Aula 15

TSE - Concurso Unificado (Analista Judiciário - Área Administrativa) Raciocínio Lógico e Matemática - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

30 de Março de 2023

Índice

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Fala, concurseiro! Estamos juntos em mais uma aula e hoje falaremos sobre:

Sequências, Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Trata-se de um **assunto bastante comum** em provas e, portanto, fundamental na sua preparação. Nas próximas páginas, você entenderá o que é uma sequência, faremos também **uma análise das sequências mais famosas** e traremos bastante exemplos para não ficarmos apenas na teoria.

Nessa aula, existem algumas fórmulas que você deve guardar na memória. Portanto, anote-as em um canto de fácil visualização e faça a lista de exercícios proposta ao final desse livro. A prática de questões é nossa maior aliada quando temos que memorizar alguma fórmula. Portanto, nada de só ver a teoria! *Ok?!*

Um forte abraço,
Prof. Francisco Rebouças.

Para **tirar dúvidas**, não deixe de utilizar o nosso fórum. Lá, estaremos sempre à disposição para ajudá-lo. Se preferir, você também **pode entrar em contato diretamente comigo** através dos seguintes canais:

E-mail - Prof. Francisco Rebouças:

prof.franciscoreboucas@gmail.com

Telegram - Prof. Francisco Rebouças:

https://t.me/prof_fco

"Tente uma, duas, três vezes e se possível tente a quarta, a quinta e quantas vezes for necessário. Só não desista nas primeiras tentativas, a persistência é amiga da conquista. Se você quer chegar onde a maioria não chega, faça o que a maioria não faz." (Bill Gates)

Vamos com TUDO!

SEQUÊNCIAS, PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Introdução às Sequências Numéricas

De modo objetivo, podemos definir as sequências afirmando que são **listas de números em que os termos obedecem a uma determinada regra de sucessão**.

- (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...);
- (1, 1 ,2 ,2 ,3 ,3, 4, 4, ...);
- (2, 4, 8, 16, 32, ...);
- (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...);

Normalmente, as sequências aparecem representadas na forma acima: entre parênteses, termo separados por vírgulas e com as reticências ao final, caso necessário. Ademais, é possível representar as sequências da seguinte forma:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$$

Nesse tipo de representação, temos que o a_1 é lido como "a índice um", a_2 é o "a índice dois", a_3 é o "a índice três" e assim sucessivamente. Por exemplo, na sequência $(3, 6, 9, 12, 15, \dots)$ temos que:

- $a_1 = 3$
- $a_2 = 6$
- $a_3 = 9$
- $a_4 = 12$
- $a_5 = 15$

Esse índice que está subscrito ao "a" indica a ordem do termo! a_1é o primeiro termo da sequência, a_2 é o segundo termo da sequência, a_3 é o terceiro. Quando queremos representar um termo de uma sequência e não sabemos qual a sua ordem, simplesmente o denotamos como $\boldsymbol{a_n}$ e o lemos **"a índice n"**.

É importante falar que algumas sequências podem ser representadas pelo seu termo geral. Por exemplo, $(3, 6, 9, 12, 15, \dots)$ pode ser explicitada como $\boldsymbol{a_n = 3 \cdot n}, n \in \mathbb{N}^*$. Assim, ficamos com:

- Quando $n = 1$, então $a_1 = 3 \cdot 1 \implies a_1 = 3$
- Quando $n = 2$, então $a_2 = 3 \cdot 2 \implies a_2 = 6$
- Quando $n = 3$, então $a_3 = 3 \cdot 3 \implies a_3 = 9$
- Quando $n = 4$, então $a_4 = 3 \cdot 4 \implies a_4 = 12$
- Quando $n = 5$, então $a_5 = 3 \cdot 5 \implies a_5 = 15$

Veja que obtivemos exatamente **os mesmos números** da sequência que estávamos tratando, inclusive na ordem dada. Conclusão: nossas sequências podem ser representadas de formas diferentes, por meio da lei de formação e não só na forma explícita $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$.

Existem **sequências que apresentam um padrão muito específico**. Essas sequências ganham um nome especial e trataremos delas nos tópicos subsequentes. Como exemplo, podemos citar **a sequência de Fibonacci, a progressão aritmética e a progressão geométrica**.

HORA DE PRATICAR!

(PM-SP/2020) Na sequência de números: 4, 8, 6, 12, 10, 20, 18, 36, 34, ..., o primeiro termo que é maior do que 100 é o número

a) 122.
b) 126.
c) 132.
d) 136.

Comentários:

Para aquecer um pouco, vamos resolver essa questão e ver como é a pegada. A primeira coisa que podemos perceber na sequência dada, é que temos alguns termos que são o dobro do anterior.

$$\underbrace{4, 8}_{\times 2}, \underbrace{6, 12}_{\times 2}, \underbrace{10, 20}_{\times 2}, \underbrace{18, 36}_{\times 2}, \underbrace{34, \ldots}_{\times 2},$$

Observe ainda que o número que multiplicamos por dois é duas unidades menor do que o seu anterior.

$$4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{-2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{-2} 10 \xrightarrow{\times 2} 20 \xrightarrow{-2} 18 \xrightarrow{\times 2} 36 \xrightarrow{-2} 34 \xrightarrow{\times 2} 68, \ \ldots$$

Seguindo a lógica que encontramos, podemos completar a sequência para achar o primeiro termo que é maior do que 100.

$$4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{-2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{-2} 10 \xrightarrow{\times 2} 20 \xrightarrow{-2} 18 \xrightarrow{\times 2} 36 \xrightarrow{-2} 34 \xrightarrow{\times 2} 68 \xrightarrow{-2} 66 \xrightarrow{\times 2} 132 \ldots$$

Gabarito: LETRA C.

Sequência de Fibonacci

Pessoal, a sequência de Fibonacci é muito conhecida no meio matemático. Reconhecê-la na hora da prova pode ser um diferencial, de modo a propiciar mais confiança e agilidade na questão. *E qual é a sequência de Fibonacci?*

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots)$$

Você consegue desvendar o padrão dessa sequência? A sequência de Fibonacci é definida a partir de dois valores iniciais: o primeiro e o segundo termo. Em uma sequência qualquer, chamaríamos esses termos de a_1 e a_2. No entanto, estamos falando da sequência de Fibonacci e por esse motivo, chamamos esses termos de $\boldsymbol{F_1}$ **e** $\boldsymbol{F_2}$.

Note que os dois primeiros termos dessa sequência são iguais a 1! Depois, cada termo subsequente é formado pela soma dos dois anteriores! Percebeu?

- $F_3 = F_1 + F_2 \implies F_3 = 1 + 1 = 2$
- $F_4 = F_3 + F_2 \implies F_4 = 2 + 1 = 3$
- $F_5 = F_4 + F_3 \implies F_5 = 3 + 2 = 5$
- $F_6 = F_5 + F_4 \implies F_6 = 5 + 3 = 8$
- Por aí vai...

Podemos representar esses fatos de uma forma resumida e organizada. Para essa finalidade, definimos a sequência de Fibonacci da seguinte forma:

$$F_n = \begin{cases} 1, se\ n = 1 \\ 1, se\ n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, se\ n \geq 3 \end{cases}$$

Veja que é tudo o que a gente falou até aqui, mas utilizando a notação matemática. Os dois primeiros termos são iguais a 1 e um termo genérico F_n é dado como a soma dos dois termos anteriores a ele: $\boldsymbol{F_{n-1} + F_{n-2}}$.

Podemos, ainda, representar a sequência de Fibonacci de mais um jeito**, através de uma fórmula**! Qualquer termo da sequência de Fibonacci pode ser obtido usando a seguinte expressão:

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

É um jeito mais trabalhoso de obtermos os termos, pois precisaremos ficar desenvolvendo os binômios. Recomendo que, para escrever a sequência, utilize nossa regra de somar os dois termos anteriores, lembrando que **os dois primeiros termos são iguais a um**.

No mais, é importante ter uma noção do aspecto da fórmula, pois poderá te ajudar em eventuais questões. Falando nelas, vamos fazer algumas?

HORA DE PRATICAR!

(ALESE/2018) Um servidor público, no seu primeiro dia de trabalho, atendeu uma única pessoa, o que se repetiu no segundo dia. A partir do terceiro, o número de pessoas atendidas por ele sempre foi igual à soma dos números de pessoas atendidas nos dois dias anteriores. Seu supervisor prometeu que, se houvesse um dia em que ele atendesse 50 ou mais pessoas, ele ganharia uma folga extra. Considerando que o padrão de atendimentos descrito se manteve, o servidor ganhou sua primeira folga extra ao final do

A) oitavo dia de trabalho.
B) décimo dia de trabalho.
C) décimo segundo dia de trabalho.
D) vigésimo dia de trabalho.
E) vigésimo segundo dia de trabalho.

Comentários:

Vamos **montar uma sequência** com as informações fornecidas no enunciado. Temos que um servidor público atendeu uma pessoa no primeiro dia de trabalho, $\boldsymbol{a_1 = 1}$. No segundo dia, o servidor atendeu também uma pessoa, $\boldsymbol{a_2 = 1}$. A partir do terceiro dia, o número de pessoas atendidas é igual à soma dos dois dias anteriores. Por exemplo, $\boldsymbol{a_3 = a_1 + a_2 = 2}$.

Note que a sequência cujo os dois primeiros termos são 1 e os demais termos é a soma do dois anteriores é uma sequência muito conhecida no meio matemático: é a sequência de Fibonacci. Lembre-se:

$$F_n = \begin{cases} 1, se\ n = 1 \\ 1, se\ n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, se\ n \geq 3 \end{cases}$$

Logo, queremos achar o primeiro termo da sequência de Fibonacci maior do que 50. Como fazemos isso? O jeito mais fácil é escrever todos eles!

F_1	F_2	$F_3 = F_1 + F_2$	$F_4 = F_2 + F_3$	$F_5 = F_3 + F_4$
1	1	2	3	5
$F_6 = F_4 + F_5$	$F_7 = F_6 + F_5$	$F_8 = F_7 + F_6$	$F_9 = F_8 + F_7$	$F_{10} = F_9 + F_8$
8	13	21	34	55

Encontramos, portanto, que ao fim do décimo dia o servidor terá atendido 55 pessoas e ganhará a sua primeira folga extra.

Gabarito: Letra B.

Progressão Aritmética

Conceito

A **progressão aritmética** é o tipo de sequência mais comum em questões. De modo geral, é qualquer sequência cujo termo subsequente difere do anterior por uma constante. É mais fácil do que você está pensando! Vamos ver alguns exemplos para começar a destrinchar essa matéria!

- $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots)$
- $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$
- $(21, 14, 7, 0, -7, -14, -21, \dots)$
- $(0, 50, 100, 150, 200, 250, \dots)$

Você é capaz de identificar os padrões das sequências acima? Todas elas são exemplos de progressões aritméticas. À medida que "se anda" na sequência, os termos sempre aumentam (ou diminuem) de um mesmo um valor.

- $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior mais 1.
- $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior mais 2.
- $(21, 14, 7, 0, -7, \ \dots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior menos 7.
- $(0, 50, 100, 150, 200, \ \dots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior mais 50.

Esse número que adicionamos a cada termo é chamado de razão (r). Quando a razão é positiva, nós dizemos que a **PA é crescente**, quando é negativa, dizemos que a **PA é decrescente**. Ademais, a razão de uma progressão aritmética também poderá ser igual a zero ($r = 0$), nesse caso, dizemos que a PA é constante.

PA	Condições	Exemplos
Crescente	$r > 0$	$(2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots)$
Decrescente	$r < 0$	$(100, 90, 80, 70, \ldots)$
Constante	$r = 0$	$(5, 5, 5, 5, 5, \ldots)$

Um fato que eu gostaria de ressaltar com vocês é que a escolha da letra "a" para representar elementos de uma sequência **é só uma convenção**. Na prática, você poderá ver sequências representadas das mais diferentes maneiras, por exemplo, utilizando a letra "b" no lugar da letra "a": $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots)$.

Esse tipo de notação é válido! Não tem problema algum, **é ao gosto do freguês**! Por isso, quando você ver sequências representadas com outras letras, continua sendo uma sequência e **a abordagem é exatamente a que estamos fazendo aqui**. *Entendido?*

HORA DE PRATICAR!

(PREF. LARANJAL PAUL/2019) A sequência numérica (50, 54, 58, 62, 66) é uma progressão do tipo:
A) Geométrica de razão 2.
B) Geométrica de razão 4.
C) Aritmética de razão 2.
D) Aritmética de razão 4.
E) Aritmética de razão 6.

Comentários:
Apesar de não termos estudado ainda a progressão geométrica, conseguimos perceber que a sequência do enunciado tem a seguinte propriedade: **a diferença entre qualquer um dos termos e o seu anterior é constante e igual a 4 (quatro)**. Dessa forma, temos caracterizada uma PA de razão igual a 4.

Gabarito: LETRA D.

(PREF. LARANJAL PAUL/2019/MOD) Assinale a alternativa que apresenta a sequência numérica que é uma Progressão Aritmética:
A) $(2{,}25;\ 2{,}5;\ 2{,}75, 3)$.
B) $(2;\ 4;\ 8;\ 16)$.
C) $(5{,}3;\ 5{,}5;\ 5{,}6;\ 5; 7)$.

D) $(6;\ 12;\ 16;\ 24)$.

Comentários:

A) **CERTO. A diferença entre um termo e o seu anterior é sempre constante**.

$$(2{,}25;\ 2{,}5;\ 2{,}75, \quad 3)$$

$$+0{,}25 \qquad +0{,}25 \qquad +0{,}25$$

Os "saltos" são sempre constantes e iguais a 0,25 (essa é a razão). Dessa forma, **trata-se de uma PA**.

B) **ERRADO.** Nesse caso, a diferença entre um termo e o seu anterior não é constante.

$$(2;\ 4;\ 8;\ 16)$$

$$+2 \qquad +4 \qquad +8$$

C) **ERRADO.** Mesma justificativa da alternativa anterior. A diferença entre um termo e seu anterior não é constante (uma hora é 0,2 e outra hora é 0,1). Dessa forma não podemos dizer que é uma PA.

$$(5{,}3; 5{,}5; 5{,}6; 5{,}7)$$

$$+0{,}2 \qquad +0{,}1 \qquad +0{,}1$$

D) **ERRADO.** Mais uma vez, a diferença entre um termo e o seu anterior não é constante.

$$(6; 12; 16; 24)$$

$$+6 \qquad +4 \qquad +8$$

Gabarito: LETRA A.

Termo Geral de uma PA

Em uma progressão aritmética de forma geral $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$, sempre poderemos escrever um termo como **função da razão (r) e do primeiro termo (a_1)**.

- $a_2 = a_1 + r$
- $a_3 = a_2 + r \quad \Longrightarrow \quad a_3 = (a_1 + r) + r \quad \Longrightarrow \quad a_3 = a_1 + 2r$

- $a_4 = a_3 + r \implies a_4 = (a_1 + 2r) + r \implies a_4 = a_1 + 3r$

Utilizamos o fato de que, em uma PA, um determinado termo é igual ao seu anterior mais uma constante. Para descobrir o a_5, nós só precisamos do a_1 e da razão (r), **não sendo necessário escrever todos os termos da PA até o a_5**. Imagine, por exemplo, que você quer saber o a_{50} da sequência $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots)$.

Você concorda que listar os 50 termos não seria uma tarefa bacana, né? No entanto, se você souber o a_1 e a razão (r), é possível encontrá-lo em segundos. A **fórmula do termo geral de uma progressão aritmética** é dada pela expressão abaixo, guarde ela bem!

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Por exemplo, para obter o a_{50} da sequência $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots)$, basta sabermos que $a_1 = 2$ e $r = 2$.

$$a_{50} = 2 + (50 - 1) \cdot 2 \quad \rightarrow \quad a_{50} = 2 + 49 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_{50} = 100}$$

E se a razão for negativa, como fazemos? **Absolutamente do mesmo jeito, não vai mudar nada**. Vamos pegar a sequência $(21, 14, 7, 0, -7, \ \ldots)$ que possui razão $r = -7$ e primeiro termo $a_1 = 21$. Veja que é uma PA decrescente. Qual será o a_{75}? Da fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, podemos fazer:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{75} = 21 + (75 - 1) \cdot (-7) \quad \rightarrow \quad a_{75} = 21 - 74 \cdot 7 \quad \rightarrow \quad a_{75} = -497$$

HORA DE PRATICAR!

(CÂMARA DOS DEPUTADOS/2014) Em determinado colégio, todos os 215 alunos estiveram presentes no primeiro dia de aula; no segundo dia letivo, 2 alunos faltaram; no terceiro dia, 4 alunos faltaram; no quarto dia, 6 alunos faltaram, e assim sucessivamente. Com base nessas informações, julgue o próximo item, sabendo que o número de alunos presentes às aulas não pode ser negativo.

No vigésimo quinto dia de aula, faltaram 50 alunos

Comentários:

O número de faltosos aumenta conforme **uma progressão aritmética de razão 2**, observe:

$\boldsymbol{a_1 = 0}$
$\boldsymbol{a_2 = 2}$
$\boldsymbol{a_3 = 4}$
$\boldsymbol{a_4 = 6}$

Sabemos que a fórmula do termo geral de uma PA é dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Queremos calcular quantos alunos faltaram no 25° dia ($n = 25$). Como a razão é 2 ($r = 2$), então:

$$a_{25} = 0 + (25-1) \cdot 2$$

$$a_{25} = 48$$

Logo, no 25° dia, faltaram 48 alunos.

Gabarito: ERRADO

(IFRR/2020) Em uma determinada Progressão Aritmética, sabe-se que a razão vale 3 e o termo 15 vale 40. Assinale a alternativa que indica corretamente o valor do termo 31 desta Progressão Aritmética.
A) 16.
B) 31.
C) 48.
D) 88.
E) 96.

Comentários:
A questão falou em progressão aritmética de razão igual a 3 e de termo 15 igual a 40. Dessa forma,

$$r = 3 \quad \text{e} \quad a_{15} = 40$$

Com essas duas informações, precisamos descobrir o $\boldsymbol{a_{31}}$.

Na minha opinião, uma solução mais simples é encontrarmos o a_1 com as informações acima e, depois, encontrar o a_{31}. Lembre-se que com a **razão ($\boldsymbol{r}$) e o primeiro termo ($\boldsymbol{a_1}$), é possível encontrar qualquer termo da PA.**

$$a_{15} = a_1 + (15-1)r \quad \rightarrow \quad a_{15} = a_1 + 14r$$

Substituindo os valores que temos.

$$40 = a_1 + 14 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad a_1 = 40 - 42 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = -2}$$

Agora, com a razão (r) e o primeiro termo (a_1), podemos determinar o a_{31}.

$$a_{31} = a_1 + (31 - 1) \cdot r \quad \rightarrow \quad a_{31} = a_1 + 30r$$

Substituindo os valores da razão e do primeiro termo.

$$a_{31} = -2 + 30 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{31} = 88}$$

Gabarito: LETRA D.

Progressão Aritmética de 3 termos

É muito comum aparecer em provas uma progressão aritmética de 3 termos. Isso acontece pois elas possuem uma propriedade bem especial. Por exemplo, imagine que temos a seguinte PA: $(2, 4, 6)$. Note que **o termo central é a média aritmética dos outros dois**!

$$\frac{2\ (a_1) + 6\ (a_3)}{2} = 4\ (a_2)$$

Isso sempre será verdade, para qualquer PA. Vou lhe mostrar o porquê.

$$\overset{\boldsymbol{4-2}}{\downarrow} \qquad \overset{\boldsymbol{4+2}}{\downarrow}$$

$$(2, 4, 6)$$

Note que o termo anterior ao termo central é igual ao **termo central menos a razão**. Analogamente, o termo posterior é o **termo central mais a razão**. No caso dessa PA que estamos trabalhando, **a razão é igual a 2**. Genericamente, podemos representar essa mesma situação da seguinte forma:

$$\overset{\boldsymbol{a_2 - r}}{\downarrow} \qquad \overset{\boldsymbol{a_2 + r}}{\downarrow}$$

$$(a_1, a_2, a_3)$$

A média aritmética entre a_1 e a_3 é:

$$M = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Substituindo $a_1 = a_2 - r$ e $a_3 = a_2 + r$:

$$M = \frac{(a_2 - \cancel{r}) + (a_2 + \cancel{r})}{2} \quad \rightarrow \quad M = \frac{\cancel{2} \cdot a_2}{\cancel{2}} \quad \rightarrow \quad M = a_2$$

Ora, se $M = a_2$, então podemos escrever que:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Vamos ver na prática como saber isso pode nos ajudar?

HORA DE PRATICAR!

(PREF. LINHARES/2020) A sequência $(3x - 2, 2x + 3, 5x - 8)$ é uma progressão aritmética de três termos. O valor do segundo termo dessa sequência é:

A) 11.

B) 10.

C) 13.

D) 12.

E) 4.

Comentários:

Olha aí, moçada. **Uma progressão aritmética com três termos.** Vamos entendê-la.

$$\left(\underbrace{3x - 2}_{a_1}, \underbrace{2x + 3}_{a_2}, \underbrace{5x - 8}_{a_3}\right)$$

Ora, sabemos que:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Assim, substituindo pelas expressões:

$$2x + 3 = \frac{(3x - 2) + (5x - 8)}{2}$$

$$4x + 6 = 3x - 2 + 5x - 8$$

$$4x + 6 = 8x - 10$$

$$4x = 16 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 4}$$

Com o valor de x determinado, basta substituí-lo na expressão do a_2.

$$a_2 = 2x + 3 \quad \rightarrow \quad a_2 = 2 \cdot 4 + 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = 11}$$

Gabarito: LETRA A.

Interpolação de termos em uma PA

Para entender o que significa interpolar, vou abrir essa teoria já com um exercício. Acredito que será mais fácil visualizarmos com um exemplo!

EXEMPLIFICANDO

(PREF. JAGUAPITÃ/2020) A progressão aritmética $(8, \dots, 29)$ possui 6 termos entre o primeiro e o último. Qual é o sexto termo dessa sequência?

A) 16.
B) 20.
C) 23.
D) 29.

Comentários:

Observe que o enunciado nos forneceu dois termos e pede para determinarmos outro termo que está entre esses dois. Simplificadamente, isso é interpolar, tudo bem? **Quando precisamos deduzir um ou mais valores que estão entre outros dois**. Vamos resolver esse exercício para entender como devemos proceder no contexto das PAs. É importantíssimo notar que o enunciado falou que existem **6 termos entre o primeiro e o último**. Assim,

$$(\overset{\overset{a_1}{\uparrow}}{8}, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5, \boldsymbol{a_6}, a_7}_{\text{6 termos entre o primeiro e o último}}, \overset{\overset{a_8}{\uparrow}}{29})$$

O enunciado pede o sexto termo (a_6), por isso, o destaque em vermelho.

Pronto, temos o problema esquematizado. **Lembre-se sempre que com o primeiro termo e a razão, conseguimos determinar qualquer outro termo da sequência**. Nós temos o primeiro termo, falta encontrarmos a razão dessa PA. Como fazemos isso?! **Por meio da fórmula do termo geral**. Sabemos o a_1 e o a_8. Assim,

$$a_8 = a_1 + 7r \quad \rightarrow \quad 29 = 8 + 7r \quad \rightarrow \quad 21 = 7r \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = 3}$$

Com o primeiro termo e a razão, conseguimos encontrar o a_6.

$$a_6 = a_1 + 5r \quad \rightarrow \quad a_6 = 8 + 5 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad a_6 = 8 + 15 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_6 = 23}$$

Gabarito: LETRA C.

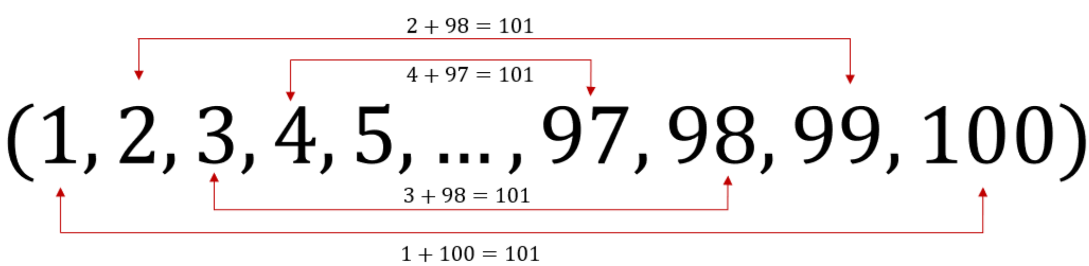
Soma dos n primeiros termos de uma PA

Existe mais uma fórmula dentro do universo da progressão aritmética que é a da **soma dos n primeiros termos**. Imagine que temos a seguinte PA: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots)$. *Qual é a soma dos 100 primeiros termos?* Utilizando a fórmula da **soma dos n primeiros termos de uma PA**, podemos responder isso rapidamente.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

INDO MAIS FUNDO!

