Aula 01

Banco do Brasil - Matemática - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

25 de Dezembro de 2022

Índice

APRESENTAÇÃO DA AULA

Fala, pessoal!

O principal assunto da aula de hoje é **equivalências lógicas.**

O entendimento da aula é muito importante, porém **igualmente importante** é que você **DECORE** as principais equivalências lógicas. Equivalências lógicas existem para serem usadas, e o uso delas requer que você tenha as principais fórmulas "**no sangue**".

Em seguida, será abordado **álgebra de proposições**. Nesse assunto, você deve focar nas propriedades **comutativa**, **associativa** e **distributiva**.

Como de costume, vamos exibir um **resumo** logo no **início de cada tópico** para que você tenha uma visão geral do conteúdo antes mesmo de iniciar o assunto.

Conte comigo nessa caminhada =)

Prof. Eduardo Mocellin.

@edu.mocellin

EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS

Equivalências lógicas

Duas proposições **A** e **B** são **equivalentes** quando todos os **valores lógicos** (V ou F) assumidos por elas **são iguais** para **todas as combinações de valores lógicos atribuídos às proposições simples que as compõem**.

Equivalências fundamentais

$$p\rightarrow q \equiv \sim q\rightarrow \sim p$$
Contrapositiva

$$p\rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$
Transformação da condicional em disjunção inclusiva

$$p \vee q \equiv \sim p\rightarrow q$$
Transformação da disjunção inclusiva em condicional

$$p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$$
Transformação da bicondicional em condicional/conjunção

Equivalências provenientes da negação de proposições

Dupla negação da proposição simples

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

Negação da conjunção e da disjunção inclusiva (leis de De Morgan)

Para negar "e": **negar ambas** as proposições e **trocar por "ou"**.

$$\sim (p\wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Para negar "ou": **negar ambas** as proposições e **trocar por "e"**.

$$\sim (p\vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

Negação da condicional

$$\sim (p\rightarrow q) \equiv p\wedge \sim q$$

Negação da disjunção exclusiva

$$\sim(p\veebar q) \equiv p\leftrightarrow q$$

Negação da bicondicional

$$\sim(p\leftrightarrow q) \equiv p\veebar q$$

$$\sim(p\leftrightarrow q) \equiv (\sim p)\leftrightarrow q$$

$$\sim(p\leftrightarrow q) \equiv p\leftrightarrow(\sim q)$$

$$\sim(p\leftrightarrow q) \equiv (p\wedge\sim q) \vee (q\wedge\sim p)$$

Outras equivalências
Equivalência do conectivo bicondicional $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p) \leftrightarrow (\sim q)$ Negação da conjunção para a forma condicional $\sim(p \land q) \equiv p \rightarrow \sim q$ $\sim(p \land q) \equiv q \rightarrow \sim p$ Conjunção de condicionais Quando o **termo comum** é o **consequente**, a equivalência apresenta uma **disjunção inclusiva** no **antecedente**. $(p \rightarrow r) \land (q \rightarrow r) \equiv (p \lor q) \rightarrow r$ Quanto o **termo comum** é o **antecedente**, a equivalência apresenta uma **conjunção** no **consequente**. $(p \rightarrow q) \land (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \land r)$

O que é uma equivalência lógica

Quando duas proposições apresentam a mesma tabela-verdade dizemos que as **proposições são equivalentes.**

A representação da equivalência lógica é dada pelo o símbolo **⇔** ou **≡**. Se **A** é equivalente a **B**, podemos escrever de duas maneiras:

A ⇔ B

A ≡ B

Observação: o símbolo de equivalência ⇔ é diferente do conectivo bicondicional ↔

Informalmente, podemos dizer que duas proposições são equivalentes quando elas têm o mesmo significado. Exemplo:

a: "Eu moro em Taubaté."

b: "Não é verdade que eu não moro em Taubaté."

O conceito de **equivalência lógica** pode ser melhor detalhado assim:

TOME NOTA!

Duas proposições **A** e **B** são **equivalentes** quando todos os **valores lógicos** (V ou F) assumidos por elas **são iguais** para **todas as combinações de valores lógicos atribuídos às proposições simples que as compõem**.

Vejamos um exemplo:

Mostre que as proposições (p→q)∧(q→p) e p↔q são equivalentes.

Para resolver esse problema, basta construirmos a tabela-verdade de ambas proposições. A bicondicional já é conhecida por nós, então precisamos simplesmente confeccionar a tabela-verdade de **(p→q)∧(q→p)** e comparar com a bicondicional **p↔q**.

Passo 1: determinar o número de linhas da tabela-verdade.

Número de linhas = $2^n = 2^2 = 4$.

Passo 2: desenhar o esquema da tabela-verdade.

Devemos determinar:

(p→q)∧(q→p) ; **(p→q)** ; **(q→p)** ; **p** ; **q**

Podemos também incluir, de imediato, na nossa tabela a condicional **p↔q**, pois vamos compará-la com a expressão que estamos querendo obter.

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$

Passo 3: atribuir V ou F às proposições simples de maneira alternada.

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Passo 4: obter o valor das demais proposições.

Para os condicionais, temos que eles só serão falsos nos casos em que o precedente é verdadeiro e o consequente é falso.

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$
V	V	V	V		
V	F	F	V		
F	V	V	F		
F	F	V	V		

A conjunção **(p→q)∧(q→p)** só será verdadeira quando **(p→q)** for verdadeiro e quando **(q→p)** for verdadeiro.

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	
V	F	F	V	F	
F	V	V	F	F	
F	F	V	V	V	

Para a bicondicional, já sabemos que ela será verdadeira quando **p** e **q** forem ambos verdadeiros ou ambos falsos.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Podemos perceber da análise da tabela-verdade acima que **(p→q)∧(q→p)** e **p↔q** assumem os exatos mesmos valores lógicos para todas as possibilidades de **p** e **q**. Logo, as proposições são equivalentes. Veja:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Podemos escrever:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

ou

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Equivalências fundamentais

Existem quatro equivalências fundamentais que devem ser entendidas e memorizadas. Dê especial atenção aos três primeiros casos que não só caem, mas **despencam** em provas de concurso público.

A primeira equivalência fundamental é conhecida como **contrapositiva da condicional:**

$$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$$

A equivalência é realizada do seguinte modo:

1. **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
2. **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Como exemplo, sejam as proposições:

p: “Hoje choveu.”

q: “João fez a barba.”

A condicional dessas duas proposições pode ser escrita por:

$p \to q$: "**Se** [hoje choveu], **então** [João fez a barba]."

Observe que a frase seguinte é equivalente:

$\sim q \to \sim p$: "**Se** [João **não** fez a barba], **então** [**não** choveu]."

Um erro muito explorado pelas bancas é dizer que **$p \to q$** seria equivalente a **$\sim p \to \sim q$**. Isso porque é muito comum no dia-a-dia as pessoas cometerem esse erro.

Observe o exemplo acima: "se hoje choveu, então João fez a barba". Vamos supor que não choveu. O que podemos afirmar sobre barba de João? Absolutamente nada, ele pode tanto ter feito quanto não ter feito a barba.

Por outro lado, podemos afirmar sem dúvida que **$\sim q \to \sim p$**, isto é, "se João não fez a barba, então hoje não choveu".

Em resumo: $p \to q$ não é equivalente a $\sim p \to \sim q$.

Mostre que são equivalentes p→q e ~q→~p.

Para mostrar a equivalência, montaremos a tabela-verdade de **~q→~p** e compararemos com **p→q**.

<u>**Passos 1, 2 e 3:**</u> **determinar o número de linhas, desenhar o esquema e atribuir V ou F às proposições simples de maneira alternada.**

Vamos também incluir **p→q** para fins de comparação.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$p \rightarrow q$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

<u>**Passo 4:**</u> **obter o valor das demais proposições.**

Para obter **~p** e **~q**, basta inverter o valor lógico de **p** e de **q**.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$p \rightarrow q$
V	V	F	F		
V	F	F	V		
F	V	V	F		
F	F	V	V		

Para obter **~q→~p**, basta observar que ela só será falsa quando **~q** for verdadeiro **~p** for falso.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$p \rightarrow q$
V	V	F	F	V	
V	F	F	V	F	
F	V	V	F	V	
F	F	V	V	V	

Por fim, podemos incluir na tabela a condicional **p→q** e comparar os valores lógicos assumidos por **~q→~p**.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$p \rightarrow q$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Observe que os valores lógicos são exatamente iguais e, portanto, **p→q** e **~q→~p** são equivalentes.

p→q ≡ ~q→~p

Vamos resolver dois exercícios envolvendo essa equivalência que acabamos de aprender.

(CBM AM/2022) Um antigo ditado diz: “Se há fumaça então há fogo”.

Uma sentença logicamente equivalente é

a) se há fogo então há fumaça.

b) se não há fumaça então não há fogo.

c) se não há fogo, então não há fumaça.

d) se não há fumaça pode haver fogo.

e) se há fogo então pode haver fumaça.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

u: "Há fumaça."

o: "Há fogo."

A sentença original pode ser descrita por **u→o**:

u→o: “**Se** [há fumaça], **então** [há fogo]”.

Uma equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

$$u \to o \equiv {\sim}o \to {\sim}u$$

A proposição equivalente pode ser descrita por:

~o→~u: "**Se** [**não** há fogo], **então** [**não** há fumaça]."

Gabarito: Letra C.

(Pref. Bagé/2020) Uma proposição equivalente de “Se a prova está difícil, então Antônio não será aprovado no concurso” é:

a) A prova está difícil e Antônio não será aprovado no concurso.

b) Se Antônio for aprovado no concurso, então a prova não está difícil.

c) A prova está fácil e Antônio foi aprovado no concurso.

d) A prova está fácil e Antônio não foi aprovado no concurso.

e) A prova não está fácil e Antônio foi aprovado no concurso.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

p: "A prova está difícil."

a: "Antônio será aprovado no concurso."

A proposição original pode ser descrita por **p→~a**:

p→~a: “**Se** [a prova está difícil], **então** [Antônio **não** será aprovado no concurso].”

Uma equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

p→~a ≡ ~(~a)→~p

Como a dupla negação de **a** corresponde à própria proposição **a**, a condicional equivalente pode também ser descrita por **a→~p**.

p→~a ≡ a→~p

Logo, temos a seguinte proposição equivalente:

a→~p: "**Se** [Antônio for aprovado no concurso], **então** [a prova **não** está difícil]."

Gabarito: Letra B.

INDO MAIS FUNDO!

Na questão anterior definimos originalmente a seguinte **sentença declarativa <u>afirmativa</u>**:

a: "Antônio será aprovado."

A sua negação corresponde a:

~a: "Antônio **<u>não</u>** será aprovado."

A proposição original, nesse caso, foi descrita por **p→~a**.

Poderíamos ter resolvido a questão definindo originalmente uma sentença declarativa <u>negativa</u>. **<u>Isso em nada altera o gabarito</u>**. Poderíamos, portanto, ter definido a proposição **a** como:

a: "Antônio **<u>não</u>** será aprovado."

Nesse caso, a sua negação seria:

~a: "Antônio será aprovado."

A proposição original, a partir dessas novas definições, seria descrita por **p→a**.

A seguir, vamos resolver a mesma questão de outro modo. **<u>Compare com a resolução anterior</u>**.

(Pref. Bagé/2020) Uma proposição equivalente de "Se a prova está difícil, então Antônio não será aprovado no concurso" é:

a) A prova está difícil e Antônio não será aprovado no concurso.

b) Se Antônio for aprovado no concurso, então a prova não está difícil.

c) A prova está fácil e Antônio foi aprovado no concurso.

d) A prova está fácil e Antônio não foi aprovado no concurso.

e) A prova não está fácil e Antônio foi aprovado no concurso.

Comentários:

Considere as proposições simples:

p: "A prova está difícil."

a: "Antônio **<u>não</u>** será aprovado."

A proposição original é descrita por **p→a**:

p→a: “**Se [**a prova está difícil**]**, **então [**Antônio **não** será aprovado no concurso**]**.”

Uma equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

p→a ≡ ~a→~p

Logo, temos a seguinte proposição equivalente:

~a→~p: "**Se [**Antônio for aprovado no concurso**]**, **então [**a prova **não** está difícil**]**."

Gabarito: Letra B.

A segunda equivalência fundamental é a **transformação da condicional em disjunção inclusiva:**

p→q ≡ ~pVq

A equivalência é realizada do seguinte modo:

1. **Nega-se o primeiro termo;**
2. **Troca-se a condicional (→) pela disjunção inclusiva (V); e**
3. **Mantém-se o segundo termo.**

Como exemplo, considere novamente a seguinte condicional:

p→q: "**Se [**hoje choveu**]**, **então [**João fez a barba**]**."

Observe que a frase seguinte é equivalente:

~pVq: "**[**Hoje **não** choveu**]** **ou [**João fez a barba**]**."

Mostre que são equivalentes p→q e ~pVq

Para mostrar a equivalência, montaremos a tabela-verdade de **~pVq** e compararemos com **p→q**.

<u>Passos 1, 2 e 3:</u> determinar o número de linhas, desenhar o esquema e atribuir V ou F às proposições simples de maneira alternada.

Vamos também incluir **p→q** para fins de comparação.

p	q	~p	~pVq	p→q
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

<u>Passo 4:</u> obter o valor das demais proposições.

Para obter **~p** basta inverter o valor lógico de **p**.

p	q	~p	~pVq	p→q
V	V	F		
V	F	F		
F	V	V		
F	F	V		

Para obter **~pVq**, basta observar que ela só será falsa quando **~p** e **q** forem ambos falsos.

p	q	~p	~pVq	p→q
V	V	F	V	
V	F	F	F	
F	V	V	V	
F	F	V	V	

Por fim, podemos incluir na tabela a condicional **p→q** e comparar os valores lógicos assumidos por **~pVq**.

p	q	~p	~pVq	p→q
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Observe que os valores lógicos são exatamente iguais e, portanto, **p→q** e **~pVq** são equivalentes.

p→q ≡ ~pVq

Vamos resolver duas questões que utilizam essa equivalência.

(BANESTES/2021) A frase a seguir é um conhecido ditado popular:

“Se não tem cão então caça com gato"

Uma frase logicamente equivalente é:

a) Se tem cão então não caça com gato;

b) Se caça com gato então não tem cão;

c) Tem cão ou caça com gato;

d) Tem cão e caça com gato;

e) Tem cão ou não caça com gato.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

c: "Tem cão."

g: "Caça com gato.**"**

A proposição original pode ser descrita por **∼c→g**:

∼c→g: "**Se [não** tem cão**]**, **então [**caça com gato**]**."

As alternativas apresentam tanto condicionais (→) quanto uma disjunção inclusiva ("ou", ∨) como equivalentes. Devemos, portanto, testar as duas equivalências fundamentais que envolvem a condicional:

- **p→q ≡ ~q→~p** (contrapositiva)
- **p→q ≡ ~p ∨ q** (transformação da condicional em disjunção inclusiva)

Para aplicar a primeira equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

$$\sim c \rightarrow g \equiv \sim g \rightarrow \sim(\sim c)$$

A dupla negação de uma proposição corresponde à proposição original. Ficamos com:

$$\sim c \rightarrow g \equiv \sim g \rightarrow c$$

A proposição equivalente pode ser escrita por:

~g→c:"**Se [não** caça com gato**]**, **então [**tem cão**]**."

Veja que essa equivalência não está nas alternativas apresentadas.

Vamos agora utilizar a segunda equivalência. Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Nega-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a condicional (→) pela disjunção inclusiva (∨); e**
- **Mantém-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

~c→g ≡ ~(~c)∨g

A dupla negação de uma proposição corresponde à proposição original. Ficamos com:

~c→g ≡ c∨g

A proposição equivalente pode ser descrita por:

c∨g: "**[**Tem cão**] ou [**caça com gato**].**"

Gabarito: Letra C.

(CM POA/2012) Se **p** e **q** são proposições, e o símbolo **~** denota negação, o símbolo **V** denota o conetivo ou, o símbolo **∧** denota o conetivo e, símbolo **→** denota o conetivo condicional, então a proposição **(p→~q)** é equivalente à seguinte fórmula

a) **(~p∧~q)**

b) **~(p∨q)**

c) **(~p∧q)**

d) **(~p∨q)**

e) **(~p∨~q)**

Comentários:

Note que a proposição original é uma condicional e, nas alternativas, as possíveis opções de equivalência são a **conjunção ("e", ∧)** e a **disjunção inclusiva ("ou", ∧)**. Nesse caso, **não devemos utilizar a equivalência contrapositiva**, pois ela resulta em uma nova condicional. Devemos, portanto, aplicar a seguinte equivalência fundamental:

p→q ≡ ~p∨q

A equivalência é realizada do seguinte modo:

- **Nega-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a condicional (→) pela disjunção inclusiva (∨); e**
- **Mantém-se o segundo termo.**

Aplicando essa equivalência para **($p\rightarrow\sim q$)**, temos:

$$p\rightarrow(\sim q) \equiv \sim p\vee(\sim q)$$

A equivalência obtida corresponde à **alternativa E**: **($\sim p\vee\sim q$)**.

Gabarito: Letra E.

A terceira equivalência fundamental para sua prova é a **transformação da disjunção em uma condicional**:

$$p\vee q \equiv \sim p\rightarrow q$$

A equivalência é realizada do seguinte modo:

1. **Nega-se o primeiro termo;**
2. **Troca-se a disjunção inclusiva (∨) pela condicional (→); e**
3. **Mantém-se o segundo termo.**

Como exemplo, a disjunção inclusiva "**[**Pedro estuda**] ou [**trabalha**]**" é equivalente a "**Se [**Pedro **não** estuda**]**, **então [**trabalha**]**".

Mostre que são equivalentes $p\vee q$ e $\sim p\rightarrow q$.

Para demonstrar a equivalência, poderíamos estruturar a tabela-verdade de **$\sim p\rightarrow q$** e comparar com **$p\vee q$**, como feito nos exemplos anteriores. Contudo, existe uma outra forma.

