de funcionários que estavam na Sala i e foram para a Sala j após o intervalo.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

É correto concluir que:

a) a Sala 1 terminou com 2 funcionários a mais que no início;

b) a Sala 2 terminou com 20 funcionários;

c) a Sala 3 terminou com 3 funcionários a mais que no início;

d) a Sala 1 iniciou com 15 funcionários;

e) uma das salas terminou com o mesmo número de funcionários que tinha no início.

3.(FGV/MPE SC/2022)

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

A soma dos elementos da matriz A^2 é:

a) 10;

b) 12;

c) 15;

d) 23;

e) 30.

4. (FGV/Pref Paulínia/2021) Considere a equação matricial $A^2X^{-1}B^{-1} = AC$, onde A, B, C e X são matrizes quadradas invertíveis e de mesma ordem.

A solução X é igual a

a) $AB^{-1}C^{-1}$

b) $AC^{-1}C^{-1}$

c) $CA^{-1}B$

d) $A^{-1}BC$

e) $B^{-1}C^{-1}A$

5.(FGV/Pref. Salvador/2019) Considere as matrizes $A_{2\times 3}$ e $B_{2\times 2}$.

Sobre essas matrizes é correto afirmar que

a) Existe a soma $A + B$ e é uma matriz 4×5.

b) Existe o produto AB e é uma matriz 4×6.

c) Existe o produto BA e é uma matriz 4×6.

d) Não existe o produto AB.

e) Não existe o produto BA.

Cebraspe

Texto para as questões 06 e 07

Um importante algoritmo para a resolução de problemas que envolvem matrizes (por exemplo, resolução de sistemas lineares, cálculo da matriz inversa, determinantes etc.) consiste em efetuar operações elementares sobre as linhas da matriz. Essas operações incluem multiplicação de uma linha da matriz por um número não nulo; adição a uma linha de um múltiplo de outra linha; permutação de linhas. Com relação a essas operações, considere a matriz B obtida da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ depois de efetuada a seguinte sequência de operações elementares: substituição da linha 3 pela linha 3 menos a linha 2; substituição da linha 2 pela linha 2 menos duas vezes a linha 1. Com base nessas informações, julgue o item que se segue, acerca da matriz B.

6. (CESPE/CBM DF/2011) Na linha 3 da matriz B, há apenas um elemento nulo.

7. (CESPE/CBM DF/2011) A soma dos elementos da linha 2 da matriz B é igual a 1.

8. (CESPE/PC-DF/2013) Considere que a empresa X tenha disponibilizado um aparelho celular a um empregado que viajou em missão de 30 dias corridos. O custo do minuto de cada ligação, para qualquer telefone, é de R$ 0,15. Nessa situação, considerando que a empresa tenha estabelecido limite de R$ 200,00 e que, após ultrapassado esse limite, o empregado arcará com as despesas, julgue o item a seguir.

Considere que, em uma nova missão, o preço das ligações tenha passado a depender da localidade, mesma cidade ou cidade distinta da de origem da ligação, e do tipo de telefone para o qual a ligação tenha sido feita, celular, fixo ou rádio. As tabelas abaixo mostram quantas ligações de cada tipo foram feitas e o valor de cada uma:

	celular	fixo	rádio
mesma cidade	6	3	1
cidade distinta	7	1	3

Tabela I: número de ligações realizadas por tipo de telefone

	mesma cidade	cidade distinta
celular	0,20	0,50
fixo	0,15	0,30
rádio	0,20	0,20

Tabela II: preço de cada ligação, em reais

Nessas condições, se $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ for a matriz formada pelos dados da tabela I, e $B = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,50 \\ 0,15 & 0,30 \\ 0,20 & 0,20 \end{bmatrix}$ for a matriz formada pelos dados da tabela II, então a soma de todas as entradas da matriz A × B será igual ao valor total das ligações efetuadas.

9. (CESPE/SEDF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$, julgue o próximo item.

Se $C = [C_{ij}]$, $1 \le i, j \le 3$, tal que $C = A^2$, então $C_{23} - C_{22} > 500$.