Vamos tentar chegar na fórmula acima de uma maneira simplificada? Primeiro, considere a seguinte PA: (1, 2, 3, 4, ..., 96, 97, 98, 99, 100). É uma PA com 100 termos e razão 1. Agora, observe o esquema abaixo:



A intenção é visualizar o seguinte: a soma do primeiro com o último termo é igual a soma do segundo com o penúltimo termo e assim sucessivamente. Assim, podemos escrever que:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \cdots$$

Quantos pares conseguiremos formar? Ora, se são 100 termos, então faremos 50 pares, isto é, n/2. A soma dos termos será exatamente a soma desses 50 pares, concorda? Todos eles valem $(a_1 + a_n)$. Portanto, basta multiplicarmos $(a_1 + a_n)$ por $\frac{n}{2}$, que é quantidade de pares. Assim,

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

Vamos utilizar a fórmula para calcular a soma da PA em análise.

Substituindo na fórmula $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$ e $n = 100$:

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot \cancel{100}}{\cancel{2}}$$

$$S_{100} = (1 + 100) \cdot 50$$

$$S_{100} = 5050$$

Portanto, a soma dos 100 primeiros termos da progressão aritmética $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots)$ **é 5050**.

(PREF. TAPEJARA /2019) A soma dos 50 primeiros termos da sequência numérica $(-10, -5, 0, \dots)$ é:

A) 5500.

B) 5625.

C) 5725.

D) 5800.

E) 5925.

Comentários:

O enunciado quer a soma dos 50 primeiros termos. Você deve lembrar da fórmula.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Como são os 50 primeiros termos, temos que $\boldsymbol{n = 50}$. Além disso, o primeiro termo da sequência é -10. Assim, $\boldsymbol{a_1 = -10}$. Portanto, falta apenas achar a_{50} para conseguirmos usar a fórmula. Nesse intuito, devemos usar:

$$a_{50} = a_1 + 49r$$

Olhando para a sequência, percebemos que a diferença entre um termo e o seu anterior é sempre igual a 5. Logo, essa é a nossa razão ($\boldsymbol{r = 5}$).

$$a_{50} = -10 + 49 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{50} = 235}$$

Pronto, temos todos os valores para usarmos a fórmula da soma.

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} \quad \rightarrow \quad S_{50} = (-10 + 235) \cdot 25 \quad \rightarrow \quad S_{50} = 225 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_{50} = 5.625}$$

Gabarito: LETRA B.

Progressão Geométrica

Conceito

Na parte de progressões aritméticas, vimos que elas são caracterizadas pela presença de uma razão, que somamos ao termo anterior para obtermos o termo subsequente. **Na progressão geométrica, também teremos uma razão que entrará não somando o termo anterior, mas multiplicando-o**! Vamos com calma! São exemplos de PGs as seguintes sequências:

- $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots);$
- $(5, 25, 125, 625, \dots);$

Veja que, na primeira sequência acima, **cada termo subsequente é o dobro do anterior**. Na segunda sequência, multiplicamos cada próximo termo por 5 em relação ao termo passado. **Esses números que multiplicamos os termos são as razões de cada sequência e, no estudo das PGs, denotamos ela por q e não mais por r.**

Podemos também pensar em uma PG em termos do quociente. Para identificarmos uma PG, podemos olhar para o quociente de dois termos consecutivos. Lembre-se que na PA falávamos da diferença entre dois termos, aqui nas progressões geométricas, falaremos de quociente. Vamos pegar, por exemplo, a PG $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$. Note que:

$$\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \frac{64}{32} = 2$$

Portanto, **2 é a razão dessa progressão geométrica**. Genericamente, escrevemos assim,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad ou \quad a_n = q \cdot a_{n-1}$$

EXEMPLIFICANDO

(PREF. HONÓRIO SERPA/2019) Sobre Progressões Aritméticas e Geométricas, é correto afirmar que:
A) Uma Progressão Aritmética é uma sequência de números composta por um valor inicial e um outro valor fixo, que é multiplicado ao valor anterior para encontrar o próximo.
B) Uma Progressão Geométrica é uma sequência de números composta por um valor inicial e um outro valor fixo, que é adicionado ao valor anterior para encontrar o próximo.
C) Não há Progressão Geométrica ou Aritmética com números negativos.
D) Progressões Aritméticas de razão negativa geram sequências de números decrescentes.

Comentários:
A) Uma ~~**Progressão Aritmética**~~ é uma sequência de números composta por um valor inicial e um outro valor fixo, que é multiplicado ao valor anterior para encontrar o próximo.

ERRADO. O enunciado trocou as sequências. Na verdade, essa é a definição **de progressão geométrica** e não de progressão aritmética.

B) Uma ~~Progressão Geométrica~~ é uma sequência de números composta por um valor inicial e um outro valor fixo, que é adicionado ao valor anterior para encontrar o próximo.
ERRADO. Mais uma vez, o enunciado inverteu os conceitos. Na verdade, trata-se de uma progressão aritmética, não de progressão geométrica, conforme afirma a alternativa.

C) ~~Não há~~ Progressão Geométrica ou Aritmética com números negativos.
ERRADO. Pessoal, não há problema algum existir PAs e PGs com números negativos. Inclusive, ao longo da aula trabalhamos com vários exemplos em que eles estarão presentes.

D) Progressões Aritméticas de razão negativa geram sequências de números decrescentes.
CERTO. Essa é verdade! Conforme vimos anteriormente, **quando a razão é negativa, a PA será decrescente.**

Gabarito: LETRA D.
(PREF. JANDAIA DO SUL/2019) Assinale a alternativa que apresenta CORRETAMENTE uma diferença entre progressões aritméticas e progressões geométricas.
A) Uma progressão aritmética é composta por um termo inicial e um fator que é multiplicado várias vezes a este termo inicial, já em uma progressão geométrica, esse fator é somado várias vezes ao termo inicial.
B) Uma progressão aritmética não tem fim, já uma progressão geométrica sempre converge a um valor.
C) Em uma progressão aritmética, os elementos são formados a partir de somas de um fator, já em uma progressão geométrica, os elementos são formados a partir de multiplicações de um fator.
D) A principal diferença entre uma progressão aritmética e geométrica é que a primeira possui termo inicial, e a segunda não.
Comentários:
Mais uma questão para reforçamos a diferença entre PA e PG.

A) Uma progressão aritmética é composta por um termo inicial e um fator que é multiplicado várias vezes a este termo inicial, já em uma progressão geométrica, esse fator é somado várias vezes ao termo inicial.
ERRADO. Alternativa inverteu os conceitos de PA e PG. Fique esperto! Você deve ter começado a perceber que **as bancas gostam de inverter as duas**!

B) Uma progressão aritmética não tem fim, já uma progressão geométrica sempre converge a um valor.
ERRADO. Nada disso, pessoal. Uma **PA pode ter fim**, não tem nada que impeça isso. Ademais, veremos que **nem sempre uma progressão geométrica converge a um valor**.

C) Em uma progressão aritmética, os elementos são formados a partir de somas de um fator, já em uma progressão geométrica, os elementos são formados a partir de multiplicações de um fator.
CERTO. Dessa vez, temos os conceitos apresentados corretamente!

D) A principal diferença entre uma progressão aritmética e geométrica é que a primeira possui termo inicial, e a segunda não.
ERRADO. Pessoal, toda sequência numérica possuirá um termo inicial. Não há como uma sequência existir sem um termo inicial.

Gabarito: LETRA C.

Classificação

Para **avaliar se uma progressão geométrica é crescente ou decrescente**, fazemos uma análise um pouco mais elaborada do que fizemos nas PAs. Veja as duas PGs a seguir.

I. $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$

II. $(-1, -2, -4, -8, -16, -32, \dots)$

Note que a razão das sequências acima é a mesma $(q = 2)$. No entanto, **a sequência I é crescente, enquanto a sequência II é decrescente**. Assim, uma análise apenas da razão é insuficiente para determinarmos se uma PG é crescente ou decrescente. *E para quem devemos olhar também?!* **Para o primeiro termo**!

- Para razões maior que um $(q > 1)$

- Se o primeiro termo for positivo ($a_1 > 0$), então a PG é crescente.
- Se o primeiro termo for negativo ($a_1 < 0$), então a PG é decrescente.

Agora, veja essas outras duas sequências:

III. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$

IV. $\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$

Mais uma vez, **as duas sequências acima possuem a mesma razão** $\left(q = \frac{1}{2}\right)$. No entanto, a sequência III é decrescente, enquanto a sequência IV é crescente. Mais uma vez, vamos precisar olhar para o primeiro termo.

- Para razões entre 0 e 1 $(0 < q < 1)$

- Se o primeiro termo for positivo ($a_1 > 0$), então a PG é decrescente.
- Se o primeiro termo for negativo ($a_1 < 0$), então a PG é crescente.

E quando a razão for igual a um $(q = 1)$? Nesses casos, **a PG será constante**. Veja alguns exemplos:

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$$
$$(-5, -5, -5, -5, \dots)$$

Por fim, quando a razão for negativa $(q < 0)$, vamos ter o que chamamos de **PG alternada**. Considere uma PG com a razão $q = -2$.

$$(1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots)$$

Quando temos uma razão negativa a sequência ficará alternando de sinal! Vamos fazer um resumo!

RESUMINDO

PG	Condições	Exemplos
Crescente	$a_1 > 0 \quad \text{e} \quad q > 1$	$(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$
	$a_1 < 0 \quad \text{e} \quad 0 < q < 1$	$\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\right)$
Decrescente	$a_1 > 0 \quad \text{e} \quad 0 < q < 1$	$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$
	$a_1 < 0 \quad \text{e} \quad q > 1$	$(-1, -3, -9, -27, \dots)$
Alternada	$q < 0$	$(1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots)$
Constante	$q = 1$	$(2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots)$

Termo Geral de uma PG

Assim como na PA, a PG possui uma fórmula para o termo geral em função da razão (q), do primeiro termo (a_1) e da ordem (n) do termo procurado.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Se, por acaso, você precisasse descobrir o a_{11} da sequência $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$, o que faria? Obviamente, uma **solução seria listar todos os termos até o a_{11}** sempre multiplicando o termo anterior por 2 para obter o termo subsequente. No entanto, você também poderia **aplicar a fórmula do termo geral** e descobrir de imediato:

$$a_{11} = 2 \cdot 2^{11-1} \quad \rightarrow \quad a_{11} = 2 \cdot 2^{10} \quad \rightarrow \quad a_{11} = 2^{11} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{11} = 2048}$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. VILA VELHA/2020) Numa Progressão Geométrica, o primeiro termo da sequência é igual a 4096 e a razão dessa progressão é igual a 1/2. Com base nessas informações, o valor do 14º termo é:
A) 2.

B) 1.
C) 1/4.
D) 1/2.
E) 4.

Comentários:
Questão para treinarmos a fórmula do **termo geral de uma progressão geométrica**.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

O enunciado nos forneceu $\boldsymbol{a_1 = 4096}$ **e** $\boldsymbol{q = 1/2}$. Como estamos procurando o 14º termo, então $\boldsymbol{n = 14}$.

$$a_{14} = a_1 \cdot q^{14-1} \quad \rightarrow \quad a_{14} = a_1 \cdot q^{13}$$

Substituindo os valores.

$$a_{14} = 4096 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \quad \rightarrow \quad a_{14} = \frac{4096}{2^{13}} \quad \rightarrow \quad a_{14} = \frac{4096}{8192} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{14} = \frac{1}{2}}$$

Gabarito: LETRA D.

Progressão Geométrica de 3 termos

Assim como vimos na PA, também temos uma **progressão geométrica de três termos** que costuma aparecer bastante em provas. Para resolvê-la, é preciso saber uma propriedade importante. *Você lembra que na PA a média aritmética do primeiro e do terceiro termo é igual ao segundo termo?* Pronto. Vamos buscar uma relação parecida aqui, mas que envolva os três termos de uma PG. Como exemplo, considere a seguinte PG.

$$(2, 8, 32)$$

Na progressão geométrica acima, **a razão é 4**. Observe.

$$(2, 8, 32)$$

$$\times 4 \qquad \times 4$$

Podemos também imaginá-la da seguinte forma:

$$8/4 \qquad 8 \times 4$$

$$(2, 8, 32)$$

Note que **o primeiro termo é igual ao termo central dividido pela razão**. Analogamente, **o terceiro termo é o termo central multiplicado pela razão**. Vamos pegar esse raciocínio e aplicar para uma PG genérica.

$$a_2/q \qquad a_2 \times q$$

$$(a_1, a_2, a_3)$$

Vamos multiplicar o primeiro e o terceiro termo:

$$M = a_1 \cdot a_3 \quad \rightarrow \quad M = \left(\frac{a_2}{\cancel{q}}\right) \cdot (a_2 \cdot \cancel{q}) \quad \rightarrow \quad M = a_2^2$$

Perceba então que o produto do primeiro e do terceiro termo é igual ao quadrado do termo central! Assim,

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Professor, esse resultado é importante mesmo? É sim, pessoal! Ele vai nos possibilitar resolver questões muito mais rapidamente. Observe!

HORA DE PRATICAR!

(PREF. IBIAÇÁ/2019) A sequência $(x - 120;\ x;\ x + 600)$ forma uma progressão geométrica. O valor de x é:

A) 40.

B) 120.

C) 150.

D) 200.

E) 250.

Comentários:

Temos uma **PG de três termos**! Nesses casos, sabemos que podemos usar a seguinte relação:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Olhando para a sequência dada, temos que:

$a_1 = x - 120$
$a_2 = x$
$a_3 = x + 600$

Substituindo na expressão:

$$x^2 = (x - 120) \cdot (x + 600)$$

Aplicando a **propriedade distributiva da multiplicação** no lado direito da equação acima, ficamos com:

$$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} - 120x + 600x - 72000$$

$$480x = 72000$$

$$x = \frac{72000}{480} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 150}$$

Gabarito: LETRA C.

Interpolação de termos em uma PG

Você deve ter começado a perceber que há muita semelhança entre os tópicos de PA e PG. Aqui, também tentaremos determinar um ou mais termos entre outros dois. Um jeito bom de explicar esse tópico continua sendo por uma questão. Vamos lá?

HORA DE PRATICAR!

(PREF. VN DO IMIGRANTE /2016) A sequência a seguir é uma progressão geométrica decrescente composta por 5 termos:

$$1000,\ \_\_\_\_,\ \_\_\_\_,\ \_\_\_\_,\ \ 8/5$$

A soma dos três termos que preenchem corretamente as lacunas nessa sequência é igual a:
A) 248.
B) 264.
C) 275.
D) 292.

Comentários:
Moçada, temos o a_1 e o a_5. Queremos determinar três termos que existem entre esses dois, sabendo que a PG é decrescente. Dessa forma, observe o esquema abaixo.

$$\overset{a_1}{\downarrow}\qquad\qquad\qquad\qquad\overset{a_5}{\downarrow}$$

$$1000,\ \underline{\ a_2\ },\ \underline{\ a_3\ },\ \underline{\ a_4\ },\ 8/5$$

Quando estamos diante situações como essa. O primeiro passo é descobrir a razão. Lembre-se que com o primeiro termo e a razão, podemos encontrar qualquer termo de uma PA ou PG. Nesse intuito, **vamos usar a fórmula do termo geral para relacionar a_1 e a_5**, que são os dois valores que possuímos.

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 \quad \rightarrow \quad \frac{8}{5} = 1000 \cdot q^4 \quad \rightarrow \quad q^4 = \frac{8}{5000} \quad \rightarrow \quad q^4 = \frac{1}{625} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{q = \frac{1}{5}}$$

Como a razão determinada, podemos encontrar a_2, a_3 e a_4.

$$a_2 = a_1 \cdot q \quad \rightarrow \quad a_2 = 1000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = 200}$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \quad \rightarrow \quad a_3 = 1000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1000}{25} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_3 = 40}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \rightarrow \quad a_4 = 1000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{1000}{125} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = 8}$$

Pronto, o enunciado pede a soma desses três valores.

$$a_2 + a_3 + a_4 = 200 + 40 + 8 = 248$$

Gabarito: LETRA A.

Pessoal, para interpolar termos, precisamos sempre **determinar a razão da progressão**. Vamos fazer isso utilizando a fórmula do termo geral. A intenção desse tópico é apenas deixá-lo esperto para esse tipo de cobrança. No fundo, **não envolve conhecimentos novos**. É apenas uma forma de aplicarmos o que já vimos. Tudo bem? Vamos prosseguir então!

Soma dos termos de uma PG.

E como faríamos para obter a soma de n primeiros termos de uma progressão geométrica? Assim como na PA, também podemos somar os termos de uma PG por meio de uma fórmula. Visualize-a.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Essa é a **fórmula da soma dos n primeiro termos de uma PG**. Como exemplo, vamos calcular a soma dos 11 primeiros termos da PG $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$:

Primeiro passo é identificar a razão. Veja que um termo é sempre o dobro do anterior. Assim, $q = 2$. Além da razão, **também precisamos do primeiro termo**. Ao olhar para a sequência do exemplo, tiramos que $a_1 = 2$. Como estamos procurando a soma dos 11 primeiros termos, então $\boldsymbol{n = 11}$. Basta substituir esses valores na fórmula, vamos lá?

$$S_{11} = \frac{2 \cdot (2^{11} - 1)}{2 - 1} \quad \rightarrow \quad S_{11} = \frac{2 \cdot (2048 - 1)}{1} \quad \rightarrow \quad S_{11} = 2 \cdot 2047 \quad \rightarrow \quad S_{11} = 4094$$

Galera, essa é **a soma dos n primeiros termos**. No entanto, **uma sequência é tão grande quanto você queira** e caso ela tenha infinitos termos, sob algumas condições, você poderá somar todos eles por meio de uma fórmula específica. Vamos detalhar isso um pouco mais.

Continue considerando a PG que estávamos trabalhando: $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$. Observe que **os termos continuam aumentando cada vez mais**, de modo que a soma dos infinitos termos certamente também dará um **número estratosférico (infinito).**

Agora, imagine que estamos com a sequência $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$. Note que se trata de uma P.G. com razão $q = \frac{1}{2}$. **Os termos vão se tornando cada vez menores**. Com isso, a soma vai tender a se "estabilizar" em um valor e poderemos calculá-lo. Vamos ver?

- Soma dos dois primeiros termos: $2 + 1 = \mathbf{3}$
- Soma dos três primeiros termos: $2 + 1 + 1/2 = \mathbf{3,5}$
- Soma dos quatro primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \mathbf{3,75}$
- Soma dos cinco primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \mathbf{3,875}$
- Soma dos sete primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \mathbf{3,9375}$
- Soma dos oito primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \mathbf{3,96875}$
- Soma dos nove primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \mathbf{3,984375}$
- Soma dos dez primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \mathbf{3,9921875}$

Galera, vocês conseguem perceber que nossa primeira soma foi igual a 3 e depois de somar vários outros termos **não passamos nem do número 4**? Isso porque **os termos diminuem cada vez mais e mais**. O limite da soma quando o número de termos tender ao infinito será exatamente 4. A fórmula que nos fornece esse valor é:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Essa é **a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG**. Ressalto que ela **só será válida quando o módulo da razão for menor do que um, isto é, $|q| < 1$**. Agora, vamos ver na prática!

HORA DE PRATICAR!

(SEFAZ-RS/2018) Sobre uma mesa há 9 caixas vazias. Em uma dessas caixas, será colocado um grão de feijão; depois, em outra caixa, serão colocados três grãos de feijão. Prosseguindo-se sucessivamente, será escolhida uma caixa vazia, e nela colocada uma quantidade de grãos de feijão igual ao triplo da quantidade colocada na caixa anteriormente escolhida, até que não reste caixa vazia. Nessa situação, nas 9 caixas será colocada uma quantidade de grãos de feijão igual a

A) $\frac{3^9-1}{2}$

B)3^9-1

C) $\frac{3^{10}-1}{2}$

D) $3^{10}-1$

E) $\frac{3^8-3}{2}$

Comentários:

Pessoal, temos 9 caixas. Na primeira caixa será colocado um único grão de feijão, depois será colocado 3 grãos em outra, depois o triplo (9) e assim sucessivamente... Veja que está sendo formado uma sequência muito conhecida:

$$(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$$

Portanto, temos uma **P.G. de razão 3**. O enunciado pede a soma de todos os grãos colocados nas caixas. Em outras palavras, queremos **a soma dos 9 primeiros termos** dessa sequência (são 9 caixas). Lembre-se:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Olhando para a sequência, tiramos que $a_1 = 1$, $q = 3$ e $n = 9$. Logo,

$$S_9 = \frac{1 \cdot (3^9 - 1)}{3 - 1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_9 = \frac{3^9 - 1}{2}}$$

Gabarito: LETRA A.

(CRMV-ES/2018) Marque a alternativa que apresente a soma da progressão geométrica infinita abaixo.

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$$

A) 1

B) $\frac{5}{3}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{4}{3}$

Comentários:

Pessoal, questão apenas para testarmos o que vimos. O enunciado quer a soma da progressão geométrica infinita dada. Sabemos que **a soma dos termos de uma P.G. infinita** é dada por:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$$

Para calcular essa soma, basta sabermos **o primeiro termo (a_1) e a razão (q)**. Olhando para a sequência do enunciado, temos que $a_1 = 1$. Além disso, a razão pode ser encontrada dividindo dois termos consecutivos:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{\frac{1}{4}}{1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{4}$$

Veja que $|q| < 1$ e, portanto, **a fórmula é aplicável**. Substituindo os valores de a_1 e q:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} \quad \rightarrow \quad S_{\infty} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \quad \rightarrow \quad S_{\infty} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_{\infty} = \frac{4}{3}}$$

Gabarito: LETRA E.

Produto dos n primeiros termos de uma PG

Nesse tópico, esticaremos um pouco a baladeira para ficarmos 100% preparados para a prova. No estudo da PG, existe uma fórmula que não possui semelhante no estudo da PA. Além da soma, também existe o produto dos n primeiros termos!

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Você deve estar **interessado em saber como chegamos na fórmula acima**. Considere a PG: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$. Queremos saber o produto nos n primeiros termos. Lembre-se que:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$a_4 = a_1 \cdot q^3$

...

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

O produto dos n primeiros termos é:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Substituindo:

$$P_n = a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \cdot (a_1 \cdot q^3) \ldots \cdot (a_1 \cdot q^{n-1})$$

$$P_n = a_1^n \cdot q^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$$

Lembre-se que **o produto de potências de mesma base**, nós conservamos a base e somamos os expoentes. Ademais, a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ pode ser interpretada como **a soma dos $(n-1)$ termos de uma PA**. Assim, podemos usar a fórmula que vimos lá em PA para calcular essa soma.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{\big(1 + (n-1)\big)(n-1)}{2} \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Pronto! Esse é o resultado daquela soma no expoente do q.

$$\boldsymbol{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Pessoal, essa é a forma mais comum de apresentar o produto dos n primeiros termos de uma PG. No entanto, existe uma fórmula "mais apresentável":

$$P_n = (a_1 . a_n)^{\frac{n}{2}}$$

Ela é obtida manipulando algebricamente a expressão que já deduzimos. Qualquer uma delas vai oferecer o mesmo resultado para o produto, tudo bem?

HORA DE PRATICAR!

(ESFCEX/2021) Considere uma progressão geométrica em que o primeiro termo é igual a 1 e a razão é igual a $\sqrt{2}$. Sabendo-se que o produto dos termos dessa progressão é 2^{18} e que $P_n = (a_1 . a_n)^{n/2}$, então o número de termos dessa progressão é igual a

A) 8.

B) 9.

C) 7.
D) 6.
E) 12.

Comentários:

Pessoal, note que o examinador foi do bem! Ele mesmo já deu a fórmula do produto no enunciado, então, o aluno não precisaria deduzi-la ou decorá-la.

$$P_n = (a_1 . a_n)^{\frac{n}{2}}$$

Além da fórmula, ela nos forneceu as seguintes informações:

$$a_1 = 1$$
$$q = \sqrt{2}$$
$$P_n = 2^{18}$$

Como o enunciado pede **o número de termos dessa progressão**, ele está nos perguntando quem é n. Veja que temos o primeiro termo e a razão, uma fórmula melhor para trabalhar seria:

$$\boldsymbol{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Caso não se lembrasse, você poderia substituir $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ na expressão fornecida no enunciado, que obteria a mesma coisa! Faça o teste!

$$2^{18} = 1^n \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Como $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, fazemos:

$$2^{18} = 2^{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{n(n-1)}{2}} \quad \rightarrow \quad 2^{18} = 2^{(n^2-n)/4}$$

De equações exponenciais, sabemos que **quando temos a mesma base, podemos igualar os expoentes**.

$$18 = \frac{n^2 - n}{4} \quad \rightarrow \quad n^2 - n = 72 \quad \rightarrow \quad n^2 - n - 72 = 0$$

Precisamos resolver essa equação de segundo. Devemos usar **Bhaskara**.

- Cálculo do Discriminante (Δ)

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72) \quad \rightarrow \quad \Delta = 1 + 288 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta = 289}$$

- Cálculo das raízes (n_1 e n_2)

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad n_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{289}}{2\cdot 1} \quad \rightarrow \quad n_1 = \frac{1-17}{2} \quad \rightarrow \quad n_1 = -8$$

$$n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad n_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{289}}{2\cdot 1} \quad \rightarrow \quad n_2 = \frac{1+17}{2} \quad \rightarrow \quad n_2 = 9$$

A raiz negativa não tem sentido para nós, uma vez que estamos querendo saber o número de termos da progressão (é necessariamente um número maior que zero). Assim, **apenas a raiz positiva nos interessa**.

$$\boldsymbol{n = 9}$$

Gabarito: LETRA B.