Já vimos que uma equivalência da condicional corresponde a negar o primeiro termo e realizar uma disjunção inclusiva com o segundo termo. A equivalência que conhecemos é:

$$p\rightarrow q \equiv \sim p\vee q$$

Como as proposições **p** e **q** são arbitrárias (poderíamos ter chamado de **r** e **s**, por exemplo), podemos chamar a primeira proposição de (**$\sim p$**). Assim, continuamos com a mesma regra: negamos o primeiro termo e realizamos uma disjunção inclusiva com o segundo termo.

$$(\sim p)\rightarrow q \equiv \sim(\sim p)\vee q$$

A dupla negação de uma proposição simples é equivalente à própria proposição simples, isto é, **~(~p)** ≡ **p**. Substituindo esse fato na equivalência acima, temos:

$$(\sim p) \rightarrow q \equiv p \vee q$$

Agora basta alterar a ordem da equivalência acima para chegarmos ao resultado que queremos:

$$p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$$

Vamos a um exercício.

(Pref. Campinas/2019) Uma afirmação equivalente a: “Os cantadores da madrugada saíram hoje ou eu não ouço bem”, é

a) Os cantadores da madrugada não saíram hoje ou eu ouço bem.

b) Os cantadores da madrugada saíram hoje e eu ouço bem.

c) Se os cantadores da madrugada saíram hoje, então eu não ouço bem.

d) Os cantadores da madrugada não saíram hoje e eu ouço bem.

e) Se os cantadores da madrugada não saíram hoje, então eu não ouço bem.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

m: "Os cantadores da madrugada saíram hoje."

o: "Eu ouço bem."

A afirmação original é dada pela disjunção inclusiva **mV~o**.

mV~o: "**[**Os cantadores da madrugada saíram hoje**]** **ou** **[**eu **não** ouço bem**]**."

Sabemos que a disjunção apresenta uma equivalência fundamental dada por **pVq ≡ ~p→q**. Isto é, deve-se realizar o seguinte procedimento:

- **Nega-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a disjunção inclusiva (V) pela condicional (→); e**
- **Mantém-se o segundo termo.**

Aplicando essa equivalência para proposição em questão, ficamos com:

$$m \vee \sim o \equiv \sim m \rightarrow \sim o$$

A equivalência obtida é descrita por:

~m→~o: "**Se** **[**os cantadores da madrugada **não** saíram hoje**]**, **então** **[**eu **não** ouço bem**]**."

Gabarito: Letra E.

DESPENCA NA PROVA!

$$p\rightarrow q \equiv \sim q\rightarrow \sim p$$
$$p\rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$
$$p \vee q \equiv \sim p\rightarrow q$$

Apresentadas as três primeiras equivalências fundamentais, ressalto também que o resultado obtido com o exemplo do primeiro tópico é importante e deve ser memorizado:

$$p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$$

Para exemplificar a equivalência, podemos dizer que a bicondicional "[Durmo] **se e somente se** [estou cansado]" é equivalente a "[**Se** (estou cansado), **então** (durmo)] **e** [**se** (durmo), **então** (estou cansado)]".

Os alunos costumam decorar essa equivalência com do seguinte modo: "uma forma equivalente à bicondicional é **ir e voltar** com a condicional".

ATENÇÃO DECORE!

$$p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$$

Mnemônico: Uma forma equivalente à **bicondicional** é **ir e voltar** com a **condicional**

(ISS RJ/2010) A proposição "um número inteiro é par se e somente se o seu quadrado for par" equivale logicamente à proposição:

a) se um número inteiro for par, então o seu quadrado é par, e se um número inteiro não for par, então o seu quadrado não é par.

b) se um número inteiro for ímpar, então o seu quadrado é ímpar.

c) se o quadrado de um número inteiro for ímpar, então o número é ímpar.

d) se um número inteiro for par, então o seu quadrado é par, e se o quadrado de um número inteiro não for par, então o número não é par.

e) se um número inteiro for par, então o seu quadrado é par.

Comentários:

Sejam as proposições:

p: **"**Um número inteiro é par."

q: "O quadrado de um número inteiro é par."

A proposição composta pode ser assim representada:

p↔q: "[Um número inteiro é par**] se e somente se [**o seu quadrado for par**]**."

A bicondicional é equivalente a:

p↔q ≡ (p→q)∧(q→p)

Não temos alternativa que corresponda a essa última equivalência, porém, se realizarmos a **contrapositiva** de **(q→p)**, encontramos:

p↔q ≡ (p→q)∧(~p→~q)

Esse resultado pode ser lido como:

(p→q)∧ (~p→~q): "**[Se (**um número inteiro for par**)**, **então (**o seu quadrado é par**)]**, **e [se (**um número inteiro **não** for par**)**, **então (**o seu quadrado **não** é par**)]**."

Gabarito: Letra A

Equivalências provenientes da negação de proposições

Antes de adentrarmos no assunto, é importante esclarecer que **não se deve confundir equivalência com negação**.

Ao se construir **negação** de uma proposição, constrói-se uma nova proposição com **valores lógicos sempre opostos aos da proposição original**.

Veremos mais adiante, por exemplo, que a **negação** de **p∧q** é **~p∨~q**. Nesse caso:

- **Não podemos dizer que** **p∧q** é equivalente a **~p ∨~q,**
- **Podemos dizer que** **~(p∧q)** é equivalente a **~p ∨~q**, isto é, **~(p∧q) ≡ ~p ∨~q**.

Feitas estas considerações iniciais, passemos ao estudo das equivalências provenientes da negação de proposições.

Existem muitas maneiras de se expressar uma negação. A seguir serão apresentadas as formas mais comuns.

Dupla negação da proposição simples

Um resultado importante que pode ser obtido da tabela verdade é que a **negação da negação de p** sempre tem valor lógico igual a **proposição p**, ou seja, é equivalente a **p**.

~(~p) ≡ p

A prova dessa equivalência corresponde à tabela-verdade abaixo.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

Como exemplo, a dupla negação "**Não é verdade que [**Joãozinho **não** comeu o chocolate**]**" é equivalente a "Joãozinho comeu o chocolate".

ATENÇÃO
DECORE!

A **negação da negação de p** é equivalente a **p.**

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

Negação da conjunção e da disjunção inclusiva (leis de De Morgan)

Negação da conjunção

Para realizar a negação conjunção **p∧q**, deve-se seguir o seguinte procedimento:

1. **Negam-se ambas as parcelas da conjunção;**
2. **Troca-se a conjunção (∧) pela disjunção inclusiva (∨).**

Como resultado, podemos escrever que a negação de **p∧q**, também conhecida por **~(p∧q)**, é equivalente a **~p ∨~q:**

$$\sim(p \land q) \equiv \sim p \lor \sim q$$

Como exemplo, sejam as proposições:

p: "Comi lasanha."

q: "Bebi refrigerante."

A conjunção dessas duas proposições pode ser escrita por:

p∧q: "**[**Comi lasanha**] e [**bebi refrigerante**]**."

A negação dessa frase é:

~ (p∧q) ≡ ~p ∨~q: "**[Não** comi lasanha**] ou [não** bebi refrigerante**]**."

Mostre que são equivalentes ~(p∧q) e ~p ∨~q.

Passos 1, 2 e 3: determinar o número de linhas, estruturar a tabela-verdade e atribuir V ou F às proposições simples de maneira alternada.

Para fins de comparação, vamos incluir ambas as proposições em uma mesma tabela.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Passo 4: obter o valor das demais proposições.

~p e **~q** são obtidos com a negação de **p** e **q** respectivamente.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F			
V	F	F	V			
F	V	V	F			
F	F	V	V			

A conjunção **p∧q** só é verdadeira quando **p** e **q** são verdadeiras. Nos demais casos, será sempre falsa.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	V		
V	F	F	V	F		
F	V	V	F	F		
F	F	V	V	F		

A proposição **~ (p∧q)** é obtida pela negação de **p∧q.**

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	V	F	
V	F	F	V	F	V	
F	V	V	F	F	V	
F	F	V	V	F	V	

Finalmente, os valores lógicos da proposição **~pV~q** são obtidos pela disjunção inclusiva de **~p** e **~q**, sendo falsa apenas quando ambas as proposições simples negadas forem falsas.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Observe que os valores lógicos assumidos por **~(p∧q)** e **~pV~q** são iguais. Portanto, as proposições são equivalentes.

~ (p∧q) ≡~p V~q

Negação da disjunção inclusiva

De modo semelhante à negação da conjunção, para negarmos a disjunção inclusiva **p∨q,** devemos seguir o seguinte procedimento:

1. **Negam-se ambas as parcelas da disjunção inclusiva;**
2. **Troca-se a disjunção inclusiva (∨) pela conjunção (∧).**

Como resultado disso, podemos escrever que a negação de **p∨q**, também conhecida por **~(p∨q)**, é equivalente a **~p ∧~q:**

~ (p∨q) ≡ ~p∧~q

Vejamos um exemplo:

p∨q: "[Comi lasanha] **ou** [bebi refrigerante]."

A negação dessa frase seria:

~ (p∨q) ≡~p ∧~q: "[**Não** comi lasanha] **e** [**não** bebi refrigerante]."

Essa equivalência pode ser facilmente constatada na tabela-verdade:

p	q	~p	~q	p∨q	~(p∨q)	~p∧~q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Para negar "e": negar ambas as proposições e **trocar por "ou".**

~ (p∧q) ≡~p ∨~q

Para negar "ou": negar ambas as proposições e **trocar por "e".**

~ (p∨q) ≡~p ∧~q

(SSP AM/2022) Considere a afirmação:

"Hoje é sexta-feira e amanhã não trabalharei".

A negação lógica dessa sentença é

a) Hoje não é sexta-feira e amanhã trabalharei.

b) Hoje não é sexta-feira ou amanhã trabalharei.

c) Hoje não é sexta-feira, então amanhã trabalharei.

d) Hoje é sexta-feira e amanhã trabalharei.

e) Hoje é sexta-feira ou amanhã não trabalharei.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

h: "Hoje é sexta-feira."

a: "Amanhã trabalharei."

A proposição original pode ser escrita pela conjunção **h∧~a**:

h∧~a:"**[**Hoje é sexta-feira**] e [**Amanhã **não** trabalharei**]**."

Para realizar a negação de uma conjunção, usa-se a equivalência **~**(**p∧q**) **≡ ~p∨~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Negam-se ambas as parcelas da conjunção;**
- **Troca-se a conjunção (∧) pela disjunção inclusiva (∨).**

Em outras palavras, **negam-se as duas proposições e troca-se o "e" pelo "ou"**. Para o caso em questão, temos:

$$\sim(h\wedge\sim a) \equiv \sim h\vee\sim(\sim a)$$

A dupla negação da proposição simples **a** corresponde à proposição original. Ficamos com:

$$\sim(h\wedge\sim a) \equiv \sim h\vee a$$

Logo, a negação requerida pode ser descrita por:

~h∨a: "**[**Hoje **não** é sexta-feira**] ou [**amanhã trabalharei**]**."

Gabarito: Letra B.

(SEMSA Manaus/2022) Considere a sentença:

"Paulo é torcedor do Nacional ou Débora não é torcedora do Fast".

A negação lógica dessa sentença é

a) Paulo não é torcedor do Nacional ou Débora não é torcedora do Fast.

b) Paulo não é torcedor do Nacional ou Débora é torcedora do Fast.

c) Paulo não é torcedor do Nacional e Débora não é torcedora do Fast.

d) Paulo não é torcedor do Nacional e Débora é torcedora do Fast.

e) Paulo é torcedor do Nacional ou Débora é torcedora do Fast.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

p: "Paulo é torcedor do Nacional."

d: "Débora é torcedora do Fast."

A sentença original pode ser descrita por **p∨~d:**

p∨~d: "[Paulo é torcedor do Nacional] **ou** [Débora **não** é torcedora do Fazt]."

Para realizar a negação de uma disjunção inclusiva, usa-se a equivalência ~(**p∨q**) **≡ ~p∧~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Negam-se ambas as parcelas da disjunção inclusiva;**
- **Troca-se a disjunção inclusiva (∨) pela conjunção (∧).**

Em outras palavras, **negam-se as duas proposições e troca-se o "ou" pelo "e"**. Para o caso em questão, temos:

$$\sim(p \lor \sim d) \equiv \sim p \land \sim(\sim d)$$

A dupla negação de **d** corresponde à proposição original. Ficamos com:

$$\sim(p \lor \sim d) \equiv \sim p \land d$$

Logo, a negação requerida pode ser descrita por:

~p∧d: "[Paulo **não** é torcedor do Nacional] **e** [Débora é torcedora do Fast]**."**

Gabarito: Letra D.

(TRT 9/2022) A negação da afirmação: “não ficou doente e vai ficar em casa” é:

a) Ficou doente e não vai ficar em casa.

b) Não ficou doente ou vai ficar em casa.

c) Ficou doente ou não vai ficar em casa.

d) Ficou doente ou vai ficar em casa.

e) Não ficou doente ou não vai ficar em casa.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

d: "Ficou doente."

c: "Vai ficar em casa."

A proposição original pode ser escrita pela conjunção **~d∧c**:

~d∧c:"**[Não** ficou doente**]** **e** **[**vai ficar em casa**]**."

Para realizar a negação de uma conjunção, usa-se a equivalência **~(p∧q) ≡ ~p∨~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Negam-se ambas as parcelas da conjunção;**
- **Troca-se a conjunção (∧) pela disjunção inclusiva (∨).**

Em outras palavras, **negam-se as duas proposições e troca-se o "e" pelo "ou"**. Para o caso em questão, temos:

~(~d∧c) ≡ ~(~d)∨~c

A dupla negação de **c** corresponde à proposição original. Ficamos com:

~(~d∧c) ≡ d∨~c

Logo, a negação requerida pode ser descrita por:

d∨~c: “**[**Ficou doente**]** **ou** **[não** vai ficar em casa**]**.”

Gabarito: Letra C.

(SAAE/2018) Considere a afirmação:

Vou de tênis e visto um paletó, ou não faço sucesso.

Uma negação lógica dessa afirmação é:

a) Não vou de tênis ou não visto um paletó, e faço sucesso.

b) Vou de tênis e não visto um paletó, ou não faço sucesso.

c) Não vou de tênis ou visto um paletó, e faço sucesso.

d) Não vou de tênis e visto um paletó, ou não faço sucesso.

e) Vou de tênis ou visto um paletó ou faço sucesso

Comentário:

Sejam as proposições simples:

t: "Vou de tênis."

p: "Visto um paletó."

s: "Faço sucesso."

A afirmação do enunciado é dada por:

(t∧p)∨~s: "**[(**Vou de tênis**)** **e** **(**visto um paletó**)]**, **ou** **[não** faço sucesso**]**."

A negação dessa frase é a negação de uma **disjunção inclusiva ("ou", ∨)** composta por dois termos: o termo **(t∧p)** e o termo **~s**.

Para realizar a negação de uma disjunção inclusiva, usa-se a equivalência ~(**p∨q**) ≡ **~p∧~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Negam-se ambas as parcelas da disjunção inclusiva;**
- **Troca-se a disjunção inclusiva (∨) pela conjunção (∧).**

Aplicando a equivalência em questão para negar **(t∧p)**∨**~s**, ficamos com:

~ [(t∧p)∨~s] ≡ ~(t∧p) ∧ ~(~s)

Agora temos a negação da conjunção **(t∧p)** e a dupla negação de **s**. Podemos novamente negar **p∧q** por De Morgan e, além disso, a dupla negação de **s** corresponde à proposição original **s**. Ficamos com:

(~t∨~p)∧s

(~t∨~p) ∧ s é a negação que estamos procurando e pode ser escrita assim:

(~t∨~p) ∧ s: "**[(Não** vou de tênis**)** **ou** **(não** visto um paletó**)]**, **e** **[**faço sucesso**]**."

Gabarito: Letra A.

Negação da condicional

A negação de **p→q** é realizada por meio da seguinte equivalência:

$$\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

A negação da condicional é realizada do seguinte modo:

1. **Mantém-se o primeiro termo;**
2. **Troca-se a condicional (→) pela conjunção (∧); e**
3. **Nega-se o segundo termo.**

Como exemplo, considere a condicional:

p→q: "Se [eu beber**]**, **então [**dou gargalhadas**]**."

A negação dessa expressão pode ser escrita como:

~ (p→q) ≡ p∧~q: "**[**Eu bebo**] e [não** dou gargalhadas**]**."

Mostre que ~(p→q) é equivalente a p∧~q.

Como não poderia deixar de ser, essa equivalência é obtida a partir da seguinte tabela-verdade:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F

Podemos obter o mesmo resultado de um outro modo, pois sabemos das equivalências fundamentais que:

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Se negarmos ambos os lados da equivalência anterior, obteremos:

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim((\sim p) \vee q)$$

O lado direito dessa equivalência é a negação de uma disjunção. Utilizando a equivalência de De Morgan, obtemos:

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p) \wedge \sim q$$

A negação da negação de uma proposição é a própria proposição original. Portanto:

$\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

Essa equivalência é muito importante e deve ser memorizada.

DESPENCA NA PROVA!

$\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

PRESTE MAIS ATENÇÃO!

Não confunda as seguintes equivalências

$p \to q \equiv \sim p \vee q$

$\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

(EPE/2022) A negação da afirmativa "Se João vai ao jogo, então o Flamengo perde" é

a) João vai ao jogo e o Flamengo não perde.

b) João não vai ao jogo e o Flamengo perde.

c) João não vai ao jogo e o Flamengo não perde.

d) Se João não vai ao jogo, então o Flamengo perde.

e) Se João não vai ao jogo, então o Flamengo não perde.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

j: "João vai ao jogo."

f: "O Flamengo perde."

A sentença original pode ser descrita por **j→f**:

j→f: "**Se** **[**João vai ao jogo**]**, **então** **[**o Flamengo perde**]**".

Para realizar a negação de uma condicional, usa-se a equivalência **~(p→q) ≡ p∧~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Mantém-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a condicional (→) pela conjunção (∧); e**
- **Nega-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

~(j→f) ≡ j∧~f

Logo, a negação pode ser descrita por:

j∧~f: "[João vai ao jogo] **e** [o Flamengo **não** perde]."

Gabarito: Letra A.

(Pref. Panambi/2020) A negação da seguinte proposição composta: “Se estudo atentamente então serei nomeado em concurso público” é:

a) Se não estudo atentamente, então não serei nomeado em concurso público.

b) Estudo atentamente e não serei nomeado em concurso público.

c) Se não serei nomeado em concurso público, então não estudo atentamente.

d) Estudo atentamente ou serei nomeado em concurso público.

e) Não estudo atentamente se, somente se não serei nomeado em concurso público.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

e: "Estudo atentamente."

n: "Serei nomeado em concurso público."

