

Dominando o CÁLCULO

Apostila de Exercícios

Tem Ciência

Professor Daniel Nunes

Prefácio

Olá!



Aqui é onde você irá de fato construir o seu conhecimento. A parte mais importante desse curso fica a seu cargo: realizar os exercícios. Essa apostila tem um monte deles, e alguns são bem desafiadores: o importante é fazer o máximo que puder e não abusar do Livro das Respostas. O seu empenho em tentar resolver os exercícios conta muito mais do que olhar a resposta já pronta.

Isso porque é passando pelo desafio de quebrar a cabeça resolvendo os exercícios que você irá de fato construir uma base sólida em Cálculo. O aprendizado ocorre de forma ativa e não passiva. E é nos exercícios que está o seu momento de agir.

Antes de cair na tentação de olhar a solução no Livro das Respostas, vá primeiro na Apostila de Aulas. Tente encontrar ali aquilo que falta para chegar na resposta. Esse processo de busca vai consolidar muito mais o seu conhecimento do que ver a solução pronta de mão beijada. Vai ajudar você a entender o que realmente é importante naquela questão, e assim, evoluir nos seus estudos. E falando nisso... bons estudos!

Daniel Nunes

Sumário

Conjuntos	3
Números	7
1 Propriedades Básicas	7
2 Princípio da Indução Finita	11
3 Símbolo Somatório	12
4 Teorema do Binômio, Produtos Notáveis, PA e PG	13
5 Intervalos na Reta Real, Desigualdades e Valor Absoluto	16
6 Números Complexos	19
7 Representação Decimal	21
Funções	22
1 Propriedades básicas	22
2 Gráficos de Funções e Simetria	25
3 Potências	27
4 Polinômios	29
5 Funções Racionais	32
6 Exponencial	33
7 Logaritmo	35
Trigonometria	38
1 Ângulos, Geometria Básica e o Círculo Unitário	38
2 Funções Trigonométricas	40
3 Números Complexos na Forma Polar	43
Geometria Analítica	44
1 Plano Cartesiano e Retas	44
2 Cônicas	47
Limites e Continuidade	49
1 Limites de sequências	49
2 Cálculo de limites de funções	51
3 Definição precisa de limite	55
4 Continuidade	56

Derivada	59
1 Definição de derivada	59
2 Propriedades básicas de derivação: Potências, Funções Racionais e Exponencial	61
3 Derivadas Trigonométricas e Regra da Cadeia	63
4 Derivação Implícita e Inversa	66
5 Logaritmo e Funções Hiperbólicas	68
6 Aproximação linear, diferenciais e taxas relacionadas	70
7 Teorema do Valor Médio	73
8 Máximos e Mínimos	75
9 Indeterminações e Regra de L'Hôpital	79
10 Gráfico de Funções	81
11 Método de Newton	82
12 Primitivas	83
Integral e Teorema Fundamental do Cálculo	84
1 Propriedades básicas da integral	84
2 Teorema Fundamental do Cálculo	87
3 Método da Substituição	91
4 Áreas entre curvas e Volumes	93
5 Integração por partes	96
6 Integrais Trigonométricas	98
7 Substituição Trigonométrica e Hiperbólica	100
8 Integral de funções racionais	102
9 Integrais Impróprias e Testes de Convergência	104
10 Comprimento de Arco	108
11 Áreas de Superfícies de Revolução	110
Séries	112
1 Sequências e Séries	112
2 Testes de Convergência	115
3 Séries de Potências	120
4 Séries de Taylor	123

Conjuntos

Exercício 1. Escreva com símbolos:

- (a) o conjunto dos múltiplos inteiros de 3, entre -10 e 10;
- (b) o conjunto dos divisores inteiros de 42;
- (c) o conjunto dos múltiplos inteiros de 0;
- (d) o conjunto das frações com numerador e denominador compreendidos entre 0 e 3.

Exercício 2. Quais dos conjuntos abaixo são unitários?

$$A = \left\{ x \mid x < \frac{9}{4} \text{ e } x > \frac{6}{5} \right\}$$

$$B = \{x \mid 0 \cdot x = 2\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ é inteiro e } x^2 = 3\}$$

$$D = \{x \mid 2x + 1 = 7\}$$

Exercício 3. Quais dos conjuntos abaixo são vazios?

$$A = \{x \mid 0 \cdot x = 0\}$$

$$B = \left\{ x \mid x > \frac{9}{4} \text{ e } x < \frac{6}{5} \right\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ é divisor de zero} \}$$

$$D = \{x \mid x \text{ é divisível por zero} \}$$

Exercício 4. Sendo $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$, classifique em V ou F cada sentença abaixo e justifique.

- (a) $A \subset D$ (b) $A \subset B$ (c) $B \subset C$ (d) $B \subset D$ (e) $C = D$

Exercício 5. Quais das igualdades abaixo são verdadeiras?

- (a) $\{a, a, a, b, b\} = \{a, b\}$ (b) $\{x \mid x^2 = 4\} = \{x \mid x \neq 0 \text{ e } x^3 - 4x = 0\}$
 (c) $\{x \mid 2x + 7 = 11\} = \{2\}$ (d) $\{x \mid x < 0 \text{ e } x \geq 0\} = \emptyset$

Exercício 6. Faça um diagrama de Venn que simbolize a situação seguinte: A , B , C e D são conjuntos não vazios, $D \subset C \subset B \subset A$.

Exercício 7. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$ e $C = \{c, e\}$, determine $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$.

Exercício 8. Classifique em V ou F:

- (a) $\emptyset \subset (A \cup B)$ (b) $(A \cup B) \subset A$ (c) $(A \cup B) \subset (A \cup B)$
 (d) $B \subset (A \cup B)$ (e) $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$

Exercício 9. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ e $C = \{c, e, f\}$, determine $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.

Exercício 10. Classifique em V ou F:

- (a) $\emptyset \subset (A \cap B)$ (b) $A \subset (A \cap B)$ (c) $A \in (A \cap B)$
 (d) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ (e) $(A \cap B) \subset B$ (f) $(A \cap B \cap C) \subset (A \cap B)$

Exercício 11. Sabe-se que $A \cup B \cup C = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$, $A \cap B = \{2, 3, 8\}$, $A \cap C = \{2, 7\}$, $B \cap C = \{2, 5, 6\}$ e $A \cup B = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 8\}$. Determine C .

Exercício 12. Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$ e $C = \{b, d, e, g\}$. Determine:

- (a) $A \setminus B$ (b) $B \setminus A$ (c) $C \setminus B$ (d) $(A \cup B) \setminus B$ (e) $A \setminus (B \cap C)$ (f) $(A \cup B) \setminus (A \cap C)$

Exercício 13. Classifique em V ou F as seguintes sentenças:

- (a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (b) se $A \subset B$, então $B^C \subset A^C$
 (c) $A \setminus B \subset A^C$ (d) $A \setminus B \subset B^C$

Exercício 14. Desenhe um diagrama de Venn representando quatro conjuntos, A, B, C e D , não vazios, de modo que se tenha $A \not\subset B$, $B \not\subset A$, $(A \cup B) \subset C$ e $D \subset (A \cap B)$.

Exercício 15.* (*Leis de DeMorgan*) Mostre que

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Exercício 16. Classifique em V ou F as seguintes sentenças:

- (a) se $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$, então $x \in A$ para ao menos um $A \in \mathcal{C}$
 (b) se $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$, então $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{C}$
 (c) se $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$, então $x \in A$ para ao menos um $A \in \mathcal{C}$
 (d) se $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$, então $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{C}$

Exercício 17. Dados os conjuntos A, B e C , expresse cada um dos conjuntos abaixo em termos de A, B e C usando os símbolos de união, interseção e diferença de conjuntos:

$$D = \{x \mid x \in A \text{ e } (x \in B \text{ ou } x \in C)\}$$

$$E = \{x \mid (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } x \in C\}$$

$$F = \{x \mid x \in A \text{ e } (\text{se } x \in B, \text{ então } x \in C)\}$$

Exercício 18.* Prove as seguintes propriedades básicas de conjuntos:

$$(a) \quad (A^c)^c = A \quad (b) \quad A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c \quad (c) \quad \left(\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \right)^c = \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A^c \quad (d) \quad \left(\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A \right)^c = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A^c$$

Números

1 Propriedades Básicas

Exercício 1. Expanda $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$

Exercício 2. Seja $H = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 40, n \text{ múltiplo de } 2, n \text{ não múltiplo de } 3\}$. Qual é o número de elementos de H ?

Exercício 3. Sendo $A = \{n \mid n = 2p - 1 \text{ e } p \in B\}$, qual é a condição sobre B para que A seja o conjunto dos números naturais ímpares?

Exercício 4. Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

(a) $0 \in \mathbb{N}$ (b) $(2 - 3) \in \mathbb{N}$ (c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (d) $(-3)^2 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (e) $(-4) \cdot (-5) \in \mathbb{N}$

Exercício 5. Faça a decomposição em fatores primos dos seguintes números:

(a) 2024 (b) 91 (c) 735 (d) 456 (e) 231 (f) 4096

Exercício 6. Determine os seguintes números inteiros:

(a) $\text{mdc}(2, 3)$

(b) $\text{mdc}(-4, 6)$

(c) $\text{mdc}(-6, -14)$

Exercício 7. Mostre que se r_1 e r_2 são racionais, $r_1 < r_2$, então existe um racional r tal que $r_1 < r < r_2$.

Exercício 8. Avalie cada expressão sem usar calculadora:

(a) $(-3)^4$ (b) -3^4 (c) 3^{-4} (d) $\frac{5^{23}}{5^{21}}$ (e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ (f) $16^{-3/4}$

Exercício 9. Simplifique cada expressão. Escreva sua resposta sem expoentes negativos.

(a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$ (b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$ (c) $\left(\frac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

Exercício 10. Expanda e simplifique

(a) $3(x+6) + 4(2x-5)$ (b) $(x+3)(4x-5)$ (c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$
 (d) $(x+2)^3$ (e) $(2x+3)^2$

Exercício 11. Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

(a) $3 \in \mathbb{R}$ (b) $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$ (c) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (d) $\sqrt{4} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
 (e) $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (f) $\sqrt{2} - 3\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (g) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{18}} \in \mathbb{Q}$

Exercício 12. Mostre que se $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então $a+x, ax \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercício 13. Mostre que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$

Exercício 14. Racionalize a expressão e simplifique:

(a) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}$ (b) $\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

Exercício 15. Simplifique as expressões racionais:

(a) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$ (b) $\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x+1}{x+2}$ (c) $\frac{2x^2-x-1}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{2x+1}$ (d) $\frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}$

Exercício 16. Diga se cada equação é verdadeira ou falsa:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & (p+q)^2 = p^2 + q^2 & \text{(b)} \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} & \text{(c)} \quad \sqrt{a^2 + b^2} = a + b \\ \text{(d)} & \frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} & \text{(e)} \quad \frac{1+TC}{C} = 1+T & \text{(f)} \quad \frac{1/x}{a/x - b/x} = \frac{1}{a-b} \end{array}$$

Exercício 17. Suponha que t seja um número irracional. Explique por que $1/t$ também é irracional.

Exercício 18. Dê um exemplo de dois números irracionais cuja soma seja irracional.

Exercício 19. Dê um exemplo de dois números irracionais cuja soma seja racional.

Exercício 20. Expanda a expressão dada:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & (x-y)(z+w-t) & \text{(b)} & (x+y-r)(z+w-t) \\ \text{(c)} & (x+y+z)^2 & \text{(d)} & (x+1)(x-2)(x+3) \\ \text{(e)} & (b-3)(b+3)(b^2+9) & \text{(f)} & xy(x+y)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \\ \text{(g)} & (m-2)(m^4+2m^3+4m^2+8m+16) & & \end{array}$$

Exercício 21. Simplifique as expressões dadas o máximo possível:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & 4(2m+3n)+7m & \text{(b)} \quad 3(2m+4(n+5p))+6n & \text{(c)} \quad \frac{3}{4} + \frac{6}{7} \\ \text{(d)} & \frac{3}{10} + \frac{7}{8} & \text{(e)} \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{39} & \text{(f)} \quad \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{3}} \\ \text{(g)} & \frac{1}{x-y}\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) & \text{(h)} \quad \frac{\frac{x-4}{y+3}}{\frac{y-3}{x+4}} & \text{(i)} \quad \frac{\frac{a-t}{b-c}}{\frac{b+c}{a+t}} \\ \text{(j)} & \frac{(x+a)^2 - x^2}{a} & \text{(k)} \quad \frac{\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}}{a} & \text{(l)} \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{m+3}{7} + \frac{1}{2} \end{array}$$

Exercício 22. Demonstre que $(a+1)^2 = a^2 + 1$ se e somente se $a = 0$.

Exercício 23. Dentre os reais $-1, 0, 1, 2$ e 3 , qual não pode ser escrito sob a forma $r = \frac{x+1}{x}$, com $x \in \mathbb{R}$?

Exercício 24. Sejam $a, b \in [0, \infty)$. Mostre que

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

Exercício 25.* Prove que se p é primo então $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Conclua que se $n \in \mathbb{N}$ for tal que sua decomposição em fatores primos possua potência ímpar de algum primo, então $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

Exercício 26. Prove que se a, b, c e d são racionais, p é primo positivo e $a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p}$, então $a = c$ e $b = d$.

2 Princípio da Indução Finita

Exercício 1* Demonstre, usando o princípio da indução finita, que:

$$(a) \quad 2 + 5 + 8 + \dots + (2 + 3n) = \frac{(n+1)(4+3n)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$(b) \quad 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$(c) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$(d) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$(e) \quad 8 \text{ divide } 3^{2n} - 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$(f) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$(g) \quad (1+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n+1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$(h) \quad 2^n > n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 2. Dado um número natural a , seja $Y \subset \mathbb{N}$ um conjunto com as seguintes propriedades:

$$(i) \quad a \in Y;$$

$$(ii) \quad n \in Y \Rightarrow n+1 \in Y.$$

Prove que Y contém todos os números naturais maiores do que ou iguais a a .

Exercício 3* Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

3 Símbolo Somatório

Exercício 1. Ache os valores numéricos das seguintes somas:

$$(a) \sum_{k=1}^4 k \quad (b) \sum_{n=2}^5 2^{n-2} \quad (c) \sum_{r=0}^3 2^{2r+1} \quad (d) \sum_{n=1}^4 n^n \quad (e) \sum_{i=0}^5 (2i+1)$$

Exercício 2. Escreva as seguintes somas na notação de somatório:

$$(a) 2 + 4 + 6 + \dots + 100 \quad (b) 1 + 3 + 5 + \dots + 201 \quad (c) \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \frac{5}{81} + \dots + \frac{5}{3^{40}}$$

Exercício 3. Diga se é V ou F (e justifique):

$$(a) \sum_{n=0}^{100} n^4 = \sum_{n=1}^{100} n^4 \quad (b) \sum_{i=1}^{100} (i+1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2 \quad (c) \sum_{j=0}^{100} 2 = 200$$

$$(d) \sum_{k=0}^{100} (2+k) = 2 + \sum_{k=0}^{100} k \quad (e) \sum_{k=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{100} k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} k^2 \right) \quad (f) \sum_{k=0}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{100} k \right)^3$$

Exercício 4. Mostre que

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

(Sugestão: $2k-1 = k^2 - (k-1)^2$)

Exercício 5. Escreva sob a forma de somatório e encontre o valor da expressão

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$$

4 Teorema do Binômio, Produtos Notáveis, PA e PG

Exercício 1. Calcule:

(a) $\binom{9}{3}$ (b) $\binom{11}{4}$ (c) $\binom{9}{6}$ (d) $\binom{11}{7}$ (e) $\binom{n}{n}$ (f) $\binom{n}{n-1}$ (g) $\binom{n}{0}$

Exercício 2. Demonstre que

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = 2^n$$

Exercício 3. Expanda e simplifique:

(a) $(2 - \sqrt{3})^5$ (b) $(3 - \sqrt{6})^6$

Exercício 4. Determine a décima linha do triângulo de Pascal.

Exercício 5. Determine o coeficiente de t^{47} na expansão de $(t + 2)^{50}$.

Exercício 6. Determine o coeficiente de w^{198} na expansão de $(w + 3)^{200}$.

Exercício 7. Demonstre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Exercício 8. Explique por que

$$\sum_{m=1}^{1000} m^2 = \sum_{m=0}^{999} (m^2 + 2m + 1)$$

Exercício 9. Expanda na forma de produto do maior número de fatores com coeficientes reais que conseguir:

(a) $(a^7 + b^7)$ (b) $(1 - t^6)$ (c) $(x^{2^n} - 1)$

Exercício 10.* Prove as seguintes identidades:

(a) $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$
 (b) $1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$
 (c) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n} = n(2^{n-1})$
 (d) $1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

Exercício 11. Determine a soma de todos os inteiros positivos com quatro dígitos.

Exercício 12. Determine a soma de todos os inteiros positivos ímpares com quatro dígitos.

Exercício 13. Calcule:

(a) $302 + 305 + 308 + \dots + 6002 + 6005 + 6008$ (b) $300 + 293 + 286 + \dots + 55 + 48 + 41$
 (c) $\sum_{m=1}^{80} (4 + 5m)$ (d) $\sum_{k=10}^{900} (3k - 2)$

Exercício 14. Determine a soma dos 100 primeiros inteiros positivos que deixam resto 3 na divisão por 7.

Exercício 15. Se $3 - x, -x, \sqrt{9 - x}, \dots$ é uma progressão aritmética, determine x e calcule o quinto termo.

Exercício 16.* Podem os números $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ pertencerem a uma mesma progressão aritmética?

Exercício 17. Calcule:

$$(a) \sum_{k=1}^{40} \frac{3}{2^k} \quad (b) \sum_{k=1}^{90} \frac{5}{7^k} \quad (c) \sum_{m=5}^{91} (-2)^m \quad (d) \sum_{m=3}^{77} (-5)^m$$

Exercício 18. Quanto vale o produto $(a)(aq)(aq^2)(aq^3)\dots(aq^{n-1})$?

Exercício 19. Calcule o valor da soma de n parcelas $1 + 11 + \dots + 111\dots 1$.

Exercício 20.* Mostre que o número $444\dots 488\dots 89$, formado por n dígitos iguais a 4, $n - 1$ dígitos iguais a 8 e um dígito igual a 9, é um quadrado perfeito (ou seja, k^2 para algum $k \in \mathbb{N}$). Determine a sua raiz quadrada.

Exercício 21. Determine os limites das somas abaixo:

$$(a) 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots \quad (b) \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + \dots$$

$$(c) 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots, \text{ onde } -1 < x < 1 \quad (d) \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \dots$$

5 Intervalos na Reta Real, Desigualdades e Valor Absoluto

Exercício 1. Represente sobre a reta real cada um dos seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

$$B = (0, 3)$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$$

$$D = (-1, 0) \cup [3, \infty)$$

Exercício 2. Sendo $A = [0, 5)$ e $B = (1, 3)$, determine $B \setminus A$.