Considerações Finais

Chegamos ao fim da teoria. A seguir, temos uma lista de exercícios para facilitar a fixação do aprendizado. Nas primeiras 30 questões, buscamos desenvolver o raciocínio sequencial. As sequências que aparecem não exigem o conhecimento de fórmulas. Vamos deduzindo os padrões com as informações que são passadas pelo enunciado.

Depois dessa primeira parte, faremos as questões de progressões aritméticas e progressões geométricas propriamente ditas. Nelas, usaremos bastante as fórmulas que estudamos ao longo da aula e será excelente para a memorização. Tudo bem?! Espero que tenha aproveitado bastante e continue forte nos estudos!

Um forte abraço,
Prof. Francisco Rebouças.

Resumo

Informações Relevantes

- Podemos criar inúmeras sequências, cada uma com padrões distintos. Na hora dos exercícios, devemos buscar identificar esse padrão e fazer as conclusões pertinentes.
- No Raciocínio Sequencial, as sequências cobradas são as mais variadas possíveis. No entanto, o conhecimento de algumas pode facilitar bastante a hora da resolução.
- Existem algumas sequências que são famosas, como a sequência de Fibonacci. A partir do terceiro termo, cada termo é formado pela soma dos dois anteriores.

$$Sequência\ de\ Fibonacci = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$$

- A Progressão Aritmética é uma sequência em que a diferença entre termos consecutivos é constante.

$$Exemplo\ de\ PA\ (1) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$$
$$Exemplo\ de\ PA\ (2) = (100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, \dots)$$

- A Progressão Geométrica é uma sequência em que a razão entre termos consecutivos é constante.

$$Exemplo\ de\ PG(1) = (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots)$$

Formulário

Sequência de Fibonacci

$$F_n = \begin{cases} 1, se\ n = 1 \\ 1, se\ n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, se\ n \geq 3 \end{cases}$$

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Termo Geral de uma PA

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Soma dos n primeiros termos de uma PA

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Termo Geral de uma PG

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Soma dos n primeiros termos de uma PG

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Soma de uma PG infinita ($|q| < 1$): $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$

QUESTÕES COMENTADAS

Progressão Aritmética

CEBRASPE

(CESPE/TELEBRAS/2022) Texto para as próximas questões

João acaba de assumir um cargo de assistente administrativo em uma empresa e foi designado para a tarefa de examinar as demandas de clientes e dar a elas o devido encaminhamento. Considerando que João ainda não tem experiência com essa tarefa, seu chefe decide que passará para ele, no primeiro dia, 10 demandas, no segundo, 15, no terceiro, 20, e assim sucessivamente, crescendo segundo uma Progressão Aritmética até o oitavo dia, quando então estabilizará o número de demandas diárias. Para executar sua tarefa, João leva sempre 5 minutos para tomar conhecimento dos detalhes de cada demanda, enquanto que a fase de encaminhamento (decidir o que fazer e executar os procedimentos necessários) leva 12 minutos nas demandas do primeiro dia, 6 minutos nas demandas do segundo, 3 minutos nas demandas do terceiro dia, e assim sucessivamente, decrescendo segundo uma Progressão Geométrica até o oitavo dia, quando então o tempo de encaminhamento se estabiliza. Com base nessa situação hipotética, julgue os itens seguinte.

1. (CESPE/TELEBRAS/2022) Quando estabilizar sua tarefa, João estará recebendo para exame mais de 50 demandas de clientes por dia.

Comentários:
O enunciado disse que o número de demandas cresce conforme uma progressão aritmética.

No primeiro dia, como **o chefe passa 10 demandas**, temos que:

$$a_1 = 10$$

Perceba também que a cada dia que passa, **o número de demandas cresce em 5**. Sendo assim,

$$r = 5$$

O número de demandas **cresce até o oitavo dia**, quando então se estabiliza. Portanto, vamos achar o a_8.

$$a_8 = a_1 + 7r$$

$$a_8 = 10 + 7 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad a_8 = 10 + 35 \quad \rightarrow \quad a_8 = 45$$

Ou seja, **a demanda se estabiliza em 45, que é menor que 50** e não maior, conforme apontou o item.

Gabarito: ERRADO.

2. (CESPE/TELEBRAS/2022) A sequência formada pelos tempos diários que João leva para examinar todas as demandas de cada dia forma uma Progressão Aritmética.

Comentários:
Pessoal, vamos lá. Primeiramente, é interessante organizarmos as informações do enunciado numa tabela.

Dia	Demandas	Tempo Fase de Conhecimento (por demanda)	Tempo Fase de Encaminhamento (por demanda)	Tempo Total Gasto (por demanda)
1º dia	10	5 min	12 min	17 min
2º dia	15	5 min	6 min	11 min
3º dia	20	5 min	3 min	8 min
4º dia	25	5 min	1,5 min	6,5 min

Note que a fase de conhecimento nunca muda, **é sempre 5 minutos**. O tempo da fase de encaminhamento **diminui sempre pela metade até o 8º dia**. O tempo total gasto por demanda é a soma dos tempos despendidos nessas duas fases.

Para determinar o tempo total diário gasto com as demandas, basta **multiplicar a quantidade de demandas pelo tempo total gasto com cada uma**.

Dia	Demandas	Tempo Fase de Conhecimento (por demanda)	Tempo Fase de Encaminhamento (por demanda)	Tempo Total Gasto (por demanda)	Tempo p/ examinar todas as demandas
1º dia	10	5 min	12 min	17 min	$10 \cdot 17 = 170$ min
2º dia	15	5 min	6 min	11 min	$15 \cdot 11 = 165$ min
3º dia	20	5 min	3 min	8 min	$20 \cdot 8 = 160$ min
4º dia	25	5 min	1,5 min	6,5 min	$25 \cdot 6{,}5 = 162{,}5$ min

Observe que **a questão foi maldosa!** Quem fez apenas até o terceiro dia marcou o item como certo, já que $(170, 165, 160)$ forma uma progressão aritmética de razão igual a -5.

No entanto, **a partir do quarto dia** é que a sequência formada pelos tempos **não obedece mais a uma PA**. Sendo assim, essa sequência não forma uma PA, "falhando" do quarto dia em diante.

Gabarito: ERRADO.

3. (CESPE/TELEBRAS/2022) Julgue o item a seguir, relacionados a problemas aritméticos.

Se, para uma progressão aritmética, a soma dos 2 primeiros termos é 100 e a soma dos 6 primeiros termos é 276, então existirá um $n \in N$ tal que a soma dos primeiros termos dessa progressão aritmética será negativa.

Comentários:
Vamos por partes!

Se **a soma dos 2 primeiros termos é 100**, podemos escrever:

$$a_1 + a_2 = 100 \quad \rightarrow \quad a_1 + a_1 + r = 100 \quad \rightarrow \quad 2a_1 + r = 100 \quad (1)$$

Ademais, se **a soma dos 6 primeiros termos é 276**, podemos escrever também:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 276$$

$$a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) + (a_1 + 4r) + (a_1 + 5r) = 276$$

$$6a_1 + 15r = 276$$

Vamos simplificar **dividindo toda a equação por 3**.

$$2a_1 + 5r = 92 \qquad (2)$$

Pronto, temos **um sistema com duas equações e duas incógnitas**. Vamos resolvê-lo.

De (1), escrevemos:

$$2a_1 = 100 - r$$

Substituindo em (2):

$$(100 - r) + 5r = 92 \quad \rightarrow \quad 4r = -8 \quad \rightarrow \quad \boxed{r = -2}$$

Pronto! Já sabemos a razão dessa PA. Agora, podemos aplicá-la em (1) e determinar o a_1.

$$2a_1 = 100 - (-2) \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{102}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{a_1 = 51}$$

Agora sim. Com o primeiro termo e a razão conseguimos analisar o item melhor.

Galera, **a questão quer saber se existe um número natural "n" tal que S_n seja <u>negativo</u>**.

$$S_n < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{(a_1 + a_n)n}{2} < 0$$

$$[a_1 + a_1 + (n-1)r]n < 0$$

Para que a expressão acima seja negativa, **basta que o que está entre colchetes seja negativo**, pois "n" nunca é negativo, já que é natural. Sendo assim,

$$2a_1 + (n-1)r < 0$$

Substituindo os valores de a_1 e r:

$$2 \cdot 51 + (n-1) \cdot (-2) < 0 \quad \rightarrow \quad 102 - 2n + 2 < 0 \quad \rightarrow \quad 2n > 104 \quad \rightarrow \quad n > 52$$

Assim, percebemos que **para valores de "n" acima de 52, a soma S_n será negativa**. Façamos o teste!
Seja $n = 53$:

$$a_{53} = a_1 + 52r \quad \rightarrow \quad a_{53} = 51 + 52 \cdot (-2) \quad \rightarrow \quad a_{53} = 51 - 104 \quad \rightarrow \quad a_{53} = -53$$

Logo,

$$S_{53} = \frac{(a_1 + a_{53}) \cdot 53}{2} \quad \rightarrow \quad S_{53} = \frac{(51 - 53) \cdot 53}{2} \quad \rightarrow \quad S_{53} = \frac{(-2) \cdot 53}{2} \quad \rightarrow \quad S_{53} = -53$$

Logo, existe sim um número natural "n" (vários na verdade**, qualquer um acima de 52**) que torna a soma dos "n" primeiros termos **negativa**.

Gabarito: CERTO.

4. (CESPE/IBGE/2021) No desenvolvimento de uma pesquisa, Carlos, agente de pesquisas e mapeamento, durante 20 dias consecutivos, visitou diversos domicílios distintos, de acordo com o seguinte esquema:

- no primeiro dia da pesquisa, Carlos visitou 12 domicílios distintos;
- do segundo ao sétimo dia da pesquisa, Carlos visitou 9 domicílios distintos por dia;
- do oitavo ao vigésimo dia da pesquisa, Carlos visitou 8 domicílios distintos por dia.

Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

I. Para $1 \leq n \leq 20$, denotando-se por d_n a quantidade de domicílios visitados por Carlos no n-ésimo dia da pesquisa, tem-se que $\{d_1, d_2, \ldots, d_{20}\}$ é uma progressão aritmética.

II. Para $1 \leq n \leq 20$, denotando-se por t_n a quantidade total de domicílios visitados por Carlos desde o primeiro até o n-ésimo dia da pesquisa, tem-se que $\{t_1, t_2, \ldots, t_{20}\}$ é uma progressão aritmética.

III. No âmbito da pesquisa realizada, durante os 20 dias de sua duração, Carlos visitou 170 domicílios distintos.

Assinale a opção correta.
A) Apenas o item III está certo.
B) Apenas os itens I e II estão certos.
C) Apenas os itens I e III estão certos.
D) Apenas os itens II e III estão certos.
E) Todos os itens estão certos.

Comentários:
Primeiramente, vamos analisar as informações que o enunciado trouxe.

- no primeiro dia da pesquisa, Carlos visitou **12 domicílios** distintos;

- do segundo ao sétimo dia da pesquisa, Carlos visitou **9 domicílios** distintos por dia;
- do oitavo ao vigésimo dia da pesquisa, Carlos visitou **8 domicílios** distintos por dia.

Podemos criar uma tabela para visualizarmos o que está acontecendo.

Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Domicílios Atendidos	12	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

O primeiro item diz o seguinte:

I. Para $1 \leq n \leq 20$, denotando-se por d_n a quantidade de domicílios visitados por Carlos no n-ésimo dia da pesquisa, tem-se que $\{d_1, d_2, ..., d_{20}\}$ é uma progressão aritmética.

Basicamente, ele está "batizando" as quantidades de nossa tabela. Em outras palavras, temos:

Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d_n	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}
D. A.	12	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

Portanto, veja que a sequência do item é $\{12, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8\}$. Galera, essa sequência **não está parecendo nada com uma PA**, não é verdade? **Uma progressão aritmética aumenta ou diminui a uma razão constante**. Obviamente, isso não acontecerá se a razão for nula, mas, nesses casos, todos os termos da PA devem ser iguais, o que não ocorre na situação mostrada. **Item errado.**

II. Para $1 \leq n \leq 20$, denotando-se por t_n a quantidade total de domicílios visitados por Carlos desde o primeiro até o n-ésimo dia da pesquisa, tem-se que $\{t_1, t_2, ..., t_{20}\}$ é uma progressão aritmética.

Para obter t_n, devemos sempre considerar a quantidade de domicílios já visitados.

Dia	Domicílios Atendidos	t_n
1	12	$\mathbf{12}$
2	9	$12 + 9 = \mathbf{21}$
3	9	$21 + 9 = \mathbf{30}$
4	9	$30 + 9 = \mathbf{39}$
5	9	$39 + 9 = \mathbf{48}$
6	9	$48 + 9 = \mathbf{57}$
7	9	$57 + 9 = \mathbf{66}$
8	8	$66 + 8 = \mathbf{74}$

Observe que até o 7º dia, a sequência descrita no item é uma progressão aritmética de razão igual a 9. No entanto, a partir do oitavo dia, a sequência tem seu padrão alterado e começa a subir de 8 em 8. Sabemos que **em uma progressão aritmética, a razão é sempre constante, não podendo sofrer esse tipo de mudança**. Logo, $\{t_1, t_2, ..., t_{20}\}$ não é uma Progressão Aritmética. **Item errado.**

Obs.: Caso quebrássemos a sequência em duas, $\{t_1, t_2, ..., t_7\}$ e $\{t_8, t_2, ..., t_{20}\}$, daí sim elas duas seriam progressões aritméticas, de razão 9 e 8, respectivamente.

III. No âmbito da pesquisa realizada, durante os 20 dias de sua duração, Carlos visitou 170 domicílios distintos.

Vamos voltar para a primeira tabela que desenhamos.

Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Domicílios Atendidos	12	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

Note que o **12 aparece uma única vez**, o **9 aparece 6 vezes** e o 8 aparece 13 vezes. Assim, o total de domicílios visitados é dado por:

$$Total\ de\ Domicílios = 12 + 9 \times 6 + 8 \times 13$$

$$Total\ de\ Domicílios = 12 + 54 + 104$$

$$Total\ de\ Domicílios = 170$$

Gabarito: LETRA A.

5. (CESPE/PRF/2021) Em uma operação da PRF, foram fiscalizados: 20 veículos automotores até o fim da primeira hora; 60 veículos automotores até o fim da segunda hora; 120 veículos automotores até o fim da terceira hora; 200 veículos automotores até o fim da quarta hora; e 300 veículos automotores até o fim da quinta hora. O padrão numérico observado manteve-se até o fim da décima hora, quando, então, foi finalizada a operação. Considerando essa situação hipotética, julgue o item seguinte.

Considere que $\{q_n\}$, para n variando de 1 a 10, seja a sequência numérica formada pelas quantidades de veículos fiscalizados apenas no decorrer da n-ésima hora de realização da operação, ou seja, q_1 é a quantidade de veículos fiscalizados apenas no decorrer da primeira hora de realização da operação; q_2 é a quantidade de veículos fiscalizados apenas no decorrer da segunda hora de realização da operação; e assim por diante. Nessa situação, a sequência $\{q_n\}$, para n variando de 1 a 10, é uma progressão aritmética.

Comentários:
Veículos fiscalizados:

- Até o fim da 1ª hora: 20
- Até o fim da 2ª hora: 60 (40 apenas na segunda hora)
- Até o fim da 3ª hora: 120 (60 apenas na terceira hora)
- Até o fim da 4ª hora: 200 (80 apenas na quarta hora)
- Até o fim da 5ª hora: 300 (100 apenas na quinta hora)

A cada hora que passa, **20 veículos são fiscalizados a mais do que na hora anterior**. A sequência que o enunciado pede é formada pelas quantidades de veículos fiscalizados **apenas naquela hora específica**. Esse "apenas" é muito importante, pois muitos alunos podem achar que a sequência pedida é $\{20, 60, 120, 200, 300, \dots\}$. No entanto, queremos apenas a quantidade de veículo fiscalizado **naquela hora**, resultando na seguinte sequência:

$$\{20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200\}$$

Lembre-se que uma progressão aritmética é uma sequência em que a diferença entre dois termos consecutivos **será sempre uma constante (que chamamos de razão)**. Assim, perceba que **a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos da sequência acima é 20**, indicando que a sequência $\{q_n\}$ realmente é uma progressão aritmética conforme afirma o item.

Gabarito: CERTO.

6. (CESPE/TJ-PR/2019) O protocolo de determinado tribunal associa, a cada dia, a ordem de chegada dos processos aos termos de uma progressão aritmética de razão 2: a cada dia, o primeiro processo que chega recebe o número 3, o segundo, o número 5, e assim sucessivamente. Se, em determinado dia, o último processo que chegou ao protocolo recebeu o número 69, então, nesse dia, foram protocolados

A) 23 processos.
B) 33 processos.
C) 34 processos.
D) 66 processos.
E) 67 processos.

Comentários:

Temos uma **PA de razão 2**, com $\boldsymbol{a_1 = 3}$. Com outras palavras, o enunciado disse que $\boldsymbol{a_n = 69}$ e pediu n. Lembre-se que a fórmula geral de um termo de uma progressão aritmética é dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Vamos substituir as informações do enunciado.

$$69 = 3 + (n-1) \cdot 2$$

$$(n-1) = \frac{66}{2} \quad \rightarrow \quad n - 1 = 33 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n = 34}$$

Logo, nesse dia, foram protocolados **34 processos**.

Gabarito: LETRA C.

7. (CESPE/IFF/2018) Se, em uma progressão aritmética, o segundo termo for igual a −1 e o quinto termo for igual a 11, então o décimo termo será igual a

A) 30.
B) 31.
C) 35.

D) 50.
E) 95.

Comentários:
O enunciado nos passou que: $\boldsymbol{a_2} = -\mathbf{1}$ e $\boldsymbol{a_5} = \mathbf{11}$. Queremos encontrar $\boldsymbol{a_{10}}$.

Mais uma vez, devemos utilizar **a fórmula do termo geral**.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Usando $\boldsymbol{a_2} = -\mathbf{1}$ na fórmula do termo geral, ficamos com:

$$-1 = a_1 + (2-1) \cdot r \quad \rightarrow \quad a_1 + r = -1 \quad (1)$$

Usando $\boldsymbol{a_5} = \mathbf{11}$ na fórmula do termo geral, ficamos com;

$$11 = a_1 + (5-1) \cdot r \quad \rightarrow \quad a_1 + 4r = 11 \quad (2)$$

Observe as equações (1) e (2), temos **duas equações e duas incógnitas**, podemos resolver esse sistema. Para isso, vamos isolar a_1 em (1) e substituir em (2).

$$a_1 = -1 - r$$

$$(-1-r) + 4r = 11 \quad \rightarrow \quad -1 + 3r = 11 \quad \rightarrow \quad 3r = 12 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = 4}$$

Encontramos a razão da PA! $r = 4$. Devemos substituir esse valor em qualquer uma das equações para determinar a_1. Assim,

$$a_1 = -1 - 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = -5}$$

Com a_1 e r determinados, podemos descobrir qualquer termo dessa PA. O enunciado pede a_{10}:

$$a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot r$$
$$a_{10} = -5 + 9 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad a_{10} = -5 + 36 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{10} = 31}$$

Gabarito: LETRA B.

8. (CESPE/FUB/2018) A tabela seguinte mostra as quantidades de livros de uma biblioteca que foram emprestados em cada um dos seis primeiros meses de 2017. A partir dessa tabela, julgue o próximo item.

Mês	1	2	3	4	5	6
Quantidade	50	150	250	250	300	200

Situação hipotética: Os livros emprestados no referido semestre foram devolvidos somente a partir de julho de 2017 e os números correspondentes às quantidades de livros devolvidos a cada mês formavam uma progressão aritmética em que o primeiro termo era 90 e razão, 30.

Assertiva: Nessa situação, mais de 200 livros foram devolvidos somente a partir de 2018.

Comentários:
O enunciado diz que esses livros são devolvidos a partir de julho. Ademais, a quantidade de livros devolvido a cada mês forma uma **PA de primeiro termo igual a 90 e de razão igual a 30**. Observe como ficaria a tabela do segundo semestre.

Mês	7	8	9	10	11	12
Quantidade Devolvida	90	120	150	180	210	240

Assim, note que a partir do mês 11 já temos mais de 200 livros devolvidos.

O item está incorreto pois afirma que essa situação só ocorre a partir de 2018.

Obs.: Na minha opinião, essa questão tem um enunciado não muito claro e que prejudica uma análise objetiva. Em uma primeira leitura, pode-se entender que o enunciado está interessado em saber quantos livros vão ser devolvidos em 2018.

Nessa interpretação, somaríamos a quantidade de livros que foram emprestados no primeiro semestre e subtrairíamos da quantidade de livros devolvidos no segundo semestre. Quando fazemos essa conta, obtemos que **210 livros devem ser devolvidos somente em 2018**, o que tornaria o item correto.

No entanto, como o gabarito da banca foi "item errado", percebe-se que ela resolveu o exercício da forma como fizemos anteriormente, entendendo a assertiva como "mais de 200 livros devolvidos (**por mês**) somente a partir de 2018".

Gabarito: ERRADO.

9. (CESPE/SEDUC-AL/2018) Com relação a uma sequência numérica $a_1, a_2, \dots, a_n$, julgue o item subsequente.

Se a sequência estiver em progressão aritmética com razão igual a 10 e $a_1 = 5$, então $a_{10} > 100$.

Comentários:
Questão para aplicarmos a fórmula do **termo geral da progressão aritmética**. O enunciado forneceu $a_1 = 5$ e $r = 10$. Assim,

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Para $n = 10$, ficamos com:

$$a_{10} = 5 + (10-1) \cdot 10 \quad \rightarrow \quad a_{10} = 5 + 9 \cdot 10 \quad \rightarrow \quad a_{10} = 95$$

Note que o décimo termo dessa progressão aritmética **é igual a 95, menor que 100**.

Gabarito: ERRADO.

10. (CESPE/SEDUC-AL/2018) Com relação a uma sequência numérica $a_1, a_2, \dots, a_n$, julgue o item subsequente.

Considere que a sequência seja formada pelos seguintes termos, nessa ordem: $10, 12, 15, 19, 24, 30, 37$. Nesse caso, a sequência numérica $b_j = a_{j+1} - a_j$, em que $j = 1, 2, \dots, 6$ forma uma progressão aritmética.

Comentários:
Vamos organizar as informações em uma tabela.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
10	12	15	19	24	30	37

Com esses valores, uma outra sequência é formada, em que **cada termo é a subtração de dois termos consecutivos da sequência acima** $(a_{j+1} - a_j)$.

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$a_2 - a_1$	$a_3 - a_2$	$a_4 - a_3$	$a_5 - a_4$	$a_6 - a_5$	$a_7 - a_6$
2	3	4	5	6	7

Observe que a sequência acima é uma **progressão aritmética de razão 1**. Portanto, item correto.

Gabarito: CERTO.

CESGRANRIO

11. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) O quarto, o quinto e o sexto termos de uma progressão aritmética são expressos por $x + 1, x^2 + 4$ e $2x^2 + 3$, respectivamente. A soma dos dez primeiros termos dessa progressão aritmética é igual a

A) 260
B) 265
C) 270
D) 275
E) 280

Comentários:
Temos **três termos consecutivos** de uma PA.

$$a_4 = x + 1$$

$$a_5 = x^2 + 4$$

$$a_6 = 2x^2 + 3$$

Sabemos que **o termo central é a média aritmética dos termos extremos**. Assim,

$$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2}$$

Substituindo pelas expressões do enunciado:

$$x^2 + 4 = \frac{(x+1) + (2x^2 + 3)}{2}$$

Multiplicando cruzado.

$$2 \cdot (x^2 + 4) = 2x^2 + x + 4$$

Usando a propriedade **distributiva** da multiplicação no lado esquerdo.

$$\cancel{2x^2} + 8 = \cancel{2x^2} + x + 4$$

Cortando o **"$2x^2$"** que aparece em ambos os lados.

$$x + 4 = 8 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

Determinamos o valor de x, então sabemos quem é cada um dos termos.

$$a_4 = x + 1 \quad \rightarrow \quad a_4 = 4 + 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = 5}$$
$$a_5 = x^2 + 4 \quad \rightarrow \quad a_5 = 4^2 + 4 \quad \rightarrow \quad a_5 = 16 + 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_5 = 20}$$
$$a_6 = 2x^2 + 3 \quad \rightarrow \quad a_6 = 2 \cdot 4^2 + 3 \quad \rightarrow \quad a_6 = 2 \cdot 16 + 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_6 = 35}$$

Observe que **a razão da PA é igual a 15**.

$$r = a_5 - a_4 = 20 - 5 = 15$$

Só para confirmar, poderíamos fazer também

$$r = a_6 - a_5 = 35 - 20 = 15$$

Com a razão, conseguimos encontrar o primeiro termo dessa PA, basta usarmos **a fórmula do termo geral**.

$$a_4 = a_1 + 3r$$

Sabemos que $\boldsymbol{a_4 = 5}$ e que $\boldsymbol{r = 15}$.

$$5 = a_1 + 3 \cdot 15 \quad \rightarrow \quad 5 = a_1 + 45 \quad \rightarrow \quad a_1 = -40$$

O enunciado pergunta **a soma dos dez primeiros termos**. Por esse motivo, precisamos do a_{10}.

$$a_{10} = a_1 + 9r \quad \rightarrow \quad a_{10} = -40 + 9 \cdot 15 \quad \rightarrow \quad a_{10} = -40 + 135 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{10} = 95}$$

Agora sim podemos usar a fórmula da soma dos n primeiros termos.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad \rightarrow \quad S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \quad \rightarrow \quad S_{10} = (-40 + 95) \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_{10} = 275}$$

Gabarito: LETRA D.

12. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Em uma progressão aritmética, o décimo termo é o quádruplo do terceiro. Se o sétimo termo é igual a 19, então o segundo termo é igual a
A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

Comentários:
O enunciado disse que **o décimo termo é o quádruplo do terceiro**. Assim,

$$a_{10} = 4 \cdot a_3$$

Usando que $a_{10} = a_1 + 9r$ e que $a_3 = a_1 + 2r$, podemos **substituir** na expressão acima.

$$a_1 + 9r = 4 \cdot (a_1 + 2r)$$

Aplicando **a propriedade distributiva** da multiplicação no lado direito.

$$a_1 + 9r = 4a_1 + 8r$$

Isolando $\boldsymbol{a_1}$ **no lado esquerdo** e a **razão $\boldsymbol{r}$ do lado direito**, resulta em:

$$3a_1 = r \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{r}{3} \quad (1)$$

Agora, devemos usar a segunda informação que o enunciado nos deu: **o sétimo termo é igual a 19**.

$$a_7 = a_1 + 6r \quad \rightarrow \quad a_1 + 6r = 19 \quad (2)$$

Usando (1) em (2):

$$\frac{r}{3} + 6r = 19 \quad \rightarrow \quad \frac{r + 18r}{3} = 19 \quad \rightarrow \quad \frac{19r}{3} = 19 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = 3}$$

Podemos determinar o a_1 também, substituindo o valor da razão em (1).

$$a_1 = \frac{r}{3} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{3}{3} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = 1}$$

Pronto. **Obtemos $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{r}$**, podemos encontrar **qualquer termo da PA**. O enunciado quer o a_2.

$$a_2 = a_1 + r \quad \rightarrow \quad a_2 = 1 + 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = 4}$$

Gabarito: LETRA B.

13. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Considere uma progressão aritmética, em que $\boldsymbol{a_8 = a_2 + a_6}$, e a soma dos 10 primeiros termos dessa sequência é igual a 330. Assim, a razão dessa progressão é igual a

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 13

Comentários:

O enunciado disse que $\boldsymbol{a_8 = a_2 + a_6}$. Podemos usar a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, para escrever essa mesma expressão em termos de a_1 e r. Note que:

$$a_8 = a_1 + 7r$$

$$a_6 = a_1 + 5r$$

$$a_2 = a_1 + r$$

Fazendo a substituição na expressão do enunciado.

$$(a_1 + 7r) = (a_1 + r) + (a_1 + 5r)$$

$$a_1 + 7r = 2a_1 + 6r$$

Deixando tudo que tem $\boldsymbol{a_1}$ **do lado esquerdo** e tudo que tem $\boldsymbol{r}$ **do lado direito**.

$$a_1 = r \qquad (1)$$

Ademais, o enunciado revelou que **a soma dos 10 primeiros termos é igual a 330**.

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})\cdot 10}{2}$$

Vamos utilizar que $\boldsymbol{S_{10} = 330}$ e que $\boldsymbol{a_{10} = a_1 + 9r}$.

$$\frac{[a_1 + (a_1 + 9r)]\cdot 10}{2} = 330 \quad \rightarrow \quad (2a_1 + 9r)\cdot 5 = 330$$

Dividindo os dois lados da equação por 5 (o famoso passando o "5" dividindo), ficamos com:

$$2a_1 + 9r = 66 \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) formam um sistema de duas equações e duas incógnitas, podemos resolvê-lo.

Substituindo (1) em (2).

$$2r + 9r = 66 \quad \rightarrow \quad 11r = 66 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = 6}$$

Encontramos **a razão da PA**! Podemos marcar o gabarito, letra A.

Gabarito: LETRA A.

14. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) O número de passageiros que uma empresa de transporte aéreo tem transportado para uma petroleira vem diminuindo, segundo o padrão apresentado na tabela a seguir:

Ano	Número de passageiros transportados por ano
2014	10.000
2015	9.600
2016	9.200
2017	8.800

Supondo-se que esse padrão se mantenha, a previsão para a quantidade total de passageiros transportados por essa empresa, no período de 2014 a 2025, contando-se com os anos 2014 e 2025, será igual a

A) 86.400
B) 93.600
C) 103.800
D) 172.800
E) 187.200

Comentários:

Pessoal, a cada ano o número de passageiros transportados cai 400. Assim, temos uma **PA decrescente cuja razão é $\boldsymbol{r = -400}$**. Atente-se ao sinal!! Queremos **a quantidade total** de passageiros, transportados durante o período de 2014 a 2025. Vamos modificar um pouco a tabela do enunciado.

a_n	Ano	Número de passageiros transportados por ano
a_1	2014	10.000
a_2	2015	9.600
a_3	2016	9.200
a_4	2017	8.800
a_5	2018	8.400
a_6	2019	8.000
a_7	2020	7.600
a_8	2021	7.200

a_9	2022	6.800
a_{10}	2023	6.400
a_{11}	2024	6.000
a_{12}	2025	5.600

Vamos precisar somar tudo isso? Não, nós podemos usar a fórmula da **soma dos n primeiros termos** para obter a quantidade total de passageiros de uma forma mais direta. É importante notar que **o período de 2014 a 2025 envolve 12 anos**, quando contamos também os anos 2014 e 2025. Assim,

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} \quad \rightarrow \quad S_{12} = (10.000 + 5.600) \cdot 6 \quad \rightarrow \quad S_{12} = 15.600 \cdot 6 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_{12} = 93.600}$$

Logo, a quantidade de passageiros transportados pela empresa, no período considerado, será de 93.600.

Gabarito: LETRA B.

15. (CESGRANRIO/BB/2018) Uma sequência numérica tem seu termo geral representado por a_n, para $n \geq 1$. Sabe-se que $a_1 = 0$ e que a sequência cujo termo geral é $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \geq 1$, é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $b_1 = 9$ e cuja razão é igual a 4. O termo a_{1000} é igual a

A) 2.002.991
B) 2.002.995
C) 4.000.009
D) 4.009.000
E) 2.003.000

Comentários:

O enunciado falou que (b_n) representa uma progressão aritmética em que $b_1 = 9$ e $r = 4$. Ademais, disse que podemos escrever o termo geral dessa PA como função de uma outra sequência (a_n).

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

Com isso, podemos escrever que:

$$b_1 = \boldsymbol{a_2} - a_1$$

$$b_2 = \boldsymbol{a_3} \boldsymbol{-} \boldsymbol{a_2}$$

$$b_3 = a_4 \boldsymbol{-} \boldsymbol{a_3}$$

$$\dots \dots$$

$$b_{n-1} = \boldsymbol{a_n} - a_{n-1}$$

$$b_n = a_{n+1} \boldsymbol{-} \boldsymbol{a_n}$$

Observe que em uma equação vamos ter, por exemplo, o a_2 e em outra o "$-a_2$". Você concorda que quando somarmos todas essas equações, **esses vários pares que aparecem do lado direito vão se anular**? No final, vamos ter uma expressão bem enxuta. Que tal fazermos isso?!

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = (\cancel{a_2} - a_1) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_4} - \cancel{a_3}) + \cancel{\cdots} + (\cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}}) + (a_{n+1} - \cancel{a_n})$$

Do lado esquerdo temos a soma dos n primeiros termos de uma PA e do lado direito sobrou a_{n-1} e $-a_1$.

$$\frac{(b_1 + b_n) \cdot n}{2} = a_{n-1} - a_1$$

O enunciado informou que $a_1 = 0$.

$$a_{n+1} = \frac{(b_1 + b_n) \cdot n}{2}$$

Queremos determinar a_{1000}. Assim, devemos usar $n = 999$.

$$a_{999+1} = a_{1000} = \frac{(b_1 + b_{999}) \cdot 999}{2}$$

É possível encontrar b_{999} pois **sabemos o primeiro termo e a razão da PA**.

$$b_{999} = b_1 + 998 \cdot r$$

Substituindo $b_1 = 9$ e $r = 4$.

$$b_{999} = 9 + 998 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad b_{999} = 9 + 3.992 \quad \rightarrow \quad b_{999} = 4.001$$

Voltando para a expressão que encontramos:

$$a_{1000} = \frac{(b_1 + b_{999}) \cdot 999}{2} \quad \rightarrow \quad a_{1000} = \frac{(9 + 4.001) \cdot 999}{2} \quad \rightarrow \quad a_{1000} = \frac{4010 \cdot 999}{2}$$

$$\rightarrow \quad a_{1000} = 2005 \cdot 999 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{1000} = 2.002.995}$$

Gabarito: LETRA B.

16. (CESGRANRIO/BB/2018) Para obter uma amostra de tamanho 1.000 dentre uma população de tamanho 20.000, organizada em um cadastro em que cada elemento está numerado sequencialmente de 1 a 20.000, um pesquisador utilizou o seguinte procedimento:

I - calculou um intervalo de seleção da amostra, dividindo o total da população pelo tamanho da amostra: 20.000/1.000 = 20;

II - sorteou aleatoriamente um número inteiro, do intervalo [1, 20]. O número sorteado foi 15; desse modo, o primeiro elemento selecionado é o 15º;

III - a partir desse ponto, aplica-se o intervalo de seleção da amostra: o segundo elemento selecionado é o 35º (15+20), o terceiro é o 55º (15+40), o quarto é o 75º (15+60), e assim sucessivamente.

O último elemento selecionado nessa amostra é o

A) 19.997º

B) 19.995º

C) 19.965º

D) 19.975º

E) 19.980º

Comentários:

O primeiro elemento selecionado é o 15º. Assim, vamos escrever que:

$$a_1 = 15$$

Depois, **o segundo elemento selecionado é o 35**. Logo,

$$a_2 = 35$$

Depois disso, **o terceiro elemento é o 55º**.

$$a_3 = 55$$

Conseguimos perceber **que esses elementos formam uma PA cuja razão é igual a 20**. Como **a amostra tem 1.000 elementos**, conseguimos usar o termo geral para calcular o último elemento dessa sequência.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{1000} = 15 + 999 \cdot 20$$

$$a_{1000} = 15 + 19.980$$

$$\boldsymbol{a_{1000} = 19.995}$$

Logo, **o último elemento** selecionado nessa amostra é o **19.995º**.

Gabarito: LETRA B.

17. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2018) Se a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é S_n, então a expressão $S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n$ equivale a

A) $(n+1)(n+2)$

B) $n(n+1)$

C) S_n

D) S_{n+1}
E) 0

Comentários:
Pessoal, veja que o enunciado pede um resultado bem geral. Desse modo, **o resultado da expressão deve ser válido para qualquer PA**. Vamos escolher uma?

$$\{2,4,8,10,12,14,16\}$$

Considere a PA acima. A expressão do enunciado é:

$$E = S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n$$

Se $n = 2$, então:

$$E = S_5 - 3S_4 + 3S_4 - S_2$$

Da nossa PA, temos que:

$S_2 = a_1 + a_2 = 2 + 4 = 6$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 4 + 8 = 14$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 4 + 8 + 10 = 24$

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 + 4 + 8 + 10 + 12 = 36$

Assim, vamos substituir na expressão.

$$E = S_5 - 3S_4 + 3S_4 - S_2$$

$$E = 36 - 3 \cdot 24 + 3 \cdot 14 - 6$$

$$E = 36 - 72 + 42 - 6$$

$$E = 78 - 78$$

$$E = 0$$

Portanto, **o resultado da expressão é 0.** Como exercício, pense em uma nova progressão aritmética e repita os cálculos que fizemos aqui. A expressão continuará resultando em 0.

Gabarito: LETRA E.

18. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2018) Considere n números inteiros, ímpares, positivos e diferentes, representados por $a_1, a_2, \dots, a_n$, tais que a soma $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 10000$. Qual é o maior valor possível para n?
A) 99

B) 100
C) 1000
D) 4999
E) 5000

Comentários:
Pessoal, devemos perceber que **para "n" assumir o maior valor possível, esses números ($a_1, a_2, \ldots$) devem ser os menores possíveis**. Assim, precisamos de mais números para que, quando somados, resultem em 10000. Com isso, quais são **os menores** números ímpares, positivos e diferentes que conseguimos pensar?

$$(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots)$$

Dessa forma, essa sequência de ímpares **é uma progressão aritmética de razão igual a 2**.

$$a_1 = 1$$
$$r = 2$$

O **e-nésimo termo** dessa PA é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2$$

$$a_n = 1 + 2n - 2$$

$$a_n = 2n - 1$$

Sabemos que **a soma dos termos dessa PA é igual a 10.000**. Assim,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Substituindo $S_n = 10000, a_1 = 1 \; e \; a_n = 2n - 1$:

$$\frac{[1 + (2n-1)] \cdot n}{2} = 10000$$

Multiplicando cruzado.

$$[1 + (2n-1)] \cdot n = 20000$$

Resolvendo **dentro dos parênteses e colchetes**:

$$2n^2 = 20000$$

Dividindo os dois lados por 2.

$$n^2 = 10.000$$

Tirando a raiz quadrada.

$$n = \pm 100$$

Como estamos falando de **número de termos**, devemos considerar apenas **o resultado positivo**.

$$n = 100$$

Gabarito: LETRA B.

FGV

19. (FGV/CBM-AM/2022) A soma de 8 números inteiros consecutivos é 5764. O maior desses números é

A) 724.
B) 723.
C) 720.
D) 717.
E) 707.

Comentários:
Galera, 8 **inteiros consecutivos formam sempre uma PA de razão igual a 1**.

Como queremos **a soma dos 8 primeiros**, então:

$$S_8 = \frac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} \quad \rightarrow \quad S_8 = (a_1 + a_8) \cdot 4$$

Para encontrar o a_8, usamos **a fórmula do termo geral**:

$$a_8 = a_1 + 7r \quad \rightarrow \quad a_8 = a_1 + 7 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad a_8 = a_1 + 7$$

Usando essa informação em S_8.

$$S_8 = (a_1 + a_1 + 7) \cdot 4 \quad \rightarrow \quad S_8 = (2a_1 + 7) \cdot 4$$

O enunciado fala que **essa soma vale 5764**.

$$(2a_1 + 7) \cdot 4 = 5764 \quad \rightarrow \quad 2a_1 + 7 = 1441 \quad \rightarrow \quad 2a_1 = 1434 \quad \rightarrow \quad a_1 = 717$$

Opa! Determinarmos o primeiro termo dessa sequência! **A questão quer o maior, ou seja, o a_8.**

$$a_8 = 717 + 7 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_8 = 724}$$

Gabarito: LETRA A.

20. (FGV/PM-SP/2021) Um sargento organizou um grupo de soldados em 16 filas, com 2 soldados na primeira fila e 3 soldados a mais em cada fila subsequente: 2, 5, 8, 11, ... Se o sargento organizasse o mesmo grupo de soldados em filas de 14 soldados cada uma, o número total de filas seria

A) 14.

B) 16.

C) 24.

D) 28.

E) 32.

Comentários:

O primeiro passo é descobrir quantos soldados compõem esse grupo. Note que as quantidades de soldados em cada fila vão formando uma **progressão aritmética**.

$$2, 5, 8, 11, \ldots$$

Ademais, podemos perceber que **a razão dessa PA é 3**, pois as quantidades vão subindo sempre de três em três. Como temos 16 filas, para determinarmos o total de soldados desse grupo, devemos calcular **a soma dos 16 primeiros termos da PA**. Sendo assim, relembre-se:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Como $n = 16$, precisaremos encontrar a_{16}. Para isso, podemos usar a **fórmula do termo geral** de uma PA.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_{16} = 2 + (16-1) \cdot 3$$

$$a_{16} = 2 + 15 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad a_{16} = 2 + 45 \quad \rightarrow \quad a_{16} = 47$$

Agora, usando essa informação na fórmula da soma:

$$S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16}) \cdot 16}{2} \quad \rightarrow \quad S_{16} = (2+47) \cdot 8 \quad \rightarrow \quad S_{16} = 49 \cdot 8 \quad \rightarrow \quad S_{16} = 392$$

Pronto! Sabemos que **temos 392 soldados**. Como queremos reorganizá-los em filas com 14 soldados cada uma, para determinamos o total de filas, basta dividirmos o número de soldados pela quantidade de soldado que queremos em cada fila.

$$\frac{392}{14} = 28$$

Portanto, precisaremos de **28 filas**.

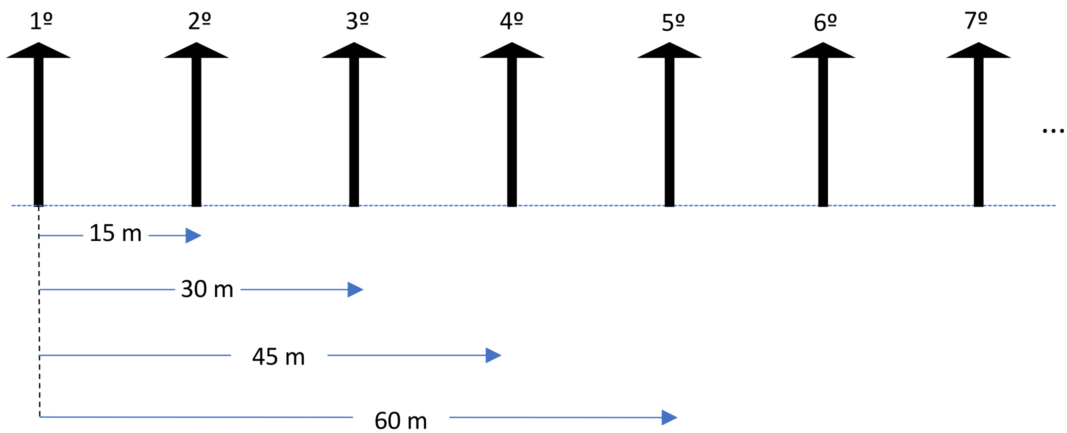
Gabarito: LETRA D.

21. (FGV/MPE-RJ/2019) Em uma rua retilínea há 20 postes espaçados igualmente entre si. A distância entre dois postes quaisquer consecutivos é de 15 metros. A distância entre o terceiro poste e o décimo sétimo poste é:

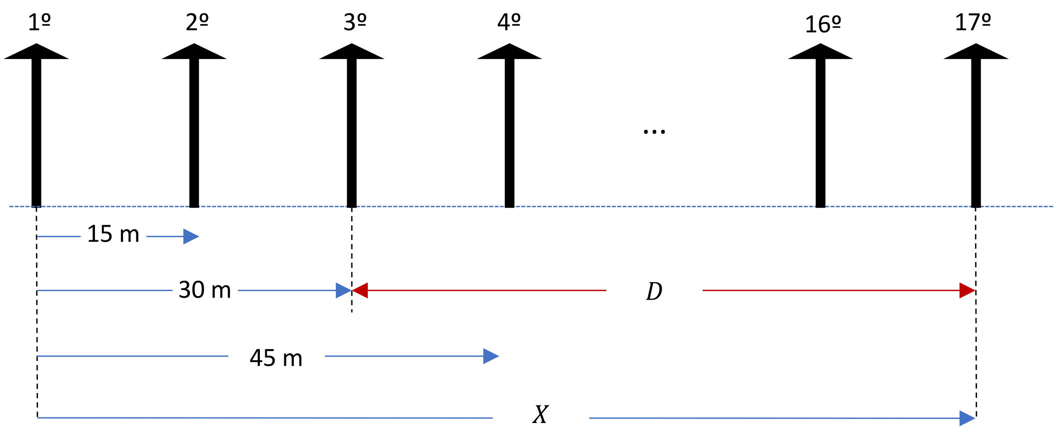
A) 225 metros
B) 210 metros
C) 195 metros
D) 180 metros
E) 165 metros

Comentários:

Vamos considerar a seguinte situação:



Perceba que a distância do primeiro poste para os demais vai aumentando conforme uma **progressão aritmética de razão igual a 15**. Para determinar a distância entre o terceiro e o décimo sétimo poste, podemos pensar assim:



Observe que **a distância D é encontrada pela subtração $X - 30$**. Ademais, X é o décimo sexto termo da PA formada pelas distâncias, acompanhe o porquê:

- A distância entre **o segundo** e o primeiro poste é $a_1 = 15$;
- A distância entre **o terceiro** e o primeiro poste é $a_2 = 30$;
- A distância entre **o quarto** e o primeiro poste é $a_3 = 45$;
...

- A distância entre **o décimo sétimo** e o primeiro poste é $a_{16} = X$.

Assim,

$$X = a_{16} = a_1 + 15r$$

$$X = 15 + 15 \cdot 15 \quad \rightarrow \quad X = 15 + 225 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{X = 240}$$

Com isso, **conseguimos encontrar a distância D**.

$$D = X - 30 \quad \rightarrow \quad D = 240 - 30 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{D = 210}$$

Gabarito: LETRA B.

22. (FGV/PREF. ANGRA/2019) Laura construiu uma progressão aritmética decrescente começando com o número 500 e subtraindo 7 unidades sucessivamente:

$$\mathbf{500 \quad 493 \quad 486 \quad 479 \quad \ldots}$$

O primeiro número dessa sequência que possui apenas dois algarismos é

A) 98.
B) 97.
C) 96.
D) 95.
E) 94.

Comentários:

Pessoal, sabemos que o termo geral de uma progressão aritmética é dado pela seguinte relação:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Para a PA construída por Laura, temos que **o primeiro termo (a_1) é 500** e **a razão (r) é igual a -7**. Uma maneira de saber qual dos números das alternativas pertence a essa sequência, é substituí-lo na fórmula do termo geral e **observar se vamos obter um valor inteiro para "n"**.

Como "n" mede a quantidade de termos, seu valor deve ser necessariamente um número inteiro. Assim, se substituímos (em a_n) o valor da alternativa e "n" for um *"número quebrado"*, então com toda certeza esse número não pertencerá a sequência, tudo bem? Vamos analisar as alternativas.

A) 98.

$$98 = 500 + (n - 1) \cdot (-7)$$

$$-402 = -7n + 7 \quad \rightarrow \quad 7n = 409 \quad \rightarrow \quad n = 58{,}42 \ldots$$

Como "n" resultou em um número quebrado, **o número 98 não faz parte da PA** em análise.

B) 97.

$$97 = 500 + (n-1) \cdot (-7)$$

$$-403 = -7n + 7 \quad \rightarrow \quad 7n = 410 \quad \rightarrow \quad n = 58{,}57 \ldots$$

Como "n" resultou em um número quebrado, **o número 97 não faz parte da PA** em análise.

C) 96.

$$96 = 500 + (n-1) \cdot (-7)$$

$$-404 = -7n + 7 \quad \rightarrow \quad 7n = 411 \quad \rightarrow \quad n = 58{,}71 \ldots$$

Como "n" resultou em um número quebrado, **o número 96 não faz parte da PA** em análise.

D) 95.

$$95 = 500 + (n-1) \cdot (-7)$$

$$-405 = -7n + 7 \quad \rightarrow \quad 7n = 412 \quad \rightarrow \quad n = 58{,}85 \ldots$$

Como "n" resultou em um número quebrado, **o número 95 não faz parte da PA** em análise.

E) 94.

$$94 = 500 + (n-1) \cdot (-7)$$

$$-406 = -7n + 7 \quad \rightarrow \quad 7n = 413 \quad \rightarrow \quad n = 59$$

Opa!! "n" agora é um inteiro. Sendo assim, **"94" faz parte dessa PA e é o 59º termo dela**.

Gabarito: LETRA E.

23. (FGV/ALERO/2018) Os números $x+1$, $2x-1$ e $x+5$, nessa ordem, são os três primeiros termos de uma progressão aritmética. O quarto termo dessa progressão aritmética é

A) 11.
B) 10.
C) 9.
D) 8.
E) 7.

Comentários:

Sabemos que para **três termos consecutivos** de uma progressão aritmética vale a seguinte relação;

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Do enunciado, podemos retirar que:

$$a_1 = x + 1 \qquad a_2 = 2x - 1 \qquad a_3 = x + 5$$

Substituindo na expressão inicial,

$$2x - 1 = \frac{(x+1) + (x+5)}{2} \quad \rightarrow \quad 2x - 1 = \frac{2x+6}{2} \quad \rightarrow \quad 4x - 2 = 2x + 6 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

Agora, com o valor de "x", podemos determinar os três primeiros termos dessa PA.

$$a_1 = x + 1 \quad \rightarrow \quad a_1 = 4 + 1 \quad \rightarrow \quad a_1 = 5$$

$$a_2 = 2x - 1 \quad \rightarrow \quad a_2 = 2 \cdot 4 - 1 \quad \rightarrow \quad a_2 = 7$$

$$a_3 = x + 5 \quad \rightarrow \quad a_3 = 4 + 5 \quad \rightarrow \quad a_3 = 9$$

Beleza! Com isso, conseguimos ver que **a razão dessa PA é 2**. Para determinarmos o quarto termo (a_4), basta **somarmos 2 ao terceiro termo (a_3).**

$$a_4 = a_3 + 2 \quad \rightarrow \quad a_4 = 9 + 2 \quad \rightarrow \quad a_4 = 11$$

Gabarito: LETRA A.