A sentença original pode ser descrita por **e→n**:

e→n: "**Se** [estudo atentamente] **então** [serei nomeado em concurso público]."

Para realizar a negação de uma condicional, usa-se a equivalência **~(p→q) ≡ p∧~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Mantém-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a condicional (→) pela conjunção (∧); e**
- **Nega-se o segundo termo.**

Aplicando para a condicional da questão, temos que a negação de **e→n** é dada por:

$$\sim(e\rightarrow n) \equiv e\wedge\sim n$$

Temos, portanto, a seguinte negação:

e∧~n: " [Estudo atentamente] e [**não** serei nomeado em concurso público]."

Gabarito: Letra B.

Negação da disjunção exclusiva

A **negação da disjunção exclusiva** mais comum é equivalente a própria **bicondicional**.

$$\sim(p\veebar q) \equiv p\leftrightarrow q$$

Como exemplo, considere a disjunção exclusiva:

p⊻q: "Ou jogo bola, ou jogo sinuca."

A negação dessa expressão é dada pelo bicondicional abaixo:

~(p⊻q) ≡ p↔q: "Jogo bola se e somente se jogo sinuca."

Mostre que são equivalentes ~(p⊻q) e p↔q.

Vamos colocar lado a lado as tabelas-verdade de **p↔q** e **p⊻q**.

p	q	$p\veebar q$	$p\leftrightarrow q$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Quando as proposições simples **p** e **q** têm o mesmo valor lógico, a disjunção exclusiva **p⊻q** é falsa. Nos demais casos, é verdadeira.

Para a bicondicional **p↔q** ocorre exatamente o oposto: os casos em que ela é verdadeira são somente aqueles em que **p** e **q** são iguais.

Isso significa que, ao negarmos a disjunção exclusiva, chegaremos à bicondicional. Veja:

p	q	$p\veebar q$	$\sim(p\veebar q)$	$p\leftrightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

Assim, temos:

$$\sim(p\veebar q) \equiv p\leftrightarrow q$$

ATENÇÃO DECORE!

A **negação da disjunção exclusiva** é equivalente a própria **bicondicional**.

$$\sim (p \veebar q) \equiv p \leftrightarrow q$$

Negação da bicondicional

São quatro as maneiras mais comuns de se negar a bicondicional. A primeira que vamos apresentar é que a **negação da bicondicional é equivalente à disjunção exclusiva**.

$$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv p \veebar q$$

Mostre que $\sim (p \leftrightarrow q)$ e $p \veebar q$ são equivalentes.

Essa relação pode ser provada por tabela-verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$p \veebar q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F

Podemos também demonstrar a equivalência **$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \veebar q)$** utilizando outra equivalência já conhecida, a negação da disjunção exclusiva:

$$\sim(p \veebar q) \equiv p \leftrightarrow q$$

Podemos negar os dois lados desse resultado da seguinte forma:

$$\sim(\sim(p \veebar q)) \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$$

A proposição composta **$p \veebar q$** é uma proposição assim como qualquer proposição simples, com a diferença que ela é resultado de uma composição de proposições simples por meio de um conectivo. Assim, continua válido o entendimento de que ao negar duas vezes uma proposição retornamos à proposição original. Logo:

$$p \veebar q \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$$

Esse resultado pode ser escrito da seguinte forma, trocando os lados direito e esquerdo da equivalência anterior:

$$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \veebar q)$$

Podemos ainda negar a proposição bicondicional, negando **<u>apenas uma</u>** das suas proposições simples. Veja:

$$\sim (p\leftrightarrow q) \equiv (\sim p)\leftrightarrow q$$

$$\sim (p\leftrightarrow q) \equiv p\leftrightarrow(\sim q)$$

Lembre-se de que esses resultados também podem ser obtidos por tabela-verdade.

Cabe salientar que existe uma outra forma de **negação da bicondicional utilizando apenas operadores de conjunção e disjunção**:

$$\sim (p\leftrightarrow q) \equiv (p\wedge\sim q) \vee (q\wedge\sim p)$$

Mostre que $\sim(p\leftrightarrow q)$ e $(p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p)$ são equivalentes.

A utilização da tabela-verdade é a forma tradicional de se provar a equivalência. Vejamos, porém, uma forma mais interessante de provar esta equivalência por meio de outras equivalências que já aprendemos.

Vamos utilizar uma equivalência fundamental já apresentada, que relaciona a bicondicional com duas condicionais:

$$p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$$

Se negarmos ambos os lados da equivalência teremos o seguinte:

$$\sim(p\leftrightarrow q) \equiv \sim((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$$

Veja-se que o lado direito da equivalência é a negação de uma conjunção, que pode ser reescrita utilizando De Morgan:

$$\sim (p\leftrightarrow q) \equiv \sim(p\rightarrow q) \vee \sim(q\rightarrow p)$$

Agora devemos negar os dois condicionais, **$(p\rightarrow q)$** e **$(q\rightarrow p)$**.

$$\sim (p\leftrightarrow q) \equiv (p\wedge\sim q) \vee (q\wedge\sim p)$$

Finalmente chegamos à negação da bicondicional, utilizando apenas operadores de negação, conjunção e disjunção inclusiva.

As quatro formas mais comuns de **negação da bicondicional** são:

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \veebar q$$

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p) \leftrightarrow q$$

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow (\sim q)$$

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

Outras equivalências

Neste tópico, serão apresentadas outras equivalências que podem ser cobradas em prova, mas que apresentam menor incidência do que as ditas fundamentais.

Equivalência do conectivo bicondicional

Uma forma equivalente de se escrever a bicondicional é negar ambos os termos:

p↔q ≡ ~p↔~q

Para fins de exemplo, se considerarmos:

p↔q: "Hoje é dia 01/09 se e somente se hoje é o primeiro dia do mês de setembro."

Essa expressão é equivalente a:

~p↔~q: "Hoje **não** é dia 01/09 se e somente se hoje **não** é o primeiro dia do mês de setembro."

Verifiquemos na tabela-verdade:

p	*q*	*~p*	*~q*	*p↔q*	*~p↔~q*
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Equivalência do bicondicional p↔q: negam-se p e q.

p↔q ≡ (~p)↔(~q)

Equivalência da negação do bicondicional ~(p↔q): nega-se apenas um dos termos.

~ (p↔q) ≡ (~ p)↔q

~ (p↔q) ≡ p↔(~ q)

ATENÇÃO DECORE!

Equivalência do bicondicional p↔q: nega-se tanto p quanto q.

$$p \leftrightarrow q \equiv (\sim p) \leftrightarrow (\sim q)$$

(Pref. Vila Lângaro/2019) A negação da proposição “João passa no concurso público se e somente se João estuda” é:

a) João não passa no concurso público se e somente se João não estudou.

b) João não passa no concurso público e João não estudou.

c) João passa no concurso público e João estuda.

d) Ou João passa no concurso público ou João estuda.

e) Se João passa no concurso público, então João estuda.

Comentários:

A proposição composta original é uma bicondicional **p↔q** cujos termos são:

p: " João passa no concurso público."

q: " João estuda."

As principais formas de se negar a bicondicional são:

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \veebar q$$

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p) \leftrightarrow q$$

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow (\sim q)$$

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv (p \land \sim q) \lor (q \land \sim p)$$

A primeira forma apresentada corresponde à letra D:

p⊻q: " **Ou** **[**João passa no concurso público**]** **ou** **[**João estuda**]**."

As demais formas apresentadas nas alternativas não correspondem à negação da bicondicional. Especial atenção deve ser dada à alternativa A, que apresenta uma equivalência do bicondicional, não uma negação:

$$p \leftrightarrow q \equiv (\sim p) \leftrightarrow (\sim q)$$

Gabarito: Letra D.

Negações da conjunção para a forma condicional

Existem duas maneiras de se negar a conjunção de modo que ela adquira a forma condicional:

$$\sim(p\wedge q) \equiv p\rightarrow\sim q$$

$$\sim(p\wedge q) \equiv q\rightarrow\sim p$$

Mostre que $\sim(p\wedge q) \equiv p\rightarrow\sim q$ são equivalentes.

Utilizando a negação da conjunção por De Morgan:

$$\sim(p\wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Chegamos a uma disjunção inclusiva, mas queremos encontrar uma condicional. Como proceder? Basta lembrar que existe uma equivalência fundamental que correlaciona a disjunção inclusiva com a condicional, que é dada por $\mathbf{p \vee q \equiv \sim p\rightarrow q}$. Essa equivalência nos diz basicamente que, para levar uma disjunção inclusiva para a condicional, devemos negar o primeiro termo e manter o segundo termo. Desse modo, vamos negar o primeiro termo e manter o segundo termo de $\mathbf{\sim p \vee \sim q}$.

$$\sim(p\wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \equiv \sim(\sim p)\rightarrow\sim q$$

$$\sim(p\wedge q) \equiv \sim(\sim p)\rightarrow\sim q$$

A dupla negação de uma proposição é a própria proposição original. Assim, chegamos ao resultado pretendido:

$$\sim(p\wedge q) \equiv p\rightarrow\sim q$$

Agora que sabemos que $\mathbf{\sim(p\wedge q) \equiv p\rightarrow\sim q}$, a prova da outra equivalência fica mais simples. Veja:

Mostre que $\sim(p\wedge q) \equiv q \rightarrow \sim p$ são equivalentes.

Conhecemos a seguinte equivalência fundamental:

$$\text{(i).}\ p\rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow\sim p$$

Essa equivalência nos mostra que uma condicional é equivalente à condicional resultante da negação das proposições originais, invertendo-se a posição do antecedente e do consequente.

Também conhecemos a seguinte equivalência:

$$\text{(ii).}\ \sim(p\wedge q) \equiv p\rightarrow\sim q$$

Utilizando-se a conclusão da **equivalência (i)** combinada à **equivalência (ii)**, teremos:

$$\sim(p\wedge q) \equiv p\rightarrow\sim q \equiv \sim(\sim q) \rightarrow\sim p$$

A dupla negação $\mathbf{\sim(\sim q)}$ equivale à proposição original **q**. Logo:

$$\sim(p\wedge q) \equiv q \rightarrow\sim p$$

ATENÇÃO DECORE!

$$\sim(p \wedge q) \equiv p \rightarrow \sim q$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv q \rightarrow \sim p$$

(MRE/2016) Considere a sentença "Corro e não fico cansado". Uma sentença logicamente equivalente à negação da sentença dada é:

a) Se corro então fico cansado.

b) Se não corro então não fico cansado.

c) Não corro e fico cansado.

d) Corro e fico cansado.

e) Não corro ou não fico cansado.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

c: "Corro."

f: "Fico cansado."

O enunciado apresenta a sentença $c \wedge \sim f$ e pede a negação $\sim(c \wedge \sim f)$.

Observe que o enunciado requer a negação de uma conjunção e as alternativas apresentam condicionais ("se...então"), conjunções ("e") e disjunção inclusiva ("ou"). Conhecemos três maneiras de se negar uma conjunção, sendo as duas últimas menos usuais:

(i). $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

(ii). $\sim(p \wedge q) \equiv p \rightarrow \sim q$

(iii). $\sim(p \wedge q) \equiv q \rightarrow \sim p$

Aplicando essas equivalências para o caso em questão, ficamos com:

(i). $\sim(c \wedge \sim f) \equiv \sim c \vee \sim(\sim f)$

(ii). $\sim(c \wedge \sim f) \equiv c \rightarrow \sim(\sim f)$

(iii). $\sim(c \wedge \sim f) \equiv \sim f \rightarrow \sim c$

Como uma dupla negação corresponde à proposição original, nossas equivalências ficam assim:

(i). ~(c∧~f) ≡ ~c∨f

(ii). ~(c∧~f) ≡ c→f

(iii). ~(c∧~f) ≡ ~f→ ~c

Observe que a **equivalência (i). ~c∨f**: "**[Não** corro**]** **ou** **[**fico cansado**]**" não corresponde a nenhuma alternativa. Já a **equivalência (ii)** **corresponde à letra A**.

c→f: "**Se** **[**corro**]**, **então** **[**fico cansado**]**."

O **gabarito**, portanto, é a **alternativa A**.

Atenção! Poderíamos ter resolvido essa questão de uma outra maneira, **sem precisar conhecer as** "**negações da conjunção para a forma condicional**". Sejam as proposições simples:

c: "Corro."

f: "Fico cansado."

O enunciado apresenta a sentença **c∧~f** e pede a negação **~(c∧~f)**. Por De Morgan, temos:

~(c∧~f) ≡ ~c ∨ ~(~f)

A dupla negação corresponde à proposição original. Logo, temos:

~(c∧~f) ≡ ~c ∨ f

Veja que não temos como resposta **~c∨f**. Podemos transformar a disjunção inclusiva **~c∨f** em uma condicional utilizando a seguinte equivalência:

p∨q ≡ ~p→q

Aplicando essa equivalência em **~c ∨ f**, que é negação de **c∧~f**, ficamos com:

~(c∧~f) ≡ ~c ∨ f ≡ ~(~c)→f

A dupla negação de **c** corresponde à proposição simples **c**. Logo, ficamos com:

~(c∧~f) ≡ ~c ∨ f ≡ c→f

Veja, portanto, que chegamos novamente na alternativa A:

c→f: "**Se** **[**corro**]**, **então** **[**fico cansado**]**."

Gabarito: Letra A.

Conjunção de condicionais

Existem duas equivalências que de vez em quando aparecem nas provas:

$$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r) \equiv (p\vee q)\rightarrow r$$

$$(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r) \equiv p\rightarrow(q\wedge r)$$

Quando o **termo comum** é o **consequente**, a equivalência apresenta uma **disjunção inclusiva** no **antecedente**.

$$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r) \equiv (p\vee q)\rightarrow r$$

Quanto o **termo comum** é o **antecedente**, a equivalência apresenta uma **conjunção** no **consequente**.

$$(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r) \equiv p\rightarrow(q\wedge r)$$

Podemos verificar as duas equivalências por tabela-verdade:

P	Q	R	P→R	Q→R	PvQ	(P→R)∧(Q→R)	(PvQ)→R
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V

P	Q	R	P→Q	P→R	Q∧R	(P→Q)∧(P→R)	P→(Q∧R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	F
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

(SEFAZ-AL/2020) Considere as proposições:

- P1: “Se há carência de recursos tecnológicos no setor Alfa, então o trabalho dos servidores públicos que atuam nesse setor pode ficar prejudicado.”.
- P2: “Se há carência de recursos tecnológicos no setor Alfa, então os beneficiários dos serviços prestados por esse setor podem ser mal atendidos.”.

A proposição P1∧P2 é equivalente à proposição “Se há carência de recursos tecnológicos no setor Alfa, então o trabalho dos servidores públicos que atuam nesse setor pode ficar prejudicado e os beneficiários dos serviços prestados por esse setor podem ser mal atendidos.”.

Comentários:

Considere as proposições simples:

c: "Há carência de recursos tecnológicos no setor Alfa."

t: "O trabalho dos servidores públicos que atuam nesse setor pode ficar prejudicado."

b: "Os beneficiários dos serviços prestados por esse setor podem ser mal atendidos."

A proposição **P1** pode ser descrita por **c→t** e a proposição **P2** pode ser descrita por **c→b**. Logo, a proposição **P1∧P2** pode ser descrita por:

$$(c \rightarrow t) \wedge (c \rightarrow b)$$

Devemos, portanto, avaliar se **(c→t)∧(c→b)** é equivalente a:

“**Se [**há carência de recursos tecnológicos no setor Alfa**]**, **então [(**o trabalho dos servidores públicos que atuam nesse setor pode ficar prejudicado**) e (**os beneficiários dos serviços prestados por esse setor podem ser mal atendidos**)]**.”

Isto é, devemos avaliar se **(c→t)∧(c→b)** é equivalente a **c→(t∧b)**.

Sabemos que essas duas proposições compostas são equivalentes, pois correspondem à seguinte equivalência estudada:

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$$

O gabarito, portanto, é **CERTO**.

Caso você não se lembre dessa equivalência na hora da prova, não se esqueça que **SEMPRE** podemos recorrer à **tabela-verdade** para verificar se duas proposições são equivalentes. Isso porque, pela definição de equivalências, temos que duas proposições **A** e **B** são **equivalentes** quando todos os **valores lógicos** (V ou F) assumidos por elas **são iguais** para **todas as combinações de valores lógicos atribuídos às proposições simples que as compõem**.

Para o caso em questão, podemos montar a seguinte tabela-verdade:

c	t	b	$c \to t$	$c \to b$	$t \wedge b$	$(c \to t) \wedge (c \to b)$	$c \to (t \wedge b)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

Veja que ambas as proposições apresentam a mesma tabela-verdade e, portanto, são equivalentes.

Gabarito: CERTO.

(PF/2004) As proposições **$(P \vee Q) \to S$** e **$(P \to S) \vee (Q \to S)$** possuem tabelas de valorações iguais.

Comentários:

A assertiva está ERRADA. A equivalência correta seria **$(P \to S) \wedge (Q \to S) \equiv (P \vee Q) \to S$**.

Lembre-se que as equivalências mostradas nesse tópico são **conjunções ($\wedge$) de condicionais**. Veja:

$$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$$

$$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$$

Para mostrar formalmente que **$(P \vee Q) \to S$** e **$(P \to S) \vee (Q \to S)$** **não** possuem tabelas de valorações iguais, isto é, para mostrar que essas proposições **não** são equivalentes, podemos montar a seguinte tabela-verdade:

P	Q	S	$P \to S$	$Q \to S$	$P \vee Q$	$(P \to S) \vee (Q \to S)$	$(P \vee Q) \to S$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

Gabarito: ERRADO.

Vamos agora praticar algumas questões gerais sobre o que aprendemos.

(CBM AM/2022) Gabriel comprou a camiseta do Nacional-AM, e guardou para uma ocasião especial. Certo dia, procurado em casa por um amigo, sua irmã disse:

"Vestiu a camiseta e foi ao jogo ou ao bar."

A negação lógica dessa sentença é:

a) Não vestiu a camiseta e foi ao jogo ou ao bar.

b) Vestiu a camiseta e não foi ao jogo ou ao bar.

c) Vestiu a camiseta e não foi ao jogo nem ao bar.

d) Não vestiu a camiseta ou foi ao jogo ou ao bar.

e) Não vestiu a camiseta ou não foi ao jogo nem ao bar.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

v: "Vestiu a camiseta."

j: "Foi ao jogo."

b: "Foi ao bar."