Exercício 3. Encontre o conjunto solução das seguintes igualdades e desigualdades:

$$(a) |x - 1| = 4 \quad (b) |x + 1| < 2 \quad (c) |x - 1| < |x - 5| \quad (d) |x - 2| + |x + 4| = 8$$

$$(e) |x - 2| + |x + 4| = 1 \quad (f) \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| = 2 \quad (g) |x + 3| = x + 5 \quad (h) |x - 5| = 5 - x$$

Exercício 4. Resolva cada desigualdade e escreva a resposta usando a notação de intervalo:

$$(a) -4 < 5 - 3x \leq 17 \quad (b) x(x - 1)(x + 2) > 0 \quad (c) \frac{2x - 3}{x + 1} \leq 1$$

$$(d) x^2 < 2x + 8 \quad (e) |x - 4| < 3$$

Exercício 5. Escreva cada uma das uniões sob a forma de um único intervalo:

$$(a) [2, 7) \cup [5, 20) \quad (b) [-8, -3) \cup [-6, -1) \quad (c) [-2, 8] \cup (-1, 4)$$

$$(d) (3, \infty) \cup [2, 8] \quad (e) (-\infty, 4) \cup (-2, 6] \quad (f) (-\infty, -3) \cup [-5, \infty)$$

$$(g) (-\infty, -10] \cup (-\infty, -8]$$

Exercício 6. Escreva cada conjunto como um intervalo ou uma união de dois intervalos:

- (a) $\{x \mid |x - 4| < 1/10\}$ (b) $\{x \mid |x + 2| < 1/100\}$ (c) $\{x \mid |x + 4| < \epsilon/2\}$ (onde $\epsilon > 0$)
 (d) $\{x \mid |x| > 2\}$ (e) $\{x \mid |x - 5| \geq 3\}$ (f) $\{x \mid |x + 6| \geq 2\}$

Exercício 7. Escreva cada interseção como um único intervalo:

- (a) $[2, 7) \cap [5, 20)$ (b) $[-8, -3) \cap [-6, -1)$ (c) $(3, \infty) \cap [2, 8]$
 (d) $(-\infty, 4) \cap (-2, 6]$ (e) $(-\infty, -3) \cap [-5, \infty)$ (f) $(-3, \infty) \cap [-5, \infty)$

Exercício 8. Determine:

- (a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right]$ (b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$ (c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$

Exercício 9. Determine todos os números reais x que satisfazem a desigualdade dada:

- (a) $\frac{2x+1}{x-3} < 4$ (b) $\left|\frac{5x-3}{x+2}\right| < 1$ (c) $\frac{x-2}{3x+1} < 2$ (d) $\frac{4x+1}{x+3} < 2$

Exercício 10. Cada desigualdade (a_i) a seguir é equivalente a uma desigualdade (b_j) . Por exemplo, $|x| < 3$ se e só se $-3 < x < 3$, portanto, (a_1) é equivalente a (b_2) . Estabeleça todos os pares equivalentes.

- | | |
|------------------------------------|---|
| $(a_1) \quad x < 3$ | $(b_1) \quad 4 < x < 6$ |
| $(a_2) \quad x - 1 < 3$ | $(b_2) \quad -3 < x < 3$ |
| $(a_3) \quad 3x - 2 < 1$ | $(b_3) \quad x > 3 \text{ ou } x < -1$ |
| $(a_4) \quad 1 + 2x \leq 1$ | $(b_4) \quad \frac{1}{3} < x < 1$ |
| $(a_5) \quad x - 1 > 2$ | $(b_5) \quad -2 < x < 4$ |
| $(a_6) \quad x + 2 \geq 5$ | $(b_6) \quad -\sqrt{3} \leq x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq \sqrt{3}$ |
| $(a_7) \quad 5 - x^{-1} < 1$ | $(b_7) \quad x > 2$ |
| $(a_8) \quad x - 5 < x + 1 $ | $(b_8) \quad x \leq -7 \text{ ou } x \geq 3$ |
| $(a_9) \quad x^2 - 2 \leq 1$ | $(b_9) \quad \frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$ |
| $(a_{10}) \quad x < x^2 - 12 < 4x$ | $(b_{10}) \quad -1 \leq x \leq 0$ |

Exercício 11. Dizer se cada uma das afirmações a seguir é V ou F. Justifique sua resposta.

(a) $x < 5$ implica $|x| < 5$.

(b) $|x - 5| < 2$ implica $3 < x < 7$.

(c) $|1 + 3x| \leq 1$ implica $x \geq -\frac{2}{3}$.

(d) Não há nenhum número real x para o qual $|x - 1| = |x - 2|$.

(e) Para cada $x > 0$, existe um $y > 0$ tal que $|2x + y| = 5$.

Exercício 12. Demonstre que se b é um número positivo e $a < b$, então

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$$

Exercício 13. Prove que

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

Exercício 14. Demonstre que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

6 Números Complexos

Exercício 1. Escreva cada uma das expressões abaixo na forma $a+bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$:

- | | | |
|----------------------------------|-------------------------|--|
| (a) $(4+2i) + (3+8i)$ | (b) $(5+3i) - (2+9i)$ | (c) $(6+2i) - (9-7i)$ |
| (d) $(2+3i)(4+5i)$ | (e) $(5+6i)(2-7i)$ | (f) $(4-3i)(-2+3i)$ |
| (g) $(3+4i)^2$ | (h) $(5-2i)^2$ | (i) $(4+\sqrt{3}i)^2$ |
| (j) $(\sqrt{5}-\sqrt{7}i)^2$ | (k) $(2+3i)^3$ | (l) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ |
| (m) i^{8001} | (n) i^{1003} | (o) $\overline{8+3i}$ |
| (p) $\overline{-7-\frac{2}{3}i}$ | (q) $\frac{1+2i}{3+4i}$ | (r) $\frac{5+6i}{2+3i}$ |
| (s) $\frac{4+3i}{5-2i}$ | (t) $\frac{3-4i}{6-5i}$ | |

Exercício 2. Determine dois números complexos que satisfaçam a equação $z^2 + 4z + 6 = 0$.

Exercício 3. Determine um número complexo cujo quadrado seja igual a $5 + 12i$.

Exercício 4. Determine um número complexo cujo quadrado seja igual a $21 - 20i$.

Exercício 5. Determine dois números complexos cuja soma seja igual a 7 e cujo produto seja igual a 13.

Exercício 6. Determine dois números complexos cuja soma seja igual a S e o produto seja igual a P .

Exercício 7. Calcule $(\sqrt{3} + i)^6$.

Exercício 8. Calcule o módulo dos seguintes números complexos:

- (a) $(1+i)^3$ (b) $\frac{1+i}{2-2i}$ (c) $(1+i)(2+2i)(4+4i)$ (d) $(1-i)^4$

Exercício 9. Mostre que se $a + bi \neq 0$, então

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Exercício 10. Explique por que não existe um número real b tal que $|5 + bi| = 3$.

Exercício 11. Demonstre que se $z \in \mathbb{C}$, então sua parte real e sua parte imaginária estão no intervalo $[-|z|, |z|]$.

7 Representação Decimal

Exercício 1. Determine as geratrizes das dízimas periódicas:

- (a) $0,14141414\dots$ (b) $0,345454545\dots$ (c) $1,711111111\dots$

Exercício 2. Diga se as afirmações são V ou F:

- (a) Se um número real a tem expansão decimal infinita, então ele é irracional;
- (b) Todo número racional tem expansão decimal finita;
- (c) Se a expansão decimal de a é infinita e não periódica, então a é irracional;
- (d) π tem expansão decimal infinita e periódica;
- (e) $\sqrt{2}$ tem expansão decimal que se estende indefinidamente sem se repetir num padrão.

Funções

1 Propriedades básicas

Exercício 1. Suponha que $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$. Calcule:

- (a) $f(0)$ (b) $f(1)$ (c) $f(-1)$ (d) $f(-2)$ (e) $f(2a)$
 (f) $f(b/3)$ (g) $f(2a+1)$ (h) $f(2x^2+3)$ (i) $f(a/b-1)$

Exercício 2. Suponha que $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$. Simplifique as seguintes expressões:

- (a) $\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ (b) $\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$ (c) $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Exercício 3. Encontre o domínio da função:

- (a) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$ (b) $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ (c) $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

Exercício 4. Se $f(x) = x^3$, calcule o quociente $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ e simplifique sua resposta

Exercício 5. Explique por que não existe uma função cujo domínio seja $\{-1, 0, 3\}$ e cuja imagem seja $\{3, 4, 7, 9\}$.

Exercício 6. Se $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e $g(x) = 2x - 3$, encontre cada uma das seguintes funções:

- (a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $g \circ g \circ g$

Exercício 7. Para cada par de funções f e g abaixo, expresse $f \circ g$ e $g \circ f$ da forma mais simplificada que puder:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f(x) = x^2 + 1, & g(x) = \frac{1}{x} \\ \text{(c)} \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1}, & g(x) = x^2 + 2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} \quad f(x) = (x+1)^2, & g(x) = \frac{3}{x} \\ \text{(d)} \quad f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}, & g(x) = \frac{x+3}{x+4} \end{array}$$

Exercício 8. Expresse a função na forma $f \circ g$, identificando as funções f e g :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad F(x) = (2x + x^2)^4 & \text{(b)} \quad F(x) = \cos^2 x & \text{(c)} \quad G(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \\ \text{(d)} \quad G(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}} & \text{(e)} \quad u(t) = \sec(t^2) \tan(t^2) & \text{(f)} \quad u(t) = \frac{\tan t}{1 + \tan t} \end{array}$$

Exercício 9. Expresse a função na forma $f \circ g \circ h$, identificando as funções f, g e h :

$$\text{(a)} \quad R(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1} \quad \text{(b)} \quad S(x) = \sqrt[8]{2 + |x|} \quad \text{(c)} \quad T(x) = \sin^2(\cos t)$$

Exercício 10. Suponha que $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Mostre que $f \circ g = g \circ f$ se, e somente se, $d(a-1) = b(c-1)$.

Exercício 11. O que é uma função injetora?

Exercício 12. Determine se as seguintes funções são injetoras:

$$\text{(a)} \quad f(x) = 2x - 3 \quad \text{(b)} \quad f(x) = x^4 - 16 \quad \text{(c)} \quad f(x) = 1 - \sin x \quad \text{(d)} \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Exercício 13. Encontre a função inversa das seguintes funções:

$$\text{(a)} \quad f(x) = x^3 + 2 \quad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{4}{5x-3} \quad \text{(c)} \quad f(x) = \frac{2x}{x+3} \quad \text{(d)} \quad f(x) = x^2 + 8$$

Exercício 14. Indique os intervalos onde as funções abaixo são positivas:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad f(x) = 2x - 1 & \text{(b)} \quad f(x) = 1 - 3x & \text{(c)} \quad f(x) = -x^2 + 5x - 6 \\ \text{(d)} \quad f(x) = x^2 + 2x + 2 & \text{(e)} \quad f(x) = |x| - 2 & \text{(f)} \quad f(x) = 2x - |x| \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{(g)} \quad f(x) = -x^2 - 3 & \text{(h)} \quad f(x) = \frac{x-1}{2} - \frac{5-3x}{4} - 1 & \text{(i)} \quad (3x+1)(2x+1) \\
 \text{(j)} \quad \frac{3x+4}{1-x} & \text{(k)} \quad (5x+4)^4(7x-2)^3 & \text{(l)} \quad \frac{1-2x}{(5-x)(3-x)} \\
 \text{(m)} \quad (1-4x^2)(2x^2+3x) & \text{(n)} \quad (2x^2-7x+6)(2x^2-7x+5) & \text{(o)} \quad 2x^3-6x^2+x-3
 \end{array}$$

Exercício 15. Determine a imagem das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad y = x^2 - 3x & \text{(b)} \quad y = -x^2 + 4 & \text{(c)} \quad y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \\
 \text{(d)} \quad y = -2x + \sqrt{7} & \text{(e)} \quad y = \sqrt[3]{7}x + 2 & \text{(f)} \quad y = -4x^2 + 8x + 12
 \end{array}$$

Exercício 16. Resolva as seguintes equações e inequações modulares, determinando seu conjunto solução:

$$\text{(a)} \quad |x+1| - |x| = 2x+1 \quad \text{(b)} \quad \frac{|x|}{x} = \frac{|x-1|}{x-1} \quad \text{(c)} \quad |3x-2| < 4 \quad \text{(d)} \quad 1 < |x-1| \leq 3$$

Exercício 17. Um balão esférico com raio de r centímetros tem o volume $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encontre uma função que represente a quantidade de ar necessária para inflar o balão de um raio de r centímetros até um raio de $r+1$ centímetros.

Exercício 18. Um retângulo tem um perímetro de 20 m. Expresse a área do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

Exercício 19. Uma janela normanda tem o formato de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo. Se o perímetro da janela for de 10 m, expresse a área A da janela como uma função de sua largura x .

2 Gráficos de Funções e Simetria

Exercício 1. Um avião decola de um aeroporto e aterrissa uma hora depois em outro aeroporto, a 400 km. Se t representa o tempo em minutos desde a partida do avião, seja $x(t)$ a distância horizontal percorrida e $y(t)$ a altura do avião.

- (a) Esboce um possível gráfico de $x(t)$.
- (b) Esboce um possível gráfico de $y(t)$.
- (c) Esboce um possível gráfico da velocidade no solo.
- (d) Esboce um possível gráfico da velocidade vertical.

Exercício 2. Como os gráficos das funções são obtidos a partir do gráfico de f ?

- (a) $y = -f(x)$
- (b) $y = 2f(x) - 1$
- (c) $y = f(x - 3) + 2$

Exercício 3. Esboce à mão, no mesmo sistema de coordenadas, os gráficos das seguintes funções:

- (a) $f(x) = x$
- (b) $g(x) = x^2$
- (c) $h(x) = x^3$
- (d) $j(x) = x^4$

Exercício 4. Sem usar calculadora, faça um esboço grosseiro do gráfico:

- (a) $y = -\sqrt{2}$
- (b) $x = 1$
- (c) $y = 3x + 2$
- (d) $y = -x - 1$
- (e) $y = -3x$
- (f) $y = \frac{x}{2}$
- (g) $y = 2x + 1$
- (h) $y = -2x + 1$
- (i) $y = x^3$
- (j) $y = (x + 1)^3$
- (k) $y = (x - 2)^3 + 3$
- (l) $y = 4 - x^2$
- (m) $y = \sqrt{x}$
- (n) $y = 2\sqrt{x}$
- (o) $y = -2^x$
- (p) $y = 1 + x^{-1}$

Exercício 5. Calcule $f(-2)$ e $f(1)$ e esboce o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Exercício 6. Calcule $f(-3)$, $f(0)$ e $f(2)$ e esboce o gráfico de

$$(a) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{se } x < 2 \\ 2x - 5 & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \quad (d) f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Exercício 7. Esboce o gráfico de:

$$(a) f(x) = x + |x| \quad (b) g(t) = |1 - 3t| \quad (c) h(t) = |t| + |t + 1| \quad (d) f(x) = ||x| - 1|$$

Exercício 8. Determine se a função é par, ímpar ou nenhum dos dois:

$$\begin{array}{lll} (a) f(x) = x^5 + x & (b) g(x) = 1 - x^4 & (c) h(x) = 2x - x^2 \\ (d) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} & (e) f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1} & (f) f(x) = x|x| \\ (g) f(x) = 1 + 3x^2 - x^4 & (h) f(x) = \frac{x}{x + 1} & \end{array}$$

Exercício 9*. Se f e g são pares, $f + g$ é par? Se f e g são ímpares, $f + g$ é ímpar? O que se pode dizer se f for par e g for ímpar?

Exercício 10. Se f e g são pares, fg é par? Se f e g são ímpares, fg é ímpar? O que se pode dizer se f for par e g for ímpar?

Exercício 11. Mostre que $f(x) = mx + b$ é ímpar se, e somente se, $b = 0$, e é par se, e somente se, $m = 0$.

Exercício 12. Mostre que $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função par se, e somente se, $b = 0$.

3 Potências

Exercício 1. Escreva 9^{3000} como potência de 3.

Exercício 2. Escreva 5^{4000} como potência de 25.

Exercício 3. Escreva $2^{100} \cdot 4^{200} \cdot 8^{300}$ como potência de 2.

Exercício 4. Simplifique as expressões:

$$\begin{array}{lllll} \text{(a)} \frac{4^{-3}}{2^{-8}} & \text{(b)} \frac{1}{\sqrt[3]{4}} & \text{(c)} 8^{4/3} & \text{(d)} x(3x^2)^3 & \text{(e)} b^8(2b)^4 \\ \text{(f)} \frac{(6y^3)^4}{2y^5} & \text{(g)} \frac{x^{2n} \cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}} & \text{(h)} \frac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}} & \text{(i)} \left(\frac{(x^2y^{-5})^{-4}}{(x^5y^{-2})^{-3}} \right)^2 & \text{(j)} y^4(y^2(y^5)^2)^{3/5} \end{array}$$

Exercício 5. Determine os números reais x que satisfazem a cada uma das equações:

$$\text{(a)} x - 5\sqrt{x} + 6 = 0 \quad \text{(b)} x^{2/3} + 3x^{1/3} = 10 \quad \text{(c)} x - \sqrt{x} = 6 \quad \text{(d)} x^4 - 3x^2 = 10$$

Exercício 6. Calcule (sem usar calculadora):

$$\begin{array}{lllll} \text{(a)} 25^{3/2} & \text{(b)} 32^{3/5} & \text{(c)} 32^{-4/5} & \text{(d)} (-8)^{7/3} & \text{(e)} 8^{5/3} \\ \text{(f)} 81^{3/4} & \text{(g)} 8^{-5/3} & \text{(h)} (-27)^{4/3} & \text{(i)} \sqrt{2}^3 \sqrt{8}^3 & \text{(j)} 3^{3/2} 12^{3/2} \end{array}$$

Exercício 7. Encontre uma fórmula para a inversa das seguintes funções:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} f(x) = x^9 & \text{(b)} f(x) = x^{12} & \text{(c)} f(x) = x^{1/7} & \text{(d)} f(x) = x^{-2/5} \\ \text{(e)} f(x) = \frac{x^4}{81} & \text{(f)} f(x) = 32x^5 & \text{(g)} f(x) = 6 + x^3 & \text{(h)} f(x) = 4x^{3/7} - 1 \\ \text{(i)} f(x) = 7 + 8x^{5/9} & & & \end{array}$$

Exercício 8. Demonstre que:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} & \text{(b)} \quad \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \text{(c)} \quad \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2 & \text{(d)} \quad (23 - 8\sqrt{7})^{1/2} = 4 - \sqrt{7} \end{array}$$

Exercício 9. Demonstre que se $x, y > 0$, com $x \neq y$, então

$$\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Exercício 10. Explique por que a equação $\sqrt{x^2} = x$ não é válida para todo $x \in \mathbb{R}$ e deve ser substituída pela equação $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exercício 11.* Explique por que

$$\sqrt{x} < \sqrt[3]{x} \text{ se } 0 < x < 1$$

e

$$\sqrt{x} > \sqrt[3]{x} \text{ se } x > 1.$$

Esboce os gráficos das funções $\sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x}$ no mesmo par de eixos coordenados no intervalo $[0, 4]$.