24. (FGV/ALERO/2018) A soma dos termos da progressão aritmética 8, 11, 14 ,..., 2015, 2018 é

A) 680736.
B) 679723.
C) 678710.
D) 677697.
E) 676684.

Comentários:

Opa! Vamos lá. A **soma dos n primeiros termos de uma PA** é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Pela sequência dada no enunciado, temos que:

$$a_1 = 8 \qquad\qquad a_n = 2018$$

No entanto, note que **ainda não temos "n"** para conseguir aplicar a fórmula. Para determiná-lo, usaremos a fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Observe que os termos da sequência aumentam de três em três. Isso nos diz que **a razão (r) dessa PA é 3**. Sendo assim,

$$2018 = 8 + (n-1) \cdot 3$$

$$2010 = 3 \cdot (n-1) \quad \rightarrow \quad n - 1 = 670 \quad \rightarrow \quad n = 671$$

Pronto, agora **temos todas as quantidades que precisamos**, basta substituirmos na fórmula.

$$S_{671} = \frac{(8 + 2018) \cdot 671}{2} \quad \rightarrow \quad S_{671} = \frac{2026 \cdot 671}{2} \quad \rightarrow \quad S_{671} = 1013 \cdot 671 \quad \rightarrow \quad S_{671} = 679723$$

Gabarito: LETRA B.

25. (FGV/PREF. SALVADOR/2017) Duzentas e dez fichas são arrumadas em linhas, de tal forma que a primeira linha tenha 1 ficha, a segunda linha tenha 2 fichas, e assim sucessivamente, até a linha de número N, com exatamente, N fichas. A soma dos algarismos de N é

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Comentários:

Observe que a quantidade de ficha por linha forma uma **progressão aritmética da razão igual a 1**.

$$1, 2, 3, 4, \dots, N$$

A soma das fichas em cada linha deve totalizar as **210 fichas** que são arrumadas. Com isso, podemos escrever:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

O primeiro termo (a_1) da PA é 1. O n-ésimo termo (a_n) é N, e, o número de termos (n) é o próprio N. Assim,

$$\frac{(1 + N) \cdot N}{2} = 210 \quad \rightarrow \quad N + N^2 = 420 \quad \rightarrow \quad N^2 + N - 420 = 0$$

Temos uma **equação de segundo grau** para resolver. Por esse motivo, precisaremos aplicar Bhaskara.

- Cálculo do Discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = 1^1 - 4 \cdot 1 \cdot (-420) \quad \rightarrow \quad \Delta = 1 + 1680 \quad \rightarrow \quad \Delta = 1681$$

- Cálculo das Raízes

$$N = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad N = \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad N = \frac{-1 \pm 41}{2}$$

$$N' = \frac{-1-41}{2} \quad \rightarrow \quad N' = -\frac{42}{2} \quad \rightarrow \quad N' = -21$$

$$N'' = \frac{-1+41}{2} \quad \rightarrow \quad N'' = \frac{40}{2} \quad \rightarrow \quad N'' = 20$$

Observe que **a raiz negativa não tem significado para nós**. Isso acontece pois N representa o número de fichas, assim, **não podemos ter -21 fichas**, concorda? Com isso, a única raiz com significado é $N'' = 20$. A soma dos algarismos de N é:

$$Soma\ dos\ Algarismos = 2 + 0 \quad \rightarrow \quad Soma\ dos\ Algarismos = 2$$

Gabarito: LETRA B.

26. (FGV/MPE-RJ/2016) Cláudio dividiu um círculo em 15 setores circulares. As medidas dos ângulos centrais desses setores, em graus, são números inteiros positivos e formam uma progressão aritmética. A menor medida possível, em graus, do ângulo central do menor desses setores é:

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Comentários:

Considere a seguinte PA:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{14}, a_{15})$$

Temos **15 termos** e cada um dele traz **o ângulo do respectivo setor.** Ademais, como estamos trabalhando com um círculo, **a soma dos ângulos desses setores deve totalizar 360°**. Com isso,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} = 360°$$

Lembre-se que **a soma dos 15 primeiros termos** pode ser calculada por meio da fórmula:

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2}$$

Pela **fórmula do termo geral**, podemos escrever que:

$$a_{15} = a_1 + 14r$$

Substituindo na fórmula da soma:

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_1 + 14r) \cdot 15}{2} \quad \rightarrow \quad S_{15} = \frac{(2a_1 + 14r) \cdot 15}{2} \quad \rightarrow \quad S_{15} = \frac{2 \cdot (a_1 + 7r) \cdot 15}{2}$$

$$S_{15} = (a_1 + 7r) \cdot 15$$

Usando o fato que $\boldsymbol{S_{16} = 360°}$**:**

$$(a_1 + 7r) \cdot 15 = 360 \quad \rightarrow \quad a_1 + 7r = \frac{360}{15} \quad \rightarrow \quad a_1 + 7r = 24$$

$$a_1 = 24 - 7r$$

Note que queremos **o menor valor possível para $\boldsymbol{a_1}$**. Isso vai acontecer quando **"r" for o maior possível, desde que não torne $\boldsymbol{a_1}$ negativo** (afinal, como estamos falando da medida de ângulos de setores, esses ângulos não podem ser negativos). Quando $r = 3$, ficamos com:

$$a_1 = 24 - 7 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad a_1 = 24 - 21 \quad \rightarrow \quad a_1 = 3$$

Gabarito: LETRA C.

27. (FGV/SEE-PE/2016) Considere a sequência de números naturais que começa com 3, termina com 699 e a diferença entre cada termo, a partir do segundo e o anterior, é 6. O número de termos dessa sequência é

A) 115.
B) 116.
C) 117.
D) 118.
E) 119.

Comentários:

Remos uma sequência que começa com 3, isto é, $\boldsymbol{a_1 = 3}$.

Além disso, essa sequência termina com 699, isto é, $\boldsymbol{a_n = 699}$.

Por fim, a diferença entre cada termo, a partir do segundo e o anterior, é 6, isto é, $\boldsymbol{r = 6}$.

Da **fórmula do termo geral**, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Vamos **substituir as informações** que tiramos do enunciado na equação acima.

$$699 = 3 + (n-1) \cdot 6 \quad \rightarrow \quad n - 1 = \frac{696}{6} \quad \rightarrow \quad n = 117$$

Sendo assim, **o número de termos (n) dessa sequência é 117**.

Gabarito: LETRA C.

28. (FGV/PREF. NITEROI/2015) Na sequência abaixo, as diferenças entre termos consecutivos repetem-se alternadamente:

$$1, 5, 8, 12, 15, 19, 22, 26, 29, 33, ...$$

O 100º elemento dessa sequência é:

A) 344.
B) 346.
C) 348.
D) 351.
E) 355.

Comentários:

Na sequência do enunciado, temos **duas progressões aritméticas "escondidas".** Vamos visualizá-las.

$$\mathbf{1, 5, 8, 12, 15, 19, 22, 26, 29, 33, ...}$$

A PA em roxo é 1, 8, 15, 22, ... Note que ela é formada apenas pelos elementos de ordem ímpar. Em contrapartida, **a PA em vermelho (5, 12, 19, 26, 33, ...) é formada pelos elementos de ordem par.**

Com isso em mente, pergunto para você: *em qual das duas PAs estará o 100º elemento da sequência?!*

Na PA **vermelha**!! Afinal, é nessa PA que estão os termos de ordem par **(100 é par)** da sequência original.

$$\mathbf{(5, 12, 19, 26, 33, ...)}$$

Agora, vamos focar nossa atenção na PA destacada acima. Podemos perceber que sua **razão (r) é 7** e seu primeiro termo **(a_1) é igual a 5**. Muito cuidado agora: o 100º termo que estamos procurando **não será o 100º termo da PA acima!! Ele será o 50º termo**. Lembre-se que dividimos a sequência original em duas!! Logo,

$$a_{50} = a_1 + 49r \quad \rightarrow \quad a_{50} = 5 + 49 \cdot 7 \quad \rightarrow \quad a_{50} = 5 + 343 \quad \rightarrow \quad a_{50} = 348$$

Gabarito: LETRA C.

29. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Arquimedes dividiu um círculo em nove setores circulares. As medidas dos ângulos centrais correspondentes a esses setores circulares, em graus, são números inteiros e formam uma progressão aritmética. A medida em graus de um desses nove ângulos é, obrigatoriamente:

A) 20
B) 30
C) 40
D) 45
E) 60

Comentários:

Questão interessante! Uma informação importante que vamos utilizar a nosso favor é que um círculo possui 360°. Dessa forma, **a soma das medidas dos ângulos desses 9 setores deve totalizar os 360°**.

$$S_9 = 360°$$

Usando a fórmula da soma dos n primeiros termos, podemos escrever que:

$$S_9 = \frac{(a_1 + a_9) \cdot 9}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{(a_1 + a_9) \cdot 9}{2} = 360 \quad \rightarrow \quad a_1 + a_9 = \frac{720}{9} \quad \rightarrow \quad a_1 + a_9 = 80$$

Perceba que **a soma dos termos extremos resultou em 80**. Agora, visualize o seguinte:

$$a_1 + a_9 = 80$$

$$a_3 + a_7 = 80$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9$$

$$a_4 + a_6 = 80$$

$$a_2 + a_8 = 80$$

Com isso, note que podemos escrever:

$$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} \quad \rightarrow \quad a_5 = \frac{80}{2} \quad \rightarrow \quad a_5 = 40$$

Logo, **um dos termos dessa PA é exatamente $a_5 = 50$**.

Gabarito: LETRA C.

VUNESP

30. (VUNESP/PREF. VALINHOS/2019) André e Daniel receberam uma mesma quantia em dinheiro. Eles gastaram, desse dinheiro, a mesma quantia por dia durante vários dias. Após 57 dias, André ficou com R$ 43,00, e após 58 dias, Daniel ficou com R$ 29,00. O valor que cada um desses rapazes recebeu foi

A) R$ 613,00.

B) R$ 783,00.

C) R$ 841,00.

D) R$ 910,00.

E) R$ 1.002,00.

Comentários:

Vamos interpretar a questão assim: **a quantia que eles receberam no primeiro dia é a_1.** Ademais, considere que **o dinheiro que eles gastam todo dia é r**.

Após o **primeiro dia**, os dois estarão com $a_2 = a_1 - r$.

Após o **segundo dia**, os dois estarão com $a_3 = a_1 - 2r$
Após o **terceiro dia**, os dois estarão com $a_4 = a_1 - 3r$.

Note que temos uma **progressão aritmética de primeiro termo a_1** e **razão igual a $-r$**.

Sendo assim, **após 57 dias** André ficou com:

$$a_{58} = a_1 - 57r \qquad \rightarrow \qquad a_1 - 57r = 43 \qquad (1)$$

Analogamente, **após 58 dias**, Daniel ficou com:

$$a_{59} = a_1 - 58r \qquad \rightarrow \qquad a_1 - 58r = 29 \qquad (2)$$

Subtraindo as equações (1) e (2) membro a membro:

$$(a_1 - 57r) - (a_1 - 58r) = 43 - 29$$

$$r = 14$$

Logo, **eles gastam 14 reais todos os dias**. Para descobrir o valor inicial que eles receberam, basta **substituir o valor de r encontrado** em qualquer uma das equações (1) ou (2).

$$a_1 - 57 \cdot 14 = 43 \qquad \rightarrow \qquad a_1 = 43 + 798 \qquad \rightarrow \qquad a_1 = 841$$

Gabarito: LETRA C.

31. (VUNESP/PM-SP/2020) O percurso de um treinamento de corrida é composto por 5 etapas com distâncias diferentes em cada uma delas. Uma nova etapa sempre tem 100 metros a mais que a etapa anterior. Sabendo que a quarta etapa do treinamento é percorrer 1200 metros, a distância total do percurso é igual a

A) 6 100 metros.
B) 5 900 metros.
C) 5 700 metros.
D) 5 500 metros.

Comentários:

Imagine a seguinte sequência:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

O **a_1 representa a distância da primeira etapa**, o **a_2 representa a distância da segunda etapa**, o a_3, da terceira etapa e assim sucessivamente.

Como uma nova etapa sempre tem 100 a mais que a etapa anterior, então essa sequência é uma **progressão aritmética de razão igual a 100**. Ademais, o enunciado nos disse que $\boldsymbol{a_4 = 1200}$. Sabendo desses dois fatos, podemos encontrar a distância da primeira etapa.

$$a_4 = a_1 + 3r$$

Substituindo $a_4 = 1200$ e $r = 100$, ficamos com:

$$1200 = a_1 + 3 \cdot 100 \quad \rightarrow \quad a_1 = 1200 - 300 \quad \rightarrow \quad a_1 = 900$$

Pronto, **com o primeiro termo e a razão**, determinamos todas as distâncias das etapas.

$$(900, 1000, 1100, 1200, 1300)$$

A questão quer **a distância total do percurso**. Podemos somar os cinco termos ou usar **a fórmula** da soma dos n primeiros termos de uma PA.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \rightarrow \quad S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2}$$

$$S_5 = \frac{(900 + 1300) \cdot 5}{2} \quad \rightarrow \quad S_5 = \frac{2200 \cdot 5}{2} \quad \rightarrow \quad S_5 = 1100 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad S_5 = 5500$$

Gabarito: LETRA D.

32. (VUNESP/PREF. BARRETOS/2018) Dois colegas estão treinando para uma competição de ciclismo marcada para o mês que vem. A cada dia de treino, eles percorrem 5 km a mais do que percorreram no dia anterior. Sabendo-se que, em quatro dias de treino, eles percorreram um total de 150 km, é correto afirmar que no 4º dia, em km, eles percorreram

A) 30.
B) 35.
C) 45.
D) 50.
E) 55.

Comentários:
Considere:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

O a_1 é a distância percorrida no primeiro dia; o a_2 é a distância percorrida no segundo dia... Ademais, como em cada dia **eles percorrem um total de 5 km** a mais, podemos interpretar essa sequência como uma **progressão aritmética de razão igual a 5**. Sendo assim, podemos escrever:

$$a_2 = a_1 + 5$$

$$a_3 = a_2 + 500 \quad \rightarrow \quad a_3 = a_1 + 10$$

$$a_4 = a_3 + 500 \quad \rightarrow \quad a_4 = a_1 + 15$$

Como em **quatro dias eles percorreram 150 km**,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 150$$

$$a_1 + (a_1 + 5) + (a_1 + 10) + (a_1 + 15) = 150$$

$$4a_1 + 30 = 150 \quad \rightarrow \quad 4a_1 = 120 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{120}{4} \quad \rightarrow \quad a_1 = 30$$

Logo, determinamos que **no primeiro dia eles percorreram 30 km**. Para encontrarmos quanto eles percorreram no quarto dia, basta calcularmos a_4.

$$a_4 = a_1 + 15 \quad \rightarrow \quad a_4 = 30 + 15 \quad \rightarrow \quad a_4 = 45$$

Gabarito: LETRA C.

33. (VUNESP/PM-SP/2019) O alvo representado na figura é formado por três círculos concêntricos, ou seja, com centros em um mesmo ponto: um círculo menor, outro, intermediário, e um círculo maior:

Sabendo-se que as medidas dos raios dos três círculos formam uma progressão aritmética, e que a soma dessas medidas é 120 cm, o raio do círculo intermediário, em centímetros, mede

A) 25.
B) 30.
C) 35.
D) 40.
E) 45.

Comentários:

Vamos chamar esses três raios de R_1, R_2 e R_3. **A soma desses raios é 120**. Logo

$$R_1 + R_2 + R_3 = 120$$

Como essas **três medidas estão em progressão aritmética**, então podemos escrever que:

$$R_1 = R_2 - r$$

$$R_3 = R_2 + r$$

Substituindo essas expressões na soma:

$$(R_2 - r) + R_2 + (R_2 + r) = 120$$

$$3\mathrm{R}_2 = 120 \quad \rightarrow \quad \mathbf{R_2 = 40\ cm}$$

Gabarito: LETRA D.

34. (VUNESP/SME-BARRETOS/2018) Observe a lei de formação das sequências numéricas I e II, em que alguns números são indicados por letras:

I. –14, –11, m, –5, –2, 1, n,
II. –5, p, 3, q, 11,15, 19

Desse modo, é correto afirmar que (m + n – p – q) é igual a
A) -12;
B) -11;
C) -10;
D) 6;
E) 10.

Comentários:
Na sequência I, temos uma **progressão aritmética de razão 3**.

$$\mathbf{-14, -11, \boldsymbol{m}, -5, -2, 1, \boldsymbol{n},}$$

Sendo assim,

$$m = -11 + 3 \quad \rightarrow \quad m = -8$$
$$n = 1 + 3 \quad \rightarrow \quad n = 4$$

Na sequência II, temos uma outra **progressão aritmética, dessa vez de razão igual a 4**.

$$\mathbf{-5, \boldsymbol{p}, 3, \boldsymbol{q}, 11, 15, 19}$$

Sendo assim,

$$p = -5 + 4 \quad \rightarrow \quad p = -1$$
$$q = 3 + 4 \quad \rightarrow \quad q = 7$$

Com todos os valores determinados, devemos **substituí-los na expressão do enunciado**.

$$E = (\mathrm{m} + \mathrm{n} - \mathrm{p} - \mathrm{q})$$

$$E = -8 + 4 - (-1) - 7 \quad \rightarrow \quad E = -4 + 1 - 7 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E = -10}$$

Gabarito: LETRA C.

35. (VUNESP/PREF. SERTÃOZINHO/2018) Os números $\sqrt{9-k}, -k, 3-k$, nessa ordem, são os três primeiros elementos de uma progressão aritmética. Nessa sequência numérica, o valor do quarto elemento é igual a

A) 0.
B) 4.
C) 9.
D) 11.
E) 13.

Comentários:

Na nossa teoria, vimos que em uma **PA de três termos**, o termo central é a **média aritmética** dos outros 2. Sendo assim, podemos escrever:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Substituindo os termos dado no enunciado:

$$-k = \frac{\left(\sqrt{9-k}\right) + (3-k)}{2}$$

Passando o 2 do denominador multiplicando o $-k$:

$$\left(\sqrt{9-k}\right) + (3-k) = -2k$$

Isolando a raiz:

$$\sqrt{9-k} = -2k + k - 3 \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{9-k} = -k - 3$$

Elevando os dois lados ao quadrado para sumirmos com a raiz:

$$\left(\sqrt{9-k}\right)^2 = (-k-3)^2$$

$$9 - k = k^2 + 6k + 9 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{k^2 + 7k = 0}$$

Temos uma e**quação de segundo grau com raízes iguais a 0 e a -7**.

- Se $k = 0$, a sequência do enunciado fica:

$$\mathbf{3,} \qquad \mathbf{0,} \qquad \mathbf{3}$$

Observe que **essa sequência não é uma PA**. Portanto, vamos olhar a outra raiz.

--Se $k = -7$, a sequência do enunciado fica:

$$\sqrt{9-k}, \qquad -k, \qquad 3-k$$

$$\sqrt{9-(-7)}, \qquad -(-7), \qquad 3-(-7)$$

$$\sqrt{16}, \qquad 7, \qquad 10$$

$$\mathbf{4}, \qquad \mathbf{7}, \qquad \mathbf{10}$$

Pronto, (**4, 7, 10) é uma progressão aritmética de raiz igual a 3**. Com isso, o quarto elemento fica:

$$a_4 = 10 + 3 \qquad \rightarrow \qquad a_4 = 13$$

Gabarito: LETRA E.

36. (VUNESP/PREF. SERRANA/2018) Uma progressão aritmética tem o sexto elemento igual a 27 e o décimo terceiro elemento igual a 55. O quadragésimo elemento dessa sequência é igual a
A) 160.
B) 161.
C) 162.
D) 163.
E) 164.

Comentários:
Vamos lá, pessoal! Nós estamos lidando com uma **progressão aritmética**. As duas quantidades mais importantes que precisamos determinar é **o primeiro termo (a_1) e a razão (r)**. Nesse momento, lembre-se da fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

- O sexto elemento é igual a 27.

$$a_6 = a_1 + 5r \qquad \rightarrow \qquad a_1 + 5r = 27 \qquad (1)$$

- O décimo terceiro elemento é igual a 55.

$$a_{13} = a_1 + 12r \qquad \rightarrow \qquad a_1 + 12r = 55 \qquad (2)$$

Subtraindo a equação (1) da equação (2), membro a membro.

$$(a_1 + 12r) - (a_1 + 5r) = 55 - 27$$

$$7r = 28 \qquad \rightarrow \qquad r = 4$$

Assim, **a razão da progressão aritmética é 4**. Para determinar o a_1, devemos substituir a razão em qualquer uma das equações (1) ou (2).

$$a_1 + 5 \cdot 4 = 27 \qquad \rightarrow \qquad a_1 + 20 = 27 \qquad \rightarrow \qquad a_1 = 7$$

Show! **Com o a_1 e r podemos determinar qualquer termo da PA**! Queremos o **quadragésimo elemento**.

$$a_{40} = a_1 + 39r$$

$$a_{40} = 7 + 39 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad a_{40} = 7 + 156 \quad \rightarrow \quad a_{40} = 163$$

Gabarito: LETRA D.

37. (VUNESP/PM-SP/2017) Considere a elaboração, pelo Centro de Inteligência da Polícia Militar (CIPM), de um planejamento estratégico para a deflagração de uma operação policial ostensiva em uma região R, com alta incidência do tráfico de drogas. A questão abaixo tem como referência essa proposição. Na região R, um terreno especialmente visado, na forma de um quadrilátero, tem medidas dos lados, em metros, dadas pela sequência $\boldsymbol{a + 1, 2a, a^2 - 1, b}$, cujos termos formam, nessa ordem, uma progressão aritmética crescente. Nessas condições, é correto afirmar que a soma das medidas dos lados desse terreno é, em metros, igual a

A) 20.
B) 24.
C) 26.
D) 28.
E) 30.

Comentários:

Os lados do quadrilátero estão em **progressão aritmética**. Lembre-se que se temos três termos de uma PA, **o termo central é igual a média aritmética dos seus vizinhos**. Dessa forma,

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Substituindo os valores do enunciado,

$$2a = \frac{(a+1) + (a^2 - 1)}{2}$$

$$(a+1) + (a^2 - 1) = 4a \quad \rightarrow \quad a^2 + a = 4a \quad \rightarrow \quad a^2 - 3a = 0$$

Observe que obtemos uma **equação de segundo grau em que as raízes são 0 e 3**.

- Se $a = 0$, vamos obter a seguinte sequência:

$$\boldsymbol{0 + 1, \quad 0, \quad 0^2 - 1, \quad b}$$

$$1, \quad 0, \quad -1, \quad b$$

Nem precisamos encontrar o valor de b, mas já dá pra perceber que **quando $a = 0$, não vamos ter uma PA**.
- Se $a = 3$, vamos obter a seguinte sequência:

$$\boldsymbol{3 + 1, \quad 2 \cdot 3, \quad 3^2 - 1, \quad b}$$

$$4, \quad 6, \quad 8, \quad b$$

Opa!! Quando $a = 3$ a história já muda!! Agora sim parece que temos uma **progressão aritmética com razão igual a 2**. Dessa forma, podemos tirar que:

$$b = 8 + 2 \quad \rightarrow \quad b = 10$$

A questão quer a soma dos lados. Logo,

$$S = 4 + 6 + 8 + 10 \quad \rightarrow \quad S = 10 + 18 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S = 28}$$

Gabarito: LETRA D.

38. (VUNESP/CRO-SP/2015) Cada uma das duas sequências seguintes possui um padrão de formação:

$$(\mathbf{1, 3, 5, 7, \ldots})$$
$$(\mathbf{0, 2, 4, 6, \ldots})$$

A soma do milésimo termo da primeira sequência com o centésimo termo da segunda sequência é igual a
A) 1019.
B) 1947.
C) 1985.
D) 2033.
E) 2197.

Comentários:
Note que **as duas sequências do enunciado são progressões aritméticas**. Ademais, nas duas **a razão é igual a 2, o que muda é o primeiro termo.** Com isso, o milésimo termo da primeira sequência é dado por:

$$a_{1000} = a_1 + 999r$$

Substituindo $a_1 = 1$ e $r = 2$:

$$a_{1000} = 1 + 999 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad a_{1000} = 1999$$

Da mesma forma, podemos calcular **o centésimo termo da segunda sequência**:

$$b_{100} = b_1 + 99r$$

Substituindo $b_1 = 0$ e $r = 2$:

$$b_{100} = 0 + 99 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad b_{100} = 198$$

O enunciado pede **a soma entre $\boldsymbol{a_{1000}}$ e $\boldsymbol{b_{100}}$**.

$$S = a_{1000} + b_{100} \quad \rightarrow \quad S = 1999 + 198 \quad \rightarrow \quad S = 2197$$

Gabarito: LETRA E.