A proposição original pode ser descrita pela conjunção entre **v** e **(j∨b)**, isto é, pode ser descrita por **v∧(j∨b)**:

v∧(j∨b):"**[**Vestiu a camiseta**]** **e** **[(**foi ao jogo**)** **ou** **(**foi ao bar**)]**."

Para realizar a negação de uma conjunção, usa-se a equivalência $\sim(p \land q) \equiv \sim p \lor \sim q$. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Negam-se ambas as parcelas da conjunção;**
- **Troca-se a conjunção (∧) pela disjunção inclusiva (∨).**

Em outras palavras, **negam-se as duas proposições e troca-se o "e" pelo "ou"**. Para o caso em questão, temos:

$$\sim[v \land (j \lor b)] \equiv \sim v \lor \sim(j \lor b)$$

Note que a parcela **~(j∨b)** também pode ser desenvolvida por **De Morgan**, e corresponde a **~j∧~b**. Portanto, temos a seguinte equivalência:

$$\sim[v \land (j \lor b)] \equiv \sim v \lor (\sim j \land \sim b)$$

Logo, a negação requerida pode ser descrita por:

~v∨(~j∧~b): "**[Não** vestiu a camiseta**]** **ou** **[(não** foi ao jogo**)** **e** **(não** foi ao bar**)]**."

Veja que essa negação é apresentada na **alternativa E**, que a representa a expressão "**e não**" por "**nem**":

~v∨(~j∧~b): "**[Não** vestiu a camiseta**]** **ou** **[(não** foi ao jogo**)** **(nem** ao bar**)]**."

Gabarito: Letra E.

(TJM SP/2021) Uma proposição equivalente a "Se acordei cedo e me alimentei, então tenho um dia produtivo" é a proposição:

a) Não tenho um dia produtivo e não acordei cedo e não me alimentei.

b) Tenho um dia produtivo e não acordei cedo e não me alimentei.

c) Se não tenho um dia produtivo, então não acordei cedo ou não me alimentei.

d) Se não tenho um dia produtivo, então não acordei cedo e não me alimentei.

e) Se tenho um dia produtivo, então acordei cedo ou me alimentei.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

c: "Acordei cedo."

a: "Me alimentei."

p: "Tenho um dia produtivo."

A proposição original pode ser descrita por **c∧a → p**.

c∧a → p: " **Se** **[(**acordei cedo**)** **e** **(**me alimentei**)]**, **então** **[**tenho um dia produtivo**]**."

Uma equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

c∧a → p ≡ ~p → ~(c∧a)

O consequente obtido, **~(c∧a)**, pode ainda ser desenvolvido por De Morgan. Nesse caso, **negam-se as duas parcelas e troca-se o "e" pelo "ou".** Temos:

c∧a → p ≡ ~p → ~c∨~a

Ficamos com:

~p → ~c∨~a: "**Se** **[não** tenho um dia produtivo**]**, **então** **[(não** acordei cedo**)** **ou** **(não** me alimentei**)]**."

Gabarito: Letra C.

(DEPEN/2021) Com relação a lógica proposicional, julgue o item a seguir.

Considere as seguintes proposições

p: "Paola é feliz";

q: "Paola pinta um quadro".

Assim, a proposição "Paola é feliz apenas se ela pinta um quadro" pode ser representada por **~(p∧~q)**.

Comentários:

Sabemos que o conectivo "**somente se**" é do tipo condicional. Esse conectivo difere do "**se e somente se**", que é do tipo bicondicional.

Note que a proposição sugerida pelo enunciado é:

"**[**Paola é feliz**]** **apenas se** **[**ela pinta um quadro**]**"

O conectivo "**apenas se**" apresentado na questão corresponde ao condicional "**somente se**". Logo, a proposição pode ser descrita por **p→q**.

Veja que o enunciado sugere que a proposição composta pode ser representada por **~(p∧~q)**. Podemos desenvolver essa negação por De Morgan. **Para negar a conjunção "e", negam-se ambas as parcelas e troca-se o "e" pelo "ou"**. Ficamos com:

$$\sim(p \land \sim q) \equiv \sim p \lor \sim(\sim q)$$

A dupla negação de uma proposição simples corresponde à proposição original. Logo:

$$\sim(p \land \sim q) \equiv \sim p \lor q$$

Nesse momento, você deve se lembrar da equivalência conhecida por "transformação do condicional em disjunção inclusiva", dada por **p→q ≡ ~p∨q**.

Conhecendo essa equivalência, observe que **~(p∧~q)** é equivalente a **~p∨q** que, por sua vez, é equivalente a **p→q**. Portanto:

$$\sim(p \land \sim q) \equiv p \rightarrow q$$

Isso significa que a proposição **p→q**, "Paola é feliz apenas se ela pinta um quadro", de fato pode ser representada por sua forma equivalente **~(p∧~q)**. O **gabarito**, portanto, é **CERTO**.

Gabarito: CERTO.

ÁLGEBRA DE PROPOSIÇÕES

Álgebra de proposições
Propriedade comutativa
Todos os conectivos, **exceto o condicional "se...então"**, apresentam propriedade comutativa. $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$ $p \underline{\vee} q \equiv q \underline{\vee} p$ $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
Propriedade associativa
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
Propriedade distributiva
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Propriedade da identidade
$p \wedge t \equiv p$ $p \wedge c \equiv c$ $p \vee t \equiv t$ $p \vee c \equiv p$
Propriedade da absorção
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Propriedade da idempotência
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$

A **álgebra de proposições** trata do uso sequencial de equivalências lógicas e de outras propriedades para simplificar expressões.

O uso dessa ferramenta é interessante para resolver questões de um modo mais rápido. Além disso, pode ser **muito útil em questões mais diretas de equivalências lógicas, quando a banca tenta "esconder" a equivalência nas alternativas**.

O mais importante é você conhecer as propriedades **comutativa**, **associativa** e **distributiva** e suas aplicações mais imediatas nas questões. Isso porque, via de regra, o conhecimento das demais propriedades não costuma ser cobrado e, além disso, é comum que as **questões mais complexas** de **álgebra de proposições** possam ser resolvidas por **tabela-verdade.**

FIQUE ATENTO!

> As **três primeiras propriedades** que serão apresentadas são as mais importantes para sua prova: **comutativa**, **associativa** e **distributiva**.
>
> **Questões mais complexas** via de regra podem ser resolvidas por **tabela-verdade**. Nesses casos, a desenvoltura com **álgebra de proposições** seria apenas um "**bônus**" para que você resolva alguns problemas mais rapidamente.

Propriedade comutativa

Todos os conectivos, **exceto o condicional "se...então"**, gozam da propriedade comutativa. Isso quer dizer que é possível trocar a ordem dos componentes em uma proposição composta sem afetar o resultado da tabela-verdade:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \veebar q \equiv q \veebar p$$

$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

EXEMPLIFICANDO

Suponha que uma questão peça para você a negação da seguinte condicional:

$p \rightarrow q$: "Se eu correr, então chego a tempo."

Sabemos que **essa condicional não goza da propriedade comutativa**. A negação dessa condicional, pedida pela questão, pode ser encontrada pela seguinte equivalência:

$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$: "Corro e não chego a tempo."

Suponha agora que, dentre as alternativas da questão, você não encontre a proposição composta "Corro e não chego a tempo", porém encontre "Não chego a tempo e corro". Pode marcar essa alternativa sem medo! Isso porque, usando a **propriedade comutativa**, a conjunção obtida **$p \wedge \sim q$** pode ser escrita como **$\sim q \wedge p$**:

$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \equiv \sim q \wedge p$: "Não chego a tempo e corro."

TOME NOTA!

Todos os conectivos <u>exceto o condicional</u> comutam:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \veebar q \equiv q \veebar p$$
$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

<u>A condicional $p \rightarrow q$ não é comutativa. $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ não são equivalentes.</u>

A equivalência correta para a condicional é a contrapositiva:

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

Essa propriedade é especialmente importante para questões de concurso público, pois muitas vezes a banca altera a ordem das proposições nas alternativas justamente para tentar esconder a resposta. Vamos a um exemplo.

(TJ SP/2015) Uma afirmação equivalente à afirmação: 'Se Marcondes é físico ou Isabela não é economista, então Natália não é advogada e Rui é médico', é:

a) Se Rui é médico ou Natália não é advogada, então Isabela é economista e Marcondes não é físico.

b) Se Rui não é médico e Natália é advogada, então Isabela é economista ou Marcondes não é físico.

c) Se Marcondes não é físico e Isabela é economista, então Natália é advogada ou Rui não é médico.

d) Se Isabela é economista e Rui é médico, então Marcondes é físico e Natália não é advogada.

e) Se Rui não é médico ou Natália é advogada, então Isabela é economista e Marcondes não é físico.

Comentários:

Primeiramente, observe que a questão nos dá uma condicional e nos pede uma condicional equivalente. Isso significa que precisamos saber a **contrapositiva**:

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

Vamos dar nomes às proposições simples:

m: "Marcondes é físico."

i: "Isabela é economista."

n: "Natália é advogada."

r: "Rui é médico."

A proposição original do enunciado é dada por:

$$(m \vee \sim i) \rightarrow (\sim n \wedge r)$$

A contrapositiva equivalente é dada por:

$$\sim(\sim n \wedge r) \rightarrow \sim(m \vee \sim i)$$

As duas parcelas dessa condicional ainda podem ser melhor desenvolvidas por De Morgan: para negar tanto a conjunção quanto a disjunção inclusiva, negam-se todas as parcelas e troca-se o operador ("e" para "ou" e vice-versa). Logo, podemos reescrever a expressão da seguinte forma:

$$(\sim(\sim n) \vee \sim r) \rightarrow (\sim m \wedge \sim(\sim i))$$

A dupla negação de uma proposição equivale à proposição original. Logo:

$$(n \vee \sim r) \rightarrow (\sim m \wedge i)$$

Devemos, então, procurar pela seguinte frase:

"Se [(Natália é advogada) ou (Rui não é médico)], então [(Marcondes não é físico) e (Isabela é economista)]"

Veja que a letra E apresenta uma frase muito parecida. Essa alternativa utilizou a **propriedade comutativa** para o conectivo "e" e para o "ou" da nossa frase:

$(n \vee \sim r) \rightarrow (\sim m \wedge i) \equiv (\sim r \vee n) \rightarrow (i \wedge \sim m)$

"Se [(Rui não é médico) ou (Natália é advogada)], então [(Isabela é economista) e (Marcondes não é físico)]."

Gabarito: Letra E.

Propriedade associativa

Na **álgebra elementar**, quando realizamos uma multiplicação, é comum ouvirmos a frase "a ordem dos fatores não altera o produto". Essa frase resume a propriedade associativa para a multiplicação.

Vamos supor que queremos realizar a multiplicação $3 \times 5 \times 7$. Ela pode ser feita de duas formas:

- Multiplicamos 3×5 e depois multiplicamos esse resultado por 7, obtendo $(3 \times 5) \times 7$; ou
- Multiplicamos 3 pelo resultado da multiplicação de 5×7, obtendo $3 \times (5 \times 7)$.

Ou seja, na álgebra elementar, a propriedade associativa nos diz que em uma multiplicação de diversos termos, podemos realizar as operações de multiplicação na ordem que bem entendermos que o resultado será o mesmo:

$$(3 \times 5) \times 7 \;=\; 3 \times \;(5 \times 7)$$

O mesmo vale para a adição de termos:

$$(3 + 5) + 7 \;=\; 3 + (5 + 7)$$

Na **álgebra de proposições** temos algo muito semelhante. Dizemos que a **conjunção "e"** e a **disjunção inclusiva "ou"** gozam da propriedade associativa, sendo válidas as equivalências:

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Observe que a propriedade **associativa não mistura em uma mesma expressão** o conectivo "**e**" e o conectivo "**ou**"

Vamos a um exemplo que mostra uma utilidade para a propriedade associativa.

Mostre que p∨(q∨~p) é uma tautologia.

Lembre-se que uma tautologia ocorre quando a proposição em questão é sempre verdadeira.

Utilizando a propriedade comutativa em **(q∨~p),** temos:

p∨(~p∨q)

Utilizando a propriedade associativa na expressão acima, temos:

(p∨~p)∨q

(p∨~p) é sempre verdadeiro, portanto, é uma tautologia. Logo, ficamos com:

t ∨ q

Observe que a **t ∨ q** é a disjunção inclusiva de um termo que é sempre verdade com a proposição **q**. Logo, se ao menos um dos termos é sempre verdadeiro (**t**), essa disjunção inclusiva é sempre verdadeira. Assim:

p∨(q∨~p) ≡ t

Uma outra forma de se entender a propriedade associativa é perceber que, quando temos uma sequência de conjunções ou de disjunções inclusivas, podemos remover os parênteses.

(TRT 1/2008) Proposições compostas são denominadas equivalentes quando possuem os mesmos valores lógicos V ou F, para todas as possíveis valorações V ou F atribuídas às proposições simples que as compõem. Assinale a opção correspondente à proposição equivalente a “¬[[A∧(¬B)]→C]”.

a) A∧(¬B)∧(¬C)

b) (¬A)∨(¬B)∨C

c) C→[A∧(¬B)]

d) (¬A)∨B∨C

e) [(¬A)∧B]→(¬C)

Comentários:

A proposição original trata da negação de um condicional em que o antecedente da condicional é uma conjunção dada por **[A∧(~B)].**

Para negar uma condicional, utilizamos a equivalência **~ (p→ q) ≡ p∧~ q.** Aplicando ao caso em questão, devemos manter **[A∧(~B)]**, trocar a condicional pela conjunção e negar **C:**

[A∧(~B)] → C ≡ [A∧(~B)]∧(~C)

Observe que, pela **propriedade associativa**, a ordem em que é executada a conjunção não importa. Logo, podemos escrever:

[A∧(~B)] → C ≡ A∧(~B)∧(~C)

Gabarito: Letra A.

Propriedade distributiva

Na **álgebra elementar**, a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição consiste em realizar a seguinte operação:

$$3\times(5 + 7) = 3 \times 5 + 3 \times 7$$

Da mesma forma, podemos partir do lado direito da equação acima chegar ao lado esquerdo "colocando o número 3 em evidência":

$$3 \times 5 + 3 \times 7 = 3 \times (5 + 7)$$

Na **álgebra de proposições** temos as seguintes **propriedades distributivas:**

- Do conectivo "e" com relação ao conectivo "ou";
- Do conectivo "ou" com relação ao conectivo "e".

Propriedade distributiva do “e” com relação ao “ou”

A propriedade distributiva do conectivo "e" em relação ao "ou" é dada pela equivalência abaixo. Perceba que nela "**p∧**” é distribuído.

p∧(q∨r) ≡ (p∧q) ∨ (p∧r)

É importante também reconhecer a propriedade "de trás para frente". Isso significa que podemos colocar o termo "**p∧**” em evidência.

(p∧q)∨(p∧r) ≡ p∧(q∨r)

Propriedade distributiva do “ou” com relação ao “e”

A propriedade distributiva do conectivo "ou" em relação ao "e" é dada pela equivalência abaixo. Perceba que nela "**p∨**” é distribuído.

p∨(q∧r) ≡ (p∨q) ∧ (p∨r)

É importante também reconhecer a propriedade "de trás para frente". Isso significa que podemos colocar o termo "**p∨** " em evidência.

(p∨q) ∧ (p∨r) ≡ p∨(q∧ r)

(SEFAZ SC/2010) Na questão, considere a notação ¬X para a negação da proposição X.

Considere as proposições a e b e assinale a expressão que é logicamente equivalente a $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$

a) $\neg a \wedge \neg b$

b) $\neg a \vee \neg b$

c) $\neg a \vee b$

d) $a \vee \neg b$

e) a

Comentários:

Por meio da **propriedade distributiva**, podemos colocar "**a∧**" em evidência:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \sim b) \equiv a \wedge (b \vee \sim b)$$

A expressão **(b∨~b)** é uma tautologia. Logo, **a∧ (b∨~b)** corresponde a:

$$a \wedge t$$

Perceba que o valor da conjunção é determinado exclusivamente por **a**, uma vez que a outra parcela da conjunção é sempre verdadeira. Portanto:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \sim b) \equiv a$$

Gabarito: Letra E.

(Pref. Alumínio/2016) Considere a afirmação: Sueli é professora e, pratica ginástica ou pratica corrida. Uma afirmação equivalente é

A) Sueli é professora e pratica ginástica e pratica corrida.

B) Se Sueli é professora, então ela não pratica ginástica e não pratica corrida.

C) Sueli é professora e pratica ginástica, ou é professora e pratica corrida.

D) Se Sueli não pratica ginástica ou não pratica corrida, então ela é professora.

E) Sueli pratica ginástica e pratica corrida, ou é professora.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

s: "Sueli é professora."

g: "Sueli pratica ginástica."

k: "Sueli pratica corrida."

Na afirmação do enunciado, a vírgula após o "**e**" indica parênteses na proposição composta:

"**[**Sueli é professora**] e, [(**pratica ginástica**) ou (**pratica corrida**)]**."

Logo, temos a seguinte representação:

s∧(g∨k)

Por meio da **propriedade distributiva**, podemos distribuir "**s∧**":

s∧(g∨k) ≡ (s∧g)∨(s∧k)

Temos, portanto, a seguinte equivalência:

(s∧g)∨(s∧k): "([Sueli é professora**] e [**pratica ginástica**])**, **ou ([**Sueli é professora**] e [**pratica corrida**])**"

Essa equivalência corresponde à alternativa C.

Gabarito: Letra C.

Quanto temos um **condicional** e queremos utilizar a **álgebra de proposições** para resolver alguma questão, é necessário **transformar a condicional em disjunção inclusiva** por meio da seguinte equivalência já conhecida:

$$p\rightarrow q \equiv {\sim}p \vee q$$

Lembre-se, também, que temos como **transformar a negação da condicional em uma conjunção:**

$${\sim}(p\rightarrow q) \equiv p \wedge {\sim}q$$

Vejamos um exemplo.

(TCE-RO/2013) Com referência às proposições lógicas simples P, Q e R, julgue o próximo item.

Se ¬R representa a negação de R, então as proposições P∨[¬(Q→R)] e (P∨Q)∧[P∨(¬R)] são equivalentes.

Comentários:

Note que **poderíamos resolver essa questão comparando as tabelas-verdade** das duas proposições. Nesse momento, vamos resolver o problema com **álgebra de proposições**.