4 Polinômios

Exercício 1. Escreva na forma de somatório o polinômio

$$p(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots + 2^n x^n$$

Exercício 2. Mostre que os polinômios $f(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ e $g(x) = x^4 + 1$ são iguais.

Exercício 3. Dividindo o polinômio $p(x)$ por $x^2 - 3x + 5$, obtemos o quociente $x^2 + 1$ e resto $3x - 5$. Determine $p(x)$.

Exercício 4. Divida $f(x)$ por $g(x)$ e verifique sua resposta, multiplicando quociente pelo divisor e somando ao resto:

- (a) $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x - 3$ e $g(x) = x^3 - 2x + 1$
- (b) $f(x) = x^4 - 2x + 13$ e $g(x) = x^2 + x + 1$
- (c) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e $g(x) = 2x^2 + 3$
- (d) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2$ e $g(x) = x^2 + 2$

Exercício 5. Dados $p(x) = 2x^3 + ax + 3b$ e $q(x) = x^2 - 3x + 9$, determine a e b de modo que a divisão de $p(x)$ por $q(x)$ seja exata.

Exercício 6. Fatore cada expressão:

- (a) $4x^2 - 25$
- (b) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
- (c) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$
- (d) $2x^2 + 5x - 12$
- (e) $x^4 + 27x$
- (f) $x^3y - 4xy$
- (g) $x^8 - y^8$
- (h) $x^{16} - y^8$
- (i) $x^6 - 8x^3 + 15$
- (j) $x^6 - 3x^3 - 10$
- (k) $x^4 - 2x^2 - 15$
- (l) $x^4 + 5x^2 - 14$

Exercício 7. Reescreva, completando o quadrado:

(a) $x^2 + x + 1$ (b) $2x^2 - 12x + 11$ (c) $x^2 + 7x + 12$ (d) $-3x^2 + 5x - 1$

Exercício 8. Determine todas as escolhas de b, c e d tais que 1 e 4 sejam os únicos zeros do polinômio $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.

Exercício 9. Determine o vértice do gráfico das seguintes funções:

(a) $7x^2 - 12$ (b) $(x - 2)^2 - 3$ (c) $-2x^2 + 5x - 2$ (d) $x^2 - 6x + 2$

Exercício 10. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = -2x^2 + 4x - 1$ (b) $y = (x - 2)^3 + 2$ (c) $y = x^2 - 3x + 2$ (d) $y = \sqrt{x + 2} - 1$

Exercício 11. Para cada uma das funções abaixo, definidas em $[1, \infty)$, determine sua imagem, uma fórmula para sua inversa, bem como domínio e imagem da inversa:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ (b) $g(x) = x^2 + 4x + 7$

Exercício 12. Encontre todas as soluções reais das equações:

(a) $x + 5 = 14 - \frac{x}{2}$ (b) $x^2 - x - 12 = 0$ (c) $2x(4 - x)^{-1/2} - 3\sqrt{4 - x} = 0$

(d) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (e) $\frac{2x}{x+1} = \frac{2x-1}{x}$ (f) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

(g) $3|x - 4| = 10$

Exercício 13.* Mostre que não existem dois números reais cuja soma é 7 e cujo produto é 13.

Exercício 14*: Sem usar calculadora nem efetuar nenhum cálculo, explique por que $p(x) = x^2 + 87559743x - 787727821$ não possui raízes inteiras.

(Sugestão: compare a paridade de $t \in \mathbb{Z}$ com a paridade de $p(t)$)

Exercício 15. Suponha que $b, c \in \mathbb{R}$ sejam tais que $f(x) = x^2 + bx + c$ não tenha raízes reais. Mostre que $g(x) = x^2 + bx - c$ possui duas raízes reais distintas.

Exercício 16. Explique por que o polinômio $p(x) = x^6 + 100x^2 + 5$ não tem zeros reais.

Exercício 17. Dê um exemplo de um polinômio de grau 5 que tem exatamente dois zeros.

Exercício 18. Suponha que a, b e c sejam inteiros e que $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 9$. Explique por que toda raiz de p que for inteira está no conjunto $\{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$.

Exercício 19. Prove que se $z \in \mathbb{C}$ é raiz do polinômio de coeficientes reais $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, então $\bar{z}$ também é raiz de p .

Exercício 20*. Descubra todas as raízes reais dos seguintes polinômios e os escreva como produto de fatores lineares com fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$:

(a) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

(b) $x^6 + 2x^4 - 16x^2 - 32$

Exercício 21. Existe um número real que é exatamente uma unidade a mais do que seu cubo? Justifique.

Exercício 22*. Mostre que se n for um natural par então o polnômio

$$p(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$$

não possui raiz real.

5 Funções Racionais

Exercício 1. Escreva sob a forma de união de intervalos os domínios das seguintes funções:

$$(a) \ y = \frac{5x^3 - 12x^2 + 13}{x^2 - 7}$$

$$(b) \ y = \frac{x^5 + 3x^4 - 6}{2x^2 - 5}$$

$$(c) \ y = \frac{4x^7 + 8x^2 - 1}{x^2 - 2x - 6}$$

$$(d) \ y = \frac{6x^9 + x^5 + 8}{x^2 + 4x + 1}$$

Exercício 2. Escreva

$$\frac{x^5 + 6x^3 + 11x + 7}{x^2 + 4}$$

na forma $f(x) + \frac{ax+b}{x^2+4}$, onde $f(x)$ é um polinômio.

Exercício 3. Escreva cada expressão como a soma de um polinômio e de uma função racional cujo numerador tem grau menor que seu denominador:

$$(a) \ \frac{2x+1}{x-3} \quad (b) \ \frac{4x-5}{x+7} \quad (c) \ \frac{x^2}{3x-1}$$

$$(d) \ \frac{x^2}{4x+3} \quad (e) \ \frac{x^6+3x^3+1}{x^2+2x+5} \quad (f) \ \frac{x^6-4x^2+5}{x^2-3x+1}$$

Exercício 4. Esboce o gráfico das seguintes funções:

$$(a) \ y = 2 + \frac{1}{x-1} \quad (b) \ y = \frac{-3}{x} \quad (c) \ y = \frac{1}{(x+1)^2} \quad (d) \ y = \frac{x+1}{x-3} \quad (e) \ y = \frac{1}{x^2-2x+1}$$

Exercício 5. Suponha que p seja um polinômio e t seja um número real. Explique por que existe um polinômio $g(x)$ tal que

$$\frac{p(x) - p(t)}{x - t} = g(x) \quad \text{para todo } x \neq t.$$

Exercício 6.* Prove que $\sqrt{x}$ não é uma função racional. (*Sugestão: inspire-se na prova de que $\sqrt{2}$ não é um número racional*)

6 Exponencial

Nas aulas sobre limites, veremos que o número de Euler e é definido como

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \approx 2,71828$$

Ele é a base do logaritmo natural, que denotamos por $\log$. Ou seja,

$$\log x = \log_e x \text{ para todo } x > 0.$$

OBS: Portanto, o logaritmo na base 10 (que praticamente não utilizaremos nesse curso) será denotado como $\log_{10} x$.

Exercício 1. Uma cultura de bactérias começa com 500 indivíduos e dobra de tamanho a cada meia hora.

- (a) Quantas bactérias existem após 3 horas?
- (b) Quantas bactérias existem após t horas?
- (c) Quantas bactérias existem após 40 minutos?
- (d) Estime o tempo para a população atingir 100.000 bactérias.

Exercício 2. Um isótopo de sódio, ^{24}Na , tem meia-vida de 15 horas. Uma amostra desse isótopo tem massa de 2 g.

- (a) Encontre a quantidade remanescente após 60 horas.
- (b) Encontre a quantidade remanescente após t horas.
- (c) Faça uma estimativa da quantidade remanescente após 4 dias.

Exercício 3. Determine o menor valor da expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-x^2}$.

Exercício 4. Esboce o gráfico das seguintes funções:

$$(a) \ y = 4^x + 1 \quad (b) \ (0, 5)^{x-1} \quad (c) \ y = 10^{x+2} \quad (d) \ y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \quad (e) \ y = 2(1 - e^x)$$

Exercício 5. Começando com o gráfico de $y = e^x$, encontre as equações dos gráficos que resultam ao

(a) refletir em torno da reta $y = 4$

(b) refletir em torno da reta $x = 2$

Exercício 6. Resolva as seguintes equações:

$$(a) \ 2^x = 64\sqrt{2}$$

$$(b) \ 8^x = \frac{1}{32}$$

$$(c) \ (\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$$

$$(d) \ \left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$$

$$(e) \ (\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9} \quad (f) \ (\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x-1}$$

$$(g) \ 2^{3x-1} = 32$$

$$(h) \ 5^{2x^2+3x-2} = 1 \quad (i) \ 3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$$

$$(j) \ (2^x)^{x-1} = 4$$

$$(k) \ 4^{x^2+4x} = 4^{12}$$

$$(l) \ \sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = 0$$

$$(m) \ \frac{3^{x+2} \cdot 9^x}{243^{5x+1}} = \frac{81^{2x}}{27^{3-4x}}$$

$$(n) \ 4^x - 2^x = 56$$

$$(o) \ \sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[3]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$$

Exercício 7. Se $f(x) = 5^x$, mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x \left(\frac{5^h - 1}{h} \right)$$

Exercício 8. Prove que

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

é uma função ímpar.

7 Logaritmo

Nas aulas sobre limites, veremos que o número de Euler e é definido como

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \approx 2,71828$$

Ele é a base do logaritmo natural, que denotamos por $\log$. Ou seja,

$$\log x = \log_e x \text{ para todo } x > 0.$$

OBS: Portanto, o logaritmo na base 10 (que praticamente não utilizaremos nesse curso) será denotado como $\log_{10} x$.

Exercício 1. Calcule (sem usar calculadora):

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \log_2 64 & \text{(b)} \log_2 \frac{1}{128} & \text{(c)} \log_4 2 & \text{(d)} \log_8 128 \\ \text{(e)} \log_{10} 10000 & \text{(f)} \log_{10} \frac{1}{1000} & \text{(g)} \log_2 8^{3,1} & \text{(h)} \log_{27} 81 \end{array}$$

Exercício 2. Determine $a > 0$ tal que:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \log_2 a = 7 & \text{(b)} \log_2 a = 8 & \text{(c)} \log_2 a = -5 & \text{(d)} \log_2 a = -9 \\ \text{(e)} \log_a 64 = 1 & \text{(f)} \log_a 64 = 6 & \text{(g)} \log_a 64 = \frac{3}{2} & \text{(h)} \log_a 64 = \frac{6}{5} \end{array}$$

Exercício 3. Resolva as seguintes equações:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \log |x| = 2 & \text{(b)} |\log x| = 2 & \text{(c)} \log_3(5x + 1) = 2 \end{array}$$

Exercício 4. Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$.

Exercício 5. Expresse $\log a + \frac{1}{2} \log b$ como um único logaritmo.

Exercício 6. Sabendo que $\log_3 x = 5,3$ e $\log_3 y = 2,1$, calcule:

(a) $\log_3(9xy)$ (b) $\log_3(x^2y^3)$ (c) $\log_3 \frac{x}{3y}$ (d) $\log_3 \frac{x^3}{y^2}$ (e) $\log_9 x^{10}$

Exercício 7. Se $f(x) = 2x + \log x$, encontre $f^{-1}(2)$.

Exercício 8. Encontre a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3^x$ (b) $f(x) = 2^{x-5}$ (c) $f(x) = 4 \cdot 5^x$
 (d) $f(x) = \log_8 x$ (e) $f(x) = \log_4(3x + 1)$ (f) $f(x) = 8 + 9 \log_2(4x - 7)$
 (g) $f(x) = \log_x 13$ (h) $f(x) = \log_{5x} 6$

Exercício 9. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = \log |x|$ (b) $f(x) = \log x + 2$ (c) $g(x) = \log(x - 1) - 1$

Exercício 10. Resolva cada equação ou inequação em x :

(a) $e^{7-4x} = 6$ (b) $\log(x^2 - 1) = 3$ (c) $2^{x-5} = 3$
 (d) $\log(\log x) = 1$ (e) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ (f) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde $a \neq b$
 (g) $\log x + \log(x - 1) = 1$ (h) $1 < e^{3x-1} < 2$ (i) $1 - 2 \log x < 3$

Exercício 11. Calcule $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5) \dots (\log_{31} 32)$

Exercício 12*. Mostre que $\log_{10} 2$ é irracional.

Exercício 13. Determine $x > 0$ tal que

$$\frac{\log_b x}{4} = \log_b \frac{x}{4}$$

para todo $b > 0$, $b \neq 1$.

Exercício 14. Sejam $b, y > 0$, com $b \notin \{1/2, 1\}$. Demonstre que

$$\log_{2b} y = \frac{\log_b y}{1 + \log_b 2}$$

Exercício 15. Resolva a inequação $\log(x^2 - 2x - 2) \geq 0$

Exercício 16. Suponha que $a, b > 0$, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Mostre que

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Exercício 17* Mostre que a função

$$f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

é ímpar e calcule a sua inversa.

Trigonometria

1 Ângulos, Geometria Básica e o Círculo Unitário

Exercício 1. Converta de graus para radianos:

- (a) 300° (b) -18° (c) 36° (d) 9°

Exercício 2. Converta de radiano para graus:

- (a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) 2 (c) $-\frac{3\pi}{8}$ (d) 4π

Exercício 3. Encontre o comprimento de um arco de um círculo de raio 12 cm, cujo ângulo central é 30° .

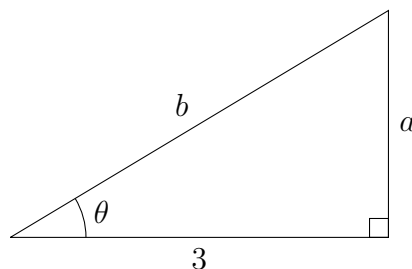
Exercício 4. Um círculo tem raio de 1,5 m. Qual o ângulo subentendido no centro do círculo por um arco de 1 m de comprimento?

Exercício 5. Determine o raio de um setor circular com ângulo $3\pi/4$ e comprimento de arco 6 cm.

Exercício 6. Encontre os valores exatos:

- (a) $\tan \pi/3$ (b) $\sin(7\pi/6)$ (c) $\sec(5\pi/3)$

Exercício 7. Expresse os comprimentos a e b na figura abaixo em termos de θ .



Exercício 8. Determine todos os números t tais que $(1/3, t)$ seja um ponto sobre o círculo unitário.

Exercício 9. Qual o ângulo entre o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos em um relógio marcando 4 horas e 30 minutos?

Exercício 10.* Mostre que a soma das medidas dos ângulos (em radianos) de um polígono convexo de n lados é $S_n = (n - 2)\pi$.

2 Funções Trigonométricas

Exercício 1. Encontre o domínio da função:

$$(a) f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$(b) g(x) = \frac{1}{1 - \tan x}$$

Exercício 2. Se $\sin x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde $x, y \in [0, \pi/2]$, avalie $\sin(x + y)$.

Exercício 3. Demonstre as identidades:

$$(a) \tan \theta \sin \theta + \cos \theta = \sec \theta$$

$$(b) \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \sin 2\theta$$

Exercício 4. Encontre todos os valores de x tais que $\sin 2x = \sin x$ e $x \in [0, 2\pi]$.

Exercício 5. Determine o menor número $\theta > 4\pi$ tal que $\cos \theta = 0$

Exercício 6. Determine o menor número $\theta > 6\pi$ tal que $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercício 7. Encontre o menor número $x > 0$ tal que $\sin(e^x) = 0$

Exercício 8. Explique por que $\pi^{\cos x} > \frac{1}{4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 9. Esboce o gráfico da função $y = 1 + \sin 2x$ sem usar recursos computacionais.

Exercício 10. Demonstre as identidades:

$$(a) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$(b) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$(c) \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$(d) \sin \theta \cot \theta = \cos \theta$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(e)} \quad (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x & \text{(f)} \quad \cot^2 x + \sec^2 x = \tan^2 x + \operatorname{cosec}^2 x \\
 \text{(g)} \quad \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} & \text{(h)} \quad \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} = 2 \sec^2 \theta \\
 \text{(i)} \quad \tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} & \text{(j)} \quad \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta
 \end{array}$$

Exercício 11. Se $\sin x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde $x, y \in [0, \pi/2]$, calcule:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \sin(x+y) & \text{(b)} \quad \cos(x-y) & \text{(c)} \quad \sin 2y \\
 \text{(d)} \quad \cos(x+y) & \text{(e)} \quad \sin(x-y) & \text{(f)} \quad \cos 2y
 \end{array}$$

Exercício 12. Esboce o gráfico das seguintes funções:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) & \text{(b)} \quad y = \frac{1}{3} \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
 \text{(c)} \quad y = |\sin x| & \text{(d)} \quad y = 2 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)
 \end{array}$$

Exercício 13. A função arco cosseno é par, ímpar ou nenhuma das duas opções?
E quanto a arco seno?

Exercício 14*. Mostre que, para todo $t \in (-1, 1)$,

$$\arcsen t = \arctan \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exercício 15. Mostre que

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

Exercício 16. Mostre que

$$\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Exercício 17* Demonstre que $\cos 20^\circ$ é um zero do polinômio $8x^3 - 6x - 1$.

Exercício 18. Mostre que

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

Exercício 19. Prove uma identidade análoga à do exemplo anterior para $\sin x + \sin y$.

Exercício 20. Mostre que

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$$

Exercício 21. Prove que

$$\tan \frac{x+y}{2} = \frac{\cos x - \cos y}{\sin y - \sin x}$$

Exercício 22* Mostre que

$$\cos \frac{\pi}{32} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}{2}$$

Exercício 23* Mostre a identidade

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$$

(Sugestão: calcule $\tan(\arctan 2 + \arctan 3)$)

3 Números Complexos na Forma Polar

Exercício 1. Escreva na forma polar:

(a) $2 - 2i$ (b) $-3 + 3\sqrt{3}i$ (c) 4 (d) $1 + \sqrt{3}i$ (e) $-3i$ (f) $\frac{1+i}{i}$ (g) $\frac{1}{1-i} - \frac{1}{i}$

Exercício 2. Demonstre que

$$\frac{1}{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta$$

Exercício 3. Escreva na forma polar:

(a) $\left(\cos \frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}\right) \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{9}\right)$ (b) $\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}\right) \left(\cos \frac{\pi}{11} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{11}\right)$

Exercício 4. Calcule:

(a) $(2 - 2i)^{333}$ (b) $(-3 + 3\sqrt{3}i)^{555}$ (c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{100}$

(d) $\frac{i}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6}$ (e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^7 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$

Exercício 5*. Calcule todas as raízes n -ésimas abaixo:

(a) $\sqrt{-7 + 24i}$ (b) $\sqrt{5 + 12i}$ (c) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$ (d) $\sqrt[3]{-8i}$ (e) $\sqrt[3]{-1}$

Exercício 6*. Determine três números complexos distintos tais que $z^3 = 4i$.