10. (CESPE/IBAMA/2013) Julgue o item subsequente, relacionado a problemas aritméticos, geométricos e matriciais.

Considere que A e B sejam matrizes distintas, de ordem 2×2, com entradas reais e, em cada matriz, três das quatro entradas sejam iguais a zero. Além disso, considere também que $A \times A = B \times B = A \times B = O$, em que O é a matriz nula, isto é, a matriz em que todas as entradas são iguais a zero. Nesse caso, necessariamente, $A = O$ ou $B = O$.

FCC

11.(FCC/TRT 22/2022) Cada um dos números 1, 2, 3 e 4 foram colocados em um quadriculado 2 × 2. Se a soma da primeira linha é 3 e a soma da diagonal principal (da esquerda para a direita) é 4, então a soma da primeira coluna é

a) 5.

b) 4.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

12.(FCC/IBMEC/2019) Sejam x, y, z e w os números reais que satisfazem a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} x - 2y & z - w \\ 2z - w & x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Então, a soma $x + y + z + w$ é igual a

a) -1

b) 0

c) 2

d) 5

e) 3

13. (FCC/TRT 11/2017) Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem 2 em que

$$A = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 \\ m^2 - 6m & n^2 + 6 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 3m - 2 & 2n \\ -5 & 5n \end{bmatrix}.$$

Se $A = B$, então considerando os valores reais de m e n que tornam verdadeira esta igualdade, verifica-se que mn é igual a

a) 3

b) 4

c) 2

d) 6

e) 1

14.(FCC/SEDU ES/2018) A multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa em geral, porém, existem exemplos de matrizes que comutam na multiplicação. Um exemplo de duas matrizes que comutam na multiplicação é:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vunesp

15.(VUNESP/EsFCEx/2021) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Se $B = A^2 + 2A$, então o valor de $a \cdot b$ é igual a:

a) -3

b) -2

c) -1

d) 3

e) 5

16. (VUNESP/PC-SP/2014) Considere as matrizes $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Em relação a MN, que é o produto da matriz M pela matriz N, é correto afirmar que

a) $MN = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $MN = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 23 \end{pmatrix}$

c) $MN = (0 \quad 2 \quad 3)$

d) $MN = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

e) $MN = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

17. (VUNESP/Pref. Sertãozinho/2018) O produto da matriz $A_{2\times3} = (a_{i,j}) = i - j$ pela matriz $B_{3\times2} = (b_{i,j}) = i + j$ é a matriz

a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -11 & -14 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

18.(VUNESP/MPE SP/2019) Sejam A e B duas matrizes quadradas quaisquer, de mesma ordem, e α um número real qualquer. Nessas condições, é correto afirmar que

a) $AB = BA$

b) $AB^{-1} = \frac{A}{B}$

c) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$

d) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$

e) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

Outras Bancas

19.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) A Tabela I apresenta as quantidades médias de combustível, em litros, vendidas semanalmente em três postos de abastecimento de uma mesma rede. O preço praticado em um dos postos é o mesmo praticado pelos outros dois.

Esses preços, por litro, em duas semanas consecutivas, estão apresentados na Tabela II.

Tabela I

	Posto 1	Posto 2	Posto 3
Etanol	20.200	22.000	21.000
Gasolina	32.000	33.600	35.000
Diesel	18.000	23.000	24.500

Tabela II

	Semana 1	Semana 2
Etanol	R$ 2,48	R$ 2,52
Gasolina	R$ 2,69	R$ 2,71
Diesel	R$ 1,98	R$ 2,02

Com os dados das Tabelas I e II são montadas as matrizes A e B a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 20.200 & 22.000 & 21.000 \\ 32.000 & 33.600 & 35.000 \\ 18.000 & 23.000 & 24.500 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2,48 & 2,52 \\ 2,69 & 2,71 \\ 1,98 & 2,02 \end{bmatrix}$$

Seja $C_{2\times 3}$ a matriz que apresenta os valores médios arrecadados em cada um dos três postos, por semana, com a venda de combustíveis.