A nossa estratégia será desenvolver **P∨[~(Q→R)]** para tentar chegar em **(P∨Q)∧[P∨(~R)]**.

Veja que, para a negação da condicional **(Q→R),** podemos utilizar a equivalência **~(p→q) ≡ p∧~q**. Logo, **P∨[~(Q→R)]** corresponde a:

P∨[Q∧~R]

Aplicando a **propriedade distributiva em** "**P∨**", temos:

P∨[Q∧~R] ≡ [P∨Q] ∧ [P∨~R]

Note, portanto, que a partir de **PV[~(Q→R)]** chegamos em **[PVQ]∧[PV~R]**. Logo, as proposições são equivalentes.

Gabarito: CERTO.

Propriedade da identidade, da absorção e da idempotência

Trate as propriedades da **identidade**, da **absorção** e da **idempotência** como um "**bônus**" que pode te ajudar em algumas questões mais difíceis. Não se apegue muito a essas propriedades, pois elas não costumam aparecer em prova.

Para melhor memorizar as propriedades da identidade e da absorção, podemos estabelecer uma analogia entre lógica de proposições e conjuntos.

Lógica de Proposições	Conjuntos
Tautologia (t)	Conjunto Universo (U)
Contradição (c)	Conjunto Vazio (∅)
Conjunção (∧)	Intersecção (∩)
Disjunção Inclusiva (∨)	União (∪)

Observada a analogia, vamos às propriedades.

Propriedade da identidade

Propriedade da identidade para a conjunção

Sendo **t** uma tautologia e **c** uma contradição, temos as seguintes equivalências:

$$\mathbf{p \land t \equiv p}$$

$$\mathbf{p \land c \equiv c}$$

Note que **p ∧ t** é equivalente a **p** porque se trata de uma conjunção em que um termo é sempre verdadeiro (**t**). Isso significa que o valor de **p ∧ t** é consequência somente do valor de **p:**

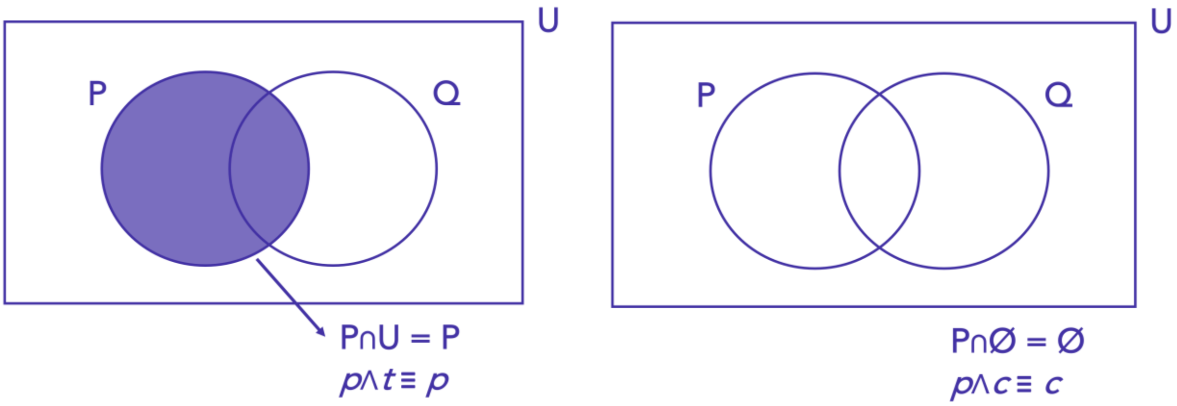
- Se **p** for verdadeiro, teremos **V ∧ V**, que é uma conjunção verdadeira; e
- Se **p** for falso, teremos **F ∧ V**, que é uma conjunção falsa.

p	t	$p \wedge t$
V	V	V
F	V	F

Além disso, **p ∧ c** é equivalente a **c** porque se trata de uma conjunção em que temos um termo sempre falso **(c).**

p	c	$p \wedge c$
V	F	F
F	F	F

Para fins de memorização, observe o análogo da teoria dos conjuntos:



Propriedade da identidade para a disjunção inclusiva

Sendo **t** uma tautologia e **c** uma contradição, temos as seguintes equivalências:

p V t ≡ t

p V c ≡ p

Note que **p V t** é equivalente a **t** porque se trata de uma disjunção inclusiva em que temos um termo sempre verdadeiro **(t)**.

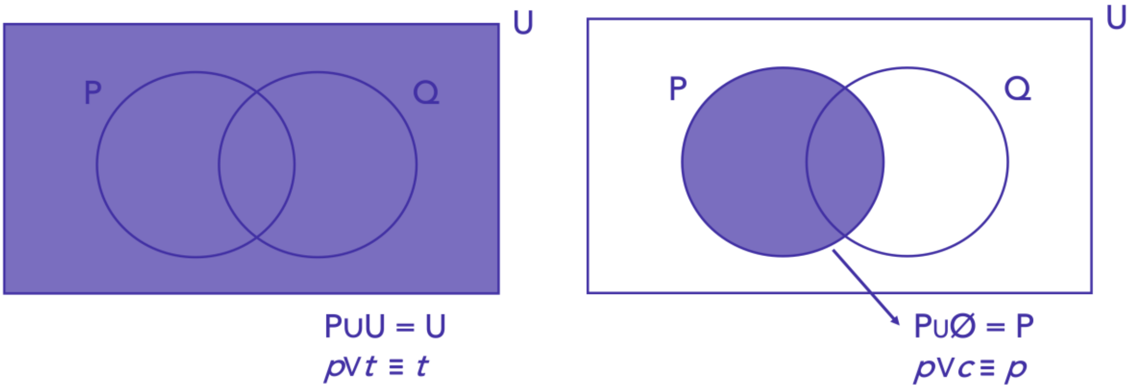
p	t	$p \vee t$
V	V	V
F	V	V

Além disso, **p V c** é sempre equivalente a **p** porque se trata de uma disjunção inclusiva em que um termo é sempre falso (**c**). Isso significa que o valor de **pVc** é consequência somente do valor de **p:**

- Se **p** for verdadeiro, teremos **V V F**, que é uma disjunção verdadeira; e
- Se **p** for falso, teremos **F V F**, que é uma disjunção falsa.

p	c	$p \vee c$
V	F	V
F	F	F

Para fins de memorização, observe o análogo da teoria dos conjuntos:



(ANPAD/2014) A proposição composta **p∧(q∨(~p))** é logicamente equivalente à proposição

A) q

B) p∧q

C) p∨q

D) p∧(~q)

E) p∨(~q)

Comentários:

Aplicado a **propriedade distributiva** em "**p∧**", temos:

p∧(q∨~p) ≡ (p∧q) ∨ (p∧~p)

(p∧~p) é uma contradição. Logo, ficamos com:

(p∧q) ∨ c

A disjunção inclusiva de um termo com uma contradição corresponde ao próprio termo (**propriedade da identidade para a disjunção inclusiva**). Logo, temos:

(p∧q)

Gabarito: Letra B.

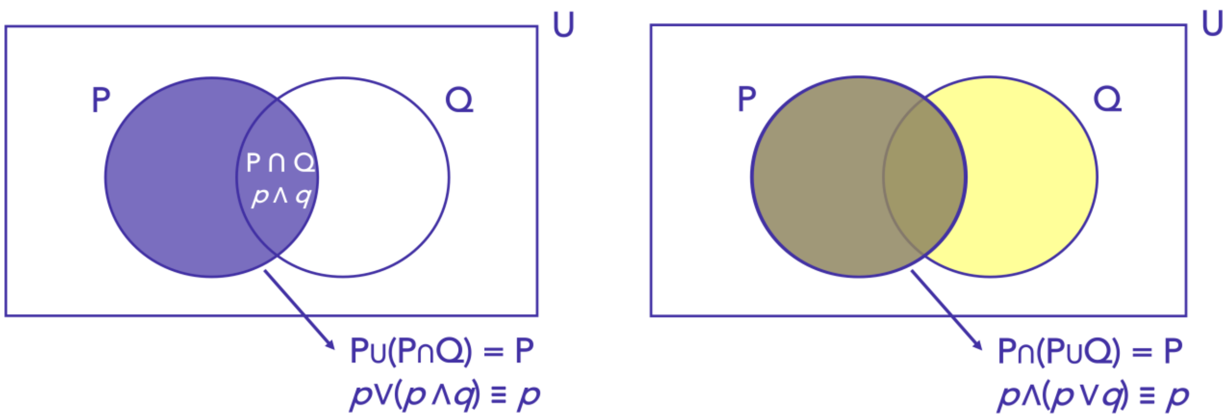
Propriedade da absorção

A propriedade da absorção é representada por duas equivalências:

$$\mathbf{p \lor (p \land q) \equiv p}$$

$$\mathbf{p \land (p \lor q) \equiv p}$$

Para fins de memorização, observe o análogo da teoria dos conjuntos:



Essas equivalências são demonstráveis por tabela-verdade:

p	q	$p\land q$	$p\lor(p\land q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

p	q	$p\lor q$	$p\land(p\lor q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

(SEFAZ-MS/2006) Representando por ~r a negação de uma proposição r, a negação de p ∧ (p ∨ q) é equivalente a:

a) ~p.

b) ~q.

c) ~(p ∨ q).

d) ~(p ∧ q).

e) uma contradição.

Comentários:

Pela **propriedade da absorção**, sabemos que **p ∧ (p ∨ q) ≡ p**. Logo, a negação pedida é ~**p**.

Gabarito: Letra A.

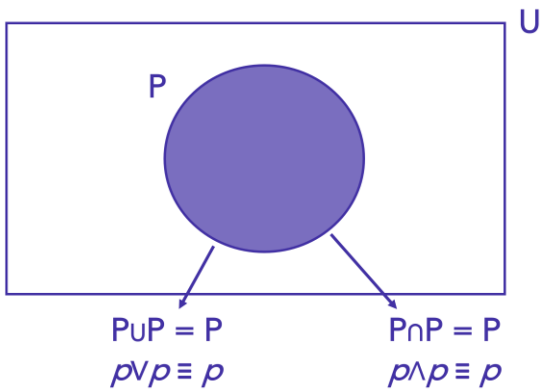
Propriedade da idempotência

A propriedade da idempotência é representada por duas equivalências:

$$\mathbf{p \wedge p \equiv p}$$

$$\mathbf{p \vee p \equiv p}$$

O análogo à teoria dos corresponderia à intersecção de um conjunto com ele mesmo e à união de um conjunto com ele mesmo.



Essas equivalências são demonstráveis por tabela-verdade:

p	p	$p \vee p$
V	V	V
F	F	F

p	p	$p \wedge p$
V	V	V
F	F	F

(DPEN/2013) Considerando que, P, Q e R são proposições conhecidas, julgue o próximo item.

A Proposição ¬[(P → Q) ∨ Q] é equivalente à proposição P ∧ (¬Q), em que ¬P é a negação de P.

Comentários:

Primeiramente, vale perceber que essa questão pode ser resolvida por **tabela-verdade**, pois para duas proposições serem equivalentes basta que elas apresentem a mesma tabela-verdade.

Dito isso, vamos resolver a questão por **álgebra de proposições**. A nossa estratégia será partir de **~[(P→Q)∨Q]** para chegar em **P∧(~Q).**

Vamos desenvolver **~[(P→Q)∨Q]** por De Morgan, negando cada parcela da disjunção inclusiva e trocando "ou" por "e":

~(P→Q)∧~Q

Para negar uma condicional, utilizamos a seguinte equivalência: **~(p→ q) ≡ p∧~ q.** Ficamos com:

[P∧(~Q)]∧(~Q)

Pela **propriedade associativa**, podemos escrever:

$$P\wedge[(\sim Q)\wedge(\sim Q)]$$

Observe que, pela **propriedade idempotente**, **[(~Q)∧(~Q)]** apresenta sempre o valor lógico de **(~Q).** Isso porque Quando **(~Q)** é V, **[(~Q)∧(~Q)]** é V, e quando **(~Q)** é F, **[(~Q)∧(~Q)]** é F. Logo, nossa conjunção fica:

$$P\wedge(\sim Q)$$

Gabarito: CERTO.

Equivalências lógicas x tautologia, contradição e contingência

Você se lembra que um dos métodos para descobrirmos se uma proposição composta é uma **tautologia**, uma **contradição** ou uma **contingência** é utilizar **equivalências lógicas** ou **álgebra de proposições**?

Esse método costuma ser o mais rápido, porém requer o domínio das equivalências lógicas e das propriedades da álgebra de proposições.

Voltemos ao exemplo da aula de tautologia, contradição e contingência: queremos verificar se a proposição abaixo é uma tautologia:

$$((p\wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p\rightarrow(q\rightarrow r)) \textit{ é uma tautologia?}$$

Agora conhecemos a seguinte equivalência: **(p→q)** ≡ **(~pVq)**. Aplicando essa equivalência **a cada um dos lados da expressão bicondicional** do nosso exemplo, tem-se que:

Lado esquerdo: $((p\wedge q) \rightarrow r) \equiv \sim(p\wedge q) \vee r$

Lado direito: $(p\rightarrow (q\rightarrow r)) \equiv \sim p\vee (q\rightarrow r)$

Portanto, **reescrevendo a bicondicional original** $((p\wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p\rightarrow(q\rightarrow r))$, temos:

$$\sim(p\wedge q) \vee r \leftrightarrow \sim p\vee (q\rightarrow r)$$

Prosseguindo, por De Morgan, a proposição composta **~(p∧q),** ao lado esquerdo da expressão, pode ser reescrita como **(~pV~q).** Já a condicional **q→r,** ao lado direito, pode ser reescrita como seu equivalente **~qVr**. Fazendo as devidas substituições na expressão obtida no passo anterior, **~(p∧q) V r** ↔ **~pV(q→ r)**, teremos:

$$(\sim p\vee\sim q) \vee r \leftrightarrow \sim p\vee(\sim q \vee r)$$

Observe os dois lados da bicondicional. Eles são muito parecidos, exceto pelo uso dos parênteses que indicam uma ordem diferente de se executar o operador "ou". Utilizando a **propriedade associativa** do lado direito da bicondicional, podemos reescrever:

$$(\sim p \vee \sim q) \vee r \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee r$$

Podemos concluir, portanto, que ambos os lados da expressão bicondicional são idênticos, e, por conseguinte, sempre assumirão o mesmo valor lógico. Isso significa que o nosso bicondicional sempre será verdadeiro e, portanto, é uma tautologia.

Pessoal, uma vez que se tem a prática com álgebra de proposições, a resolução de algumas questões de **tautologia**, **contradição** e **contingência** ficam mais rápidas. Observe, porém, que **sempre é possível resolver esse tipo de questão por tabela-verdade** ou pelo **método da conclusão falsa**.

Vamos resolver alguns exercícios do assunto utilizando equivalências lógicas.

HORA DE PRATICAR!

(STJ/2018) Considere as proposições P e Q a seguir.

P: Todo processo que tramita no tribunal A ou é enviado para tramitar no tribunal B ou no tribunal C.

Q: Todo processo que tramita no tribunal C é enviado para tramitar no tribunal B.

A partir dessas proposições, julgue o item seguinte.

A proposição $\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$, em que $\neg P$ denota a negação da proposição P, é uma tautologia, isto é, todos os elementos de sua tabela-verdade são V (verdadeiro).

Comentários:

Temos a proposição:

$$\sim P \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

Utilizando a equivalência $\mathbf{p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q}$, temos:

$$\sim(\sim P) \vee (P \rightarrow Q)$$

$$P \vee (P \rightarrow Q)$$

Novamente, utilizando a mesma equivalência para $\mathbf{(P \rightarrow Q)}$:

$$P \vee (\sim P \vee Q)$$

Utilizando a **propriedade associativa**:

$$(P \vee \sim P) \vee Q$$

$\mathbf{P \vee \sim P}$ é uma tautologia, logo:

$$t \vee Q$$

Observe que **t V Q** é a disjunção inclusiva de um termo que é sempre verdade com a proposição **Q**. Portanto, como ao menos um dos termos é sempre verdadeiro (**t**), essa disjunção inclusiva é sempre verdadeira (**propriedade da identidade para a disjunção inclusiva**). Logo, trata-se de uma tautologia.

Gabarito: CERTO.

(CBM AL/2017) A respeito de proposições lógicas, julgue o item a seguir.

Se P e Q forem proposições simples, então a proposição composta QV(Q→P) é uma tautologia.

Comentários:

Temos a seguinte proposição composta:

$$Q \vee (Q \rightarrow P)$$

Utilizando a equivalência **p→q ≡ ~pVq** para **(Q → P)**, temos:

$$Q \vee (\sim Q \vee P)$$

Pela **propriedade associativa**, podemos escrever:

$$(Q \vee \sim Q) \vee P$$

QV~Q é uma tautologia. Portanto, ficamos com:

$$t \vee P$$

Observe que a **t V P** é a disjunção inclusiva de um termo que é sempre verdade com a proposição **P**. Portanto, como ao menos um dos termos é sempre verdadeiro (**t**), essa disjunção inclusiva é sempre verdadeira (**propriedade da identidade para a disjunção inclusiva**). Logo, trata-se de uma tautologia.

Gabarito: CERTO.

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Equivalências lógicas

Equivalências fundamentais

1.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011)

A contrapositiva de uma proposição condicional é uma tautologia.

PORQUE

A tabela verdade de uma proposição condicional é idêntica à de sua contrapositiva.

Analisando-se as afirmações acima, conclui-se que

a) as duas afirmações são verdadeiras, e a segunda justifica a primeira.

b) as duas afirmações são verdadeiras, e a segunda não justifica a primeira.

c) a primeira afirmação é verdadeira, e a segunda é falsa.

d) a primeira afirmação é falsa, e a segunda é verdadeira.

e) as duas afirmações são falsas.

Comentários:

Se tivermos uma condicional **p→q**, a contrapositiva é equivalente a essa condicional e é dada por **~q→~p**:

$$\underbrace{\mathbf{p \rightarrow q}}_{\textbf{Condicional}} \equiv \underbrace{\mathbf{\sim q \rightarrow \sim p}}_{\substack{\text{Contrapositiva} \\ \text{da condicional} \\ \text{anterior}}}$$

Observe que é **falso dizer que** "***a contrapositiva de uma proposição condicional é uma tautologia***". Isso porque, pela definição de equivalência lógica, dizer que **~q→~p** e **p→q** são equivalentes significa dizer que **~q→~p** apresenta a mesma tabela-verdade da condicional **p→q**, **que não é uma tautologia**.