Exercício 7*. Determine quatro números complexos distintos tais que $z^4 = -2$.

Geometria Analítica

1 Plano Cartesiano e Retas

Exercício 1. Determine a distância entre os dois pontos:

- (a) $(1, 1)$ e $(4, 5)$ (b) $(1, -6)$ e $(-1, -3)$ (c) (a, b) e (b, a)

Exercício 2. Determine a inclinação da reta que passa por P e Q :

- (a) $P(1, 5)$ e $Q(4, 11)$ (b) $P(-1, -4)$ e $Q(6, 0)$ (c) $P(-3, 3)$ e $Q(-1, -6)$

Exercício 3. Mostre que o triângulo com vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C(-4, 3)$ é isósceles.

Exercício 4. Ache uma equação da reta que satisfaça às condições dadas:

- (a) Passa pelo ponto $(2, -3)$ e tem inclinação 6.
(b) Passa pelo ponto $(1, 7)$ e tem inclinação -3 .
(c) Inclinação 3 e cruza o eixo y em -2 .
(d) Interseção com o eixo x em 1, e com o eixo y em -3 .
(e) Passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo x .
(f) Passa pelo ponto $(1, -6)$, paralela à reta $x + 2y = 6$.
(g) Passa pelo ponto $(-1, -2)$, perpendicular à reta $2x + 5y + 8 = 0$.
(h) Passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$, perpendicular à reta $4x - 8y = 1$.

Exercício 5. Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(2, -5)$ e:

- (a) tem inclinação -3

- (b) é paralela ao eixo x
- (c) é paralela ao eixo y
- (d) é paralela à reta $2x - 4y = 3$

Exercício 6. Sejam $A(-7, 4)$ e $B(5, -12)$ pontos no plano:

- (a) Encontre a inclinação da reta que contém A e B .
- (b) Encontre uma equação da reta que passa por A e B . Quais são as interseções com os eixos?
- (c) Encontre o ponto médio do segmento AB .
- (d) Encontre o comprimento do segmento AB .
- (e) Encontre uma equação para a mediatriz de AB , ou seja, a reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo seu ponto médio.
- (f) Encontre uma equação para o círculo para o qual AB é um diâmetro.

Exercício 7. Esboce as regiões do plano xy definidas pelas equações ou inequações:

- (a) $-1 \leq y \leq 3$
- (b) $|x| < 4$ e $|y| < 2$
- (c) $y < 1 - \frac{x}{2}$
- (d) $y \geq x^2 - 1$
- (e) $x^2 + y^2 < 4$
- (f) $9x^2 + 16y^2 = 144$

Exercício 8. Determine w tal que a reta que passa pelos pontos $(1, w)$ e $(3, 7)$ tenha inclinação 5.

Exercício 9. Mostre que se as interseções com os eixos x e y de uma reta são os números a e b , diferentes de zero, então a equação da reta pode ser colocada na forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Exercício 10. Determine um número m tal que as três retas $y = mx + 3$, $y = 4x + 1$ e $y = 5x + 7$ possuam o mesmo ponto de interseção.

Exercício 11. Determine t tal que a reta que contém os pontos $(4, t)$ e $(1, 6)$ seja perpendicular à reta que contém os pontos $(4, 7)$ e $(1, 11)$.

Exercício 12* Calcule a distância do ponto P à reta r nos seguintes casos:

(a) $P(2, 0)$ e $r : 2x + 3y - 5 = 0$

(b) $P(1, -1)$ e $r : x + 3y - 5 = 0$

(c) $P(0, 0)$ e $r : ax + by + c = 0$

2 Cônicas

Exercício 1. Encontre uma equação para o círculo que tem centro $(-1, 4)$ e passa pelo ponto $(3, -2)$.

Exercício 2. Encontre o centro e o raio do círculo com equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$

Exercício 3. Determine uma equação de uma circunferência que satisfaça:

- (a) Centro $(3, -1)$, raio 5.
- (b) Centro na origem, passa por $(4, 7)$.
- (c) Centro $(-1, 5)$, passa por $(-4, -6)$.

Exercício 4. Mostre que a equação representa uma circunferência e determine seu centro e raio:

- (a) $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$
- (b) $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$
- (c) $x^2 + y^2 + x = 0$
- (d) $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y + 1 = 0$
- (e) $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

Exercício 5. Que condições nos coeficientes a, b e c fazem com que a equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ represente um círculo? Quando a condição for satisfeita, determine o centro e o raio do círculo.

Exercício 6. Esboce o gráfico das seguintes funções (não é necessário marcar pontos; apenas desloque os gráficos padrões das cônicas envolvidas):

- (a) $y = x^2$
- (b) $x^2 + 4y^2 = 16$
- (c) $y^2 - x^2 = 1$
- (d) $x = -2y^2$
- (e) $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$
- (f) $9y^2 - x^2 = 9$
- (g) $xy = 4$
- (h) $9(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$
- (i) $x = y^2 - 1$
- (j) $16x^2 - 25y^2 = 400$
- (k) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

Exercício 7. Determine uma equação da parábola com vértice $(1, -1)$ que passa pelos pontos $(-1, 3)$ e $(3, 3)$.

Exercício 8.* Mostre que os focos da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

são os pontos $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ e $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, onde $a > b > 0$.

Exercício 9. Encontre uma equação da elipse com centro na origem que passe pelos pontos $(1, -10\sqrt{2}/3)$ e $(-2, 5\sqrt{5}/3)$.

Exercício 10. Suponha que a órbita de um planeta em torno de uma estrela seja a elipse $3x^2 + 7y^2 = 1$. Qual é a localização da estrela? (Suponha que a primeira coordenada da estrela seja positiva.)

Exercício 11.* Mostre que os focos da hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

são os pontos $(0, -\sqrt{a^2 + b^2})$ e $(0, \sqrt{a^2 + b^2})$

Exercício 12. Suponha que a órbita de um cometa em torno de uma estrela seja o ramo superior da hipérbole $3y^2 - 2x^2 = 5$. Qual é a localização da estrela?

Exercício 13. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam do eixo x e do ponto $(0, 2)$.

Exercício 14.* Determine os valores de k tais que a reta $y = kx$ é tangente ao círculo $x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$.

Limites e Continuidade

1 Limites de sequências

Exercício 1. Calcule os seguintes limites:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{2n-7} & \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-2}{7n+6} & \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+5n+1}{5n^2-6n+3} \\
 \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2-4n+3}{3n^2+5n+9} & \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n & \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\log \left(3 + \frac{1}{n}\right) - \log 3 \right) \\
 \text{(g)} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) & \text{(h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n & \text{(i)} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\log \left(7 + \frac{1}{n}\right) - \log 7 \right)
 \end{array}$$

Exercício 2. Calcule as seguintes somas infinitas:

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{7^k} \quad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{5^k} \quad \text{(c)} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{5}{6^m} \quad \text{(d)} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{8}{3^m}$$

Exercício 3. Calcule:

$$\text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} \quad \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \frac{1}{n}$$

Exercício 4*. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n$$

Exercício 5. Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Exercício 6. Mostre que:

$$\text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left(\sqrt{n + \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = 0$$

Exercício 7.* Prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Exercício 8.* Mostre que:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \infty$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$

Exercício 9. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100}}{1,01^n}$.

Exercício 10.* Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$ converge e calcule o seu limite.

Exercício 11.* Prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{n^2+n} = 1$.

Exercício 12.* Prove que o limite da sequência

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$$

existe e é igual a 2.

Exercício 13.* Prove que a sequência

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

converge e que o seu limite está entre $\frac{1}{2}$ e 1.

2 Cálculo de limites de funções

Retas assíntotas: Quando estudarmos o gráfico de funções (durante o estudo das derivadas), veremos com mais detalhes o conceito de reta assíntota. Por enquanto, tenha em mente que a reta $y = L$ é uma *assíntota horizontal* de $f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Por outro lado, a reta $x = a$ é uma *assíntota vertical* de $f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow a-} |f(x)| = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a+} |f(x)| = \infty$$

Exercício 1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

Exercício 2. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 5$$

Nessa situação, é possível que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ exista? Explique.

Exercício 3. Esboce o gráfico de um exemplo de uma função que satisfaça a todas as condições dadas:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -2$, $f(1) = 2$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1$, $f(0)$ não definido.
- (c) $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 2$, $f(3) = 3$, $f(2) = 1$

Exercício 4. Calcule:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x+1}{x-5} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x+1}{x-5} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 5^+} \log(x^2 - 25) \quad \text{(d)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sec x}{x} \\ \text{(e)} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot x & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \log x \right) \end{array}$$

Exercício 5. Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

Exercício 6. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0,$$

encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 5g(x)] & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x)} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 2} [g(x)]^3 \quad \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x)} \\ \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{h(x)} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)} & \end{array}$$

Exercício 7. Calcule os seguintes limites, justificando em cada passagem as propriedades básicas de limites que foram utilizadas:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x)(3x^2 + 6) & \text{(c)} \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2} \\ \text{(d)} \lim_{u \rightarrow -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3) & \end{array}$$

Exercício 8. Calcule:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 12} & \text{(c)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-5 + h)^2 - 25}{h} \\ \text{(d)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h} & \text{(e)} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^3 - 27} \\ \text{(g)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h} & \text{(h)} \lim_{u \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2} & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} \\ \text{(j)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t} & \text{(k)} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{t + 1}} - \frac{1}{t} \right) & \text{(l)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} \\ \text{(m)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} & & \end{array}$$

Exercício 9. Demonstre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos \frac{2}{x} = 0$.

Exercício 10. Se $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, encontre $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Exercício 11. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0_+} \sqrt{x} e^{\sin(\pi/x)}$.

Exercício 12. A função sinal é definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites a seguir:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0_+} \operatorname{sgn} x$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0_-} \operatorname{sgn} x$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} x|$
 (e) $\lim_{x \rightarrow \pi_+} \operatorname{sgn}(\sin x)$ (f) $\lim_{x \rightarrow \pi_-} \operatorname{sgn}(\sin x)$ (g) $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{sgn}(\sin x)$ (h) $\lim_{x \rightarrow \pi} |\operatorname{sgn}(\sin x)|$

Exercício 13. Seja $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$. Encontre os limites laterais quando $x \rightarrow 2$ e diga se $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ existe e calcule seu valor em caso afirmativo.

Exercício 14*. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1}$.

Exercício 15. Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva:

- (a) $y = \frac{5 + 4x}{x + 3}$ (b) $y = \frac{2x^2 + 1}{2x^2 + 2x - 1}$
 (c) $y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$ (d) $y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$

Exercício 16. Encontre $a \in \mathbb{R}$ tal que exista

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

e calcule o valor do limite nesse caso.

Exercício 17. Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Exercício 18*. Sejam p e q polinômios. Encontre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

se:

- (a) o grau de p for menor que o grau de q ;
- (b) o grau de p for maior que o grau de q .

Exercício 19. Calcule os limites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{sen}(x - \pi)}{x - \pi}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 6x}{\operatorname{sen} 2x}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{cossec} x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

Exercício 20. Prove que $\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos \pi x)^{2m}$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ e vale 1 ou 0 dependendo de x ser inteiro ou não.

3 Definição precisa de limite

Exercício 1. Demonstre cada afirmação usando a definição ϵ, δ de limite:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{x}{3}\right) = 2$ (b) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ (c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^4} = \infty$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$ (e) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$
 (g) $\lim_{x \rightarrow -6_+} \sqrt[8]{6+x} = 0$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ (i) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 7) = 1$
 (j) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1) = 3$ (k) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$ (l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$
 (m) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ se $a > 0$

Exercício 2* Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostre que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

4 Continuidade

Exercício 1. Explique por que as seguintes funções são descontínuas no ponto dado a :

$$(a) \quad f(x) = \frac{1}{x+2} \quad \text{em } a = -2$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases} \quad \text{em } a = -2$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \leq -1 \\ 2^x & \text{se } x > -1 \end{cases} \quad \text{em } a = -1$$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad \text{em } a = 1$$

Exercício 2*. Para que valores de x a função abaixo é contínua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Exercício 3*. Se a e b são números positivos, prove que a equação

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

possui no mínimo uma solução no intervalo $(-1, 1)$.

Exercício 4. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas da noite. Mostre que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.

Exercício 5.* Dada uma função contínua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, mostre que f tem um ponto fixo: existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. (Sugestão: olhe para $g(x) = f(x) - x$)

Exercício 6. Seja $f(x) = \tan x$. Embora $f(\pi/4) = 1$ e $f(3\pi/4) = -1$, não existe nenhum $x \in [\pi/4, 3\pi/4]$ para o qual $f(x) = 0$. Por que isso não contraria o Teorema do Valor Intermediário?

Exercício 7. Mostre que cada uma das funções abaixo é injetora em toda a reta real e determina sua inversa.

$$(a) f(x) = x + 1$$

$$(b) f(x) = 1 - x$$

$$(c) f(x) = x^3$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ x^2 & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Exercício 8. Se $f(x)$ é contínua em $x = a$ e $f(a) > 0$, mostre que o domínio de f contém um intervalo aberto ao redor de a tal que $f(x) > 0$ para todo x nesse intervalo.

Exercício 9.* Se $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ e sua imagem está contida em $\mathbb{Q}$, com $f(1/2) = 1/2$, mostre que $f(x) = 1/2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 10.* Se $f(x)$ satisfaz a relação funcional

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

para todo x, y , encontre $f(x)$ para $x \in \mathbb{Q}$ e prove que se f for contínua então $f(x) = cx$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

Exercício 11. Se $f(x) = x^n$, dado $\epsilon > 0$, encontre $\delta > 0$ (que pode depender de a) tal que

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

se

$$|x - a| < \delta$$

Exercício 12. * Considere um triângulo fixado no plano. Mostre que, para cada direção possível, existe uma reta com essa direção que divide o triângulo dado em duas partes de mesma área.

Exercício 13. * Prove que se $f(x)$ é monótona em $[a, b]$ e satisfaz a propriedade do valor intermediário (ou seja, se $f(x) < c < f(y)$ então existe z entre x e y tal que $f(z) = c$), então f é contínua. Podemos concluir a mesma coisa quando f não é monótona?

Derivada

1 Definição de derivada

Exercício 1. Uma curva tem equação $y = f(x)$.

- (a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.
- (b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P .

Exercício 2. Encontre a equação da reta tangente à parábola $y = 4x - x^2$ no ponto $(1, 3)$.

Exercício 3. Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto $x = a$.

Exercício 4. Encontra a inclinação da reta tangente à curva $y = 1/\sqrt{x}$ no ponto $x = a$

Exercício 5. Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com velocidade inicial de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é $H(t) = 10t - 1,86t^2$. Determine a função $V(t)$ da velocidade instantânea da pedra e diga quando ela atinge a superfície e com que velocidade.

Exercício 6. Encontre $f'(a)$ usando a definição de derivada:

- (a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$
- (b) $f(t) = 2t^3 + t$
- (c) $f(t) = \frac{2t+1}{t+3}$
- (d) $f(x) = x^{-2}$
- (e) $f(x) = \sqrt{1-2x}$
- (f) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x}}$
- (g) $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$
- (h) $f(t) = t^{3/2}$
- (i) $f(x) = x^4$
- (j) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$
- (k) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Exercício 7. Mostre que:

- (a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.
- (b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

Exercício 8. Esboce o gráfico das seguintes funções, diga onde elas são deriváveis e calcule $f'(x)$:

- (a) $f(x) = x|x|$
- (b) $f(x) = x + |x|$

Exercício 9* Suponha que f seja uma função que satisfaça a relação

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Suponha também que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

- (a) Encontre $f(0)$.
- (b) Encontre $f'(0)$.
- (c) Encontre $f'(x)$.

Exercício 10* Seja f definida em toda a reta e tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é constante.

Exercício 11* Suponha que f seja uma função com a propriedade de que $|f(x)| \leq x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(0) = f'(0) = 0$.

2 Propriedades básicas de derivação: Potências, Funções Racionais e Exponencial

Exercício 1. Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x$ (b) $f(x) = x^2(1 - 2x)$ (c) $y = x^{5/3} - x^{-2/3}$
(d) $f(r) = \frac{5}{r^3}$ (e) $s(p) = \sqrt{p} - p$ (f) $G(q) = (1 + q^{-1})^2$

Exercício 2. Encontre uma equação da reta tangente e da reta normal à curva no ponto dado:

(a) $y = 2x^3 - x^2 + 2$ em $(1, 3)$ (b) $y = x + \frac{2}{x}$ em $(2, 3)$ (c) $y = \sqrt[4]{x} - x$ em $(1, 0)$
(d) $y = x - \sqrt{x}$ em $(1, 0)$ (e) $y^2 = x^3$ em $(1, 1)$

Exercício 3. Onde a reta normal à parábola $y = x^2 - 1$ no ponto $(-1, 0)$ intercepta a parábola uma segunda vez?

Exercício 4. A equação $y'' + y' - 2y = x^2$ é uma equação diferencial, pois envolve uma função desconhecida y e suas derivadas. Encontre as constantes a, b e c tais que $y = ax^2 + bx + c$ satisfaça essa equação.

Exercício 5. Determinar os valores de a, b, c tais que os gráficos dos dois polinômios $f(x) = x^2 + ax + b$ e $g(x) = x^3 - c$ se intersectem no ponto $(1, 2)$ e admitam a mesma tangente naquele ponto.

Exercício 6*. Calcule o limite quando $n \rightarrow \infty$ do valor absoluto da n -ésima derivada de $1/x$ no ponto $x = 2$.

Exercício 7. Como é definido o número e ?

Exercício 8. Derive:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad f(x) = 3e^x + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} & \text{(b)} \quad f(v) = \frac{\sqrt[3]{v} - 2ve^v}{v} & \text{(c)} \quad y = e^{x+1} + 1 \\
\text{(d)} \quad f(x) = (3x^2 + 5x)e^x & \text{(e)} \quad g(x) = (x + 2\sqrt{x})e^x & \text{(f)} \quad y = \frac{e^x}{x^2} \\
\text{(g)} \quad g(x) = \frac{3x-1}{2x+1} & \text{(h)} \quad F(y) = \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3) & \text{(i)} \quad y = \frac{\sqrt{x}}{2+x} \\
\text{(j)} \quad y = (z^2 + e^z)\sqrt{z} & \text{(k)} \quad f(t) = \frac{\sqrt[3]{t}}{t-3} &
\end{array}$$

Exercício 9. Encontre f' e f'' :

$$\text{(a)} \quad f(x) = (x^3 + 1)e^x \quad \text{(b)} \quad f(x) = \sqrt{x}e^x \quad \text{(c)} \quad f(x) = \frac{x^2}{1+e^x} \quad \text{(d)} \quad f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

Exercício 10. Se $g(x) = \frac{x}{e^x}$, encontre $g^{(n)}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 11. Se $h(2) = 4$ e $h'(2) = -3$, encontre

$$\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{h(x)}{x} \right) \right|_{x=2}$$

Exercício 12. Encontre as equações de retas tangentes à curva $y = \frac{x-1}{x+1}$ que sejam paralelas à reta $x - 2y = 2$.