39. (VUNESP/DESENVOLVE/2014) Dada a sequência de números (809; 910; 1011; 1112; ...) e observando a diferença entre dois números consecutivos, podemos determinar todos os outros termos. Considere as

diferenças entre o 34º e o 32º termos, entre o 65º e o 62º termos e entre o 102º e o 97º. A soma dessas diferenças é igual a

A) 1001.
B) 1010.
C) 1110.
D) 1111.
E) 10100.

Comentários:

Pessoal, perceba que a sequência do enunciado é uma **progressão aritmética de razão igual a 101**. Veja:

$$910 - 809 = 101$$

$$1011 - 910 = 101$$

$$1112 - 1011 = 101$$

O enunciado fala da **diferença entre vários termos** dessa sequência. Como temos a razão, podemos calcular essas diferenças! Basta usarmos **a fórmula do termo geral adaptada**:

$$a_n = a_p + (n - p) \cdot r$$

- Diferença entre o **34º e o 32º termo**:

$$a_{34} = a_{32} + (34 - 32) \cdot r \quad \rightarrow \quad a_{34} - a_{32} = 2 \cdot 101 \quad \rightarrow \quad a_{34} - a_{32} = 202$$

- Diferença entre o **65º e o 62º termo**:

$$a_{65} = a_{62} + (65 - 62) \cdot r \quad \rightarrow \quad a_{65} - a_{62} = 3 \cdot 101 \quad \rightarrow \quad a_{65} - a_{62} = 303$$

- Diferença entre o **102º e o 97º termo**:

$$a_{102} = a_{97} + (102 - 97) \cdot r \quad \rightarrow \quad a_{102} - a_{97} = 5 \cdot 101 \quad \rightarrow \quad a_{34} - a_{32} = 505$$

O enunciado pede a soma dessas diferenças.

$$S = 202 + 303 + 505 \quad \rightarrow \quad S = 1010$$

Gabarito: LETRA B.

Outras Bancas

40. (NUCEPE/PM-PI/2022) No treinamento para o teste físico da PM, Marinho estabeleceu que sempre correria 500m a mais que no dia anterior. Sabe-se que, no terceiro dia de treinamento, ele percorreu 3200m. Quantos quilômetros Marinho percorrerá no décimo quinto dia de treinamento?

A) 9,2 km

B) 9,5 km
C) 9,8 km
D) 10,0 km
E) 10,2 km

Comentários:
Pessoal, vamos lá! Essa é uma questão que pode ser resolvida por meio dos nossos conhecimentos em progressão aritmética. Note que o Marinho sempre corre **500 metros a mais que no dia anterior**. Essa é a nossa razão (r).

$$r = 500$$

Vamos encarar **o quanto ele corre no dia $\boldsymbol{i}$ como o $\boldsymbol{a_i}$**.

Sendo assim, se no terceiro dia ele percorreu 3200 m, então podemos escrever:

$$a_3 = 3200$$

Com o a_3 e a razão, é possível determinar o a_1.

$$a_3 = a_1 + 2r \quad \rightarrow \quad a_1 = a_3 - 2r \quad \rightarrow \quad a_1 = 3200 - 2 \cdot 500$$

$$a_1 = 3200 - 1000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a_1 = 2200}}$$

Pronto! Lembre-se sempre que com a_1 e a razão, é possível determinar **qualquer termo da PA**.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

O enunciado pede o quanto Marinho correrá no **décimo quinto dia de treinamento**, ou seja, a_{15}.

$$a_{15} = a_1 + 14r \quad \rightarrow \quad a_{15} = 2200 + 14 \cdot 500 \quad \rightarrow \quad a_{15} = 2200 + 7000$$

$$\boxed{\mathbf{a_{15} = 9200\ m = 9{,}2\ km}}$$

Gabarito: LETRA A.

41. (OBJETIVA/CM IPIRANGA DO NORTE/2022) Considerando-se que a razão de certa progressão aritmética é igual a 12, e que o seu primeiro termo é igual a 9, assinalar a alternativa que apresenta o valor da soma dos 8 primeiros termos dessa progressão:
A) 396
B) 400
C) 404
D) 408

Comentários:
Questão bem direta para **treinarmos as fórmulas**! O enunciado nos forneceu o seguinte:

$$a_1 = 9 \qquad r = 12$$

Ele pede a soma dos 8 primeiros termos. Lembre-se que **a soma dos "n" primeiros termos** é igual a:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Note, portanto, que precisaremos encontrar o $\boldsymbol{a_8}$.

$$a_8 = a_1 + 7r \quad \rightarrow \quad a_8 = 9 + 7 \cdot 12 \quad \rightarrow \quad a_8 = 9 + 84 \quad \rightarrow \quad a_8 = 93$$

Agora, vamos usar **a fórmula da soma**.

$$S_8 = \frac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} \quad \rightarrow \quad S_8 = 4 \cdot (9 + 93) \quad \rightarrow \quad S_8 = 4 \cdot 102 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{S_8 = 408}}$$

Gabarito: LETRA D.

42. (FAUEL/CM DOURADINA/2022) Mariana faz caminhada em seu bairro toda segunda-feira. A cada semana, ela aumenta 0,5 km no seu trajeto. Na primeira vez que caminhou, ela percorreu 800 m. Depois de 8 semanas, quantos km Mariana estará caminhando?

A) 2,3 km
B) 3,5 km
C) 4,3 km
D) 8,35 km

Comentários:

Questão bem parecida com uma que já fizemos. Observe que a cada semana, **Mariana aumenta 0,5 km (500 metros) no seu trajeto**. Sendo assim, essa é a nossa razão.

$$\mathrm{r} = 0{,}5 \text{ km}$$

Se **na <u>primeira</u> vez ela percorreu 800 m** (0,8 km), então esse é nosso a_1.

$$\mathrm{a}_1 = 0{,}8 \text{ km}$$

Com a_1 e r, encontramos **qualquer termo da PA**.
A questão pergunta quanto Mariana caminhará na **8ª semana**, ou seja, a_8.

$$a_8 = a_1 + 7r$$

$$a_8 = 0{,}8 + 7 \cdot 0{,}5 \quad \rightarrow \quad a_8 = 0{,}8 + 3{,}5 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a_8 = 4,3 \text{ km}}}$$

Gabarito: LETRA C.

43. (INST. MAIS/IPREV SANTOS/2022) Em um estacionamento, o preço da primeira hora é de R$ 10,00, e o preço das horas seguintes, a partir da segunda, cai em progressão aritmética. Sabendo que o preço da segunda hora é de R$ 9,00 e o preço da oitava hora é de R$ 4,50, é correto afirmar que um motorista que deixar o veículo neste estacionamento por sete horas pagará

A) R$ 37,25.

B) R$ 42,75.

C) R$ 47,25.

D) R$ 52,75.

Comentários:

Essa questão tem uma pegadinha. A progressão aritmética começa **a partir da segunda hora**. Sendo assim, **o primeiro termo da PA é 9**.

$$a_1 = 9$$

Por sua vez, **o preço da oitava hora é o a_7**.

$$a_7 = 4{,}50$$

Com o a_1 e o a_7 conseguimos determinar **a razão da PA**.

$$a_7 = a_1 + 6r$$

$$4{,}50 = 9 + 6r \quad \rightarrow \quad 6r = -4{,}50 \quad \rightarrow \quad r = -\frac{4{,}50}{6} \quad \rightarrow \quad \boxed{r = -0{,}75}$$

Ou seja, a cada hora que passa, a partir da segunda, **o preço cai R$ 0,75**. Com isso, podemos encontrar quanto o motorista vai pagar por 7 horas.

1ª Hora	R$ 10,00
2ª Hora (a_1)	R$ 9,00
3ª Hora (a_2)	R$ 8,25
4ª Hora (a_3)	R$ 7,50
5ª Hora (a_4)	R$ 6,75
6ª Hora (a_5)	R$ 6,00
7ª Hora (a_6)	R$ 5,25
Total	R$ 52,75

Gabarito: LETRA D.

44. (AOCP/CM BAURU/2022) Assinale a alternativa que apresenta o valor de x para que $(x + 2, 5x, 4x^2)$ forme uma progressão aritmética decrescente.

A) 1

B) 1/4

C) 4

D) 1/2

E) 2

Comentários:

Sabemos que se três termos estão em progressão aritmética, então **o termo central é igual a média dos extremos**. Assim,

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Vamos substituir o termos da progressão aritmética do enunciado na fórmula acima.

$$5x = \frac{(x+2) + 4x^2}{2}$$

$$4x^2 + x + 2 = 10x \quad \rightarrow \quad 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

Observe que obtivemos uma **equação de segundo grau**. Para resolvê-la, vamos usar Bhaskara.

- Cálculo do Discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \Delta = 81 - 32 \quad \rightarrow \quad \Delta = 49$$

- Cálculo das Raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} \quad \rightarrow \quad x = \frac{9 \pm 7}{8}$$

$$x_1 = \frac{9+7}{8} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{16}{8} \quad \rightarrow \quad x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{9-7}{8} \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{2}{8} \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

Cuidado aqui, temos **dois valores para x**. Devemos verificar **qual dos dois torna a PA decrescente**.

i) Para $x = 2$

$$\boldsymbol{(x+2, 5x, 4x^2) = (2+2, 5 \cdot 2, 4 \cdot 2^2) = (4, 10, 16)}$$

ii) Para $x = \frac{1}{4}$

$$\boldsymbol{(x+2, 5x, 4x^2) = \left(2 + \frac{1}{4}, 5 \cdot \frac{1}{4}, 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)}$$

Observe que **a PA é decrescente quando $\boldsymbol{x = 1/4}$**. Sendo assim, é o que devemos marcar!

Gabarito: LETRA B.

QUESTÕES COMENTADAS

Sequências

CESPE

1. (CESPE/PRE. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item a seguir: Na sequência de Fibonacci - (F_m), em que $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \ldots$, os elementos podem ser obtidos a partir da fórmula:

$$F_m = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^m - \left(1-\sqrt{3}\right)^m}{2^m\sqrt{3}}$$

Comentários:

Essa é uma questão que sai muito rápido quando conhecemos **a sequência de Fibonacci**. Relembre-se da aula que os dois jeitos mais comum de representar essa sequência são:

$$F_n = \begin{cases} 1, se\ n = 1 \\ 1, se\ n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, se\ n \geq 3 \end{cases}$$

ou

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Certamente **o examinador tentou confundir o candidato trocando a $\sqrt{5}$ por $\sqrt{3}$** na fórmula explícita da sequência. No entanto, mesmo que você não saiba disso, você pode **testar a fórmula do enunciado e ver se bate com os números da sequência** que são fornecidos no enunciado:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \ldots$$

Pessoal, para **desenvolver os binômios** que aparecerão a seguir, utilizaremos as seguintes relações que aprendemos no estudo dos **produtos notáveis**:

1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
4. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Vamos aos cálculos:

- Para $m = 1$:

$$F_1 = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^1 - \left(1-\sqrt{3}\right)^1}{2^1\sqrt{3}} \Rightarrow F_1 = \frac{\cancel{1+}\sqrt{3} - \cancel{1+}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow F_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow F_1 = 1 \checkmark$$

- Para $\boldsymbol{m = 2}$:

$$F_2 = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2 - \left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2^2\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow$$

$$F_2 = \frac{\left(1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right) - \left(1^2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right)}{2^2\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad F_2 = \frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{F_2 = 1}$$

- Para $\boldsymbol{m = 3}$

$$F_3 = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^3 - \left(1-\sqrt{3}\right)^3}{2^3\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow$$

$$F_3 = \frac{\left(1^3 + 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^3\right) - \left(1^3 - 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^3\right)}{2^3\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow$$

$$F_3 = \frac{1 + \cancel{3}\sqrt{3} + 9 + \cancel{3}\sqrt{3} - 1 + \cancel{3}\sqrt{3} - 9 + \cancel{3}\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad F_3 = \frac{12\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{F_3 = 1,5}$$

Como encontramos que **o terceiro termo fornecido pela fórmula não bateu com terceiro termo dado na sequência do enunciado**, significa que os elementos da sequência não podem ser obtidos a partir da fórmula dada.

Gabarito: ERRADO

2. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) Para construir a sequência a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, de números positivos, foram dados a_1 e a_2, e, a partir de a_3, cada termo foi construído como sendo o produto de todos os termos anteriores. Se $a_5 < 1$, então, nessa sequência,

A) todos os termos são, necessariamente, menores que 1.

B) apenas dois termos são menores que 1.

C) apenas três termos são menores que 1.

D) apenas um termo pode ser maior que 1.

E) dois termos podem ser maiores que 1.

Comentários:

Primeira coisa a perceber: **todos os números da sequência são positivos**. Além disso, dados a_1 e a_2, **os demais termos são obtidos pelo produto de todos os anteriores**. Assim, podemos escrever:

$a_3 = a_1 \cdot a_2$

$a_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$

$a_5 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$

Vamos escrever cada um dos termos em função de a_1 e a_2.

$a_3 = a_1 \cdot a_2$
$a_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot (a_1 \cdot a_2) = (a_1 \cdot a_2)^2$
$a_5 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot (a_1 \cdot a_2) \cdot (a_1 \cdot a_2)^2 = (a_1 \cdot a_2)^4$

O enunciado diz que $a_5 < 1$, para isso acontecer temos que ter:

$$(a_1 \cdot a_2)^4 < 1 \quad \rightarrow \quad a_1 \cdot a_2 < 1$$

Logo, para que $a_1 \cdot a_2 < 1$, **pelo menos um dos dois deve ser menor do que 1**. Pode ser até que os dois sejam menores do que 1, mas **só precisamos de que um seja**. Além disso, observe que $\boldsymbol{a_3 = a_1 \cdot a_2 < 1}$. Se elevarmos ao quadrado, ficamos com $\boldsymbol{a_4 = (a_1 \cdot a_2)^2 < 1}$.

Nas condições do enunciado, obrigatoriamente temos que **a_3, a_4 *e* a_5 são menores do que 1**. Ademais, já sabemos que **a_1 ou a_2 é menor do que 1**. Com isso, **temos espaço apenas para um dos termos dados ser maior do que um.**

Gabarito: LETRA D

Texto para as próximas questões
A sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ é definida por $a_0 = 1, a_1 = 3$, e, para número cada inteiro $n \geq 1$, $a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-2}$ e $a_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n-1}$. Com relação a essa sequência, julgue os itens:

3. (CESPE/ABIN/2018) Existem infinitos valores inteiros de p e q tais que $a_p = a_q$.

Comentários:
O enunciado fornece os dois primeiros termos da sequência: $\boldsymbol{a_0 = 1}$ e $\boldsymbol{a_1 = 3}$. Usando esses dois primeiros termos, ele espera que seja possível obter os demais termos da sequência utilizando as leis de formação fornecida no enunciado:

$$(\mathbf{1}) \qquad \boldsymbol{a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-2}}$$
e
$$(\mathbf{2}) \qquad \boldsymbol{a_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n-1}}$$

Vamos **substituir o $\boldsymbol{a_{2n}}$** da relação (2) **usando a primeira expressão** (1).

$$\boldsymbol{a_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n-1}}$$

$$\boldsymbol{a_{2n+1} = (\cancel{a_{2n-1}} + a_{2n-2}) - \cancel{a_{2n-1}}}$$

$$\boldsymbol{a_{2n+1} = a_{2n-1} + a_{2n-2} - a_{2n-1}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a_{2n+1} = a_{2n-2}}}$$

Se dizermos que $p = 2n + 1$ e $q = 2n - 2$, então:

$$\boxed{\boldsymbol{a_p = a_q}}$$

Como **existem infinitos números inteiros $n \geq 1$**, então **vão existir infinitos pares p e q**, tal que a relação acima é satisfeita.

Gabarito: CERTO

4. (CESPE/ABIN/2018) A soma $a_{10} + a_9$ é superior a 20.

Comentários:
O enunciado fornece **os dois primeiros termos** da sequência: $\boldsymbol{a_0 = 1}$ e $\boldsymbol{a_1 = 3}$. Usando esses dois primeiros termos, ele espera que seja possível obter os demais termos da sequência utilizando as leis de formação fornecida no enunciado:

$$(1) \quad \boldsymbol{a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-2}}$$
e
$$(2) \quad \boldsymbol{a_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n-1}}$$

Observe que **a primeira lei é válida para os termos de ordem par**, ou seja, quando quisermos calcular os termos a_4, a_6, a_8, a_{10}, por exemplo, utilizaremos a relação (1). Como podemos chegar a essa conclusão? Basta substituir o n por 1, depois por 2, depois por 3 e olhar os valores que você obterá.

- Quando $n = 1$: $\boldsymbol{a_{2n} = a_{2\cdot 1} = a_2}$
- Quando $n = 2$: $\boldsymbol{a_{2n} = a_{2\cdot 2} = a_4}$
- Quando $n = 3$: $\boldsymbol{a_{2n} = a_{2\cdot 3} = a_6}$
- Quando $n = 4$: $\boldsymbol{a_{2n} = a_{2\cdot 1} = a_8}$

Logo, ao utilizar a relação (1) sempre obteremos termos de ordem par. **A segunda relação será para os termos de ordem ímpar**. Em outras palavras, essa lei geral de formação está nos dizendo o seguinte: Se a ordem do termo é par, **seu valor é igual à soma dos termos anteriores**. Se a ordem do termo é ímpar, **seu valor é igual a subtração dos dois anteriores**. Podemos determinar os termos usando isso.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	3	$a_0 + a_1$	$a_2 - a_1$	$a_3 + a_2$	$a_4 - a_3$	$a_5 + a_4$	$a_6 - a_5$	$a_7 + a_6$	$a_8 - a_7$	$a_9 + a_8$
		4	1	5	4	9	5	14	9	23

Somente **o a_{10} já é maior que 20**, nem precisaríamos somar com o a_9. Logo, o item está **CORRETO**.

Gabarito: CERTO

Texto para as próximas questões
A sequência infinita $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots$ é definida da seguinte maneira: para cada $j = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$A_j = 1$, se j for múltiplo de 3;
$A_j = 3$, se $j - 1$ for múltiplo de 3;
$A_j = 5$, se $j - 2$ for múltiplo de 3.

Dessa forma, por exemplo, $A_1 = 3$ e $A_2 = 5$. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

5. (CESPE/BNB/2018) O produto $A_{14} \times A_{30}$ é igual a 8.

Comentários:

Pessoal, percebam que **os termos dessa sequência só podem assumir três valores: 1, 3 ou 5**. Observe que **nenhuma multiplicação entre dois deles poderá dar 8**. Com essa análise, já poderíamos marcar o gabarito do item como errado. No entanto, vamos realizar a solução propriamente dita.

Queremos o produto $\boldsymbol{A_{14}} \times \boldsymbol{A_{30}}$. Para calcular esse produto, precisamos encontrar $\boldsymbol{A_{14}}$ **e** $\boldsymbol{A_{30}}$. A questão **definiu** a sequência do seguinte modo:

$\boldsymbol{A_j = 1}$**, se** $\boldsymbol{j}$ **for múltiplo de 3;**
$\boldsymbol{A_j = 3}$**, se** $\boldsymbol{j - 1}$ **for múltiplo de 3;**
$\boldsymbol{A_j = 5}$**, se** $\boldsymbol{j - 2}$ **for múltiplo de 3.**

Note que ***j* é a ordem do termo**. Quando a ordem do termo **for múltipla de 3**, então esse termo valerá **1**. É o caso do nosso A_{30}. Como 30 é um múltiplo de 3, então $\boldsymbol{A_{30} = 1}$**.**

Se j não for um múltiplo de 3, temos que olhar o número anterior a ele: $j - 1$. **Se $j - 1$ for múltiplo de 3**, então **o termo adotará o valor 3**. Se mesmo olhando o número anterior $j - 1$, ainda assim o número não for múltiplo de 3, devemos olhar o número $j - 2$. **Se $j - 2$ for múltiplo de 3, então A_j vale 5**.

Veja o caso do A_{14}. 14 (j) é múltiplo de 3? **não!** 13 ($j - 1$) é múltiplo de 3? **Também não**! E 12 ($j - 2$)? **12 é múltiplo de 3**! Logo $A_{14} = 5$.

$$A_{14} \times A_{30} = 1 \times 5 \qquad \Longrightarrow \qquad A_{14} \times A_{30} = 5$$

Gabarito: ERRADO

6. (CESPE/BNB/2018) A soma dos primeiros 60 termos dessa sequência é igual a 160.

Comentários:

Para resolver essa questão, **não precisamos listar todos os 60 termos**. Nós iremos listar alguns e procurar por algum **padrão de repetição**. A questão **definiu** a sequência do seguinte modo:

$\boldsymbol{A_j = 1}$**, se** $\boldsymbol{j}$ **for múltiplo de 3;**
$\boldsymbol{A_j = 3}$**, se** $\boldsymbol{j - 1}$ **for múltiplo de 3;**
$\boldsymbol{A_j = 5}$**, se** $\boldsymbol{j - 2}$ **for múltiplo de 3.**

Note que ***j* é a ordem do termo**. Quando a ordem do termo **for múltipla de 3**, então esse termo valerá **1**. Se j não for um múltiplo de 3, temos que olhar o número anterior a ele: $j - 1$. **Se $j - 1$ for múltiplo de 3**, então **o termo adotará o valor 3**. Se mesmo olhando o número anterior $j - 1$, ainda assim o número não for múltiplo de 3, devemos olhar o número $j - 2$. **Se $j - 2$ for múltiplo de 3, então A_j vale 5**. Usando essa regra e lembrando que **0 pode ser considerado um múltiplo de qualquer número inteiro**, então podemos montar a seguinte tabela:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯
A_j	3	5	1	3	5	1	3	5	1	⋯

Perceba que a cada 3 termos, o padrão 3-5-1 se repete. A soma desses termos é $3+5+1=9$. Logo, os termos vão somar 9 a cada 3 termos. Como queremos somar os 60 primeiros termos, do 1 ao 60 são 20 padrões desse, pois $60/3=20$. Se esse ciclo é repetido 20 vezes e cada ciclo tem seus termos somando 9, então:

$$20\times 9=180$$

O item afirma que a soma é 160 e, por isso, está errado.

Gabarito: ERRADO.

CESGRANRIO

7. (CESGRANRIO/BB/2012) Uma sequência numérica infinita $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots)$ é tal que a soma dos n termos iniciais é igual a $n^2 + 6n$. O quarto termo dessa sequência é igual a

A) 9
B) 13
C) 17
D) 32
E) 40

Comentários:

A sequência nos deu uma sequência infinita. A única informação que temos é que **a soma dos n termos iniciais é igual a $S_n = n^2 + 6n$**. Queremos saber o quarto termo da sequência, ou seja, e_4.

Para isso, quero que você perceba uma coisa primeiro:

$$S_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

Mas, $S_3 = e_1 + e_2 + e_3$

$$S_4 = (\boldsymbol{e_1 + e_2 + e_3}) + e_4$$

$$S_4 = \boldsymbol{S_3} + e_4$$

Reorganizando,

$$e_4 = S_4 - S_3$$

Observe que, naturalmente, **o quarto termo da sequência é a subtração entre S_4 e S_3**.

- Para $n = 3$:

$$S_3 = 3^2 + 6 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad S_3 = 9 + 18 \quad \rightarrow \quad S_3 = 27$$

- Para $n = 4$:

$$S_4 = 4^2 + 6 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad S_4 = 16 + 24 \quad \rightarrow \quad S_3 = 40$$

Logo,

$$e_4 = S_4 - S_3 \quad \rightarrow \quad e_4 = 40 - 27 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{e_4 = 13}$$

Gabarito: LETRA B.

8. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Uma sequência é formada de tal modo que o seu primeiro termo é 20 e seu vigésimo termo é 11. Além disso, a partir do terceiro termo, cada termo é igual à média aritmética de todos os termos que o antecedem. Determine o segundo termo dessa sequência.

A) 2
B) 11
C) 15,5
D) 20
E) 31

Comentários:

Temos uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{19}, a_{20})$. O enunciado falou que $\boldsymbol{a_1 = 20}$ e $\boldsymbol{a_{20} = 11}$.

Além disso, nos disse que, **a partir do terceiro termo**, cada termo é igual à média aritmética de todos os termos que **o antecedem**. Assim, por exemplo,

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad \rightarrow \quad a_1 + a_2 = 2a_3 \qquad (1)$$

Ademais,

$$a_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2)

$$a_4 = \frac{2a_3 + a_3}{3} \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{3a_3}{3} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = a_3} \quad (3)$$

Opa, encontramos que $a_4 = a_3$. Vamos estudar mais essa sequência.

$$a_5 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$$

Usando (1) e (3):

$$a_5 = \frac{2a_3 + a_3 + a_3}{4} \quad \rightarrow \quad a_5 = \frac{4a_3}{4} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_5 = a_3}$$

Assim, $a_3 = a_4 = a_5$.