Por outro lado, **é correto dizer que** "***a tabela verdade de uma proposição condicional é idêntica à de sua contrapositiva***". Isso porque a condicional e a sua contrapositiva são equivalentes.

Portanto, o **gabarito** é **letra D**, pois a primeira afirmação é falsa e a segunda é verdadeira.

Gabarito: Letra D.

2.(CESGRANRIO/IBGE/2010) Sempre que faz sol, Isabel passeia no parque.

Com base nessa informação, é possível concluir que, se

a) Isabel passeia no parque, então é um dia de sol.

b) Isabel passeia no parque, então não é um dia de sol.

c) Isabel não passeia no parque, então não está fazendo sol.

d) não está fazendo sol, Isabel passeia no parque.

e) não está fazendo sol, Isabel não está passeando no parque.

Comentários:

Considere as proposições simples:

f: "Está fazendo sol."

i: "Isabel passeia no parque."

A proposição composta "*sempre que faz sol, Isabel passeia no parque*" pode ser entendida pela condicional **f→i**.

f→i: "**Se [**está fazendo sol**], então [**Isabel passeia no parque**].**"

Uma equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

f→i ≡ **~i→~f**

A proposição equivalente pode ser descrita por:

~i→~f: "**Se [**Isabel **não** passeia no parque**]**, **então [não** está fazendo sol**]**."

Gabarito: Letra C.

3.(CESGRANRIO/DETRAN AC/2009) Considere verdadeira a seguinte proposição:

"Se x = 3, então x é primo".

Pode-se concluir que

a) se x é primo, então x = 3

b) se x não é primo, então x ≠ 3

c) se x não é primo, então x = 3

d) se x ≠ 3, então x é primo

e) se x ≠ 3, então x não é primo

Comentários:

Considere as proposições simples:

p: "x = 3." **("x é igual a 3.")**

q: "x é primo."

Observação: sabemos que **p** e **q** apresentam uma variável **x** e, portanto, **são sentenças abertas**, **não proposições**. Apesar disso, vamos tratar essas duas sentenças abertas como proposições para fins de resolução desse exercício.

A proposição composta sugerida no enunciado é:

"**Se** [x = 3], **então** [x é primo]."

Uma equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

p→q ≡ ~q→~p

Essa proposição pode ser descrita por:

~q→~p: "**Se** [x **não** é primo], **então** [x **é diferente de** 3]."

O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

Gabarito: Letra B.

4.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) Dos slogans abaixo, o que é equivalente a "Se beber, então não dirija" é

a) "Se não dirigir, então beba".

b) "Não beba nem dirija".

c) "Não beba ou não dirija".

d) “Se não beber, então dirija”.

e) “Beba e não dirija”

Comentários:

Sejam as proposições simples:

b: "Beba."

d: "Dirija."

A proposição original é descrita por **b→~d**.

b→~d: "**Se** [beber], **então** [**não** dirija]."

Uma equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

b→~d ≡ ~(~d)→~b

A dupla negação corresponde à proposição original. Ficamos com:

b→~d ≡ d→~b

Essa proposição pode ser descrita por:

d→~b: "**Se** [dirigir], **então** [**não** beba]."

Veja que não encontramos essa equivalência nas alternativas.

Uma outra equivalência fundamental que se pode utilizar com o conectivo condicional é a seguinte: **p→q ≡ ~p∨q**. Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Nega-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a condicional (→) pela disjunção inclusiva (∨); e**
- **Mantém-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

b→~d ≡ ~b∨~d

Essa proposição pode ser descrita por:

~bV~d: "**[**Não beba**]** **ou** **[**não dirija**]**."

Gabarito: Letra C.

5.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) A proposição "se o freio da bicicleta falhou, então não houve manutenção" é equivalente à proposição

a) o freio da bicicleta falhou e não houve manutenção.

b) o freio da bicicleta falhou ou não houve manutenção.

c) o freio da bicicleta não falhou ou não houve manutenção.

d) se não houve manutenção, então o freio da bicicleta falhou.

e) se não houve manutenção, então o freio da bicicleta não falhou.

Comentários:

Considere as proposições simples:

f: "O freio da bicicleta falhou."

m: "Houve manutenção."

A proposição composta original pode ser descrita por **f→~m:**

f→~m: "**Se** **[**o freio da bicicleta falhou**]**, **então** **[não** houve manutenção**]**."

Uma equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

f→~m ≡ ~(~m)→~f

A dupla negação corresponde à proposição original. Ficamos com:

f→~m ≡ m→~f

Essa proposição pode ser descrita por:

m→~f: "**Se** **[**houve manutenção**]**, **então** **[**o freio da bicicleta **não** falhou**]**."

Veja que não encontramos essa equivalência nas alternativas.

Uma outra equivalência fundamental que se pode utilizar com o conectivo condicional é a seguinte: **$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$**. Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Nega-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a condicional (→) pela disjunção inclusiva (V); e**
- **Mantém-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

$$f \rightarrow \sim m \equiv \sim f \vee \sim m$$

Essa proposição pode ser descrita por:

$\sim f \vee \sim m$: "[O freio da bicicleta **não** falhou] **ou** [**não** houve manutenção]."

Gabarito: Letra C.

6.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011)

I) Se beber, então não dirija.

II) Se dirigir, então não beba.

III) Se não beber, então dirija.

IV) Se não dirigir, então beba.

V) Dirija se e somente se não beber.

Analisando-se as afirmações acima, quanto à equivalência lógica entre elas, NÃO se pode afirmar que

a) (I) e (II) são equivalentes e (III) e (IV) são equivalentes.

b) (III), (IV) e (V) são equivalentes ou (I) e (II) são equivalentes.

c) Se (I) e (III) forem equivalentes, então (IV) e (V) são equivalentes.

d) Se (I) e (IV) são equivalentes, então (II) e (III) são equivalentes.

e) Se (I) e (II) são equivalentes, então (III), (IV) e (V) são equivalentes.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

b: "Beba."

d: "Dirija."

Nesse caso, as afirmações em questão são dadas por:

I) Se beber, então não dirija. — b→~d

II) Se dirigir, então não beba. — d→~b

III) Se não beber, então dirija. — ~b→d

IV) Se não dirigir, então beba. — ~d→b

V) Dirija se e somente se não beber. — d↔~b

Ao aplicar a **equivalência contrapositiva** na condicional (I), obtém-se a condicional (II):

b→~d ≡ d→~b

Portanto, **(I) e (II) são equivalentes**.

Ao aplicar a **equivalência contrapositiva** na condicional (III), obtém-se a condicional (IV):

~b→d ≡ ~d→b

Portanto, **(III) e (IV) são equivalentes**.

Observe que **a bicondicional descrita em (V) não é equivalente a nenhuma condicional descrita em (I), (II), (III) e (IV)**. Isso porque não há equivalência entre uma bicondicional e uma condicional.

Observe, portanto, que **NÃO** se pode afirmar o que está descrito na **alternativa E**:

$$\text{Se } \underbrace{[(\text{I}) \text{ e } (\text{II}) \text{são equivalentes}]}_{\textbf{VERDADEIRO}}, \text{então } \underbrace{[(\text{III}), (\text{IV}) \text{ e } (\text{V}) \text{ são equivalentes}]}_{\textbf{FALSO}}.$$

Isso porque a alternativa E apresenta uma condicional da forma **V→F**, ou seja, apresenta uma **condicional falsa**.

Gabarito: Letra E.

7.(CESGRANRIO/BASA/2014) Considere a seguinte afirmação:

Jorge se mudará ou Maria não será aprovada no concurso.

Tal afirmação é logicamente equivalente à afirmação:

a) Se Maria não for aprovada no concurso, então Jorge se mudará.

b) Se Maria for aprovada no concurso, então Jorge não se mudará.

c) Se Maria for aprovada no concurso, então Jorge se mudará.

d) Jorge não se mudará ou Maria será aprovada no concurso.

e) Jorge se mudará se, e somente se, Maria não for aprovada no concurso.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

j: "Jorge se mudará."

m: "Maria será aprovada no concurso."

A afirmação do enunciado pode ser descrita por **j∨~m**:

j∨~m: "[Jorge se mudará] **ou** [Maria **não** será aprovada no concurso]."

Para transformar a disjunção inclusiva em uma condicional, podemos usar a equivalência **p∨q ≡~p→q.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Nega-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a disjunção inclusiva (∨) pela condicional (→); e**
- **Mantém-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

j∨~m ≡ ~j→~m

A condicional obtida pode ser descrita por:

~j→~m: "**Se** [João **não** se mudar], **então** [Maria **não** será aprovada no concurso]."

Note que não temos essa condicional nas alternativas. Observe, porém, que uma equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

~j→~m ≡ ~(~m)→~(~j)

A dupla negação corresponde à proposição original. Ficamos com:

~j→~m ≡ m→j

Portanto, temos que **j∨~m** é equivalente a **~j→~m** que, por sua vez, é equivalente a **m→j**. Isso significa que a proposição original é equivalente a **m→j**:

m→j: "**Se** [Maria for aprovada no concurso], **então** [Jorge se mudará]."

Gabarito: Letra C.

8.(CESGRANRIO/IBGE/2013) Certo dia, João afirmou:

Se eu tivesse ido ao banco ontem, eu não precisaria ir ao banco amanhã.

No dia seguinte, não tendo ido ao banco ainda, João diria algo logicamente equivalente ao que dissera no dia anterior, se tivesse dito:

a) Como não fui ao banco hoje, fui ao banco anteontem.

b) Como não fui ao banco ontem, irei ao banco hoje.

c) Como não fui ao banco hoje, fui ao banco ontem.

d) Como preciso ir ao banco hoje, não fui ao banco anteontem.

e) Como preciso ir ao banco hoje, eu fui ao banco ontem.

Comentários:

A fala de João original é a seguinte:

"**Se** [eu tivesse ido ao banco ontem], [eu **não** precisaria ir ao banco amanhã]."

No dia seguinte, essa frase corresponde a:

"**Se** [eu tivesse ido ao banco anteontem], [eu **não** precisaria ir ao banco hoje]."

Considere as seguintes proposições simples:

a: "Fui ao banco anteontem"

h: "Preciso ir ao banco hoje."

A frase correspondente ao **dia seguinte** é dada pela condicional **a→~h** escrita na forma em que se omite o "então":

a→~h: "**Se** [eu tivesse ido ao banco anteontem], [eu **não** precisaria ir ao banco hoje]."

Sabemos equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para caso em questão, a frase correspondente ao **dia seguinte** apresenta a seguinte equivalência:

a→~h ≡ ~(~h)→~a

A dupla negação corresponde à proposição original. Logo, ficamos com:

a→~h ≡ h→~a

Portanto, no **dia seguinte**, João diria algo logicamente equivalente ao que dissera no dia anterior, se tivesse dito:

h→~a: "Se [preciso ir ao banco hoje**], então [não** fui ao banco anteontem**]."**

A **alternativa D** apresenta a mesma condicional da forma **"Como p, q"**:

h→~a: "Como [preciso ir ao banco hoje**], [não** fui ao banco anteontem**]."**

Gabarito: Letra D.

9.(CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) No dia 15 de janeiro, Carlos disse:

— Se a data de entrega do trabalho fosse amanhã, em vez de ter sido ontem, então eu conseguiria concluí-lo.

De forma logicamente equivalente, no dia seguinte, dia 16 de janeiro, Carlos poderia substituir sua fala original por:

a) Se a data de entrega do trabalho tivesse sido hoje, em vez de ontem, então eu conseguiria concluí-lo.

b) Se a data de entrega do trabalho tivesse sido anteontem, em vez de hoje, então eu conseguiria concluí-lo.

c) Se eu não consegui concluir o trabalho, então é porque a data de entrega não foi anteontem, foi hoje.

d) Se eu não consegui concluir o trabalho, então é porque a data de entrega não foi amanhã, foi ontem.

e) Se eu não consegui concluir o trabalho, então é porque a data de entrega não foi hoje, foi anteontem.

Comentários:

Observe que a fala original de Carlos, que ocorreu no dia 15 de janeiro, pode ser descrita do seguinte modo no dia 16 de janeiro:

"**Se [**a data de entrega do trabalho é hoje, em vez de ter sido anteontem**]**, **então [**eu conseguirei concluí-lo**]**."

Note que as alternativas apresentam condicionais como possíveis equivalências.

Sabemos equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, a fala original, aplicada ao dia 16 de janeiro, é equivalente a:

"**Se [**eu **não** consegui concluir o trabalho**]**, **então [**a data de entrega do trabalho **não** foi hoje, foi anteontem**]**."

Gabarito: Letra E.

10.(CESGRANRIO/IBGE/2014) Se filho de pai estatístico sempre é estatístico, então

a) pai de estatístico sempre é estatístico.

b) pai de estatístico nunca é estatístico.

c) pai de estatístico quase sempre é estatístico.

d) pai de não estatístico sempre é estatístico.

e) pai de não estatístico nunca é estatístico.

Comentários:

Observe que a proposição "*filho de pai estatístico sempre é estatístico*" pode ser entendida como:

p→q: "**Se [**o pai é estatístico**]**, **então [**o filho é estatístico**]**."

Sabemos equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

~q→~p: "**Se [**o filho **não** é estatístico**]**, **então [**o pai **não** é estatístico**]**."

Essa proposição equivalente corresponde a "*pai de não estatístico nunca é estatístico*". O **gabarito**, portanto, é **letra E**.

Gabarito: Letra E.

Negação da conjunção e da disjunção inclusiva (leis de De Morgan)

11. (CESGRANRIO/DETRAN AC/2009) A negação da proposição "Mário é brasileiro ou Maria não é boliviana" é

a) Mário não é brasileiro e Maria é boliviana.

b) Mário não é brasileiro ou Maria é boliviana.

c) Mário não é brasileiro e Maria não é boliviana.

d) Mário é brasileiro e Maria não é boliviana.

e) Mário é brasileiro ou Maria é boliviana.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

o: "Mário é brasileiro."

a: " Maria é boliviana."

A proposição original pode ser descrita por **o∨~a**:

o∨~a: "[Mário é brasileiro] **ou** [Maria **não** é boliviana]."

Para realizar a negação de uma disjunção inclusiva, usa-se a equivalência **~(p∨q) ≡ ~p∧~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Negam-se ambas as parcelas da disjunção inclusiva;**
- **Troca-se a disjunção inclusiva (∨) pela conjunção (∧).**

Em outras palavras, **negam-se as duas proposições e troca-se o "ou" pelo "e"**. Para o caso em questão, temos:

~(o∨~a) ≡ ~o∧~(~a)

A dupla negação corresponde à proposição original. Ficamos com:

~(o∨~a) ≡ ~o∧a

Logo, a negação requerida pode ser descrita por:

~o∧a: "[Mário **não** é brasileiro] **e** [Maria é boliviana]**."**

Gabarito: Letra A.

12. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) É dada a seguinte proposição:

João não foi trabalhar, mas saiu com amigos.

A negação dessa proposição é logicamente equivalente a

a) João foi trabalhar ou não saiu com amigos.

b) João foi trabalhar e não saiu com amigos.

c) João foi trabalhar e não saiu com inimigos.

d) João não foi trabalhar ou não saiu com inimigos.

e) João não foi trabalhar e não saiu com amigos.

Comentários:

Considere as proposições simples:

f: "João foi trabalhar."

s: "João saiu com amigos."

Sabemos que "mas" corresponde ao conectivo "e". Logo, a proposição original é dada por:

~f ∧ s: "**[**João **não** foi trabalhar**]**, **mas** **[**saiu com amigos**]**."

A questão pergunta pela equivalência da **negação** de **~f ∧ s**, ou seja, quer uma forma equivalente a **~(~f∧ s)**.

Para realizar a negação de uma conjunção, usa-se a equivalência **~(p∧q) ≡ ~p∨~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Negam-se ambas as parcelas da conjunção;**
- **Troca-se a conjunção (∧) pela disjunção inclusiva (∨).**

Em outras palavras, **negam-se as duas proposições e troca-se o "e" pelo "ou"**. Para o caso em questão, temos:

~(~f∧ s) ≡ ~(~f)∨~s

A dupla negação corresponde à proposição original. Ficamos com:

~(~f∧ s) ≡ f ∨~s

Logo, a negação requerida pode ser descrita por:

f ∨~s: "[João foi trabalhar**]** **ou** **[não** saiu com amigos**]**."

Gabarito: Letra A.

Negação da Condicional

13. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) João disse que, se chovesse, então o show não seria cancelado. Infelizmente, os acontecimentos revelaram que aquilo que João falou não era verdade.

Portanto,

a) o show não foi cancelado porque choveu.

b) o show foi cancelado porque não choveu.

c) não choveu, e o show não foi cancelado.

d) não choveu, e o show foi cancelado.

e) choveu, e o show foi cancelado.

Comentários:

Observe que a questão diz que "***aquilo que João falou não era verdade***". Isso significa que se pode concluir como verdadeiro a negação daquilo que João disse. Em outras palavras, **devemos assinalar a alternativa que apresenta a negação da fala de João.**

Sejam as proposições simples:

c: "Choveu."

s: "O show foi cancelado."

A fala de João pode ser descrita por:

c → ~s: "**Se** **[**chovesse**]**, **então** **[**o show **<u>não</u>** seria cancelado**]**"

Para realizar a negação de uma condicional, usa-se a equivalência **~(p→q) ≡ p∧~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Mantém-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a condicional (→) pela conjunção (∧); e**
- **Nega-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

~(c →~s) ≡ c∧~(~s)

A dupla negação corresponde à proposição original. Logo:

~(c →~s) ≡ c∧s

Logo, a negação pode ser descrita por:

c∧s: "**[**Choveu**]** **e** **[**o show foi cancelado**]**."

Gabarito: Letra E.

Outras equivalências e negações

14.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Negar a afirmação “o leão não é feroz e a girafa não gorjeia” equivale a afirmar que

a) se o leão não é feroz, então a girafa gorjeia.

b) se a girafa não gorjeia, então o leão não é feroz.

c) o leão é feroz, e a girafa gorjeia.

d) o leão não é feroz ou a girafa gorjeia.

e) o leão é feroz ou a girafa não gorjeia.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

l: "O leão é feroz."

g: "A girafa gorjeia."