Exercício 13. Encontre uma expressão para $\frac{d^n}{dx^n} (x^k e^x)$, onde $n \leq k$.

3 Derivadas Trigonométricas e Regra da Cadeia

Exercício 1. Derive:

- | | | |
|---|--|----------------------------------|
| (a) $f(x) = x^2 \sin x$ | (b) $f(x) = e^x \cos x$ | (c) $f(x) = x \cos x + 2 \tan x$ |
| (d) $g(t) = t^3 \cos t$ | (e) $h(x) = \operatorname{cosec} x + e^x \cot x$ | (f) $y = \frac{x}{2 - \tan x}$ |
| (g) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ | (h) $y = \frac{t \sin t}{1 + t}$ | (i) $f(x) = x \cos x \sin x$ |
| (j) $y = 2 \sec x - \operatorname{cosec} x$ | (k) $g(t) = 4 \sec t + \tan t$ | (l) $f(t) = te^t \cot t$ |
| (m) $f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$ | | |

Exercício 2. Encontre:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| (a) $\frac{d^{99}}{dx^{99}} \sin x$ | (b) $\frac{d^{35}}{dx^{35}} (x \sin x)$ |
|-------------------------------------|---|

Exercício 3. Derive:

- | | | |
|---|---|---------------------------------------|
| (a) $y = \sin 4x$ | (b) $y = \tan(\sin x)$ | (c) $y = \sqrt{4 + 3x}$ |
| (d) $y = e^{\sqrt{x}}$ | (e) $y = (1 + x + x^2)^{99}$ | (f) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ |
| (g) $y = \cos^2 x$ | (h) $y = \cos(x^2)$ | (i) $f(t) = e^{at} \sin bt$ |
| (j) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ | (k) $s(t) = \sqrt{\frac{1 + \sin t}{1 + \cos t}}$ | (l) $y = e^{\tan x}$ |
| (m) $g(u) = \left(\frac{u^3 - 1}{u^3 + 1}\right)^8$ | (n) $g(\theta) = \sec^2(m\theta)$ | (o) $y = \cot^2(\sin \theta)$ |
| (p) $y = \tan(\sec(\cos t))$ | (q) $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$ | (r) $y = 2^{3^4 x}$ |
| (s) $y = \sqrt{1 + xe^{-2x}}$ | (t) $y = \sin(\sin(\sin x))$ | (u) $y = \frac{1}{(1 + \tan x)^2}$ |

Exercício 4. A equação do movimento harmônico simples é dada por $s(t) = A \cos(\omega t + \delta)$. Quando a velocidade é zero?

Exercício 5. Escreva $|x| = \sqrt{x^2}$ e use a regra da cadeia para mostrar que, para todo $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

Exercício 6. Calcule as derivadas das seguintes funções e diga onde elas não existem:

(a) $f(x) = |\sin x|$ (b) $g(x) = \sin |x|$

Exercício 7* Mostre que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x} \right) = -\cos 2x$$

Exercício 8. Se $n \in \mathbb{N}$, mostre que

$$\frac{d}{dx}(\sin^n x \cos nx) = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x$$

Exercício 9* Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1} \cos(4x + n\pi/2)$$

Exercício 10. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax} \sin bx) = r^n e^{ax} \sin(bx + n\theta),$$

onde $a, b > 0$, $r^2 = a^2 + b^2$ e $\theta = \arctan(b/a)$.

Exercício 11. Calcule a segunda derivada de $f[g\{h(x)\}]$.

Exercício 12. Que condições os coeficientes α, β, a, b, c devem satisfazer para que

$$\frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

tenha derivada finita em toda a reta e que jamais se anula?

Exercício 13.* Mostre que $\frac{d^n}{dx^n}(e^{x^2/2}) = u_n(x)e^{x^2/2}$, onde u_n é um polinômio de grau n . Mostre a relação de recorrência

$$u_{n+1} = xu_n + u'_n$$

Exercício 14. Usando a regra de Leibniz aplicada a

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2/2}) = xe^{x^2/2},$$

conclua que

$$u_{n+1} = xu_n + nu_{n-1}$$

Exercício 15.* Com base nos dois últimos exercícios, obtenha a equação diferencial

$$u''_n + xu'_n - nu_n = 0$$

satisfeita por $u_n(x)$.

Exercício 16.* A função f definida sobre a reta satisfaz à relação

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Assumindo que f é diferenciável, prove que ou $f(x) = 0$ para todo x ou $f(x) = e^{ax}$.

4 Derivação Implícita e Inversa

Exercício 1. Encontre $\frac{dx}{dy}$ derivando implicitamente:

- (a) $x^2 - 4xy + y^2 = 4$ (b) $x^4 + x^2y^2 - y^3 = 5$ (c) $\frac{x^2}{x+y} = y^2 + 1$
 (d) $x^2y^2 + x \sin y = 4$ (e) $e^{x/y} = x - y$ (f) $\arctan(x^2y) = x + xy^2$
 (g) $\sin(xy) = \cos(x+y)$ (h) $e^y \sin x = x + xy$ (i) $xy = \sqrt{x^2 + y^2}$
 (j) $x \sin y + y \sin x = 1$ (k) $\tan(x-y) = \frac{y}{1+x^2}$ (l) $x \sec y = y \tan x$

Exercício 2. Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ e $f(1) = 2$, encontre $f'(1)$.

Exercício 3. Se $g(x) + x \sin g(x) = x^2$, encontre $g'(0)$.

Exercício 4. Use derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado:

- (a) $y \sin 2x = x \cos 2y$, $(\pi/2, \pi/4)$ (b) $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$
 (c) $x^2 - xy - y^2 = 1$, $(2, 1)$ (d) $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$, $(0, 1/2)$
 (e) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, $(-3\sqrt{3}, 1)$ (f) $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, $(3, 1)$

Exercício 5. A equação $x \sin xy + 2x^2 = 0$ define y implicitamente como uma função de x . Admitindo que a derivada y' existe, mostre que ela satisfaz a equação $y'x^2 \cos xy + xy \cos xy + \sin xy + 4x = 0$.

Exercício 6. Encontre y'' por derivação implícita.

- (a) $x^2 + 4y^2 = 4$ (b) $\sin y + \cos x = 1$ (c) $xy + e^y = e$

Exercício 7. Encontre uma equação da reta tangente às seguintes curvas no ponto (x_0, y_0) :

$$(a) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (elipse)} \quad (b) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (hipérbole)}$$

Exercício 8. Mostre que a soma das coordenadas das interseções com os eixos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c .

Exercício 9.* Usando derivação implícita, mostre que qualquer reta tangente em um ponto P a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP .

Exercício 10. Encontre a derivada da função e simplifique quando possível:

$$\begin{array}{lll} (a) \ y = \arctan \sqrt{x} & (b) \ y = \arcsen(2x + 1) & (c) \ f(x) = x \operatorname{arcsec}(x^3) \\ (d) \ y = \arctan(x - \sqrt{1 + x^2}) & (e) \ h(t) = \operatorname{arccot}(t) + \operatorname{arccot} \frac{1}{t} & (f) \ g(x) = \arccos \sqrt{x} \\ (g) \ y = \arccos \left(\frac{b + a \cos x}{a + b \cos x} \right) & (h) \ y = \arctan \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} & (i) \ y = \arccos(\arcsen t) \end{array}$$

5 Logaritmo e Funções Hiperbólicas

Exercício 1. Derive:

- (a) $f(x) = x \log x - x$ (b) $f(x) = \operatorname{sen}(\log x)$ (c) $\sqrt[5]{\log x}$
 (d) $f(x) = \log_{10}(1 + \cos x)$ (e) $F(t) = (\log t)^2 \operatorname{sen} t$ (f) $y = \log(\operatorname{cosec} x - \cot x)$
 (g) $g(t) = \sqrt{1 + \log t}$ (h) $y = \frac{\log x}{1 + \log x}$ (i) $y = \log |\sec x|$
 (j) $y = \log(\log(\log x))$ (k) $y = \log(x + \log x)$ (l) $f(z) = \log \sqrt{\frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

Exercício 2. Use a derivação logarítmica para encontrar a derivada da função:

- (a) $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$ (b) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$ (c) $y = x^x$ (d) $y = (\cos x)^x$
 (e) $y = x^{\operatorname{sen} x}$ (f) $y = (\operatorname{sen} x)^{\log x}$ (g) $y = (\sqrt{x})^x$ (h) $y = (\tan x)^{1/x}$
 (i) $y = \sqrt{x}e^{x^2-x}(x+1)^{2/3}$

Exercício 3. Calcule y' :

- (a) $y = \log(x^2 + y^2)$ (b) $x^y = y^x$

Exercício 4. Encontre:

- (a) $\operatorname{senh} 0$ (b) $\cosh 0$ (c) $\tanh 0$ (d) $\cosh(\log 5)$ (e) $\operatorname{senh}(\log 4)$
 (f) $\operatorname{ar} \operatorname{senh} 1$ (g) $\operatorname{ar} \cosh 1$

Exercício 5. Mostre que $\cosh x$ é par e $\operatorname{senh} x$ é ímpar.

Exercício 6. Mostre as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } \coth^2 x - 1 = \operatorname{cosech}^2 x & \text{(b) } \tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \\
 & \text{(c) } \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x & \text{(d) } \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
 & \text{(e) } \tanh(\log x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & \text{(f) } (\cosh x + \sinh x)^\alpha &= \cosh \alpha x + \sinh \alpha y \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Exercício 7. Mostre que

$$\sinh a + \sinh b = 2 \sinh \left(\frac{a+b}{2} \right) \cosh \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

Exercício 8. Encontre os seguintes limites:

$$\text{(a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad \text{(b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{e^x}$$

Exercício 9. Derive e simplifique:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } f(x) = e^x \cosh x & \text{(b) } f(x) = \sinh^2 x & \text{(c) } f(x) = \log(\cosh x) \\
 & \text{(d) } f(x) = \operatorname{sech} x (1 + \log \operatorname{sech} x) & \text{(e) } f(t) = \frac{1 + \sinh t}{1 - \sinh t} & \text{(f) } y = \sinh(\cosh x) \\
 & \text{(g) } y = x \operatorname{ar} \tanh x + \log \sqrt{1 - x^2} & \text{(h) } y = \operatorname{ar} \operatorname{sech}(e^{-x})
 \end{aligned}$$

Exercício 10. Demonstre as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } \frac{d}{dx} \sqrt[4]{\frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}} = \frac{e^{x/2}}{2} \\
 & \text{(b) } \frac{d}{dx} \arctan(\tanh x) = \operatorname{sech} 2x
 \end{aligned}$$

6 Aproximação linear, diferenciais e taxas relacionadas

Exercício 1. Se V for o volume de um cubo com aresta de comprimento x e, à medida que o tempo passa, o cubo se expandir, encontre dV/dt em termos de dx/dt .

Exercício 2. Suponha que petróleo vaze por uma ruptura e espalhe-se em um padrão circular. Se o raio do petróleo derramado crescer a uma taxa constante de 1 m/s, quão rápido a área do vazamento está crescendo quando o raio é igual a 30 m?

Exercício 3. O comprimento de um retângulo está aumentando a uma taxa de 8 cm/s e sua largura está aumentando numa taxa de 3 cm/s. Quando o comprimento for 20 cm e a largura for 10 cm, quão rápido a área do retângulo está aumentando?

Exercício 4. Um tanque cilíndrico com raio 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de $3 \text{ m}^3/\text{min}$. Quão rápido a altura da água está aumentando?

Exercício 5. Se $y = \sqrt{x+1}$, onde x e y são funções de t , encontre dy/dt quando $x = 4$ sabendo que $dx/dt = 3$.

Exercício 6. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 2 km, a 800 km/h, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta quando ele está a 3 km além da estação.

Exercício 7*. Um holofote sobre o solo ilumina uma parede a 12 m de distância. Se um homem de 2 m de altura anda do holofote em direção à parede a uma velocidade de 1,6 m/s, quão rápido o comprimento de sua sombra diminui sobre a parede quando ele está a 4 m dela?

Exercício 8. Um homem começa a andar para o norte a 1,2 m/s a partir de um ponto P . Cinco minutos depois uma mulher começa a andar para o sul a 1,6 m/s de um ponto 200 m a leste de P . A que taxa as pessoas estão se distanciando 15 min após a mulher começar a andar?

Exercício 9.* O ponteiro dos minutos de um relógio mede 8 mm, enquanto o das horas tem 4 mm de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre a ponta dos ponteiros à 1 hora?

Exercício 10. Encontre a linearização (aproximação linear) no ponto $x = a$ das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 - x^2 + 3$, $a = -2$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ (c) $f(x) = 2^x$, $a = 0$

Exercício 11. Encontre a diferencial das seguintes funções:

(a) $y = xe^{-4x}$ (b) $y = \frac{1+2u}{1+3u}$ (c) $y = \tan \sqrt{t}$
 (d) $y = \log(\sin \theta)$ (e) $y = \theta^2 \sin 2\theta$ (f) $y = \frac{e^x}{1-e^x}$

Exercício 12. Encontre a diferencial dy e avalie dy para os valores dados de x e dx :

(a) $y = \cos \pi x$, $x = \frac{1}{3}$, $dx = 0,02$ (b) $y = \sqrt{3+x^2}$, $x = 1$, $dx = -0,1$

Exercício 13. Use uma aproximação linear (ou diferencial) para estimar o número dado:

(a) $1,999^4$ (b) $\sqrt[3]{1001}$ (c) $e^{0,1}$ (d) $\frac{1}{4,002}$ (e) $\sqrt{100,5}$ (f) $\cos 29^\circ$

Exercício 14. A aresta de um cubo tem 30 cm, com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível, o erro relativo e o erro percentual no cálculo do volume do cubo e da sua área de superfície.

Exercício 15. Use diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05 cm de tinta a um domo hemisférico com diâmetro de 50 m.

Exercício 16. Quando o sangue flui ao longo de um vaso sanguíneo, o fluxo é proporcional à quarta potência do raio R do vaso:

$$F = kR^4$$

Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter-balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue.

Mostre que uma variação relativa em F é de cerca de quatro vezes a variação relativa em R . Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo do sangue?

Exercício 17. Mostre que se duas retas de inclinações m_1 e m_2 se intersectam em um ângulo α , então

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Exercício 18. O ângulo de interseção entre duas curvas é definido como o ângulo formado pelas tangentes às curvas no ponto de interseção. Usando o exercício anterior, determine o ângulo entre o seguinte par de curvas em cada ponto de interseção:

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \text{e} \quad x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$$

7 Teorema do Valor Médio

Exercício 1. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(1) = f(-1) = 0$, mas que $f'(x)$ nunca se anula no intervalo $[-1, 1]$. Explique como isso é possível em face do Teorema de Rolle.

Exercício 2. Seja $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor c em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

Exercício 3. Mostre que o teorema do valor médio pode ser escrito na forma

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h), \quad \text{onde } \theta \in (0, 1)$$

Exercício 4. Mostre que a equação tem exatamente uma raiz real:

(a) $2x + \cos x = 0$ (b) $x^3 + e^x = 0$

Exercício 5*. Seja f um polinômio. Um número α diz-se um zero de multiplicidade m se $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$, com $g(\alpha) \neq 0$.

- (a) Se f tem r zeros no intervalo $[a, b]$, prove que f' tem pelo menos $r - 1$ zeros e que, em geral, a derivada de ordem k , $f^{(k)}$, tem pelo menos $r - k$ zeros em $[a, b]$. (Cada zero é contado tantas vezes quantas as unidades do seu grau de multiplicidade).
- (b) Se a derivada de ordem k , $f^{(k)}$, tem exatamente r zeros em $[a, b]$, o que se pode concluir relativamente ao número de zeros de f em $[a, b]$?

Exercício 6*. Mostre que um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes reais.

Exercício 7. Utilize o Teorema do Valor Médio para concluir as seguintes desigualdades:

(a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

(b) $ny^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x-y)$ se $0 < y \leq x$ e $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 8. Demonstre que

$$\arcsen \frac{x-1}{x+1} = 2 \arctan \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

Exercício 9. * Um número real a é chamado de ponto fixo de uma função f se $f(a) = a$. Demonstre que se $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então f tem no máximo um ponto fixo.

Exercício 10. Se f é contínua em $[a-\epsilon, a+\epsilon]$, possui derivada em $(a-\epsilon, a) \cup (a, a+\epsilon)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L$, mostre que $f'(a)$ existe e é igual a L .

Exercício 11.* Seja $f(x)$ definida e derivável sobre toda a reta real. Mostre que se $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 12.* Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^{1/x} - x^{1/x}}{(x+3)^{1/x} - x^{1/x}}$$

8 Máximos e Mínimos

Exercício 1. Explique a diferença entre mínimo local e mínimo absoluto.

Exercício 2. Encontre os pontos críticos da função

- (a) $f(x) = 5x^2 + 4x$ (b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ (c) $f(x) = |3x - 4|$
 (d) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$ (e) $f(\theta) = 2\cos\theta + \sin^2\theta$ (f) $h(t) = 3t - \arcsen t$
 (g) $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ (h) $f(x) = x^2 e^{-3x}$ (i) $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

Exercício 3. Encontre os valores máximo e mínimo absolutos no intervalo dado:

- (a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $[0, 3]$ (b) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $[0, 3]$
 (c) $f(t) = (t^2 - 4)^3$, $[-2, 3]$ (d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $[0, 2; 4]$
 (e) $f(t) = t - \sqrt[3]{t}$, $[-1, 4]$ (f) $f(t) = 2\cos t + \sin 2t$, $[0, \pi/2]$
 (g) $f(x) = x^{-2} \log x$, $[1/2, 4]$ (h) $f(x) = x - 2 \arctan x$, $[0, 4]$

Exercício 4. Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente, seus valores de máximo e mínimo locais e seus intervalos de concavidade e pontos de inflexão:

- (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ (b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$
 (c) $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ (d) $f(x) = \cos^2 x - 2\sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$
 (e) $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$ (f) $f(x) = x^2 \log x$

Exercício 5. Encontre os pontos críticos de $f(x) = x^4(x-1)^3$ e determine se são extremos locais e de que tipo.

Exercício 6. Mostre que a curva $y = (1+x)/(1+x^2)$ tem 3 pontos de inflexão e todos ficam sobre uma mesma reta.

Exercício 7. Mostre que os pontos de inflexão da curva $y = x \sin x$ estão sobre a curva $y^2(x^2 + 4) = 4x^2$.