Identificando-se A^t e B^t como as matrizes transpostas de A e de B, respectivamente, a matriz C é definida pela operação

a) $A\,.\,B$

b) A^tB^t

c) $B\,.\,A$

d) B^tA

e) B^tA^t

20. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denotando por A^t a matriz transposta de A, a matriz $(A^t A) - (B + B^t)$ é

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

21.(CESGRANRIO/BASA/2014) Seja $A_{3\times3}$ uma matriz quadrada de ordem 3. O elemento da matriz $A_{3\times3}$, que ocupa a linha i e a coluna j, é representado por a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$.

Acerca dos elementos da matriz $A_{3\times3}$, sabe-se que:

- **Quatro elementos são iguais a 0 e os cinco restantes são iguais a 1;**
- **Para todos os valores de i e j, tem-se $a_{ij} = a_{ji}$.**

Os possíveis valores da soma $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ são:

a) 0 e 1

b) 0 e 2

c) 0 e 3

d) 1 e 3

e) 2 e 3

22. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) Considere a matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz

a) é singular.

b) é simétrica.

c) é igual à sua inversa.

d) não tem inversa.

e) tem determinante positivo.

GABARITO – MULTIBANCAS

Matrizes

1. LETRA D
2. LETRA E
3. LETRA D
4. LETRA E
5. LETRA D
6. ERRADO
7. CERTO
8. ERRADO
9. CERTO
10. ERRADO
11. LETRA A
12. LETRA C
13. LETRA C
14. LETRA C
15. LETRA A
16. LETRA E
17. LETRA D
18. LETRA C
19. LETRA D
20. LETRA C
21. LETRA D
22. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Determinantes

FGV

1.(FGV/MPE SC/2022) Seja A uma matriz 4 x 4 cujo determinante é igual a 2.

O determinante da matriz 3A é igual a:

a) 6;

b) 12;

c) 24;

d) 64;

e) 162.

2. (FGV/MPE SC/2022) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$ **e** $B = \begin{bmatrix} 2a & c & 3b \\ 2d & f & 3e \\ 2g & k & 3h \end{bmatrix}$**.**

Sendo $det(A)$ e $det(B)$ os determinantes das matrizes A e B, respectivamente, tem-se que:

a) $det(A) = 6 \times det(B)$;

b) $det(A) = -6 \times det(B)$;

c) $det(B) = 6 \times det(A)$;

d) $det(B) = -6 \times det(A)$;

e) $det(A) = det(B)$.

3.(FGV/SAD PE/2009) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **é:**

a) 22

b) 9

c) 0

d) -6

e) -10

Cebraspe

4.(CESPE/IFF/2018) Considere que k seja um número real e que o determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ seja igual a 27. Nesse caso, se $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ então o determinante da matriz B − A, será igual a:

a) 30.

b) 0.

c) 3.

d) 6.

e) 10.

5.(CESPE/SEDUC AL/2018) Julgue o item que se seguem, relativos a matrizes e sistemas lineares.

Se a é um número real e se o determinante da matriz $P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ for igual a zero, então $a = -2$ ou $a = 1$.

6.(CESPE/SEDF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$, julgue o próximo item.

Se $B = \frac{1}{2}A$, então o determinante de B é maior que 200.

Texto para as questões 07 a 09

Considerando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, julgue os itens a seguir.

7. (CESPE/SEDU-ES/2012) Como $[det\ B]^2 = det\ B$, então $det\ B = 1$.

8. (CESPE/SEDU-ES/2012) É correto afirmar que $\det[A \times B \times C] = \det B$.

9. (CESPE/SEDU-ES/2012) $\det A^2 = 196$.

10.(CESPE/IFF/2018) Considere que A, B e C sejam matrizes quadradas, de mesma dimensão e com entradas reais. Assinale a opção correta a respeito das propriedades dessas matrizes, assumindo que $\det(X)$ é o determinante da matriz X e X^t é a matriz transporta da matriz X.

a) Se a matriz A for antissimétrica, isto é, se $A^t = -A$, então $\det(A) = 0$.

b) Se A não for matriz nula e se $AB = AC$, então $B = C$.

c) Se $(A + B)^2 = (B - A)^2$, então $AB = -BA$.

d) Se $AB \neq BA$, então $det(AB) \neq det(BA)$.

e) $det(2A) = 2det(A)$.