A proposição em questão corresponde a **~l∧~g**:

~l∧~g: "[O leão **não** é feroz] **e** [a girafa **não** gorjeia]."

A primeira equivalência a ser utilizada diante a negação de uma conjunção é a equivalência de De Morgan.

Para realizar a negação de uma conjunção, usa-se a equivalência **~(p∧q) ≡ ~p∨~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Negam-se ambas as parcelas da conjunção;**
- **Troca-se a conjunção (∧) pela disjunção inclusiva (∨).**

Em outras palavras, **negam-se as duas proposições e troca-se o "e" pelo "ou"**. Para o caso em questão, temos:

~(~l∧~g) ≡ ~(~l)∨~(~g)

A dupla negação corresponde à proposição original. Ficamos com:

~(~l∧~g) ≡ l∨g

Logo, a negação requerida pode ser descrita por:

l∨g: "[O leão é feroz] **ou** [a girafa gorjeia]."

Note que não temos essa negação como resposta.

"E agora, professor? Será que erramos em alguma coisa?"

Não, caro aluno! Primeiro, perceba que já podemos **eliminar as alternativas D e E**, pois elas apresentam disjunções inclusivas diferentes da que obtemos. Além disso, a **alternativa C pode ser eliminada**, pois a negação de uma conjunção nunca será outra conjunção. **Resta-nos as alternativas A e B, que são condicionais**. Logo, temos que dar um jeito de transformar **l∨g** em uma condicional.

Para transformar **l∨g** em uma condicional, devemos utilizar a **equivalência transformação da disjunção inclusiva em condicional**: **p∨q ≡ ~p→q**. A equivalência é realizada do seguinte modo:

- **Nega-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a disjunção inclusiva (∨) pela condicional (→); e**
- **Mantém-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

l∨g ≡ ~l→g

Ficamos com:

~l→g: "**Se** [o leão **não** é feroz], **então** [a girafa gorjeia]."

Agora sim chegamos no gabarito! **Alternativa A**.

—

Uma **forma mais simples de se resolver** a questão requer que o aluno se lembre de duas equivalências que são mais raras: as **negações da conjunção para a forma condicional**. Lembre-se das seguintes equivalências:

- **~(p∧q) ≡ p→~q**
- **~(p∧q) ≡ q→~p**

Para essa questão, devemos negar ~**l∧~g**, isto é, devemos obter **~(~l∧~g).** Utilizando essas duas equivalências, temos:

- **~(~l∧~g) ≡ ~l→~(~g)**, isto é, **~(~l∧~g) ≡ ~l→g**
- **~(~l∧~g) ≡ ~g→~(~l)** , isto é, **~(~l∧~g) ≡ ~g→l**

Note que, na primeira equivalência, obtemos que a negação da conjunção em questão é **~l→g:**

~l→g: "**Se** [o leão **não** é feroz], **então** [a girafa gorjeia]."

Novamente, a **alternativa A** corresponde à negação requerida.

Gabarito: Letra A.

Questões com mais de uma equivalência

15.(CESGRANRIO/FINEP/2014) No contexto do Cálculo Proposicional, é verdadeira a afirmação

a) (~p∧q) é equivalente a ~(p ∨ q)

b) ~(p ∧ q) é equivalente a (p→~q)

c) (p ∨ q) é equivalente a ~(p ∧ q)

d) (p → q) é equivalente a (p ∧ ~q)

e) ~(p → q) é equivalente a (~p ∨ q)

Comentários:

Vamos comentar as alternativas.

a) (~p∧q) é equivalente a ~(p ∨ q). ERRADO.

Ao utilizar De Morgan na **negação de p∨q**, obtemos:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

Note, portanto, que **~p∧q** não é equivalente a **~(p ∨ q)**.

b) ~(p ∧ q) é equivalente a (p→~q). CERTO. Este é o **gabarito**.

Da teoria apresentada, são conhecidas as seguintes negações da conjunção **p∧q:**

- **~(p ∧ q) ≡ ~p ∨ ~q**
- **~(p ∧ q) ≡ p→~q**
- **~(p ∧ q) ≡ q→~p**

Note que a segunda equivalência corresponde à letra B.

c) (p ∨ q) é equivalente a ~(p ∧ q). ERRADO.

Ao utilizar De Morgan na **negação de p ∧ q**, obtemos:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Note, portanto, que **p∨q** não é equivalente a **~(p∧q)**.

d) (p → q) é equivalente a (p ∧ ~q). ERRADO.

Temos que **a negação de p→q** é equivalente a **p ∧ ~q**:

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

e) ~(p → q) é equivalente a (~p ∨ q). ERRADO.

Temos que **a própria condicional p→q** é equivalente a **~p ∨ q**:

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Gabarito: Letra B.

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Álgebra de proposições

1.(CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) João disse:

— Das duas, pelo menos uma: o depósito é amplo e claro, ou ele não se localiza em Albuquerque.

O que João disse é falso se, e somente se, o depósito

a) fica em Albuquerque e não é amplo ou não é claro.

b) fica em Albuquerque, não é amplo, nem é claro.

c) não é amplo, não é claro e não fica em Albuquerque.

d) é amplo ou é claro e fica em Albuquerque.

e) é amplo e claro e fica em Albuquerque.

Comentários:

Considere as proposições simples:

a: "O depósito é amplo."

c: "O depósito é claro."

l: "O depósito se localiza em Albuquerque."

A frase dita por João corresponde a:

(a∧c)∨ ~l: "**[(**O depósito é amplo**)** **e** **(**claro**)]**, **ou** **[**ele **não** se localiza em Albuquerque**]**."

Observe que a frase dita por João dá a ideia de "ou inclusivo", ou seja, **trata-se de uma disjunção inclusiva** da proposição composta "*o depósito é amplo e claro*" com a proposição simples "*ele não se localiza em Albuquerque*".

Isso porque, no enunciado, foi dito que "*das duas, **pelo menos** uma*". Essa expressão passa a ideia de que ao menos um dos dois termos deve ser verdadeiro para que o "ou" seja verdadeiro.

Diferente seria se a expressão fosse "*das duas, **somente** uma*". Nesse caso, **teríamos uma disjunção exclusiva** (ou exclusivo).

Como **o que João disse é falso**, **a negação do que ele disse é verdadeira**. Portanto, **devemos negar a proposição composta (a∧c)∨ ~l**.

Para realizar a negação de uma disjunção inclusiva, **negam-se as duas proposições e troca-se o "ou" pelo "e"**. Para o caso em questão, temos:

$$\sim[(a \wedge c) \vee l] \equiv \sim(a \wedge c) \wedge \sim(\sim l)$$

A dupla negação corresponde à proposição original. Ficamos com:

$$\sim[(a \wedge c) \vee l] \equiv \sim(a \wedge c) \wedge l$$

Note que **~(a∧c)** é a negação de uma conjunção. Para desenvolvê-la, podemos utilizar a outra equivalência de De Morgan. Em resumo, **negam-se as duas proposições e troca-se o "e" pelo "ou"**. Ficamos com:

$$\sim[(a \wedge c) \vee l] \equiv (\sim a \vee \sim c) \wedge l$$

Ficamos com:

(~a∨~c)∧ l: "[(O depósito **não** é amplo) **ou** (o depósito **não** é claro)] **e** [o depósito se localiza em Albuquerque]."

Note que não encontramos resposta. Observe, porém, que pela **propriedade comutativa** podemos trocar de posição os termos que compõem a conjunção "e". Ficamos com:

$$l \wedge (\sim a \vee \sim c)$$

l ∧ (~a∨~c): "[O depósito se localiza em Albuquerque] **e** [(o depósito **não** é amplo) **ou** (o depósito **não** é claro)]."

Note que a proposição encontrada corresponde à alternativa A.

Gabarito: Letra A.

2.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) A proposição p∧¬(q∧r) é equivalente a:

A) (p∧¬q)∧(p∧¬r)

B) (p∨¬q)∧(p∨¬r)

C) (p∧¬q)∨(p∧¬r)

D) (¬p∨q)∧(¬p∨r)

E) (¬p∧q)∨(¬p∧r)

Comentários:

Veja que, para essa questão, é muito importante resolvermos por **álgebra de proposições**. Isso porque, caso resolvêssemos por tabela-verdade, teríamos que realizar várias tabelas para testar as alternativas.

Inicialmente, temos:

$$p \wedge \sim(q \wedge r)$$

Utilizando a equivalência de De Morgan em **~(q∧r)**, temos:

$$p \wedge (\sim q \vee \sim r)$$

Aplicando a **propriedade distributiva** em "**p∧**", ficamos com:

$$p \wedge (\sim q \vee \sim r) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r)$$

Veja que **(p∧~q)∨(p∧~r)** corresponde à alternativa C.

Gabarito: Letra C.

3.(CESGRANRIO/IBGE/2014) Dadas três proposições lógicas p, q e r, tem-se que r → [(~p) ∧ (~q)] se, e somente se,

a) [(~p) ∧ (~q)] → r

b) (~r) → (p ∧ q)

c) (p ∨ q) → (~r)

d) (p ∧ q) → (~r)

e) (p ∨ q) → r

Comentários:

Antes de resolver a questão, é necessário entender o enunciado. Veja que foram apresentadas três proposições lógicas quaisquer, **p**, **q** e **r**. O enunciado apresenta o seguinte:

$$r \rightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)] \quad \underbrace{\leftrightarrow}_{\text{Se,e somente se}} \quad X$$

Sendo **X** uma proposição composta que devemos determinar.

Devemos entender que o enunciado pergunta por uma proposição para ser colocada no lugar de **X** de modo que a bicondicional seja verdadeira.

Como não foram atribuídos valores lógicos a **p**, **q** e **r**, entende-se que a bicondicional deve ser verdadeira para quaisquer valores de **p**, **q** e **r**. Em outras palavras, a questão **quer que a bicondicional seja sempre verdadeira**, isto é, uma **tautologia**.

Lembre-se que uma bicondicional é verdadeira quando ambos os termos apresentam o mesmo valor lógico. Nesse caso, **r → [(~p) ∧ (~q)]** e **X** devem apresentar sempre o mesmo valor lógico. **Em outras palavras**, **X deve ser uma equivalência lógica de r → [(~p) ∧ (~q)]**.

Devemos, **portanto**, **assinalar a alternativa que apresenta uma equivalência de r → [(~p) ∧ (~q)]**.

Uma equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

$$r \rightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)] \equiv \sim[(\sim p) \wedge (\sim q)] \rightarrow \sim r$$

Podemos desenvolver **$\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$** por De Morgan. Para negar a conjunção, **negam-se as duas proposições e troca-se o "e" pelo "ou"**. Ficamos com:

$$r \rightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)] \equiv \sim(\sim p) \vee \sim(\sim q) \rightarrow \sim r$$

A dupla negação corresponde à proposição original. Logo:

$$r \rightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)] \equiv p \vee q \rightarrow \sim r$$

Note, portanto, que **$(p \vee q) \rightarrow (\sim r)$** é equivalente à proposição original.

Gabarito: Letra C.

4. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012/Adaptada) A disjunção exclusiva, denotada por $\underline{\vee}$, é uma operação lógica que assume valor verdadeiro quando, e somente quando, apenas uma das proposições envolvidas assumir valor lógico verdadeiro.

Considere as proposições:

p: A equipe x participa do campeonato.

q: A equipe y fica na 2a colocação do campeonato.

Por qual proposição a negação de $p \underline{\vee} q$ pode ser expressa?

a) Se a equipe x participa do campeonato, então a equipe y fica na 2a colocação do campeonato.

b) A equipe x participa do campeonato ou a equipe y fica na 2a colocação do campeonato.

c) A equipe x participa do campeonato e a equipe y fica na segunda colocação do campeonato.

d) A equipe x não participa do campeonato e a equipe y não fica na 2a colocação do campeonato.

e) A equipe y fica na segunda colocação do campeonato se e somente se a equipe x participa do campeonato.

Comentários:

A **negação da disjunção exclusiva** é equivalente à **bicondicional**:

$$\sim(p \underline{\vee} q) \equiv p \leftrightarrow q$$

Portanto, **p↔q** é equivalente à **<u>negação de</u> p<u>∨</u>q**.

p↔q: "[A equipe x participa do campeonato] **se e somente se** [a equipe y fica na 2a colocação do campeonato]."

Veja que não temos essa proposição nas alternativas. Observe, porém, que a bicondicional goza da **propriedade comutativa**:

p↔q ≡ q↔p

Portanto, a seguinte proposição é equivalente à **<u>negação de</u> p<u>∨</u>q:**

q↔p: "[A equipe y fica na 2a colocação do campeonato] **se e somente se** [a equipe x participa do campeonato]."

Gabarito: Letra E.

5.(CESGRANRIO/BASA/2014) Dadas duas proposições simples, p e q, uma das leis de De Morgan perpassa a tautologia

[~(p∧q)]↔[(~p)∨(~q)]

Essa tautologia é logicamente equivalente à expressão

a) [~((~p)∧(~q))]↔[p∨q]

b) [~((~p)∨(~q))]↔[p∨q]

c) [~((~p)∧(~q))]↔[p∧q]

d) [(~p)∧(~q)]↔[~(p∧q)]

e) [(~p)∨(~q)]↔[~(p∨q)]

Comentários:

Primeiramente, vamos compreender o enunciado. Perceba que, pela equivalência de De Morgan, temos:

~(p∧q) ≡ ~p∨~q

Note que a bicondicional apresentada no enunciado, dada por **[~(p∧q)]↔[(~p)∨(~q)]**, apresenta dois termos equivalentes. Nesse caso, os dois termos que compõem a bicondicional, **[~(p∧q)]** e **[(~p)∨(~q)]**, sempre apresentarão o mesmo valor lógico.

Logo, a bicondicional em questão será sempre verdadeira, isto é, estamos diante de uma **tautologia**. Isso porque essa bicondicional será sempre das formas **V↔V** ou **F↔F**.

Por definição, sabemos que uma <u>equivalência lógica</u> entre duas proposições compostas ocorre quando elas <u>apresentam a mesma tabela-verdade</u>.

Ao dizer "*essa tautologia é logicamente equivalente à expressão...*", **a questão simplesmente quer saber qual das alternativas é uma tautologia**. Todo o enunciado poderia ter sido substituído por:

"Assinale a alternativa que apresenta uma tautologia."

Entendido o enunciado, vamos analisar cada alternativa.

a) [~((~p)∧(~q))]↔[p∨q]. CERTO. Este é o gabarito.

Note que o termo **~((~p)∧(~q))** pode ser desenvolvido por De Morgan:

~((~p)∧(~q)) ≡ ~(~p)∨~(~q)

A dupla negação corresponde à proposição original. Logo, ficamos com:

~((~p)∧(~q)) ≡ p∨q

Observe, portanto, que a bicondicional em questão, **[~((~p)∧(~q))]↔[p∨q]**, corresponde a:

[p∨q]↔[p∨q]

Tratata-se de uma bicondicional sempre verdadeira, pois será sempre **V↔V** ou **F↔F**. Logo, estamos diante de uma **tautologia**.

b) [~((~p)∨(~q))]↔[p∨q]. ERRADO.

Note que o termo **~((~p)∨(~q))** pode ser desenvolvido por De Morgan:

~((~p)∨(~q)) ≡ ~(~p)∧~(~q)

A dupla negação corresponde à proposição original. Logo, ficamos com:

~((~p)∨(~q)) ≡ p∧q

Observe, portanto, que a bicondicional em questão, **[~((~p)∨(~q))]↔[p∨q]**, corresponde a:

[p∧q]↔[p∨q]

Note que **[p∧q]↔[p∨q]** não é uma tautologia. Para mostrar esse fato, note que se **p** for V e **q** for F, teremos **F↔V**, que é uma bicondicional falsa.

c) [~((~p)∧(~q))]↔[p∧q]. ERRADO.

Vimos no item A que:

~((~p)∧(~q)) ≡ p∨q

Observe, portanto, que a bicondicional em questão, **[~((~p)∧(~q))]↔[p∧q]**, corresponde a:

[pVq]↔[p∧q]

Note que **[pVq]↔[p∧q]** não é uma tautologia. Para mostrar esse fato, veja que se **p** for V e **q** for F, teremos **V↔F**, que é uma bicondicional falsa.

d) [(~p)∧(~q)]↔[~(p∧q)]. ERRADO.

Note que, pela equivalência de De Morgan, temos:

~(p∧q) ≡ ~pV~q

Observe, portanto, que a bicondicional em questão, **[(~p)∧(~q)]↔[~(p∧q)]**, corresponde a:

[~p∧~q]↔[~pV~q]

Note que **[~p∧~q]↔[~pV~q]** não é uma tautologia. Para mostrar esse fato, veja que se **p** for V e **q** for F, teremos **F↔V**, que é uma bicondicional falsa.

e) [(~p)V(~q)]↔[~(pVq)]. ERRADO.

Note que, pela equivalência de De Morgan, temos:

~(pVq) ≡ ~p∧~q

Observe, portanto, que a bicondicional em questão**[(~p)V(~q)]↔[~(pVq)]**, corresponde a:

[~pV~q]↔[~p∧~q]

Note que **[~pV~q]↔[~p∧~q]** não é uma tautologia. Para mostrar esse fato, veja que se **p** for V e **q** for F, teremos **V↔F**, que é uma bicondicional falsa.

Gabarito: Letra A.

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) Analisando as afirmações abaixo no contexto do Cálculo Proposicional, tem-se que a proposição

a) p → q ↔ p ∧ q é uma tautologia.

b) p → q ↔ ~p V q é uma tautologia.

c) p → q ↔ p V q é uma contradição.

d) p → q ↔ ~p V q é uma contradição.

e) p → q ↔ ~p ∧ q é uma contradição.

Comentários:

Antes de analisar as alternativas da questão, lembre-se que a **bicondicional é verdadeira quando os dois termos apresentam o mesmo valor lógico**, e é **falsa quando os dois termos apresentam valores lógicos opostos**. Isso significa que:

- Quando os **dois termos da bicondicional forem equivalentes**, os dois termos apresentarão **sempre** o mesmo valor lógico. Nesse caso, a bicondicional é uma **tautologia**
- Quando os **dois termos da bicondicional forem um a negação do outro**, os dois termos apresentarão **sempre** valores lógicos opostos. Nesse caso, a bicondicional é uma **contradição**.