Exercício 8.* Considere as funções

$$f(x) = x^4 \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right), \quad h(x) = x^4 \left(-2 + \sin \frac{1}{x} \right).$$

Mostre que 0 é um ponto crítico das 3 funções, mas suas derivadas mudam de sinal infinitas vezes ao redor de $x = 0$. Mostre também que f não tem extremo local em $x = 0$, ao passo que g tem um mínimo local e h tem um máximo local.

Exercício 9. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu mg}{\mu \sin \theta + \cos \theta},$$

onde μ é o coeficiente de atrito e $\theta \in [0, \pi/2]$. Mostre que F é minimizada quando $\tan \theta = \mu$.

Exercício 10. Demonstre que a função

$$x^{101} + x^{51} + x + 1$$

não tem extremos locais.

Exercício 11. Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo (o diâmetro é igual à largura do retângulo). Se o perímetro da janela for 10 m, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

Exercício 12. Se lhe for oferecida uma fatia de uma pizza redonda e a fatia precisar ter um perímetro de 60 cm, qual diâmetro da pizza vai recompensá-lo com a maior fatia?

(a) $e^x > \frac{1}{x+1}$ se $x > 0$ (b) $e^x > 1 + \log(1+x)$ se $x > 0$.
(c) $e^x > 1 + (1+x)\log(1+x)$ se $x > 0$.

Exercício 23.* Se $f''(x) \geq 0$, mostre que $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

Exercício 24.* Dada uma esfera de raio r , encontre a altura da pirâmide de menor volume cuja base é um polígono regular de n lados e cuja base e faces triangulares são todas tangentes à esfera.

Exercício 25.* Suponha que uma bola de neve derreta de maneira que seu volume decresce a uma taxa proporcional à área de sua superfície. Se levar três horas para a bola de neve derreter para a metade de seu volume, quanto demorará para a bola de neve derreter completamente?

9 Indeterminações e Regra de L'Hôpital

Exercício 1. Calcule os seguintes limites:

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}$ | (b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 13x + 21}$ | (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{(x \sin x)^{3/2}}$ |
| (g) $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^x - x}{1 - x + \log x}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen 2x - 2 \arcsen x}{x^3}$ |
| (j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^n x^k - n}{x - 1}$ | (k) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(\sin 4x)(\sin 3x)}{x \sin 2x}$ | (l) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\log \frac{1}{x} \right)^x$ |
| (m) $\lim_{x \rightarrow 1-} \log x \log(1-x)$ | (n) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{(x-1)}$ | (o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^b}, (a > 1)$ |
| (p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh(x+1)}{e^x}$ | (q) $\lim_{x \rightarrow 0-} (1 - 2^x)^{\sin x}$ | (r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x)}{\arctan(1/x)}$ |

Exercício 2. A corrente $I(t)$ que circula num circuito elétrico num instante t é definida por

$$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L}),$$

com E, R e L números positivos. Determine o valor limite de $I(t)$ quando $R \rightarrow 0_+$.

Exercício 3. Determinar c de modo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$$

Exercício 4. Se um montante inicial de dinheiro A_0 for investido a uma taxa de juros r capitalizada n vezes ao ano, o valor do investimento após t anos será

$$A = A_0 \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

Se $n \rightarrow \infty$, nos referimos à capitalização contínua de juros. Usando a regra de L'Hôpital, mostre que se os juros forem capitalizados continuamente, então o montante após t anos será

$$A = A_0 e^{rt}$$

Exercício 5. Mostre que se $r(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b^m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$, então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r(x)}{x^{n-m}} = \frac{a_n}{a_m}$$

Exercício 6* Usando o exercício anterior, conclua que e^x não é uma função racional.

Exercício 7* Prove que e^x não pode satisfazer uma equação algébrica com coeficientes que sejam polinômios em x .

Exercício 8. Prove que $f(x) = (x^2)^x$, $f(0) = 1$ é contínua em $x = 0$.

10 Gráfico de Funções

Exercício 1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \ y = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} & \text{(b)} \ y = e^{-x^2} & \text{(c)} \ y = \sqrt{x^2 + 1} - x & \text{(d)} \ y = \log(1 - \log x) \\ \text{(e)} \ y = \frac{e^x}{1 - e^x} & \text{(f)} \ y = e^{\arctan x} & \text{(g)} \ y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} & \text{(h)} \ y = \sin^3 x \\ \text{(i)} \ y = x \tan x & \text{(j)} \ y = \operatorname{cosec} x - 2 \sin x & \text{(k)} \ y = \frac{\sin x}{2 + \cos x} & \text{(l)} \ y = \arctan \frac{x - 1}{x + 1} \end{array}$$

Exercício 2. Encontre as assíntotas oblíquas às curvas:

$$\text{(a)} \ y = x - \arctan x. \quad \text{(b)} \ y = \sqrt{x^2 + 4}$$

Exercício 3. Esboce o gráfico da função $y = (x^2)^x$, $y(0) = 1$. Essa função tem máximos, mínimos ou pontos de inflexão?

11 Método de Newton

Exercício 1. Use o método de Newton para aproximar uma raiz das seguintes equações com precisão de 6 casas decimais:

(a) $\sin x = x^2$ (b) $2 \cos x = x^4$
(c) $2^x = 2 - x^2$ (d) $\log x = \frac{1}{x-3}$

Exercício 2. Aplique o método de Newton à equação $1/x - a = 0$ para deduzir o seguinte algoritmo para os inversos:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

(Esse algoritmo possibilita a um computador achar os inversos sem realmente dividir). Use essa técnica para calcular $1/1,6984$ com precisão de 6 casas decimais.

Exercício 3. Explique por que o método de Newton não funciona para encontrar as raízes de $x^3 - 3x + 6 = 0$ se o valor inicial escolhido for $x_0 = 1$.

Exercício 4. Explique por que o método de Newton falha quando aplicado à equação $\sqrt[3]{x} = 0$ para qualquer valor inicial $x_0 \neq 0$.

12 Primitivas

Exercício 1. Encontre uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

- (a) $f(x) = 4x + 7$ (b) $f(x) = x(12x + 8)$ (c) $f(x) = \sqrt{2}$
 (d) $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}$ (e) $f(x) = \frac{1}{5} - \frac{2}{x}$
 (f) $g(t) = \frac{1+t+t^2}{\sqrt{t}}$ (g) $h(\theta) = 2\sin\theta - \sec^2\theta$ (h) $f(x) = 2^x + 4\sinh x$
 (i) $f(x) = 1 + 2\sin x + \frac{3}{\sqrt{x}}$ (j) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{x}$ (k) $r(\theta) = \sec\theta \tan\theta - 2e^\theta$
 (l) $g(v) = 2\cos v - \frac{3}{\sqrt{1-v^2}}$

Exercício 2. Encontre f :

- (a) $f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x$ (b) $f''(x) = 2x + 3e^x$ (c) $f''(x) = 1/x^2$
 (d) $f'''(t) = \sqrt{t} - 2\cos t$ (e) $f'''(t) = 12 + \sin t$ (f) $f''(x) = x^3 + \sinh x$

Exercício 3. Uma partícula move-se de acordo com os dados a seguir. Encontre sua função de posição:

- (a) $v(t) = \sin t - \cos t$, $s(0) = 0$
 (b) $v(t) = t^2 - 3\sqrt{t}$, $s(4) = 8$
 (c) $a(t) = 2t + 1$, $s(0) = 3$, $v(0) = -2$
 (d) $a(t) = 10\sin t + 3\cos t$, $s(0) = 0$, $s(2\pi) = 12$

Exercício 4. Um carro está viajando a 80 km/h quando seu condutor freia completamente, produzindo uma desaceleração constante de 7 m/s². Qual a distância percorrida antes do carro parar?

Exercício 5. Um carro é freado com uma desaceleração constante de 5 m/s², produzindo marcas de frenagem meindo 60 m antes de parar completamente. Quão rápido o carro estava viajando quando o freio foi acionado pela primeira vez?

Integral e Teorema Fundamental do Cálculo

1 Propriedades básicas da integral

Exercício 1. Escreva uma expressão para a soma de Riemann das funções abaixo no intervalo dado (não é necessário calcular o limite):

(a) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $1 \leq x \leq 3$ (b) $f(x) = x^2 + \sqrt{1 + 2x}$, $4 \leq x \leq 7$

(c) $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $0 \leq x \leq \pi$

Exercício 2. Escreva as expressões abaixo na forma de integral $\int_a^b f(x)dx$, determinando a, b e $f(x)$:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{3}{n} \sqrt{1 + \frac{3i}{n}}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{4n} \tan \frac{i\pi}{4n}$

Exercício 3. Expresse como um limite a área sob a curva $y = x^3$ de $x = 0$ a $x = 1$ e calcule o seu valor, usando o fato de que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Exercício 4. Seja A_n a área de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r . Dividindo o polígono em n triângulos congruentes com ângulo central de $2\pi/n$, mostre que

$$A_n = \frac{1}{2} n r^2 \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

e calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Exercício 5. Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{e^{x_i}}{1 + x_i} \Delta x$, $[0, 1]$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \sqrt{1 + x_i^3} \Delta x$, $[2, 5]$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \log(1 + x_i^2) \Delta x, [2, 6] \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\cos x_i}{x_i} \Delta x, [\pi, 2\pi]$$

Exercício 6. Usando o limite de somas de Riemann, calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int_{-1}^5 (1 + 3x) dx \quad (b) \int_{-2}^0 (x^2 + x) dx \quad (c) \int_0^2 (2x - x^3) dx$$

Exercício 7. Dado que $\int_0^{\pi} \sin^4 x dx = 3\pi/8$, calcule $\int_{\pi}^0 \sin^4 \theta d\theta$.

Exercício 8. Usando as propriedades básicas das integrais, demonstre (sem calcular as integrais) as seguintes desigualdades:

$$(a) \int_0^4 x^2 - 4x + 4 dx \geq 0 \quad (b) \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \leq \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$$

$$(c) 2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} dx \leq 2\sqrt{2} \quad (d) \frac{\pi}{12} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x dx \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$$

Exercício 9. Expresse o limite como uma integral definida:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^4}{n^5} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + (i/n)^2}$$

Exercício 10. Seja f positiva e monótona em $[a, b]$, onde $0 < a < b$. Seja φ a inversa de f , $\alpha = f(a)$ e $\beta = f(b)$. Usando a interpretação da integral como uma área, verifique que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(y) dy = b\beta - a\alpha - \int_a^b f(x) dx$$

Exercício 11. Use o exercício anterior para calcular ($1 < a < b$)

$$\int_a^b \log x dx$$

Exercício 12. O que podemos dizer sobre $\int_{-a}^a f(x) dx$ quando f é ímpar? E quando f é par?

Exercício 13. Avalie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Exercício 14. * (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*) Mostre que, para qualquer sequência de números reais $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

calculando o mínimo da função

$$g(t) = \sum_{i=1}^n (a_i + t b_i)^2 \geq 0$$

Exercício 15. * (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais*) Mostre que, se $f(x), g(x)$ são funções contínuas, então

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \int_a^b [g(x)]^2 dx \geq \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2$$

Exercício 16. * Seja f contínua e positiva em $[a, b]$ e seja M o seu valor máximo. Prove que

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n dx}$$

Exercício 17.* Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

2 Teorema Fundamental do Cálculo

Exercício 1. Calcule $g'(x)$ de duas formas: usando o TFC parte 1 e calculando a integral usando o TFC parte 2 e derivando.

$$(a) \ g(x) = \int_1^x t^2 dt \quad (b) \ g(x) = \int_0^x 2 + \sin t dt$$

Exercício 2. Encontre as derivadas das seguintes funções:

$$\begin{aligned} (a) \ f(x) &= \int_0^x \sqrt{1 + \sec t} dt & (b) \ h(x) &= \int_1^{e^x} \log t dt & (c) \ y &= \int_1^{3x+1} \frac{1}{1+t^3} dt \\ (d) \ y &= \int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}} dt & (e) \ y &= \int_{\sqrt{x}}^{\pi/4} \theta \tan \theta d\theta & (f) \ y &= \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} du \\ (g) \ f(x) &= \int_{1-2x}^{1+2x} t \sin t dt & (h) \ g(x) &= \int_{\sqrt{x}}^{2x} \arctan t dt & (i) \ &\int_{\cos x}^{\sin x} \log(1+2v) dv \end{aligned}$$

Exercício 3. Calcule a integral

$$\begin{aligned} (a) \ &\int_1^3 x^2 + 2x - 4 dx & (b) \ &\int_{-1}^1 x^{100} dx & (c) \ &\int_0^1 x^{4/5} dx \\ (d) \ &\int_{\pi/6}^{\pi} \sin \theta d\theta & (e) \ &\int_1^4 \frac{2+x^2}{\sqrt{x}} dx & (f) \ &\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{cosec} t \cot t dt \\ (g) \ &\int_1^2 \frac{v^3 + 3v^6}{v^4} dv & (h) \ &\int_0^1 x^e + e^x dx & (i) \ &\int_{-1}^1 e^{u+1} du \\ (j) \ &\int_0^4 2^s ds & (k) \ &\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx & (l) \ &\int_{\pi}^{2\pi} \cos \theta d\theta \\ (m) \ &\int_{-1}^2 (3u-2)(u+1) du & (n) \ &\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta & (o) \ &\int_0^3 2 \sin x - e^x dx \\ (p) \ &\int_0^1 \cosh t dt & (q) \ &\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

Exercício 4. Em que intervalo a curva

$$y = \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + t + 2} dt$$

é côncava para baixo?

Exercício 5. Seja $f(x) = \int_2^x e^{t^2} dt$. Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto com coordenada $x = 2$.

Exercício 6.* Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i^4}{n^5} + \frac{i}{n^2} \right)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right)$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right)$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-0}} + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2-4} + \dots + \frac{1}{n^2-(n-1)^2} \right)$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad \text{onde } \alpha > -1$

Exercício 7. Se f é contínua e g, h são deriváveis, encontre uma fórmula para

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

Exercício 8. Calcule:

(a) $\int x^{1,3} + 7x^{2,5} dx$

(b) $\int v(v^2 + v)^2 dv$

(c) $\int \sqrt[4]{x^5} dx$

(d) $\int \sqrt{t}(t^2 + 3t + 2) dt$

(e) $\int \operatorname{cosec}^2 t - 2e^t dt$

(f) $\int 2 + \tan^2 \theta d\theta$

(g) $\int \left(\frac{1+t}{t} \right)^2 dt$

(h) $\int \sec t (\sec t + \tan t) dt$

(i) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$

Exercício 9. Encontre:

(a) $\int_0^\pi 5e^x + 3 \sin x dx$

(b) $\int_1^4 \frac{4+6u}{\sqrt{u}} du$

(c) $\int_0^1 x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}) dx$

(d) $\int_0^1 x^{10} + 10^x dx$

(e) $\int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$

(f) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin \theta + \sin \theta \tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta$

(g) $\int_0^8 \frac{2+t}{\sqrt[3]{t^2}} dt$

(h) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$

(i) $\int_0^{\pi/4} \sec \theta \tan \theta d\theta$

$$(j) \int_{-10}^{10} \frac{2e^x}{\sinh x + \cosh x} dx \quad (k) \int_0^{3\pi/2} |\sin x| dx$$

Exercício 10. A água escoá pelo fundo de um tanque de armazenamento a uma taxa de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, onde $0 \leq t \leq 50$. Encontre a quantidade de água que escoá do tanque durante os primeiros dez minutos.

Exercício 11. O custo marginal de fabricação de x metros de um certo tecido é

$$C'(x) = 3 - 0,01x + 0,000006x^2$$

em dólares por metro. Ache o aumento do custo se o nível de produção for elevado de 2000 para 4000 metros.

Exercício 12. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Exercício 13.* Mostre que se f for contínua e

$$f(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

então $f(x)$ é identicamente nula (ou seja, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

Exercício 14.*

(a) Verifique que, se $x > -1$, $\log(x+1) = \int_0^x \frac{du}{u+1}$

(b) Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $0 < x < 1$, então

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^{2n}}{2n} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(Sugestão: compare $1/(u+1)$ com uma progressão geométrica)

Exercício 15.* Prove que se f é contínua no intervalo $[0, 1]$ então

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{f(z)}{z^2} dz = f(0)$$

Exercício 16.* Prove que se uma partícula percorre uma distância de 1 em tempo 1, começando e terminando em repouso, então em algum momento no intervalo de tempo $[0, 1]$ a partícula estava sujeita a uma aceleração igual a 4 ou mais.

Exercício 17.* Suponha que f tem primeira e segunda derivadas em toda a reta real. Prove que se f for sempre positiva e côncava em todo ponto, então f é constante.

3 Método da Substituição

Exercício 1. Calcule a integral fazendo a substituição sugerida:

- (a) $\int \cos 2x \, dx, u = 2x$ (b) $\int x e^{-x^2} \, dx, u = -x^2$
 (c) $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx, u = x^3 + 1$ (d) $\int \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta, u = \sin \theta$
 (e) $\int \frac{x^3}{x^4 - 5} \, dx, u = x^4 - 5$ (f) $\int \sqrt{2t + 1} \, dt, u = 2t + 1$

Exercício 2. Calcule a integral indefinida:

- (a) $\int x \sqrt{1 - x^2} \, dx$ (b) $\int (3x - 2)^{20} \, dx$ (c) $\int \cos(\pi t/2) \, dt$
 (d) $\int \sin \pi t \, dt$ (e) $\int \cos^3 \theta \sin \theta \, d\theta$ (f) $\int \frac{e^u}{(1 - e^u)^2} \, du$
 (g) $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} \, dx$ (h) $\int \frac{(\log x)^2}{x} \, dx$ (i) $\int \cos^4 \theta \sin \theta \, d\theta$
 (j) $\int x^2 e^{x^3} \, dx$ (k) $\int \sin t \sqrt{1 + \cos t} \, dt$ (l) $\int \sec^2 2\theta \, d\theta$
 (m) $\int y^2 (4 - y^3)^{2/3} \, dy$ (n) $\int e^{-5r} \, dr$ (o) $\int \frac{z^2}{z^3 + 1} \, dz$
 (p) $\int \sin x \sin(\cos x) \, dx$ (q) $\int x \sqrt{x + 2} \, dx$ (r) $\int \frac{dx}{ax + b}$
 (s) $\int (x^2 + 1)(x^3 + 3x)^4 \, dx$ (t) $\int 5^t \sin 5^t \, dt$ (u) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} \, dx$
 (v) $\int e^{\cos t} \sin t \, dt$ (w) $\int \frac{x}{x^2 + 4} \, dx$ (x) $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2} \, dx$

Exercício 3. Calcule:

- (a) $\int \frac{2^t}{2^t + 3} \, dt$ (b) $\int \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{1 + \tan t}}$ (c) $\int \sinh^2 x \cosh x \, dx$
 (d) $\int \frac{\cos(\log t)}{t} \, dt$ (e) $\int \frac{x}{1 + x^4} \, dx$ (f) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} \, dx$
 (g) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x}$ (h) $\int \frac{1 + x}{1 + x^2} \, dx$ (i) $\int x(2x + 5)^8 \, dx$
 (j) $\int x^2 \sqrt{2 + x} \, dx$ (k) $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$ (l) $\int \tan^2 \theta \sec^2 \theta \, d\theta$

Exercício 4. Calcule as seguintes integrais:

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\int_0^1 \cos(\pi t/2) dt$ | (b) $\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x} dx$ | (c) $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$ |
| (d) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$ | (e) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^3 + x^4 \tan x dx$ | (f) $\int_1^2 x\sqrt{x-1} dx$ |
| (g) $\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2} dx$ | (h) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\log x}}$ | (i) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| (j) $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \operatorname{cosec}^2(t/2) dt$ | (k) $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin(\sin x) dx$ | (l) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^4}$ |

Exercício 5. Mostre que

$$0 \leq \int_{-2}^3 \sin \sqrt[3]{x} dx \leq 1$$

Exercício 6. Se f é contínua em $[0, \pi]$, use a substituição $u = \pi - x$ para demonstrar que

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

Exercício 7. Use o exercício anterior para calcular

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Exercício 8. Calcule $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^7} - \sqrt[7]{1-x^3} dx$

4 Áreas entre curvas e Volumes

Exercício 1. Esboce a região entre a curva $x = 2y - y^2$ e o eixo y e calcule a sua área.