Minha intenção ao fazer essas contas é mostrar para vocês que, a sequência que o enunciado construiu é tal que $\boldsymbol{a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = \cdots = a_{19} = a_{20}}$. Voltando na expressão (1), podemos reescrevê-la.

$$a_2 = 2a_3 - a_1 \quad \rightarrow \quad a_2 = 2a_{20} - a_1 \quad \rightarrow \quad a_2 = 2 \cdot 11 - 20 \quad \rightarrow \quad a_2 = 22 - 20 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = 2}$$

Gabarito: LETRA A.

9. (CESGRANRIO/BR/2010) Determinado sistema especialista apresenta a sequência lógica a seguir.

$$\boldsymbol{3, 12, 33, 72, 135, 228}$$

Qual o próximo número dessa sequência?
A) 331
B) 357
C) 418
D) 421
E) 816

Comentários:
O enunciado nos forneceu uma sequência que precisamos descobrir o padrão.

$$\boldsymbol{3, 12, 33, 72, 135, 228}$$

$$+9 \quad +21 \quad +39 \quad +63 \quad +93$$

$$+12 \quad +18 \quad +24 \quad +30$$

Perceba que os "**incrementos dos incrementos**" são múltiplos de 6, começando pelo 12. Assim, o próximo incremento aumentará de 36.

$$\boldsymbol{3, 12, 33, 72, 135, 228, X}$$

$$+9 \quad +21 \quad +39 \quad +63 \quad +93 \quad 93 + 36 = \boldsymbol{+129}$$

$$+12 \quad +18 \quad +24 \quad +30 \quad +36$$

Logo, o próximo termo será:

$$X = 228 + 129 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{X = 357}$$

Gabarito: LETRA B.

10. (CESGRANRIO/IBGE/2006) Na sequência (1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ...) o número que sucede 22 é:
A) 28
B) 29
C) 30
D) 31
E) 32

Comentários:
Temos que descobrir o padrão da sequência fornecida.

$$\mathbf{1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, X}$$

$$+1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +5 \quad +6 \quad +7$$

Veja que sempre vamos somando **uma unidade a mais**. Assim, o número que sucede o 22 é:

$$X = 22 + 7 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{X = 29}$$

Gabarito: LETRA B.

FCC

11. (FCC/SABESP/2019) Em 1655, o matemático John Wallis desenvolveu uma série infinita para o cálculo de $\frac{\pi}{2}$, conforme mostra a fórmula abaixo:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \ldots$$

Com os termos desse produto infinito ordenados exatamente como na fórmula, a fração na 50ª posição é:

A) $\frac{51}{53}$

B) $\frac{50}{49}$

C) $\frac{26}{25}$

D) $\frac{26}{27}$

E) $\frac{50}{51}$

Comentários:
Inicialmente, note que no **numerador** da fração (parte de cima) **há apenas números pares**. No **denominador** (parte de baixo), **há apenas números ímpares**. Só observando isso, poderíamos eliminar a letra A, pois traz um número ímpar tanto no numerador como no denominador.

Veja que cada número par aparece 2 vezes e pula para o próximo. De modo análogo, no denominador da expressão, cada número ímpar aparece 2 vezes e pula para o próximo, **com exceção do 1**, que aparece uma única vez. Observe um esquema para entender melhor o que está sendo pedido no enunciado:

$$\frac{\pi}{2}=\underbrace{\frac{2}{1}}_{1º}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}}_{2º}\cdot\underbrace{\frac{4}{3}}_{3º}\cdot\underbrace{\frac{4}{5}}_{4º}\cdot\underbrace{\frac{6}{5}}_{5º}\cdot\underbrace{\frac{6}{7}}_{6º}\cdot\underbrace{\frac{8}{7}}_{7º}\cdot\underbrace{\frac{8}{9}}_{8º}\cdot\underbrace{\frac{10}{9}}_{9º}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{?}{?}}_{48º}\cdot\underbrace{\frac{?}{?}}_{49º}\cdot\underbrace{\frac{?}{?}}_{50º}\cdot\ldots$$

Queremos o **50º termo** dessa sequência de frações. Podemos observar que os números que aparecem na fração sempre **são próximos ou iguais à ordem do termo**. Como assim? No primeiro termo (1º) temos 2 no numerador e 1 no denominador. No segundo termo (2º), temos 2 no numerador e 3 no denominador.

Pensando assim, no 50º termo teremos **números próximos a 50** tanto no numerador como no denominador. Nessa linha de raciocínio, podemos eliminar mais 2 alternativas: as letras C e D, pois trazem números distantes de 50. Como resolver agora entre a letra B e a letra E? Note que os termos de ordem par (isto é, 2º, 4º, 6º, ...) **possuem o numerador igual a ordem do termo**:

$$\frac{\pi}{2}=\underbrace{\frac{2}{1}}_{1º}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}}_{2º}\cdot\underbrace{\frac{4}{3}}_{3º}\cdot\underbrace{\frac{4}{5}}_{4º}\cdot\underbrace{\frac{6}{5}}_{5º}\cdot\underbrace{\frac{6}{7}}_{6º}\cdot\underbrace{\frac{8}{7}}_{7º}\cdot\underbrace{\frac{8}{9}}_{8º}\cdot\underbrace{\frac{10}{9}}_{9º}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{48}{?}}_{48º}\cdot\underbrace{\frac{?}{?}}_{49º}\cdot\underbrace{\frac{50}{?}}_{50º}\cdot\ldots$$

Portanto, como 50 é um número par, então **o numerador do termo dessa ordem será o próprio 50**, conforme esquematizado acima. E o denominador? Note que o denominador dos termos de ordem par **são sempre uma unidade a mais que a ordem**! Logo, o denominador do 50º termo será 51!

$$\frac{\pi}{2}=\underbrace{\frac{2}{1}}_{1º}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}}_{2º}\cdot\underbrace{\frac{4}{3}}_{3º}\cdot\underbrace{\frac{4}{5}}_{4º}\cdot\underbrace{\frac{6}{5}}_{5º}\cdot\underbrace{\frac{6}{7}}_{6º}\cdot\underbrace{\frac{8}{7}}_{7º}\cdot\underbrace{\frac{8}{9}}_{8º}\cdot\underbrace{\frac{10}{9}}_{9º}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{48}{49}}_{48º}\cdot\underbrace{\frac{50}{49}}_{49º}\cdot\underbrace{\frac{50}{51}}_{50º}\cdot\ldots$$

Gabarito: Letra **E**.

12. (FCC/TJ-MA/2019) Observando o padrão de formação da sequência infinita (2, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 6, ...), nota-se que os termos iguais a 1 aparecem nas posições 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, e assim por diante. A 300ª vez em que o termo igual a 1 aparece nessa sequência está na posição:

A) 342.
B) 330.
C) 336.
D) 324.
E) 348.

Comentários:

A sequência do enunciado é formada da seguinte maneira: estamos **intercalando** quantidades de números "1" **entre dois números consecutivos** diferentes de "1". Entre os números "2" e "3" existe um único "1". Entre os números "3" e "4" existem dois números "1". Acompanhe na figura:

$$2, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 6, \ldots$$

A questão pede **a posição** em que o número "1" aparecerá pela 300ª vez.

$$\overset{a_1}{2},\ \underset{\text{1ª vez}}{\overset{a_2}{1}},\ \overset{a_3}{3},\ \underset{\text{2ª vez}}{\overset{a_4}{1}},\ \underset{\text{3ª vez}}{\overset{a_5}{1}},\ \overset{a_6}{4},\ \underset{\text{4ª vez}}{\overset{a_7}{1}},\ \underset{\text{5ª vez}}{\overset{a_8}{1}},\ \underset{\text{6ª vez}}{\overset{a_9}{1}},\ \overset{a_{10}}{5},\ \ldots,\underset{\text{299ª vez}}{\overset{a_{n-1}}{1}},\underset{\text{300ª vez}}{\overset{a_n}{1}},\ \ldots$$

Em outras palavras, queremos descobrir **qual o valor de n na representação acima**. Nesse intuito, podemos dividir nossa sequência nos seguintes blocos:

$$\underbrace{2, 1,}_{\text{1º BLOCO}}\ \underbrace{3, 1, 1,}_{\text{2º BLOCO}}\ \underbrace{4, 1, 1, 1,}_{\text{3º BLOCO}}\ \underbrace{5, 1, 1, 1, 1,}_{\text{4º BLOCO}}\ 6, \ldots$$

Uma coisa muito importante que devemos notar é que **a ordem do bloco é exatamente a quantidade de números "1" que ele possui**. Por exemplo: **no primeiro bloco temos apenas um único número "1"**. No segundo bloco, temos 2 números "1" e por aí vai. Perceba que a quantidade de números "1" aumenta de uma unidade a cada bloco. Podemos separamos essas quantidades em uma nova sequência:

$$B = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots, N)$$

O primeiro elemento representa a quantidade de números "1" no primeiro bloco, o segundo elemento representa a quantidade de números "1" no segundo bloco e assim sucessivamente. Com isso, percebemos que **essa nova sequência formada é uma progressão aritmética de razão 1**. Vamos somar os termos dessa P.A. para descobrir em qual bloco aparecerá o "1" pela 300ª vez.

$$S = \frac{(b_1 + b_N) \cdot N}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1 + N) \cdot N}{2} = 300 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N^2 + N - 600 = 0}$$

Resolvendo a equação de segundo grau acima, encontramos como raízes $\boldsymbol{N' = -25}$ e $\boldsymbol{N'' = 24}$. Como sabemos que N é um número natural, pois é com ele que estamos contando os termos, só podemos ter que $\boldsymbol{N = 24}$. Acabamos de descobrir o bloco em que está o 300º número "1": **o 24º bloco**. Ao chegarmos no 24º bloco, terão aparecido **24 números diferente de "1"**, **que iniciam cada bloco**. Além deles, terão sido **300 números "1" que apareceram**. Logo, o 300º número "1" aparecerá na posição:

$$300 + 24 = \boldsymbol{324}.$$

Gabarito: Letra **D.**

13. (FCC/METRO-SP/2019) Dada a sequência (101, 2002, 30003, 400004, 5000005, ...), seu 10º termo é 10000000000010. O maior termo dessa sequência, que é menor do que $\boldsymbol{10^{100}}$, é o

A) 95º

B) 99º

C) 97º

D) 98º
E) 96º

Comentários:
Antes de iniciarmos a questão, lembre-se que quando elevamos o número 10 a qualquer potência, o número de zeros que aparecem após o número 1 é exatamente o valor daquela potência. Acompanhe:

$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 100$$
$$10^3 = 1000$$

Se queremos saber o maior termo que é menor do que 10^{100}, estamos procurando o termo que é menor do que 1 seguido de 100 zeros. Para chegarmos lá, vamos primeiro entender como a sequência do enunciado está sendo formada

101, 2002, 30003, 400004, 5000005, ..., 1000000000010, ...

101	2002	30003	400004	5000005	1000000000010
1° termo: 1 zero no centro	2° termo: 2 zeros no centro	3° termo: 3 zeros no centro	4° termo: 4 zeros no centro	5° termo: 5 zeros no centro	10° termo: 10 zeros no centro

Ao pensar em 10^{100}, é natural imaginar também que 100º termo dessa sequência vai ser algum número próximo disso, pois conterá 100 zeros centrais. Concorda?

$$100° \text{ termo: } 10\underbrace{00000\ldots00000}_{\text{100 zeros centrais}}100$$

No entanto, para escrevermos esse número numa potência de 10, devemos considerar os demais zeros não-centrais.

$$100° \text{ termo: } 1\underbrace{00}_{\text{+2 zeros}}\underbrace{00000\ldots00000}_{\text{100 zeros centrais}}\underbrace{100}_{\text{+3 "zeros"}}$$

Perceba que temos 105 "zeros". Coloco as aspas para indicar que sei que existe um número "1" na casa das centenas, mas mesmo assim podemos contar os algarismos para esboçar a potência de 10. Logo, por ter 105 algarismos após o número 1, o 100º termo pode ser escrito da seguinte forma:

$$1000000\ldots00000\mathbf{100} = 10^{\mathbf{105}} + \mathbf{100}$$

Observe que temos que somar 100 justamente para contabilizar aquele "1" que está na casa das centenas. Logo, o 100º termo é muito maior que 10^{100}. Esse procedimento com o 100º termo foi usado apenas para demonstrar o raciocínio que utilizaremos na análise das alternativas. Dessa vez, não estaremos contando o número de zeros, mas sim o número de algarismos após o primeiro número.

A) 95º

$$95° \text{ termo: } 9\underbrace{5}_{\text{+1 algarismo}}\underbrace{00000\ldots0000}_{\text{95 algarismos}}\underbrace{95}_{\text{+2 algarismos}}$$

No 95º termo, são 95 algarismos centrais e outros 3 que estão nas laterais (sem contar o primeiro). Logo, temos 98 algarismos após o primeiro número. Podemos escrever esse termo da seguinte forma:

$$\mathbf{95}00000\ldots00000\mathbf{95} = 9{,}5\cdot 10^{\mathbf{98}} + \mathbf{95}$$

Temos um número menor que 10^{100}, concorda? No entanto, ainda não sabemos se ele é o maior termo da sequência que é menor que 10^{100}. Vamos continuar.

B) 99º

$$99^\circ\ \text{termo: } 9\underbrace{9}_{+1\text{ algarismo}}\underbrace{00000\ \ldots\ 0000}_{99\text{ algarismos}}\underbrace{99}_{+2\text{ algarismos}}$$

No 99º termo, são 99 algarismos centrais e outros 3 que estão nas laterais (sem contar o primeiro). Logo, temos 102 algarismos após o primeiro número. Podemos escrever esse termo da seguinte forma:

$$\mathbf{99}00000\ldots00000\mathbf{99} = 9{,}9\cdot 10^{\mathbf{102}} + \mathbf{99}$$

Esse número é claramente maior que 10^{100}.

C) 97º

$$97^\circ\ \text{termo: } 9\underbrace{7}_{+1\text{ algarismo}}\underbrace{00000\ \ldots\ 0000}_{97\text{ algarismos}}\underbrace{97}_{+2\text{ algarismos}}$$

No 97º termo, são 97 algarismos centrais e outros 3 que estão nas laterais (sem contar o primeiro). Logo, temos 100 algarismos após o primeiro número. Podemos escrever esse termo da seguinte forma:

$$\mathbf{97}00000\ldots00000\mathbf{97} = 9{,}7\cdot 10^{\mathbf{100}} + \mathbf{97}$$

Esse número é próximo de 10^{100}, mas ainda é maior!

D) 98º

$$98^\circ\ \text{termo: } 9\underbrace{8}_{+1\text{ algarismo}}\underbrace{00000\ \ldots\ 0000}_{98\text{ algarismos}}\underbrace{98}_{+2\text{ algarismos}}$$

No 98º termo, são 98 algarismos centrais e outros 3 que estão nas laterais (sem contar o primeiro). Logo, temos 101 algarismos após o primeiro número. Podemos escrever esse termo da seguinte forma:

$$\mathbf{98}00000\ldots00000\mathbf{98} = 9{,}8\cdot 10^{\mathbf{101}} + \mathbf{98}$$

Esse número é claramente maior que 10^{100}.

E) 96º

$$96^\circ\ \text{termo: } 9\underbrace{6}_{+1\text{ algarismo}}\underbrace{00000\ \ldots\ 0000}_{96\text{ algarismos}}\underbrace{96}_{+2\text{ algarismos}}$$

No 96º termo, são 96 algarismos centrais e outros 3 que estão nas laterais (sem contar o primeiro). Logo, temos 99 algarismos após o primeiro número. Podemos escrever esse termo da seguinte forma:

$$9600000\ldots0000096 = 9{,}6\cdot10^{99} + \mathbf{96}$$

Note que esse número é menor que 10^{100} e maior do que o que obtivemos na letra A! É, portanto, o maior número da nossa sequência que é menor do que 10^{100}.

Gabarito: Letra **E.**

14. (FCC/CM DE FORTALEZA/2019) Considere a sequência numérica em que o primeiro termo é 1, o segundo termo é um inteiro positivo k, e os demais termos são definidos como a soma de todos os termos anteriores, isto é, $a_n = a_{n-1} + \ldots + a_1$. Se o 13º termo é 6144, o valor de k é:

A) 8
B) 6
C) 3
D) 4
E) 5

Comentários:

O enunciado informa que $a_1 = 1$ e $a_2 = k$. A partir do $\boldsymbol{a_3}$, **os termos são a soma de todos os anteriores**:

$$a_3 = a_1 + a_2 \quad\Rightarrow\quad a_3 = k + 1$$
$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3 \quad\Rightarrow\quad a_4 = 1 + k + (k+1) \quad\Rightarrow\quad a_4 = 2\cdot(k+1)$$

Vamos calcular o a_5:

$$a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

Mas note que $\boldsymbol{a_4 = a_1 + a_2 + a_3}$:

$$a_5 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{a_4} + a_4 \qquad\Rightarrow\qquad a_5 = \boldsymbol{a_4} + a_4 = 2\cdot a_4$$

E para o a_6?

$$a_6 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{a_5} + a_5 \qquad\Rightarrow\qquad a_6 = \boldsymbol{a_5} + a_5 = 2\cdot a_5$$

Percebam, portanto, **que a partir do $\boldsymbol{a_4}$,** quando dizemos que o termo seguinte é a soma de todos os anteriores, estamos falando, **com outros palavras**, que **o termo seguinte será o dobro do anterior**, concorda?

Queremos determinar k. Para isso, é necessário utilizar **o valor de $\boldsymbol{a_{13}}$** informado pelo enunciado. Devemos tentar, portanto, **escrever o $\boldsymbol{a_{13}}$ como uma função de k**. Mas como calculamos **o valor de $\boldsymbol{a_{13}}$?** Lembre-se que **sempre podemos escrever um termo como o dobro do anterior**, podemos ir voltando os termos **um por um** até chegar o a_3, pois conhecemos seu valor em função de k. Acompanhe:

$$a_{13} = 2\cdot a_{12} \quad\Rightarrow\quad a_{13} = 2\cdot(2\cdot a_{11}) \quad\Rightarrow\quad a_{13} = 2\cdot2\cdot(2\cdot a_{10}) \quad\Rightarrow\quad a_{13} = 2\cdot2\cdot2\cdot(2\cdot a_9) \quad\Rightarrow$$

$$a_{13} = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot(2\cdot a_8) \quad\Rightarrow\quad a_{13} = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot(2\cdot a_7) \quad\Rightarrow\quad a_{13} = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot(2\cdot a_6) \quad\Rightarrow$$

$$a_{13} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot a_5) \quad \Rightarrow \quad a_{13} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot a_4) \quad \Rightarrow$$

$$a_{13} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{o\ número\ 2\ aparece\ 10\ vezes} \cdot a_3 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a_{13} = 2^{10} \cdot a_3}$$

Do enunciado $\boldsymbol{a_{13} = 6144}$ e sabemos que $\boldsymbol{a_3 = k + 1}$. Logo, substituindo:

$$6144 = 2^{10} \cdot (k + 1)$$

$$6144 = 1024 \cdot (k + 1)$$

$$(k + 1) = \frac{6144}{1024} \quad \Longrightarrow \quad k + 1 = 6 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k = 5}$$

Gabarito: Letra **E**.

15. (FCC/TRF-3/2019) Serão confeccionados números em cobre para numerar as portas dos apartamentos de um condomínio de 5 torres com 8 andares cada uma e com quatro apartamentos por andar. A numeração seguirá a seguinte regra: os apartamentos do andar k terão números k1, k2, k3 e k4, isto é, no primeiro andar de cada torre estarão os apartamentos 11, 12, 13 e 14. A quantidade de algarismos 3 que será confeccionada é igual a

A) 30.

B) 12.

C) 100.

D) 80.

E) 60.

Comentários:

Serão construídas **5 torres que possuirão 8 andares cada uma**. Com exceção do terceiro andar, cada andar da torre precisará **apenas de um algarismo 3**: 1**3**, 2**3**, 4**3**, 5**3**, 6**3**, 7**3**, 8**3**. Logo, **sem contabilizar o terceiro andar, serão 7 peças confeccionadas por torre.**

No **terceiro andar** teremos os apartamentos: **3**1, **3**2, **33**, **3**4. Só nesse andar, precisaremos de mais **cinco algarismos 3**. Logo, no total, teremos $7 + 5 = \mathbf{12}$ **algarismos 3 por torre**. Como são 5 torres, basta multiplicar esse resultado por 5.

$$\mathbf{12 \times 5 = 60}$$

Gabarito: Letra **E.**

FGV

16. (FGV/ALERO/2018) Uma sequência de números naturais é tal que dado um termo x qualquer dessa sequência, se ele é par, então o próximo termo será x/2; se ele é ímpar, então o próximo termo será x+5. Se o primeiro termo dessa sequência é 6, então o décimo termo será

A) 2.

B) 3.

C) 4.

D) 6.
E) 8.

Comentários:
Opa! Beleza, **se o termo é par, o próximo é metade dele**. Por sua vez, **se o termo for ímpar, o próximo será ele somado com 5**. É como se fosse um jogo, moçada! Temos só que **seguir as regras**.

Primeiro Termo = 6 (foi dado pelo enunciado).

Com o primeiro termo é par, então o segundo termo será metade dele (x/2).

Segundo Termo = 3.

Opa, aqui temos um termo ímpar! Para o próximo termo, teremos que somar 5.

Terceiro Termo = 3 + 5 = 8.

Mais uma vez, um termo par. O próximo termo será metade dele.

Quarto Termo = 4.

Continuamos com um termo par. O próximo também será metade dele.

Quinto Termo = 2.

Ainda com termo par. O próximo será metade dele.

Sexto Termo = 1.

Agora chegamos a um termo ímpar. Nessas condições, o próximo termo é obtido somando 5.

Sétimo Termo = 1 + 5 = 6.

Termo par. O próximo será metade dele.

Oitavo Termo = 3.

Termo Ímpar. Vamos somar 5.

Nono Termo = 3 + 5 = 8.

Por fim, temos um termo par. Logo, o próximo será metade dele.

Décimo Termo = 4.

O enunciado pediu o décimo termo. Podemos marcar a alternativa "C".
Gabarito: LETRA C.

17. (FGV/ALERO/2018) Em uma sequência de números, para quaisquer três termos consecutivos x, y, z vale a relação z = 3y – x. Se o 18º termo dessa sequência é 2 e o 20º termo é 10, então o 14º termo é

A) 2.

B) 4.

C) 10.

D) 16.

E) 26.

Comentários:

Três termos consecutivos, $x, y \ e \ z$, obedecem a relação $\boldsymbol{z = 3y - x}$. Note que o enunciado deu o 18ª termo e o 20ª termo.

$$\underbrace{2}_{(x)\ 18^{\text{o}}} \qquad \underbrace{y}_{19^{\text{o}}} \qquad \underbrace{10}_{(z)\ 20^{\text{o}}}$$

Observe que esses três termos **devem obedecer a relação do enunciado** em que $x = 2$ e $z = 10$. Com isso, podemos encontrar "y".

$$10 = 3y - 2 \quad \rightarrow \quad 3y = 12 \quad \rightarrow \quad y = 4$$

Com o 19º termo determinado, **podemos ir <u>voltando</u> até encontrarmos o 14º termo**.

- Encontrando o <u>17º termo</u>.

$$\underbrace{x}_{17^{\text{o}}} \qquad \underbrace{2}_{18^{\text{o}}} \qquad \underbrace{4}_{19^{\text{o}}}$$

$$4 = 3 \cdot 2 - x \quad \rightarrow \quad -x = 4 - 6 \quad \rightarrow \quad -x = -2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 2}$$

- Encontrando o <u>16º termo</u>.

$$\underbrace{x}_{16^{\text{o}}} \qquad \underbrace{2}_{17^{\text{o}}} \qquad \underbrace{2}_{18^{\text{o}}}$$

$$2 = 3 \cdot 2 - x \quad \rightarrow \quad -x = 2 - 6 \quad \rightarrow \quad -x = -4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 4}$$

- Encontrando o <u>15º termo</u>.

$$\underbrace{x}_{15^{\text{o}}} \qquad \underbrace{4}_{16^{\text{o}}} \qquad \underbrace{2}_{17^{\text{o}}}$$

$$2 = 3 \cdot 4 - x \quad \rightarrow \quad -x = 2 - 12 \quad \rightarrow \quad -x = -10 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 10}$$

- Encontrando o **<u>14º termo</u>**.

$$\underbrace{x}_{14º} \qquad \underbrace{10}_{15º} \qquad \underbrace{4}_{16º}$$

$$4 = 3 \cdot 10 - x \quad \rightarrow \quad -x = 4 - 30 \quad \rightarrow \quad -x = -26 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 26}$$

Logo, **o 14º termo dessa sequência é o 26**.

Gabarito: LETRA E.

18. (FGV/COMPESA/2018) Considere uma sequência de números na qual cada número, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores. Se o quinto número dessa sequência é 88 e o sétimo é 229, então o segundo número é

A) 17.
B) 18.
C) 19.
D) 20.
E) 21.