11.(CESPE/SEDUC AL/2018) Julgue o item que se seguem, relativos a matrizes e sistemas lineares.

Se P for uma matriz simétrica, então P será inversível.

12. (CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se que $det(A) = -1$ e, consequentemente, A é uma matriz inversível.

FCC

13.(FCC/PM SE/2005) A solução real da equação $\begin{vmatrix} 2x & -1 & 0 \\ x & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ é

a) 1

b) 0

c) -1

d) -2

e) -3

Vunesp

14.(VUNESP/CM Barretos/2010) Considere a matriz real:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

O determinante de A vale

a) 1

b) 2

c) -1

d) -2

e) 3

15. (VUNESP/CM Barretos/2010) Para que o determinante da matriz

$$B = \begin{bmatrix} x & 4 \\ 8 & 2x \end{bmatrix}$$

seja nulo, o valor de x deve ser

a) 1 ou -1

b) 2 ou -2

c) 3 ou -3

d) 4 ou -4

e) 5 ou -5

16.(VUNESP/PC SP/2013) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} x & 1 & k \\ 0 & x & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e a equação em x dada por $\det M = 0$.

Sendo k uma constante real, pode-se afirmar sobre a equação que

a) tem raízes $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$ para $k = 0$.

b) é uma equação de 2.º grau.

c) tem uma raiz real para $k \neq -0{,}5$.

d) não possui raízes reais.

e) sua raiz é dada por $2k + 1$ para todo k.

17. (VUNESP/DESENVOLVE/2014) Considere duas matrizes quadradas de mesma ordem A e B e os produtos matriciais entre elas, AB e BA. Se $\det(M)$ representa o determinante da matriz M e $\operatorname{tr}(M)$ o seu traço, é correto afirmar que:

a) $det(AB) = det(A) \times det(B)$ e $tr(AB) = tr(A) \times tr(B)$.

b) $det(AB) = det(A) \times det(B)$ e $tr(AB) = tr(A) + tr(B)$.

c) $det(AB) = det(BA)$ e $tr(AB) = tr(A) \times tr(B)$.

d) $det(AB) = det(BA)$ e $tr(AB) = tr(A) + tr(B)$.

e) $det(AB) = det(A) \times det(B)$ e $tr(AB) = tr(BA)$.

Outras Bancas

18. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) Na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & n & p \\ m^2 & n^2 & p^2 \end{bmatrix}$, m, n e p são números inteiros ímpares consecutivos tais que $m < n < p$.

O valor de $\det A + \sqrt{\det A} + \sqrt[4]{\det A}$ é:

a) 2

b) 8

c) 16

d) 20

e) 22

19.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Sejam A uma matriz quadrada de ordem 2 e B uma matriz quadrada de ordem 3, tais que $\det A \,.\, \det B = 1$.

O valor de $\det(3A) \,.\, \det(2B)$ é

a) 5

b) 6

c) 36

d) 72

e) 108

20.(CESGRANRIO/EPE/2014) Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Qual é o valor do determinante da matriz inversa da transposta de M ?

a) -2

b) $-1/2$

c) $1/2$

d) 1

e) 2

21.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) O determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é:

a) 8

b) 12

c) 15

d) 24

e) 36

22.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Sejam A e B duas matrizes quadradas 2×2, tal que $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$, e $A.B = I$, onde I é a matriz identidade 2×2. Assim, a soma dos elementos da matriz B é igual a

a) 5/16

b) 7/16

c) 9/16

d) 11/16

e) 13/16

Gabarito – Multibancas

Determinantes

1. LETRA E
2. LETRA D
3. LETRA D
4. LETRA D
5. CERTO
6. ERRADO
7. ERRADO
8. CERTO
9. CERTO
10. LETRA C
11. ERRADO
12. CERTO
13. LETRA A
14. LETRA A
15. LETRA D
16. LETRA C
17. LETRA E
18. LETRA E
19. LETRA D
20. LETRA B
21. LETRA B
22. LETRA A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.