Como $X_A + X_B = 1$, podemos isolar X_B:

$$X_B = 1 - X_A$$

Lembre-se que $\overline{R}_p = X_A\overline{R}_A + X_B\overline{R}_B$.

Substituindo o valor de X_B :

$$\overline{R}_p = X_A\overline{R}_A + (1 - X_A)\overline{R}_B.$$

O retorno da carteira é a média ponderada
dos retornos esperados individuais.
A soma dos pesos é igual a 1

$$\sigma_p = (X_A^2\sigma_A^2 + X_B^2\sigma_B^2 + 2X_AX_B\sigma_{AB})^{\frac{1}{2}},$$

onde,

σ_p é o desvio-padrão do retorno da carteira
σ_A^2 é a variância do retorno do ativo A
σ_B^2 é a variância do retorno do ativo B
σ_{AB} é a covariância entre os retornos dos ativos A e B

Se substituímos $X_B = 1 - X_A$ nessa expressão obtemos:

$$\sigma_p = (X_A^2\sigma_A^2 + (1 - X_A)^2\sigma_B^2 + 2X_A(1 - X_A)\sigma_{AB})^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$, onde ρ_{AB} é o coeficiente de correlação entre os retornos dos ativos A e B, a equação acima se transforma em:

$$\sigma_p = (X_A^2\sigma_A^2 + (1 - X_A)^2\sigma_B^2 + 2X_A(1 - X_A)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)^{\frac{1}{2}}.$$

O desvio-padrão da carteira não é, em geral, uma simples média ponderada dos desvios-padrão dos ativos.

Substituindo o coeficiente $\rho = 1$ na equação

$$\sigma_p = (X_C^2\sigma_C^2 + (1 - X_C)^2\sigma_E^2 + 2X_C(1 - X_C)\rho_{CE}\sigma_C\sigma_E)^{\frac{1}{2}}$$

obtemos

$$\sigma_p = (X_C^2\sigma_C^2 + 2X_C(1 - X_C)\sigma_C\sigma_E + (1 - X_C)^2\sigma_E^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Note que na equação acima ocorre a disposição $X^2 + 2XY + Y^2$ que pode ser substituída por $(X + Y)^2$, logo obtemos:

$$\sigma_p = [(X_C\sigma_C + (1 - X_C)\sigma_E)^2]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\sigma_p = X_C\sigma_C + (1 - X_C)\sigma_E.$$

Enquanto isso, o retorno esperado da carteira é dado por:

$$\overline{R}_p = X_C\overline{R}_C + (1 - X_C)\overline{R}_E.$$

O risco e o retorno da carteira são
simplesmente combinações lineares
do risco e retorno de cada ativo

Isolando a variável X_C na equação $\sigma_p = X_C\sigma_C + (1 - X_C)\sigma_E$ obtemos

$$X_C = \frac{\sigma_p - \sigma_E}{\sigma_C - \sigma_E}.$$

Substituindo este valor na equação $\overline{R}_p = X_C\overline{R}_C + (1 - X_C)\overline{R}_E$:

$$\overline{R}_p = \frac{\sigma_p - \sigma_E}{\sigma_C - \sigma_E}\overline{R}_C + \left(1 - \frac{\sigma_p - \sigma_E}{\sigma_C - \sigma_E}\right)\overline{R}_E.$$

Utilizando os valores da tabela obtemos:

$$\overline{R}_p = 2 + 2\sigma_p.$$

uma reta

Substituindo o coeficiente $\rho = -1$ na equação

$$\sigma_p = (X_C^2\sigma_C^2 + (1 - X_C)^2\sigma_E^2 + 2X_C(1 - X_C)\rho_{CE}\sigma_C\sigma_E)^{\frac{1}{2}}$$

obtemos

$$\sigma_p = (X_C^2\sigma_C^2 + (1 - X_C)^2\sigma_E^2 - 2X_C(1 - X_C)\sigma_C\sigma_E)^{\frac{1}{2}}.$$

Novamente a equação do desvio-padrão pode ser simplificada. Podemos escrever:

$$\sigma_p = ((X_C\sigma_C - (1 - X_C)\sigma_E)^2)^{\frac{1}{2}} = |X_C\sigma_C - (1 - X_C)\sigma_E)|$$