Feita essa observação, vamos avaliar as alternativas.

a) p → q ↔ p ∧ q é uma tautologia. ERRADO.

p→q não é equivalente a **p∧q**. Portanto, a bicondicional não é uma tautologia.

b) p → q ↔ ~p V q é uma tautologia. CERTO. Este é o **gabarito.**

p→q é equivalente a **p∧q**. Portanto, a bicondicional é uma tautologia.

c) p → q ↔ p V q é uma contradição. ERRADO.

pVq não é a negação de **p→q**. Portanto, a bicondicional não é uma contradição.

d) p → q ↔ ~p V q é uma contradição. ERRADO.

~pVq não é a negação de **p→q**. Portanto, a bicondicional não é uma contradição.

e) p → q ↔ ~p ∧ q é uma contradição. ERRADO.

~p∧q não é a negação de **p→q**. Portanto, a bicondicional não é uma contradição.

Gabarito: Letra B.

7.(CESGRANRIO/BR/2010) Dentre as expressões lógicas abaixo, qual apresenta, após simplificação, tautologia como resultado?

a) (Q V Q) ∧ ~P

b) (P ∧ P) V (Q V ~Q) ∧ Q

c) (P ∧ Q) V (Q V~Q) ∧ P

d) (P ∧ ~P) V (Q ∧~Q)

e) (P V~P) ∧ (Q V ~Q)

Comentários:

Vamos analisar cada alternativa.

a) (Q ∨ Q) ∧ ~P. **ERRADO.**

Sabemos, pela **propriedade da idempotência**, que **(Q ∨ Q) ≡ Q**. Logo, a proposição em questão é:

Q ∧ ~P

Trata-se de uma **contingência**.

b) (P ∧ P) ∨ (Q ∨ ~Q) ∧ Q. **ERRADO.**

Sabemos, pela **propriedade da idempotência**, que **(P ∧ P) ≡ P**. Além disso, (**Q ∨ ~Q**) é uma tautologia. Logo, a proposição em questão é:

P ∨ t ∧ Q

Pela **propriedade da identidade para a disjunção inclusiva**, sabemos que **P ∨ t ≡ t**. Ficamos com:

t ∧ Q

Pela **propriedade da identidade para a conjunção**, sabemos que **t ∧ Q ≡ Q**. Logo, a proposição composta em questão corresponde a **Q**, que é uma **contingência**.

c) (P ∧ Q) ∨ (Q ∨~Q) ∧ P. **ERRADO.**

Sabemos que **(Q ∨~Q)** é uma tautologia. Logo, a proposição em questão é:

(P ∧ Q) ∨ t ∧ P

(P ∧ Q) ∨ t é a **disjunção inclusiva** do termo **(P ∧ Q)** com uma tautologia **t**. Trata-se de uma tautologia, isto é, **(P ∧ Q) ∨ t ≡ t**. Ficamos com:

t ∧ P

Pela **propriedade da identidade para a conjunção**, sabemos que **t ∧ P ≡ P**. Logo, a proposição composta em questão corresponde a **P**, que é uma **contingência**.

d) (P ∧ ~P) ∨ (Q ∧~Q). **ERRADO.**

Sabemos que **(P ∧ ~P)** é uma contradição, assim como **(Q ∧~Q)**. Logo, a proposição em questão é:

c ∨ c

Trata-se de uma disjunção inclusiva de dois termos que são sempre falsos. Logo, a proposição composta em questão é sempre falsa, isto é, **trata-se de uma contradição**.

e) (P ∨~P) ∧ (Q ∨ ~Q). CERTO. Este é o **gabarito**.

(P ∨~P) é uma tautologia, assim como **(Q ∨ ~Q)**. Logo, a proposição em questão é:

$$t \wedge t$$

Trata-se de uma conjunção cujos termos são sempre verdadeiros. Logo, a proposição composta em questão é sempre verdadeira, isto é, **trata-se de uma tautologia**.

Gabarito: Letra E.

8.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Uma proposição lógica pode ser classificada como tautologia, contradição ou contingência.

Analise as proposições a seguir.

I) p∨¬(p∧q)

II) p→(p∨q)

III) ¬p∧(p∧¬q)

IV) (p∨¬q)→(q∧¬p)

São tautologias APENAS as que se apresentam em

a) I e II

b) I e III

c) II e III

d) II e IV

e) III e IV

Comentários:

Vamos analisar cada proposição por meio de álgebra de proposições. Lembre-se que a questão também poderia ser resolvida construindo a tabela-verdade das proposições.

I) p∨~(p∧q)

Note que **~(p∧q)** pode ser desenvolvido por De Morgan: **~(p∧q) ≡ ~p∨~q**. Ficamos com:

p∨~p∨~q

Veja que **p∨~p** é uma tautologia (**t**). Logo, temos:

t∨~q

Trata-se de uma disjunção inclusiva com um termo que sempre é verdadeiro. Logo, estamos diante de uma **tautologia**.

II) p→(p∨q)

Podemos transformar uma condicional em uma disjunção inclusiva por meio da equivalência **p→q ≡ ~pVq.** Aplicando para o caso em questão, temos:

~pVpVq

Note que **~pVp** é uma tautologia (**t**). Ficamos com:

tVq

Trata-se de uma disjunção inclusiva em que um dos termos é sempre verdadeiro. Logo, estamos diante de uma **tautologia**.

III) ~p∧(p∧~q)

Pela **propriedade associativa**, a proposição em questão corresponde a:

(~p∧p)∧~q

~p∧p é uma contradição (**c**). Ficamos com:

c∧~q

Note que estamos diante de uma conjunção em que um termo é sempre falso. Logo, estamos diante de uma conjunção que é sempre falsa, isto é, trata-se de uma **contradição**.

IV) (pV~q)→(q∧~p)

Podemos transformar uma condicional em uma disjunção inclusiva por meio da equivalência **p→q ≡ ~pVq.** Aplicando para o caso em questão, temos:

~(pV~q)V(q∧~p)

Podemos desenvolver **~(pV~q)** por De Morgan. Ficamos com:

(~p∧q)V(q∧~p)

Aplicando a propriedade comutativa em **(q∧~p)**, ficamos com:

(~p∧q)V(~p∧q)

Trata-se da disjunção inclusiva entre dois termos iguais. Logo, pela **propriedade da idempotência**, a proposição em questão é equivalente a:

(~p∧q)

Trata-se de uma **contingência.**

Gabarito: Letra A.

Lista de Questões – CESGRANRIO

Equivalências lógicas

Equivalências fundamentais

1.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011)

A contrapositiva de uma proposição condicional é uma tautologia.

PORQUE

A tabela verdade de uma proposição condicional é idêntica à de sua contrapositiva.

Analisando-se as afirmações acima, conclui-se que

a) as duas afirmações são verdadeiras, e a segunda justifica a primeira.

b) as duas afirmações são verdadeiras, e a segunda não justifica a primeira.

c) a primeira afirmação é verdadeira, e a segunda é falsa.

d) a primeira afirmação é falsa, e a segunda é verdadeira.

e) as duas afirmações são falsas.

2.(CESGRANRIO/IBGE/2010) Sempre que faz sol, Isabel passeia no parque.

Com base nessa informação, é possível concluir que, se

a) Isabel passeia no parque, então é um dia de sol.

b) Isabel passeia no parque, então não é um dia de sol.

c) Isabel não passeia no parque, então não está fazendo sol.

d) não está fazendo sol, Isabel passeia no parque.

e) não está fazendo sol, Isabel não está passeando no parque.

3.(CESGRANRIO/DETRAN AC/2009) Considere verdadeira a seguinte proposição:

"Se $x = 3$, então x é primo".

Pode-se concluir que

a) se x é primo, então $x = 3$

b) se x não é primo, então $x \neq 3$

c) se x não é primo, então $x = 3$

d) se $x \neq 3$, então x é primo

e) se $x \neq 3$, então x não é primo

4.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) Dos slogans abaixo, o que é equivalente a "Se beber, então não dirija" é

a) "Se não dirigir, então beba".

b) "Não beba nem dirija".

c) "Não beba ou não dirija".

d) "Se não beber, então dirija".

e) "Beba e não dirija"

5.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) A proposição "se o freio da bicicleta falhou, então não houve manutenção" é equivalente à proposição

a) o freio da bicicleta falhou e não houve manutenção.

b) o freio da bicicleta falhou ou não houve manutenção.

c) o freio da bicicleta não falhou ou não houve manutenção.

d) se não houve manutenção, então o freio da bicicleta falhou.

e) se não houve manutenção, então o freio da bicicleta não falhou.

6.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011)

I) Se beber, então não dirija.

II) Se dirigir, então não beba.

III) Se não beber, então dirija.

IV) Se não dirigir, então beba.

V) Dirija se e somente se não beber.

Analisando-se as afirmações acima, quanto à equivalência lógica entre elas, NÃO se pode afirmar que

a) (I) e (II) são equivalentes e (III) e (IV) são equivalentes.

b) (III), (IV) e (V) são equivalentes ou (I) e (II) são equivalentes.

c) Se (I) e (III) forem equivalentes, então (IV) e (V) são equivalentes.

d) Se (I) e (IV) são equivalentes, então (II) e (III) são equivalentes.

e) Se (I) e (II) são equivalentes, então (III), (IV) e (V) são equivalentes.

7.(CESGRANRIO/BASA/2014) Considere a seguinte afirmação:

Jorge se mudará ou Maria não será aprovada no concurso.

Tal afirmação é logicamente equivalente à afirmação:

a) Se Maria não for aprovada no concurso, então Jorge se mudará.

b) Se Maria for aprovada no concurso, então Jorge não se mudará.

c) Se Maria for aprovada no concurso, então Jorge se mudará.

d) Jorge não se mudará ou Maria será aprovada no concurso.

e) Jorge se mudará se, e somente se, Maria não for aprovada no concurso.

8. (CESGRANRIO/IBGE/2013) Certo dia, João afirmou:

Se eu tivesse ido ao banco ontem, eu não precisaria ir ao banco amanhã.

No dia seguinte, não tendo ido ao banco ainda, João diria algo logicamente equivalente ao que dissera no dia anterior, se tivesse dito:

a) Como não fui ao banco hoje, fui ao banco anteontem.

b) Como não fui ao banco ontem, irei ao banco hoje.

c) Como não fui ao banco hoje, fui ao banco ontem.

d) Como preciso ir ao banco hoje, não fui ao banco anteontem.

e) Como preciso ir ao banco hoje, eu fui ao banco ontem.

9.(CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) No dia 15 de janeiro, Carlos disse:

— Se a data de entrega do trabalho fosse amanhã, em vez de ter sido ontem, então eu conseguiria concluí-lo.

De forma logicamente equivalente, no dia seguinte, dia 16 de janeiro, Carlos poderia substituir sua fala original por:

a) Se a data de entrega do trabalho tivesse sido hoje, em vez de ontem, então eu conseguiria concluí-lo.

b) Se a data de entrega do trabalho tivesse sido anteontem, em vez de hoje, então eu conseguiria concluí-lo.

c) Se eu não consegui concluir o trabalho, então é porque a data de entrega não foi anteontem, foi hoje.

d) Se eu não consegui concluir o trabalho, então é porque a data de entrega não foi amanhã, foi ontem.

e) Se eu não consegui concluir o trabalho, então é porque a data de entrega não foi hoje, foi anteontem.

10.(CESGRANRIO/IBGE/2014) Se filho de pai estatístico sempre é estatístico, então

a) pai de estatístico sempre é estatístico.

b) pai de estatístico nunca é estatístico.

c) pai de estatístico quase sempre é estatístico.

d) pai de não estatístico sempre é estatístico.

e) pai de não estatístico nunca é estatístico.

Negação da conjunção e da disjunção inclusiva (leis de De Morgan)

11. (CESGRANRIO/DETRAN AC/2009) A negação da proposição "Mário é brasileiro ou Maria não é boliviana" é

a) Mário não é brasileiro e Maria é boliviana.

b) Mário não é brasileiro ou Maria é boliviana.

c) Mário não é brasileiro e Maria não é boliviana.

d) Mário é brasileiro e Maria não é boliviana.

e) Mário é brasileiro ou Maria é boliviana.

12. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) É dada a seguinte proposição:

João não foi trabalhar, mas saiu com amigos.

A negação dessa proposição é logicamente equivalente a

a) João foi trabalhar ou não saiu com amigos.

b) João foi trabalhar e não saiu com amigos.

c) João foi trabalhar e não saiu com inimigos.

d) João não foi trabalhar ou não saiu com inimigos.

e) João não foi trabalhar e não saiu com amigos.

Negação da Condicional

13. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) João disse que, se chovesse, então o show não seria cancelado. Infelizmente, os acontecimentos revelaram que aquilo que João falou não era verdade.

Portanto,

a) o show não foi cancelado porque choveu.

b) o show foi cancelado porque não choveu.

c) não choveu, e o show não foi cancelado.

d) não choveu, e o show foi cancelado.

e) choveu, e o show foi cancelado.

Outras equivalências e negações

14.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Negar a afirmação "o leão não é feroz e a girafa não gorjeia" equivale a afirmar que

a) se o leão não é feroz, então a girafa gorjeia.

b) se a girafa não gorjeia, então o leão não é feroz.

c) o leão é feroz, e a girafa gorjeia.

d) o leão não é feroz ou a girafa gorjeia.

e) o leão é feroz ou a girafa não gorjeia.

Questões com mais de uma equivalência

15.(CESGRANRIO/FINEP/2014) No contexto do Cálculo Proposicional, é verdadeira a afirmação

a) $(\sim p \wedge q)$ é equivalente a $\sim(p \vee q)$

b) $\sim(p \wedge q)$ é equivalente a $(p \rightarrow \sim q)$

c) $(p \vee q)$ é equivalente a $\sim(p \wedge q)$

d) $(p \rightarrow q)$ é equivalente a $(p \wedge \sim q)$

e) $\sim(p \rightarrow q)$ é equivalente a $(\sim p \vee q)$

Gabarito – CESGRANRIO

Equivalências lógicas

1. LETRA D
2. LETRA C
3. LETRA B
4. LETRA C
5. LETRA C
6. LETRA E
7. LETRA C
8. LETRA D
9. LETRA E
10. LETRA E
11. LETRA A
12. LETRA A
13. LETRA E
14. LETRA A
15. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Álgebra de proposições

1.(CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) João disse:

— Das duas, pelo menos uma: o depósito é amplo e claro, ou ele não se localiza em Albuquerque.

O que João disse é falso se, e somente se, o depósito

a) fica em Albuquerque e não é amplo ou não é claro.

b) fica em Albuquerque, não é amplo, nem é claro.

c) não é amplo, não é claro e não fica em Albuquerque.

d) é amplo ou é claro e fica em Albuquerque.

e) é amplo e claro e fica em Albuquerque.

2.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) A proposição $p\wedge\neg(q\wedge r)$ é equivalente a:

A) $(p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg r)$

B) $(p\vee\neg q)\wedge(p\vee\neg r)$

C) $(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg r)$

D) $(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$

E) $(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$

3.(CESGRANRIO/IBGE/2014) Dadas três proposições lógicas p, q e r, tem-se que $r \rightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$ se, e somente se,

a) $[(\sim p) \wedge (\sim q)] \rightarrow r$

b) $(\sim r) \rightarrow (p \wedge q)$

c) $(p \vee q) \rightarrow (\sim r)$

d) $(p \wedge q) \rightarrow (\sim r)$

e) $(p \vee q) \rightarrow r$

4. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012/Adaptada) A disjunção exclusiva, denotada por $\underline{\vee}$, é uma operação lógica que assume valor verdadeiro quando, e somente quando, apenas uma das proposições envolvidas assumir valor lógico verdadeiro.

Considere as proposições:

p: A equipe x participa do campeonato.

q: A equipe y fica na 2a colocação do campeonato.

Por qual proposição a negação de $p \veebar q$ pode ser expressa?

a) Se a equipe x participa do campeonato, então a equipe y fica na 2a colocação do campeonato.

b) A equipe x participa do campeonato ou a equipe y fica na 2a colocação do campeonato.

c) A equipe x participa do campeonato e a equipe y fica na segunda colocação do campeonato.

d) A equipe x não participa do campeonato e a equipe y não fica na 2a colocação do campeonato.

e) A equipe y fica na segunda colocação do campeonato se e somente se a equipe x participa do campeonato.

5.(CESGRANRIO/BASA/2014) Dadas duas proposições simples, p e q, uma das leis de De Morgan perpassa a tautologia

$$[\sim(p \wedge q)] \leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$$

Essa tautologia é logicamente equivalente à expressão

a) $[\sim((\sim p) \wedge (\sim q))] \leftrightarrow [p \vee q]$

b) $[\sim((\sim p) \vee (\sim q))] \leftrightarrow [p \vee q]$

c) $[\sim((\sim p) \wedge (\sim q))] \leftrightarrow [p \wedge q]$

d) $[(\sim p) \wedge (\sim q)] \leftrightarrow [\sim(p \wedge q)]$

e) $[(\sim p) \vee (\sim q)] \leftrightarrow [\sim(p \vee q)]$

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) Analisando as afirmações abaixo no contexto do Cálculo Proposicional, tem-se que a proposição

a) $p \rightarrow q \leftrightarrow p \wedge q$ é uma tautologia.

b) $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$ é uma tautologia.

c) $p \rightarrow q \leftrightarrow p \vee q$ é uma contradição.

d) $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$ é uma contradição.

e) $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \wedge q$ é uma contradição.

7.(CESGRANRIO/BR/2010) Dentre as expressões lógicas abaixo, qual apresenta, após simplificação, tautologia como resultado?

a) $(Q \vee Q) \wedge \sim P$

b) $(P \wedge P) \vee (Q \vee \sim Q) \wedge Q$

c) $(P \wedge Q) \vee (Q \vee \sim Q) \wedge P$

d) (P ∧ ~P) ∨ (Q ∧~Q)

e) (P ∨~P) ∧ (Q ∨ ~Q)

8.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Uma proposição lógica pode ser classificada como tautologia, contradição ou contingência.

Analise as proposições a seguir.

I) p∨¬(p∧q)

II) p→(p∨q)

III) ¬p∧(p∧¬q)

IV) (p∨¬q)→(q∧¬p)

São tautologias APENAS as que se apresentam em

a) I e II

b) I e III

c) II e III

d) II e IV

e) III e IV

Gabarito – CESGRANRIO

Álgebra de proposições

1. LETRA A
2. LETRA C
3. LETRA C
4. LETRA E
5. LETRA A
6. LETRA B
7. LETRA E
8. LETRA A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.