Exercício 2. Esboce a região entre as curvas $y = 1$, $y = \sqrt[4]{x}$ e o eixo y e calcule a sua área.

Exercício 3. Esboce a região entre as curvas e calcule sua área:

- (a) $y = 1/x$, $y = \sqrt[3]{x}$ e $x = 8$ (b) $y = e^x$, $y = xe^{x^2}$ e $x = 0$
 (c) $x = y^2 - 2$, $x = e^y$, $y = 1$ e $y = -1$ (d) $y = \sec^2 x$, $y = 8 \cos x$, $-\pi/3 \leq x \leq \pi/3$
 (e) $y = \sqrt{x-1}$ e $x - y = 1$ (f) $y = \cos \pi x$ e $y = 4x^2 - 1$
 (g) $y = \sinh x$, $y = e^x$, $x = 0$ e $x = 2$

Exercício 4. Encontre a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$, pela reta tangente à parábola no ponto $(1, 1)$ e pelo eixo x .

Exercício 5. Existe uma reta que passa pela origem e que divide a região delimitada pela parábola $y = x - x^2$ e o eixo x em duas regiões de áreas iguais. Qual é a inclinação dessa reta?

Exercício 6. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno das retas especificadas.

- (a) $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ em torno do eixo x
 (b) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $x = 5$ em torno do eixo x
 (c) $y = e^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$ em torno do eixo x
 (d) $y = \log x$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$ em torno do eixo y
 (e) $x = 2 - y^2$, $x = y^4$ em torno do eixo y

- (f) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 2$ em torno de $y = -3$
- (g) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/4$ em torno de $y = -1$
- (h) $y = x$, $y = \sqrt{x}$ em torno de $x = 2$

Exercício 7. Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

- (a) $\pi \int_0^{\pi} \sin x \, dx$ (b) $\pi \int_0^1 y^4 - y^8 \, dy$
- (c) $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1] \, dx$ (d) $\pi \int_1^4 [3^2 - (3 - \sqrt{x})^2] \, dx$

Exercício 8. Encontre os seguintes volumes:

- (a) Tronco de cone circular reto com altura h , raio da base inferior R , raio da base superior r .
- (b) Calota de esfera de raio r e altura h .
- (c) Tronco de pirâmide com base quadrada de lado b , topo quadrado de lado a e altura h .

Exercício 9. Uma tigela tem a forma de um hemisfério com diâmetro de 30 cm. Uma bola pesada com diâmetro de 10 cm é colocada dentro da tigela, e depois despeja-se água até uma profundidade de h centímetros. Encontre o volume de água na tigela.

Exercício 10. Um barril com altura h e raio máximo R é construído pela rotação em torno do eixo x da parábola $y = R - cx^2$, $-h/2 \leq x \leq h/2$, onde c é uma constante positiva. Mostre que o raio de cada extremidade do barril é $r = R - d$, onde $d = ch^2/4$. Em seguida, mostre que o volume delimitado pelo barril é

$$V = \frac{1}{3}\pi h \left(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2 \right)$$

Exercício 11. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região entre as curvas $y = 0$ e $y = x(x - 1)^2$ em torno do eixo y .

Exercício 12. Calcule os volumes dos sólidos de revolução em torno do eixo y das seguintes regiões:

- (a) $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ (b) $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$
(c) $y = x^2$, $y = 6x - 2x^2$

Exercício 13. Calcule os volumes dos sólidos de revolução em torno do eixo x das seguintes regiões:

- (a) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$ (b) $y = x^{3/2}$, $y = 8$, $x = 0$
(c) $x = 1 + (y - 2)^2$, $x = 2$ (d) $x + y = 4$, $x = y^2 - 4y + 4$

Exercício 14. Calcule o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno da reta dada:

- (a) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$ em torno de $x = 3$
(b) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ em torno de $x = 1$
(c) $y = \sqrt{x}$, $x = 2y$ em torno de $x = 5$

5 Integração por partes

Exercício 1. Calcule as integrais usando integração por partes com as escolhas de u e dv indicadas:

$$(a) \int x e^{2x} dx, \quad u = x, \quad dv = e^{2x} dx \quad (b) \int \sqrt{x} \log x dx, \quad u = \log x, \quad dv = \sqrt{x} dx.$$

Exercício 2. Calcule a integral

$$\begin{array}{lll} (a) \int x \cos 5x dx & (b) \int r e^{r/2} dr & (c) \int (x^2 + 2x) \cos x dx \\ (d) \int \arccos x dx & (e) \int t^4 \log t dt & (f) \int t \operatorname{cosec}^2 t dt \\ (g) \int \log \sqrt[3]{x} dx & (h) \int t \operatorname{sen} 2t dt & (i) \int \arctan 2y dy \\ (j) \int x \cosh ax dx & (k) \int \frac{z}{10^z} dz & (l) \int \arctan 4t dt \\ (m) \int z^3 e^z dz & (n) \int \frac{x e^{2x}}{(1+2x)^2} dx & (o) \int \frac{\log x}{x^2} dx \\ (p) \int_0^\pi x \operatorname{sen} x \cos x dx & (q) \int_1^5 \frac{x}{e^x} dx & (r) \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} x \log(\cos x) dx \\ (s) \int_4^9 \frac{\log y}{\sqrt{y}} dy & (t) \int x \tan^2 x dx & (u) \int (\operatorname{arcsen} x)^2 dx \\ (v) \int_1^2 w^2 \log w dw & (w) \int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x) dx & (x) \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx \\ (y) \int_0^t e^s \operatorname{sen}(t-s) ds & (z) \int \arctan \sqrt{x} dx & \end{array}$$

Exercício 3. Calcule:

$$\begin{array}{lll} (a) \int e^{\sqrt{x}} dx & (b) \int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2) d\theta & (c) \int x \log(1+x) dx \\ (d) \int \cos(\log x) dx & (e) \int_0^\pi e^{\cos t} \operatorname{sen} 2t dt & (f) \int \frac{\operatorname{arcsen}(\log x)}{x} dx \end{array}$$

Exercício 4. Encontre:

$$(a) \int \operatorname{sen}^2 x dx \quad (b) \int \operatorname{sen}^4 x dx$$

Exercício 5.* Mostre as seguintes fórmulas de redução:

$$(a) \int (\log x)^n dx = x(\log x)^n - n \int (\log x)^{n-1} dx$$

$$(b) \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$(c) \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

$$(d) \int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx$$

$$(e) \int \sec^n x dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

Exercício 6. Mostre que se $n \in \mathbb{N}$ então $\int_0^1 (\log x)^n dx = (-1)^n n!$

Exercício 7.* Mostre que se $n \in \mathbb{N}$ então $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

Exercício 8.* Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\int e^{-x^2} x^{2n+1} dx$ pode ser expressa por meio de funções elementares.

Exercício 9. Prove que

$$\int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt \right] du = \int_0^x f(u)(x-u) du$$

Exercício 10.* Prove que

$$\binom{n}{k} = \left[(n+1) \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx \right]^{-1}$$

6 Integrais Trigonométricas

Exercício 1. Calcule:

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ | (b) $\int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \cos^5 \theta \, d\theta$ | (c) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta$ |
| (d) $\int_0^{\pi} \cos^4(2t) \, dt$ | (e) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ | (f) $\int \sqrt{\cos \theta} \sin^3 \theta \, d\theta$ |
| (g) $\int \cot x \cos^2 x \, dx$ | (h) $\int \sin^2 x \sin 2x \, dx$ | (i) $\int t \sin^2 t \, dt$ |
| (j) $\int \tan x \sec^3 x \, dx$ | (k) $\int \tan^2 x \, dx$ | (l) $\int \tan^4 x \sec^6 x \, dx$ |
| (m) $\int \tan^3 x \sec x \, dx$ | (n) $\int \tan^5 x \, dx$ | (o) $\int x \sec x \tan x \, dx$ |
| (p) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cot^2 x \, dx$ | (q) $\int \frac{\sin^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$ | (r) $\int x \sin^3 x \, dx$ |
| (s) $\int_0^{\pi/2} (2 - \sin \theta)^2 \, d\theta$ | (t) $\int \frac{\sin(1/t)}{t^2} \, dt$ | (u) $\int \cos \theta \cos^5(\sin \theta) \, d\theta$ |

Exercício 2. Calcule

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\int \frac{\sin t}{\cos^3 t} \, dt$ | (b) $\int \operatorname{cosec}^4 x \cot^6 x \, dx$ | (c) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cosec}^4 \theta \cot^4 \theta \, d\theta$ |
| (d) $\int \sin 8x \cos 5x \, dx$ | (e) $\int \sin 2\theta \sin 6\theta \, d\theta$ | (f) $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \cos 2x} \, dx$ |
| (g) $\int \frac{1 - \tan^2 x}{\sec^2 x} \, dx$ | (h) $\int \frac{dx}{\cos x - 1}$ | (i) $\int x \sin^2(x^2) \, dx$ |
| (j) $\int \sin 3x \sin 6x \, dx$ | (k) $\int \sec^4(x/2) \, dx$ | (l) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x} \, dx$ |

Exercício 3. Mostre que se $m, n \in \mathbb{N}$ então

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$$

Exercício 4. Uma série finita de Fourier é dada pela soma

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^N a_n \sin nx \\ &= a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_N \sin Nx \end{aligned}$$

Mostre que o n -ésimo coeficiente a_n é dado pela fórmula

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

Exercício 5* Mostre que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^\alpha x}{\operatorname{sen}^\alpha x + \cos^\alpha x} \, dx = \frac{\pi}{4}$$

(Sugestão: mostre primeiro que $\int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a f(a-x) \, dx$ para toda função contínua $f(x)$)

7 Substituição Trigonométrica e Hiperbólica

Exercício 1. Calcule a integral usando a substituição trigonométrica indicada:

$$(a) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} dx, \quad x = 3 \sec \theta \quad (b) \int x^3 \sqrt{9 - x^2} dx, \quad x = 3 \sin \theta$$

$$(c) \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx, \quad x = 3 \tan \theta$$

Exercício 2. Calcule:

$$(a) \int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx \quad (b) \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx \quad (c) \int_0^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$(d) \int_2^3 \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}} dx \quad (e) \int_0^{1/2} x \sqrt{1 - 4x^2} dx \quad (f) \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} dx$$

$$(g) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (h) \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}} dx \quad (i) \int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$$

$$(j) \int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5 \sqrt{9x^2 - 1}} \quad (k) \int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{4 + t^2}} \quad (l) \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

$$(m) \int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} dx \quad (n) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} \quad (o) \int_0^1 \sqrt{x - x^2} dx$$

$$(p) \int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx \quad (q) \int x \sqrt{1 - x^4} dx \quad (r) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 2}}$$

$$(s) \int_0^1 x \sqrt{2 - \sqrt{1 - x^2}} dx$$

Exercício 3. Use a substituição hiperbólica $x = a \sinh t$ para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{ar} \sinh \left(\frac{x}{a} \right)$$

Em seguida, use a substituição trigonométrica $x = a \tan t$ na mesma integral para obter

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

Exercício 4. Calcule, primeiro usando substituição trigonométrica e depois hiperbólica, a expressão

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx$$

Exercício 5. A parábola $y = x^2/2$ divide o disco $x^2 + y^2 \leq 8$ em duas partes. Calcule a área de ambas as partes.

8 Integral de funções racionais

Exercício 1. Escreva na forma de decomposição em frações parciais. Não é necessário determinar os coeficientes.

- | | | |
|--|---|---------------------------------|
| (a) $\frac{4+x}{(1+2x)(3-x)}$ | (b) $\frac{x-6}{x^2+x-6}$ | (c) $\frac{1}{x^2+x^4}$ |
| (d) $\frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1}$ | (e) $\frac{x^4+1}{x^5+4x^3}$ | (f) $\frac{t^6+1}{t^6+t^3}$ |
| (g) $\frac{1-x}{x^3+x^4}$ | (h) $\frac{x^2}{x^2+x+6}$ | (i) $\frac{x^3+1}{x^3-3x^2-2x}$ |
| (j) $\frac{x^2-2}{x^3+2x^2-1}$ | (k) $\frac{x^5+1}{(x^2-x)(x^4+2x^2+1)}$ | |

Exercício 2. Calcule a integral:

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\int \frac{x}{x-6} dx$ | (b) $\int \frac{x^2}{x+4} dx$ | (c) $\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)} dx$ |
| (d) $\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1} dx$ | (e) $\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2} dx$ | (f) $\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)} dy$ |
| (g) $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)} dx$ | (h) $\int \frac{1}{(t+4)(t-1)} dt$ | (i) $\int_2^3 \frac{x(3-5x)}{(3x-1)(x-1)^2} dx$ |
| (j) $\int \frac{4x}{x^3+x^2+x+1} dx$ | (k) $\int \frac{x^3+4x+3}{x^4+5x^2+4} dx$ | (l) $\int \frac{1}{x^3-1} dx$ |
| (m) $\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3} dx$ | (n) $\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2} dx$ | (o) $\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x} dx$ |

Exercício 3. Faça uma substituição para expressar o integrando como uma função racional e então calcule a integral:

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ | (b) $\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{x}}$ | (c) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$ |
| (d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx$ | (e) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} dx$ | (f) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$ |
| (g) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx$ | (h) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$ | (i) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2} dx$ |
| (j) $\int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t+2\tan t+2} dt$ | (k) $\int \frac{dx}{1+e^x}$ | (l) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x-3\cos x} dx$ |
| (m) $\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)} dx$ | (n) $\int \frac{\cosh t}{\sinh^2 t+\sinh^4 t} dt$ | |

Exercício 4. Calcule:

(a) $\int \log(x^2 - x + 2) dx$ (b) $\int x \arctan x dx$

Exercício 5. Usando a substituição $t = \tan(x/2)$, calcule:

(a) $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$ (b) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin x - \cos x} dx$
(c) $\int \frac{1}{3 \sin x - 4 \cos x} dx$ (d) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{2 + \cos x} dx$

Exercício 6*. Calcule $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

Exercício 7*. Se f for uma função quadrática tal que $f(0) = 1$ e

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3} dx$$

for uma função racional, encontre o valor de $f'(0)$.

Exercício 8*. Se $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, encontre a decomposição em frações parciais de

$$f(x) = \frac{1}{x^n(x-a)}$$

Exercício 9. Calcule $\int \frac{dx}{x^7 - x}$

Exercício 10*. Calcule $\int \sqrt{\tan x} dx$

Exercício 11*. Calcule $\int \frac{dx}{x^6 + 1}$

9 Integrais Impróprias e Testes de Convergência

Exercício 1. Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria:

$$(a) \int_1^2 \frac{x}{x-1} dx \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx \quad (d) \int_0^{\pi/4} \cot x dx$$

Exercício 2. Determine se as seguintes integrais são convergentes ou divergentes e calcule seu valor quando convergirem:

$$\begin{array}{lll} (a) \int_3^{\infty} \frac{dx}{(x-2)^{3/2}} & (b) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{3-4x} & (c) \int_2^{\infty} e^{-5p} dp \\ (d) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx & (e) \int_0^{\infty} \sin^2 \alpha d\alpha & (f) \int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x} dx \\ (g) \int_e^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^3} dx & (h) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6} dx & (i) \int_{-\infty}^0 \frac{z}{z^4+4} dz \\ (j) \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{y}} dy & (k) \int_0^1 \frac{dx}{x} & (l) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} dx \\ (m) \int_{-\infty}^0 2^r dr & (n) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)^3} & (o) \int_1^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx \\ (p) \int_0^{\infty} \sin \theta e^{\cos \theta} d\theta \end{array}$$

Exercício 3. Determine se as seguintes integrais são convergentes ou divergentes e calcule seu valor quando convergirem:

$$\begin{array}{lll} (a) \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2+3z+2} & (b) \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx & (c) \int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2} dx \\ (d) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^2} & (e) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}} & (f) \int_0^5 \frac{1}{\sqrt[3]{5-x}} dx \\ (g) \int_0^1 \frac{3}{x^5} dx & (h) \int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx & (i) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ (j) \int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx & (k) \int_{-\pi/2}^{\pi} \operatorname{cosec} x dx & (l) \int_0^{\pi/2} \tan^2 \theta d\theta \\ (m) \int_0^1 r \log r dr & (n) \int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx & (o) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta \end{array}$$

Exercício 4. Determine se as seguintes integrais convergem ou divergem:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1} dx & \text{(b)} \int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} dx & \text{(c)} \int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}} dx \\ \text{(d)} \int_1^{\infty} \frac{1+\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx & \text{(e)} \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x} dx & \text{(f)} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx \end{array}$$

Exercício 5. Calcule:

$$\text{(a)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx \quad \text{(b)} \int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$$

Exercício 6. Encontre os valores de p para os quais a integral converge e calcule o valor da integral para esses valores de p .

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \quad \text{(b)} \int_0^1 x^p \log x \, dx \quad \text{(c)} \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^p}$$

Exercício 7. Calcule, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$

Exercício 8.

(a) Mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} x \, dx$ é divergente.

(b) Verifique que $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x \, dx = 0$.

Isso mostra que **NÃO** podemos definir $\int_{-\infty}^{\infty} x \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x \, dx$.

Exercício 9. Se $f(t)$ é contínua para $t \geq 0$, sua transformada de Laplace é a função F definida por

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

e o seu domínio é o conjunto dos números s para os quais a integral converge. Calcule as transformadas de Laplace das seguintes funções:

$$\text{(a)} f(t) = 1 \quad \text{(b)} f(t) = e^t \quad \text{(c)} f(t) = t$$

Exercício 10. Mostre que se $|f(t)| \leq Me^{at}$, então a transformada de Laplace $F(s)$ de f existe para $s > a$.