Logo,

$$\sigma_p = \pm(X_C\sigma_C - (1 - X_C)\sigma_E)$$

$$\sigma_p = X_C\sigma_C - (1 - X_C)\sigma_E$$

$$\sigma_p = -(X_C\sigma_C - (1 - X_C)\sigma_E))$$

$\sigma_p = X_C\sigma_C - (1 - X_C)\sigma_E$
No nosso exemplo:

$$\sigma_p = 6X_C - (1 - X_C)3 = 6X_C - 3 + 3X_C \Rightarrow \ \sigma_p + 3 = 9X_C$$

$$X_C = \frac{1}{9}\sigma_p + \frac{1}{3}$$

Como,

$$\overline{R}_p = X_C\overline{R}_C + (1 - X_C)\overline{R}_E$$

Temos,

$$\overline{R}_p = \left(\frac{1}{9}\sigma_p + \frac{1}{3}\right)14 + \left(1 - \left(\frac{1}{9}\sigma_p + \frac{1}{3}\right)\right)8 = \frac{6}{9}\sigma_p + 10$$

$$\overline{R}_p = \frac{2}{3}\sigma_p + 10$$

$\sigma_p = -X_C\sigma_C + (1 - X_C)\sigma_E$
No nosso exemplo:

$$\sigma_C = -6X_C + (1 - X_C)3 = -6X_C + 3 - 3X_C \quad \Rightarrow \sigma_p - 3 = -9X_C$$

$$X_C = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\sigma_p$$

Como,

$$\overline{R}_p = X_C\overline{R}_C + (1 - X_C)\overline{R}_E$$

Temos,

$$\overline{R}_p = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\sigma_p\right)14 + \left(1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\sigma_p\right)\right)8 = -\frac{6}{9}\sigma_p + 10$$

$$\overline{R}_p = -\frac{2}{3}\sigma_p + 10$$

É possível ter risco nulo?
Já vimos que:
$\sigma_p = \pm(X_C\sigma_C - (1 - X_C)\sigma_E)$

Risco nulo significa $\sigma_p = 0$

Logo,

$$X_C\sigma_C - (1 - X_C)\sigma_E = 0 \quad \Rightarrow \quad X_C = \frac{\sigma_E}{\sigma_C + \sigma_E}$$

Como $\sigma_C > 0$, então

$$\sigma_C + \sigma_E > \sigma_E \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_E}{\sigma_C + \sigma_E} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < X_C < 1$$

A carteira com risco nulo sempre envolve investimentos positivos em ambos os ativos

No nosso exemplo, $X_C = \dfrac{3}{3+6} = \dfrac{1}{3}$
$\overline{R}_p = \frac{1}{3}14 + \frac{2}{3}8 = 10$
$(\sigma_p, \overline{R}_p) = (0, 10)$

Caso 1
Caso 2
Risco

Onde estão todos os valores possíveis para σ_p?
Lembre-se que

$$\sigma_p = (X_C^2\sigma_C^2 + (1 - X_C)^2\sigma_E^2 + 2X_C(1 - X_C)\rho_{CE}\sigma_C\sigma_E)^{\frac{1}{2}}$$

Note

$$\sigma_p = (\overbrace{X_C^2\sigma_C^2}^{\geq 0} + \overbrace{(1 - X_C)^2\sigma_E^2}^{\geq 0} + \overbrace{2X_C(1 - X_C)\sigma_C\sigma_E}^{\geq 0}\ \rho_{CE})^{\frac{1}{2}}$$

Sendo $0 < X_C < 1$, σ_p assume
maior valor quando: $\rho_{CE} = 1$
menor valor quando: $\rho_{CE} = -1$

Intuitivamente:
uma correlação
intermediária produziria
uma curva como *EOC*

Substituindo $\rho_{CE} = 0$ na fórmula
$\sigma_p = (X_C^2\sigma_C^2 + (1 - X_C)^2\sigma_E^2 + 2X_C(1 - X_C)\rho_{CE}\sigma_C\sigma_E)^{\frac{1}{2}}$
obtemos

$$\sigma_p = (X_C^2\sigma_C^2 + (1 - X_C)^2\sigma_E^2)^{\frac{1}{2}}$$

No nosso exemplo, isso significa, $\sigma_p = (6^2 X_C^2 + 3^2(1 - X_C)^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\sigma_p = (45X_C^2 - 18X_C + 9)^{\frac{1}{2}}$$

Vamos fazer o traço
dessa curva utilizando
o Python

$\rho = 0$
$\rho = -1$
$\rho = 0.5$
$\rho = 1$