Exercício 11. Mostre que

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

Exercício 12.* Mostre que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{-\log y} dy$$

Exercício 13.* Encontre o valor da constante C para o qual a integral converge e calcule o valor da integral:

$$(a) \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{C}{x + 2} \right) dx \quad (b) \int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{C}{3x + 1} \right) dx$$

Exercício 14. Suponha que f é contínua em $[0, \infty)$ e que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. É possível que $\int_0^\infty f(x) dx$ seja convergente?

Exercício 15.* Prove que $\int_0^\infty \sin^2 \left[\pi \left(x + \frac{1}{x} \right) \right] dx$ não existe.

Exercício 16.* Calcule $\int_{-1}^\infty \left(\frac{x^4}{1 + x^6} \right)^2 dx$

Exercício 17.* Prove que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + kx^{10}} = 0$

Exercício 18. Mostre que se $a > 0$, então

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a \frac{h}{h^2 + x^2} dx = \pi$$

Exercício 19.* Se $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ converge para todo $a > 0$ e se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$, mostre que

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx$$

converge para α e β positivos e tem o valor $L \log \frac{\beta}{\alpha}$.

10 Comprimento de Arco

Exercício 1. Usando a fórmula de comprimento de arco, calcule o comprimento de arco das seguintes curvas e compare com o resultado da geometria básica:

(a) $y = 2x - 5, \quad x \in [-1, 3]$ (b) $y = \sqrt{2 - x^2}, \quad x \in [0, 1]$

Exercício 2. Encontre o comprimento das seguintes curvas:

(a) $y = 1 + 6x^{3/2}, \quad x \in [0, 1]$ (b) $36y^2 = (x^2 - 4)^3, \quad x \in [2, 3], \quad y \geq 0$

(c) $y = \log(\cos x), \quad x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ (d) $y = \log(\sec x), \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

(e) $y = 3 + \frac{1}{2} \cosh 2x, \quad x \in [0, 1]$ (f) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsen \sqrt{x}$

(g) $y = \log(1 - x^2), \quad x \in [0, \frac{1}{2}]$

Exercício 3. Para a função $f(x) = \frac{1}{4}e^x + e^{-x}$, demonstre que o comprimento de arco em qualquer intervalo tem o mesmo valor que a área sob a curva.

Exercício 4. Encontre a função de comprimento de arco para a curva $y = \arcsen x + \sqrt{1 - x^2}$ com ponto inicial $(0, 1)$.

Exercício 5. Um vento contínuo sopra uma pipa para oeste. A altura da pipa acima do solo a partir da posição horizontal $x = 0$ até $x = 25$ é dada por $y = 50 - 0,1(x - 15)^2$. Ache a distância percorrida pela pipa.

Exercício 6. Um fio pendurado entre os postes localizados nas retas $x = -b$ e $x = b$ adota o formato de uma catenária, dada pela equação $y = c + a \cosh(x/a)$. Calcule o comprimento do fio.

Exercício 7* Prove que a curva definida por

$$y = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

tem comprimento finito, ao passo que a curva contínua definida por

$$y = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é retificável (ou seja, tem comprimento infinito).

11 Áreas de Superfícies de Revolução

Exercício 1. Calcule a área das superfícies de revolução obtidas pela rotação ao redor do eixo x :

- (a) $y = x^3$, $x \in [0, 2]$ (b) $y = \sqrt{5-x}$, $x \in [3, 5]$ (c) $y^2 = x + 1$, $x \in [0, 3]$
 (d) $9x = y^2 + 18$, $x \in [2, 6]$ (e) $y = \cos(x/2)$, $x \in [0, \pi]$ (f) $y = \sin \pi x$, $x \in [0, 1]$

Exercício 2. Calcule a área das seguintes superfícies de revolução em torno do eixo y :

- (a) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, $y \in [0, 1]$ (b) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x$, $x \in [1, 2]$

Exercício 3. Se a curva infinita $y = e^{-x}$, $x \geq 0$ é girada em torno do eixo x , calcule a área da superfície resultante.

Exercício 4. Encontre a área da superfície de revolução obtida a partir da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b$$

em cada caso:

- (a) giro em torno do eixo x (elipsoide ou esferoide prolato)
 (b) giro em torno do eixo y (esferoide oblato)

Exercício 5. Encontre a área da superfície do toro obtido pela rotação do círculo $(x - R)^2 + y^2 = r^2$ em torno do eixo y ($R > r$).

Exercício 6. Mostre que, se girarmos a curva $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ em torno do eixo x , a área da superfície resultante tem o mesmo valor que o volume englobado, para qualquer intervalo $a \leq x \leq b$.

Exercício 7. Mostre que um observador a uma altura H acima do polo norte de uma esfera de raio r pode ver uma parte da esfera que tem área

$$\frac{2\pi r^2 H}{r + H}$$

Exercício 8*. Duas esferas com raios r e R estão colocadas de modo que a distância entre os seus centros é d , onde $d > r + R$. Onde deve ser colocada uma luz na reta que liga os centros de modo a iluminar a maior área total de superfície?

Séries

1 Sequências e Séries

Exercício 1. Usando a definição formal de limite, explique o que significa dizer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 8$.

Exercício 2. Usando a definição formal de limite, explique o que significa dizer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. E quanto a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$?

Exercício 3. Determine se a sequência converge ou diverge. Caso convirja, encontre o limite.

- | | | |
|----------------------------------|--|---|
| (a) $a_n = \frac{3n}{1+6n}$ | (b) $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ | (c) $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ |
| (d) $a_n = 1 + \frac{10^n}{9^n}$ | (e) $a_n = \frac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 1}$ | (f) $a_n = \frac{\log n}{\log 2n}$ |
| (g) $a_n = \sin n$ | (h) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ | (i) $a_n = \sqrt[n]{n}$ |
| (j) $a_n = 2^{-n} \cos n\pi$ | (k) $a_n = \arctan(\log n)$ | (l) $a_n = n - \sqrt{n+1}\sqrt{n+3}$ |
| (m) $a_n = n \sin(1/n)$ | (n) $a_n = \frac{n!}{2^n}$ | |

Exercício 4. Determine se a sequência é crescente, decrescente ou não monótona. Diga também se ela é limitada.

- (a) $a_n = \cos n$ (b) $a_n = n(-1)^n$ (c) $a_n = n^3 - 3n + 3$ (d) $a_n = \frac{1-n}{2+n}$

Exercício 5. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

é crescente e limitada. Deduza que ela é convergente e calcule o seu limite.

Exercício 6. Mostre que a sequência

$$a_1 = 2 \quad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

é monótona e limitada. Conclua que converge e calcule o seu limite.

Exercício 7. Mostre pela definição de limite que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ se $|r| < 1$.

Exercício 8. Mostre que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for limitada, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$.

Exercício 9. Explique, usando a definição de limite, o que significa dizer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

Exercício 10. Seja $a_n = \frac{2n}{3n+1}$.

(a) Determine se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

(b) Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Exercício 11. Determine se a série converge ou diverge. Caso convirja, calcule seu valor.

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right)$ | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$ | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$ |
| (d) $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n}{n+1}$ | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$ |
| (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\pi^n}$ | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{1-2n}$ | (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$ |
| (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$ | |

Exercício 12. Encontre os valores de x para os quais a série converge. Calcule a soma da série para esses valores de x .

- | | | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|--|----------------------------------|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^n x^n$ | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n$ | (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(9x-2)^n}{3^n}$ | (d) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$ | (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{3^n}$ |
|--------------------------------------|-----------------------------------|--|----------------------------------|--|

Exercício 13. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n+1)!$. Calcule as primeiras somas parciais s_1, s_2, s_3, s_4 . Conjecture uma fórmula para s_n e prove sua validade usando indução matemática. Em seguida, calcule o valor da soma da série.

Exercício 14. O Conjunto de Cantor é construído da seguinte forma. Começamos com o intervalo fechado $[0, 1]$ e removemos o intervalo aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Isso nos leva a dois intervalos, $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$, e removemos cada terço aberto intermediário. Quatro intervalos permanecem, e novamente repetimos o processo. Continuamos esse procedimento indefinidamente, em cada passo removendo o terço aberto do meio de cada intervalo remanescente do passo anterior. O Conjunto de Cantor consiste de todos os números em $[0, 1]$ que permanecem depois de todos os infinitos intervalos terem sido removidos.

Mostre que o comprimento total de todos os intervalos que foram removidos é 1. Nesse sentido, dizemos que o Conjunto de Cantor tem medida nula. Apesar disso, o Conjunto de Cantor contém infinitos números. (Mais do que isso: ele é um exemplo de conjunto não enumerável de medida nula, ou seja, que não pode ser posto em uma correspondência bijetora com os números naturais).

Exercício 15*. Encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$$

(Sugestão: mostre primeiro que $\tan \frac{1}{2}x = \cot \frac{1}{2}x - 2 \cot x$)

Exercício 16*. Encontre a soma da série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \dots$$

onde os termos são os recíprocos dos inteiros positivos cujos únicos fatores primos são 2 e 3.

Exercício 17. Encontre a soma da série $\sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

2 Testes de Convergência

Exercício 1. Suponha que f seja contínua, positiva e decrescente para $x \geq 1$ e $a_n = f(n)$. Desenhando uma figura, coloque em ordem crescente as três quantidades:

$$\int_1^6 f(x) dx \quad \sum_{i=1}^5 a_i \quad \sum_{i=2}^6 a_i$$

Exercício 2. Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n-1} & \text{(c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} & \text{(d)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^3} \\ \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-0,3} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^2} & \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2} & \end{array}$$

Exercício 3. Determine se a série converge ou diverge.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}} & \text{(b)} \sum_{n=3}^{\infty} n^{-0,9999} & \text{(c)} 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \dots & \\ \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2} & \text{(e)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} & \text{(f)} \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{19} + \dots & \\ \text{(g)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} & \text{(h)} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k} & \text{(i)} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \dots & \\ \text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n}} & & & \end{array}$$

Exercício 4. Encontre os valores de p para os quais a série converge:

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p \quad \text{(c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n [\log(\log n)]^p} \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^p}$$

Exercício 5. (*Função Zeta de Riemann*) A função ζ é inicialmente definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

onde $s \in \mathbb{C}$. Nesse formato, porém, ela não converge para todos os números complexos. Para quais números reais x a função $\zeta(x)$ (no formato acima) está definida?

Exercício 6.* (*Constante de Euler-Mascheroni*) Mostre que a sequência

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

converge. Seu limite é denotado como γ e é conhecido como constante de Euler-Mascheroni.

(Sugestão: mostre primeiro que $t_n > 0$ ao comparar a série harmônica truncada com uma integral. Depois analise o comportamento de $t_{n+1} - t_n$.)

Exercício 7. Encontre todos os valores positivos de b para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\log n}$ converge.

Exercício 8. Encontre todos os valores de c para os quais a série converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Exercício 9. Verifique se as séries abaixo convergem:

- | | | | |
|---|--|---|---|
| (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 5}$ | (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3 - 5}$ | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 8}$ | (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ |
| (e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3 + 4k + 3}}$ | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{e^n}$ | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 + n}$ |
| (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + 1}{ne^n + 1}$ | (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n^2}$ | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$ | (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ |
| (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ | (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan \frac{1}{n}$ | (o) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3m^4 + 1}}$ | (p) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$ |
| (q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \cos n}{n^3}$ | (r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$ | (s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ | |

Exercício 10. A representação decimal de um número entre 0 e 1 é $0, d_1 d_2 d_3 \dots$,

onde $d_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, que significa

$$0, d_1 d_2 d_3 \dots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots$$

Mostre que essa série sempre converge para qualquer escolha de $d_1, d_2, \dots \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$.

Exercício 11. Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Mostre que se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ também converge.

Exercício 12. Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

Mostre que se $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ também diverge.

Exercício 13* Mostre que se $a_n \geq 0$ e $\sum a_n$ converge, então $\sum a_n^2$ também converge.

Exercício 14. Verifique se a série converge ou diverge:

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$ | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{2n+1}$ | (c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\log n}$ |
| (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{1 + \sqrt{n}}$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n}$ | (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ |
| (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$ | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ | |

Exercício 15. O que significa dizer que uma série é absolutamente convergente? E condicionalmente convergente?

Exercício 16. Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$ | (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^2+1}$ | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1}$ |
|--|--|--|

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3 + 2}} \quad (e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n} \quad (f) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$$

Exercício 17. Para quais valores de p a série é convergente?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p} \quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\log n)^p}{n} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

Exercício 18.* Em um dos exercícios anteriores, vimos que a constante de Euler-Mascheroni γ satisfaz

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

Seja h_n a soma parcial da série harmônica e a_n a soma parcial da série harmônica alternada.

- (a) Mostre que (a_n) converge.
- (b) Mostre que $a_{2n} = h_{2n} - h_n$
- (c) Use os itens anteriores e a caracterização de γ para provar que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \log 2$$

Exercício 19. Use o teste da razão para determinar se a série converge:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^n n^3} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \pi^n}{(-3)^{n-1}} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$$

$$(e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Exercício 20. Use o teste da raiz para determinar se a série converge:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1} \right)^n \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\log n)^n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} (\arctan n)^n$$

Exercício 21. Determine se série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n} & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-9)^n}{n 10^{n+1}} & \text{(c)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\log n} \right)^n & \text{(d)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \log n} \\
 \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 5^{2n}}{10^{n+1}} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/6)}{1 + n\sqrt{n}} & \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n &
 \end{array}$$

Exercício 22. Defina $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

Determine se $\sum a_n$ converge ou diverge.

Exercício 23. Para quais valores de $k \in \mathbb{N}$ a série abaixo converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

3 Séries de Potências

Exercício 1. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência das séries de potências abaixo:

$$\begin{array}{lllll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}} & \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n & \text{(g)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \log n} & \text{(h)} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\log n}{n} x^n & \text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\log n)^2} \end{array}$$

Exercício 2. Se $k \in \mathbb{N}$, encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

Exercício 3*. Sejam p, q números reais, $p < q$. Encontre uma série de potências cujo intervalo de convergência seja:

$$\text{(a)} (p, q) \quad \text{(b)} (p, q] \quad \text{(c)} [p, q) \quad \text{(d)} [p, q]$$

Exercício 4.* É possível encontrar uma série de potências com intervalo de convergência $[0, \infty)$? Explique.

Exercício 5. Encontre uma representação em série de potências para cada uma das funções abaixo e determine o seu raio de convergência:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = \frac{1}{1+x} & \text{(b)} f(x) = \frac{1}{1-x^2} & \text{(c)} f(x) = \frac{2}{3-x} \\ \text{(d)} f(x) = \frac{x^2}{x^4+16} & \text{(e)} f(x) = \frac{x+a}{x^2+a^2}, (a > 0) & \text{(f)} f(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+3} \\ \text{(g)} f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+2} \end{array}$$

Exercício 6. Use derivação para encontrar uma representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Determine seu raio de convergência.

Exercício 7. Encontre uma representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

e determine seu raio de convergência.

Exercício 8. Encontre uma série de potências para $\log(1-x)$ utilizando integração. Em seguida, faça $x = 1/2$ e encontre uma expressão de $\log 2$ como uma série.

Exercício 9. Represente cada uma das seguintes funções como série de potências:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \frac{1+x}{(1-x)^2} & \text{(b)} \quad f(x) &= \log(5-x) & \text{(c)} \quad f(x) &= x^2 \arctan x^3 \\ \text{(d)} \quad f(x) &= \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

Exercício 10. Calcule as integrais indefinidas como séries de potências e determine os raios de convergência.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int \frac{t}{1-t^8} dt & \quad \text{(b)} \quad \int x^2 \log(1+x^2) dx & \text{(c)} \quad \int \frac{\arctan x}{x} dx \\ \text{(d)} \quad \int x \log(1+x^2) dx & \end{aligned}$$

Exercício 11.* Mostre que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é solução da equação diferencial

$$f'(x) = f(x).$$

Em seguida, prove que $e^x = f(x)$.

Exercício 12. Use a série de potências de $\arctan x$ para demonstrar a seguinte

expressão de π como série infinita:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

Exercício 13.* Determine o intervalo de convergência de

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

e calcule o valor da sua soma.

4 Séries de Taylor

Exercício 1. Encontre a série de Maclaurin das seguintes funções, bem como seu raio de convergência:

- (a) $f(x) = (1-x)^{-2}$ (b) $f(x) = \cos x$ (c) $f(x) = 2^x$ (d) $f(x) = \sinh x$
 (e) $f(x) = \log(1+x)$

Exercício 2. Encontre a série de Taylor das seguintes funções centradas no valor a dado:

- (a) $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$, $a = 2$ (b) $f(x) = \log x$, $a = 2$ (c) $f(x) = e^{2x}$, $a = 3$
 (d) $f(x) = \sin x$, $a = \pi$ (e) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 16$ (f) $f(x) = 1/x^2$, $a = -3$

Exercício 3. Use a série binomial para expandir a função como série de potências. Diga qual é o raio de convergência.

- (a) $\sqrt[4]{1-x}$ (b) $\frac{1}{(2+x)^3}$ (c) $\sqrt[3]{8+x}$ (d) $(1-x)^{3/4}$

Exercício 4. Obtenha a série de Maclaurin das seguintes funções:

- (a) $f(x) = \arctan x^2$ (b) $f(x) = x \cos 2x$ (c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ (d) $f(x) = \sin^2 x$

Exercício 5. Use a fórmula

$$\operatorname{ar} \tanh x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

e a série de Taylor de $\log(1+x)$ para mostrar que

$$\operatorname{ar} \tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Exercício 6. Calcule a integral como uma série infinita:

$$(a) \int \sqrt{1+x^3} dx \quad (b) \int \frac{\cos x - 1}{x} dx \quad (c) \int x^2 \sin x^2 dx$$

$$(d) \int \arctan x^2 dx \quad (e) \int x^2 e^{-x^2} dx$$

Exercício 7. Encontre a soma da série:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n5^n} \quad (c) 1 - \log 2 + \frac{(\log 2)^2}{2!} - \frac{(\log 2)^3}{3!} + \dots$$

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1} (2n+1)!} \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n} (2n)!} \quad (f) \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

$$(g) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$$

Exercício 8. Encontre a série de Taylor de $\arcsen x$ em torno de $x = 0$ usando

$$\arcsen x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exercício 9. Encontre as séries de Taylor das seguintes funções em torno de $x = 0$:

$$(a) \operatorname{arsenh} x \quad (b) \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (c) \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$$

Exercício 10.*

(a) Mostre que a série de Taylor da função

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \quad \text{é} \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n,$$

onde (f_n) é a sequência de Fibonacci, dada por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ($n \geq 2$). (Sugestão: escreva $x/(1-x-x^2) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ e multiplique os dois lados por $(1-x-x^2)$)

(b) Escreva $f(x)$ na forma de soma de frações parciais para encontrar a série de Taylor de uma forma diferente, obtendo uma fórmula explícita para f_n em função de n .