Comentários:

Opa... uma sequência de números na qual **cada número, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores**... P*arece muito com a sequência de Fibonacci, né?* Caso os dois primeiros termos fossem iguais a um, aí sim. No entanto, note que, pelas alternativas, **o segundo termo não é igual a 1**. Tá, mas então como vamos fazer para determinar o segundo termo (a_2)? Veja só!

O enunciado nos forneceu o quinto (a_5) e o sétimo (a_7) termo dessa sequência. Ademais, lembre-se que **um termo é sempre igual à soma dos dois termos anteriores**. Dessa forma, podemos escrever que:

$$a_7 = a_6 + a_5$$

Substituindo $a_7 = 229$ e $a_5 = 88$, temos que:

$$229 = a_6 + 88 \quad \rightarrow \quad a_6 = 229 - 88 \quad \rightarrow \quad a_6 = 141$$

Podemos ir voltando na sequência até encontrarmos o a_2! Olha só:

$$a_6 = a_5 + a_4 \quad \rightarrow \quad 141 = 88 + a_4 \quad \rightarrow \quad a_4 = 141 - 88 \quad \rightarrow \quad a_4 = 53$$

$$a_5 = a_4 + a_3 \quad \rightarrow \quad 88 = 53 + a_3 \quad \rightarrow \quad a_3 = 88 - 53 \quad \rightarrow \quad a_3 = 35$$

Por fim, vamos chegar ao a_2:

$$a_4 = a_3 + a_2 \quad \rightarrow \quad 53 = 35 + a_2 \quad \rightarrow \quad a_2 = 53 - 35 \quad \rightarrow \quad a_2 = 18$$

Logo, **o segundo termo da sequência do enunciado será o 18**.

Gabarito: LETRA B.

19. (FGV/TJ-RO/2015) Em uma sequência numérica, cada termo a partir do terceiro é a soma dos dois termos anteriores. O 7º e o 9º termos são, respectivamente, 29 e 76. O 2º termo dessa sequência é:
A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Comentários:
Vocês devem ter percebido que a FGV gosta dessas questões em que devemos ir voltando na sequência. Note que a descrição do enunciado parece bastante com uma sequência de Fibonacci, mas nada podemos concluir pois não sabemos quais são os dois primeiros termos.

O enunciado nos forneceu o sétimo (a_7) e o nono (a_9) termo dessa sequência. Ademais, lembre-se que **um termo é sempre igual à soma dos dois termos anteriores**. Dessa forma, podemos escrever que:

$$a_9 = a_8 + a_7$$

Substituindo $a_7 = 29$ e $a_9 = 76$, temos que:

$$76 = a_8 + 29 \quad \rightarrow \quad a_8 = 76 - 29 \quad \rightarrow \quad a_8 = 47$$

Vamos voltar na sequência até encontrarmos o a_2! Olha só:

$$a_8 = a_7 + a_6 \quad \rightarrow \quad 47 = 29 + a_6 \quad \rightarrow \quad a_6 = 47 - 29 \quad \rightarrow \quad a_6 = 18$$

$$a_7 = a_6 + a_5 \quad \rightarrow \quad 29 = 18 + a_5 \quad \rightarrow \quad a_5 = 29 - 18 \quad \rightarrow \quad a_5 = 11$$

$$a_6 = a_5 + a_4 \quad \rightarrow \quad 18 = 11 + a_4 \quad \rightarrow \quad a_4 = 18 - 11 \quad \rightarrow \quad a_4 = 7$$

$$a_5 = a_4 + a_3 \quad \rightarrow \quad 11 = 7 + a_3 \quad \rightarrow \quad a_3 = 11 - 7 \quad \rightarrow \quad a_3 = 4$$

Por fim, vamos chegar ao a_2:

$$a_4 = a_3 + a_2 \quad \rightarrow \quad 7 = 4 + a_2 \quad \rightarrow \quad a_2 = 7 - 4 \quad \rightarrow \quad a_2 = 3$$

Logo, **o segundo termo da sequência do enunciado será o 3**.

Gabarito: LETRA C.

20. (FGV/PREF. NITEROI/2015) A sequência 2, 2, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 2, 2, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 2, ... mantém o padrão apresentado indefinidamente. A soma dos 2015 primeiros termos dessa sequência é:
A) 7560.
B) 7555.
C) 7550
D) 7545.
E) 7540.

Comentários:
Perceba que o padrão "**2, 2, 1, 5, 5, 5, 5, 5"** fica se repetindo. Assim, para descobrir qual **a soma dos 2015 primeiros termos,** vai nos ajudar saber quantas vezes "2, 2, 1, 5, 5, 5, 5, 5" aparece. Isso é fundamental, pois já sabemos a soma desses termos que se repetem:

$$2 + 2 + 1 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$$

Ademais, essa parte possui **oito números**, para descobrir quantas vezes ela vai se repetir até o 2015º termo, **basta dividirmos 2015 por 8**.

$$\begin{array}{r|l} 2015 & 8 \\ \cline{2-2} -\underline{16} & 251 \\ 41 & \\ -\underline{40} & \\ 15 & \\ -\underline{8} & \\ 7 & \end{array}$$

Essa divisão nos indica que "2, 2, 1, 5, 5, 5, 5, 5" aparece **251 vezes por completo**. Além disso, **o 2015º termo será o 7º termo do padrão**, isto é, o número 5, "2, 2, 1, 5, 5, 5, **5**, 5". Para ficar mais fácil visualizar, acompanhe:

$$\underbrace{2,2,1,5,5,5,5,5,}_{1^{a}}\underbrace{2,2,1,5,5,5,5,5}_{2^{a}}\ldots\underbrace{2,2,1,5,5,5,5,5}_{251^{a}}\ 2,2,1,5,5,5,\quad \underbrace{5}_{2015^{o}\ termo}$$

Sendo assim, <u>**a soma**</u> de todos esses números pode ser realizada da seguinte forma:

$$S = 30 \cdot 251 + 2 + 2 + 1 + 5 + 5 + 5 + 5$$

$$S = 7530 + 25 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S = 7555}$$

Gabarito: LETRA B.

VUNESP

21. (VUNESP/ALESP/2022) A sequência de números a seguir foi construída com um padrão lógico e é uma sequência ilimitada:

$$\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 40, \ldots}$$

A partir dessas informações, identifique o termo da posição 74 e o termo da posição 95. A soma destes dois termos é igual a

A) 244.
B) 277.
C) 255.
D) 266.
E) 233.

Comentários:
Pessoal, um jeito legal de fazer essa questão é organizarmos esses termos em uma tabela.

a_1	1		a_7	11		a_{13}	21		a_{19}	31
a_2	2		a_8	12		a_{14}	22		a_{20}	32
a_3	3		a_9	13		a_{15}	23		a_{21}	33
a_4	4		a_{10}	14		a_{16}	24		a_{22}	34
a_5	5		a_{11}	15		a_{17}	25		a_{23}	35
a_6	10		a_{12}	20		a_{18}	30		a_{24}	40

Perceba que o padrão é o seguinte**: Aumenta 1. Aumenta 1. Aumenta 1. Aumenta 1. Aumenta 5. Repete**.

Note que os termos **cuja ordem é um múltiplo de 6** acabam ficando com números "bons" de trabalhar.

$$a_6 = 10 \qquad a_{12} = 20 \qquad a_{18} = 30 \qquad a_{24} = 40$$

Assim, podemos nos balizar por esse fato para encontrar os termos de posição 74 e 95. Para isso, vamos **considerar uma sequência separada**, formada apenas pelos termos **cuja ordem é um múltiplo de 6**.

a_6	10		a_{30}	50		a_{54}	90		a_{78}	130
a_{12}	20		a_{36}	60		a_{60}	100		a_{84}	140
a_{18}	30		a_{42}	70		a_{66}	110		a_{90}	150
a_{24}	40		a_{48}	80		a_{72}	120		a_{96}	160

Para determinarmos o a_{74}, **podemos usar o a_{72}**.

$$a_{73} = a_{72} + 1 \quad \rightarrow \quad a_{73} = 120 + 1 \quad \rightarrow \quad a_{73} = 121$$

$$a_{74} = a_{73} + 1 \quad \rightarrow \quad a_{74} = 121 + 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_{74} = 122}$$

Podemos prosseguir da mesma forma para encontrarmos o a_{95}. Para isso, **vamos usar o a_{96}**.

$$a_{95} = a_{96} - 5 \quad \rightarrow \quad a_{95} = 160 - 5 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_{95} = 155}$$

O enunciado pede a soma $a_{74} + a_{95}$.

$$a_{74} + a_{95} = 122 + 155 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_{74} + a_{95} = 277}$$

Gabarito: LETRA B.

22. (VUNESP/PC-SP/2022) A sequência a seguir foi criada com um padrão lógico e é ilimitada.

$$1, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 31, 33, 35, 37, 40, 41, \ldots$$

Identifique os seguintes números que pertencem a esta sequência:

- O número que antecede o 90.
- O número que é o sucessor do 127.
- O número que antecede o 503.

A soma desses três números identificados apresenta como algarismo da unidade, o algarismo
A) 6.
B) 8.
C) 9.
D) 3.
E) 1.

Comentários:
1º) O número que antecede o 90.
Observe o seguinte:

O número que antecede o 10 é o 7.
O número que antecede o 20 é o 17.
O número que antecede o 30 é o 27.

Nessa lógica, **o número que antecede o 90 é o 87**.

2º) O número que é o sucessor do 127.
Dessa vez, vamos fazer o raciocínio contrário que fizemos anteriormente.
O sucessor de todo número da sequência que tenha como algarismo da unidade **o número "7" é a soma desse número com o número "3"**. Observe.

O sucessor do 7 é o 10.
O sucessor do 17 é o 20.
O sucesso do 27 é o 30.

Nessa lógica, **o sucessor de 127 é o 130**.

3º) O número que antecede o 503.
Vamos pegar os números da sequência **cujo algarismo da unidade é "3"** e ver o que acontece.

O antecessor do 3 é o 1.
O antecessor do 13 é o 11.
O antecessor do 23 é o 21.
O antecessor do 33 é o 31.

Logo, podemos concluir que **o antecessor do 503 é o 501**.

Agora, vamos somar os três números que encontramos.

$$87 + 130 + 501 = 718$$

A questão quer **o algarismo da unidade** desse número. Logo, podemos marcar a letra B.

Gabarito: LETRA B.

23. (VUNESP/CMSJC/2022) Considere a sequência de números 7123459, 8224360, 5223441, 6224332, 4223442, ..., em que cada termo, do segundo termo em diante, é formado a partir de um padrão que altera os algarismos do termo anterior. Utilizando- se esse mesmo padrão, o 100º termo da sequência que se inicia por 359982721 é:
A) 222222222
B) 342232422
C) 343434343
D) 422222222
E) 432242322

Comentários:
Pessoal, na minha opinião, essa é uma **questão armadilha**, colocada na prova para fazer bons alunos perderem tempo. Ela foge um tanto dos "padrões" que estamos acostumados e exigiria uma **boa dose de maturidade na disciplina** para que o aluno a visualizasse rapidamente. Dito isso, vamos à resolução, primeiramente dispondo a sequência da seguinte maneira:

Termo	7º Algarismo	6º Algarismo	5º Algarismo	4º Algarismo	3º Algarismo	2º Algarismo	1º Algarismo
1º termo	7	1	2	3	4	5	9
2º termo	8	2	2	4	3	6	0
3º termo	5	2	2	3	4	4	1
4º termo	6	2	2	4	3	3	2
5º termo	4	2	2	3	4	4	2

O que era suficiente perceber que para matarmos a questão?

1º) A sequência se desenvolve, mas a partir do momento em que algum algarismo se torna o "2", o mesmo algarismo dos demais termos **sempre será o "2"**.

2º) A sequência se desenvolve, mas a partir do momento em que o "3" ou o "4" aparece, **eles começam a se alternar nos demais termos**.

3º) A sequência se desenvolve, mas sempre que aparece o "5", logo em seguida aparece o "6" e, depois, aparece o "4". Nesse ponto, entramos na situação acima, de forma que ficamos com **5 -> 6 -> 4 -> 3 -> 4 -> 3**...

Termo	7º Algarismo	6º Algarismo	5º Algarismo	4º Algarismo	3º Algarismo	2º Algarismo	1º Algarismo
1º termo	7	1	2	3	4	5	9
2º termo	8	2	2	4	3	6	0
3º termo	5	2	2	3	4	4	1
4º termo	6	2	2	4	3	3	2
5º termo	4	2	2	3	4	4	2

Com essas **três informações**, vamos procurar o 100º termo da sequência iniciada por **359982721.**

Termo	9º Alg.	8º Alg.	7º Alg.	6º Alg.	5º Alg.	4º Alg.	3º Alg.	2º Alg.	1º Alg.
1º termo	3	5	9	9	8	2	7	2	1
2º termo						2		2	
3º termo						2		2	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
100º termo						2		2	

Note que **os algarismos 2º e 4º estão com número "2"**. Dessa forma, o 100º também terá o algarismo "2" no 2º e 4º algarismo. Essa conclusão nos levaria a **eliminar a alternativa C**.

Da mesma forma, note que **o 9º algarismo já começa com o número "3"**. Dessa forma, sabemos que nessa coluna **o "3" ficará se alternando com o "4"**.

Termo	9º Alg.	8º Alg.	7º Alg.	6º Alg.	5º Alg.	4º Alg.	3º Alg.	2º Alg.	1º Alg.
1º termo	3	5	9	9	8	2	7	2	1
2º termo	4					2		2	
3º termo	3					2		2	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
100º termo	4					2		2	

Note que **nos termos ímpares aparecerá o "3"**, enquanto **nos termos pares aparecerá o "4"**. Logo, o 100º termo, que é um **termo par**, **começará com o "4".** Com essa segunda observação, já eliminaríamos as alternativas A e B também.

Para cravar a alternativa, precisamos da **terceira observação**: sempre que o "5" aparece, depois vem o "6", depois vem o "4". A partir daqui, começa o revezamento de "4" e "3".

Termo	9º Alg.	8º Alg.	7º Alg.	6º Alg.	5º Alg.	4º Alg.	3º Alg.	2º Alg.	1º Alg.
1º termo	3	5	9	9	8	2	7	2	1
2º termo	4	6				2		2	
3º termo	3	4				2		2	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
100º termo	**4**	3				**2**		**2**	

Com isso, já poderíamos concluir que **8º algarismo nunca poderia ser o número "2"**, uma vez que começa com o "5" e, a sequência do "5" sempre cai, inevitavelmente, naquele loop entre "4" e "3". Com isso, a única resposta possível seria a **letra E**.

Observação: pessoal, existe padrões para cada um dos números, por exemplo, depois do "1" é sempre o "2", depois do "9" é sempre o "0"... Na minha opinião, a estratégia para essa questão não é transformar algarismo por algarismo de cada termo, mas sim **usar as alternativas para balizar nossa procura**.

Quando fazemos assim, **ganhamos mais velocidade**, de forma que **poderia** até ser possível fazer essa questão na prova em um tempo razoável.

Gabarito: LETRA E.

24. (VUNESP/TJ-SP/2019) Considere a sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{10}, \ \ldots\right)$. O produto entre o 7º, o 11º e o 20º termos é igual a

A) 10/11
B) 3/4
C) 5/6
D) 21/13
E) 15/19

Comentários:

Como a questão pede o produto entre o 7º, 11º e 20º termo, **conseguimos listá-los** sem muito trabalho. Observe como a sequência avança.

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{4}{3} \qquad \frac{5}{6} \qquad \frac{8}{7} \qquad \frac{9}{10} \qquad \ldots$$

Os números vão **crescendo de "1" em "1"** seguindo o caminho acima. Se continuarmos repetindo o padrão, podemos chegar até o 20º termo.

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{1º},\underbrace{\frac{4}{3}}_{2º},\underbrace{\frac{5}{6}}_{3º},\underbrace{\frac{8}{7}}_{4º},\underbrace{\frac{9}{10}}_{5º},\underbrace{\frac{12}{11}}_{6º},\underbrace{\mathbf{\frac{13}{14}}}_{7º},\underbrace{\frac{16}{15}}_{8º},\underbrace{\frac{17}{18}}_{9º},\underbrace{\frac{20}{19}}_{10º},\underbrace{\mathbf{\frac{21}{22}}}_{11º},\underbrace{\frac{24}{23}}_{12º},\underbrace{\frac{25}{26}}_{13º},\underbrace{\frac{28}{27}}_{14º},\underbrace{\frac{29}{30}}_{15º},\underbrace{\frac{32}{31}}_{16°},\underbrace{\frac{33}{34}}_{17º},\underbrace{\frac{36}{35}}_{18º},\underbrace{\frac{37}{38}}_{19º},\underbrace{\mathbf{\frac{40}{39}}}_{20º}\right).$$

Agora que **encontramos os três termos**, podemos fazer o produto.

$$P=\frac{13}{14}\cdot\frac{21}{22}\cdot\frac{40}{39} \quad\rightarrow\quad P=\frac{13}{7}\cdot\frac{21}{11}\cdot\frac{10}{39} \quad\rightarrow\quad P=\frac{13}{1}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{10}{39} \quad\rightarrow\quad P=\frac{10}{11}$$

Gabarito: LETRA A.

25. (VUNESP/TJ-SP/2019) Considere a sequência $\left(\frac{1}{5},\frac{5}{10};\frac{10}{15};\frac{15}{20};\frac{20}{25},\ldots\right)$ O produto entre o 30º e o 31º termos é igual a

A) $27/29$
B) $25/27$
C) $31/33$
D) $23/25$
E) $29/31$

Comentários:

Nessa questão, já fica um pouco mais difícil de listar todos os termos até o 30º e 31º. Temos que deduzir a fórmula do termo geral para essa sequência.

$$\left(\mathbf{\frac{1}{5},\frac{5}{10};\frac{10}{15};\frac{15}{20};\frac{20}{25},\ldots}\right)$$

A primeira coisa que conseguimos perceber é que os denominadores são múltiplos de 5.

No **primeiro** termo, o denominador é $5\cdot\mathbf{1}=5$.
No **segundo** termo, o denominador é $5\cdot\mathbf{2}=10$.
No **terceiro** termo, o denominador é $5\cdot\mathbf{3}=15$.
No **quarto** termo, o denominador é $5\cdot\mathbf{4}=20$.
No **quinto** termo, o denominador é $5\cdot\mathbf{5}=25$.

Assim, percebemos que o denominador é na forma "$5n$", onde n é a ordem do termo procurado.

Agora, veja que o numerador é bem parecido. O problema é que ele começa no "1" e, depois, começam os múltiplos de 5. Com isso, a partir do segundo termo, o numerador é dado por "$5\cdot(\mathrm{n}-1)$".

No **segundo** termo, o numerador é $5\cdot(\mathbf{2}-1)=5\cdot1=5$.
No **terceiro** termo, o numerador é $5\cdot(\mathbf{3}-1)=5\cdot2=10$.
No **quarto** termo, o numerador é $5\cdot(\mathbf{4}-1)=5\cdot3=15$.
No **quinto** termo, o numerador é $5\cdot(\mathbf{5}-1)=5\cdot4=20$.

A partir do segundo termo, podemos dizer que o termo geral é dado por:

$$a_n = \frac{5 \cdot (n-1)}{5 \cdot n}$$

Para $n = 30$:

$$a_{30} = \frac{5 \cdot (30-1)}{5 \cdot 30} \qquad \rightarrow \qquad a_{30} = \frac{5 \cdot 29}{5 \cdot 30}$$

Não precisamos simplificar agora!

Para $n = 31$:

$$a_{31} = \frac{5 \cdot (31-1)}{5 \cdot 31} \qquad \rightarrow \qquad a_{31} = \frac{5 \cdot 30}{5 \cdot 31}$$

Vamos multiplicar os dois:

$$P = a_{30} \cdot a_{31} \qquad \rightarrow \qquad P = \left(\frac{\cancel{5 \cdot} 29}{\cancel{5 \cdot 30}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{5 \cdot 30}}{\cancel{5 \cdot} 31}\right) \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{P = \frac{29}{31}}$$

Gabarito: LETRA E.

Outras Bancas

26. (RBO/PREF. NAVEGANTES/2022) Na sequência: 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 13, ... os próximos três números são:

A) 14, 17, 18
B) 14, 15, 16
C) 16, 17, 18
D) 16, 19, 20
E) 15, 16, 17

Comentários:

Para responder essa questão, precisamos decifrar **o padrão da sequência** do enunciado.

Para isso, visualize a imagem abaixo.

$$2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+1} 8 \xrightarrow{+1} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+1} 13 \xrightarrow{+1} \ldots$$

Assim, veja que o padrão é esse: **aumenta 1, aumenta 1, aumenta 3. Repete**.

Sabendo disso, podemos determinar **os próximos três números**.

$$2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+1} 8 \xrightarrow{+1} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+1} 13 \xrightarrow{+1} 14 \xrightarrow{+3} 17 \xrightarrow{+1} 18$$

Gabarito: LETRA A.

27. (IBADE/CRM AC/2022) Qual é o próximo termo da sequência (1, - 2, 7, - 20, ...)?
A) 61
B) 27
C) 52
D) 35
E) 31

Comentários:
Vamos decifrar **o padrão da sequência.** Para isso, visualize o esquema abaixo.

$$1 \xrightarrow{-3} -2 \xrightarrow{+9} 7 \xrightarrow{-27} -20, \ldots$$

A primeira coisa que devemos perceber é que **uma hora subtraímos** e **outra hora somamos** algum número.

Depois, note que as quantidades subtraídas e somadas são as **potências de 3**.

Primeiro, **subtraímos** **3** $(\mathbf{3^1})$.
Depois, **somamos** **9** $(\mathbf{3^2})$..
Depois, **subtraímos** **27** $(\mathbf{3^3})$..
Agora, **somamos** **81** $(\mathbf{3^4})$. (que é a **próxima potência de 3**).

Com isso, o próximo termo de sequência é:

$$-20 + 81 = 61$$

Gabarito: LETRA A.

28. (INST. MAIS/PREF. PRAIA GRANDE/2022) Dada a sequência -1, 0, 3, 8, 15, x, 35, y e 63, assinale a alternativa que apresenta o valor de $x + y$.
A) 48.
B) 55.
C) 72.
D) 96.

Comentários:
Vamos lá, moçada! Mais uma questão sobre sequências numéricas. Para isso, veja o esquema que fiz abaixo.

$$-1, 0, 3, 8, 15, x, 35, y, 63$$

$$-1 \xrightarrow{+1} 0 \xrightarrow{+3} 3 \xrightarrow{+5} 8 \xrightarrow{+7} 15 \xrightarrow{+9} x \xrightarrow{+11} 35 \xrightarrow{+13} y \xrightarrow{+15} 63$$

Observe que **os números sempre <u>aumentam</u>**. Mas eles aumentam quanto? Sempre **o próximo ímpar**.

De início, aumentou **1**.
Depois, aumentou **3**.
Depois, aumentou **5**.
Depois, aumentou **7**.

Assim, *do "15" para o "x" vai aumentar quanto?!* **Vai aumentar 9, pois é o próximo ímpar**. Depois 11, depois, 13 e, por fim, 15. Com isso, podemos escrever.

$$x = 15 + 9 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 24}$$

$$y = 35 + 13 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = 48}$$

O enunciado pede a soma $x + y$

$$x + y = 24 + 48 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x + y = 72}}$$

Gabarito: LETRA C.

29. (IDIB/GOINFRA/2022) Seja a sequência $\{4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, x, \dots.\}$. Determine o valor de x para que a sequência continue seguindo o mesmo padrão.

A) $x = 0$
B) $x = 1/3$
C) $x = 4/3$
D) $x = 5/3$
E) $x = 8/3$

Comentários:

Para começar, visualize o esquema abaixo.

$$4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, x, \dots$$

$$4 \xrightarrow{-\frac{1}{3}} \frac{11}{3} \xrightarrow{-\frac{1}{3}} \frac{10}{3} \xrightarrow{-\frac{1}{3}} 3 \xrightarrow{-\frac{1}{3}} x$$

Observe que os números da sequência **estão diminuindo**, indicando que uma determinada quantidade está sendo subtraída dos termos. Para determinarmos essa quantidade, **fazemos a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos**. Com isso, percebemos que a quantidade subtraída de cada termo é igual a 1/3. Destarte, o próximo termo da sequência é:

$$x = 3 - \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad x = \frac{9-1}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{8}{3}}$$

Gabarito: LETRA E.

QUESTÕES COMENTADAS

Progressão Geométrica

CEBRASPE

1. (CESPE/PETROBRAS/2022) Uma empresa distribuidora de combustíveis atendia, ao término do ano de 2020, apenas 30 clientes. Após a implementação de medidas administrativas, a quantidade de novos clientes dessa empresa, no primeiro semestre de 2021 (contada sempre em relação ao mês anterior), aumentou em progressão geométrica. Na tabela a seguir, está registrada a quantidade total de clientes da empresa no final dos 4 primeiros meses de 2021.

Total de Clientes da Empresa				
Meses	Janeiro/2021	Fevereiro/2021	Março/2021	Abril/2021
Total de Clientes	32	36	44	60

Com base nessa situação hipotética e nos dados apresentados na tabela, julgue o item a seguir.

A quantidade de clientes da empresa no final de junho de 2021 era superior a 150.

Comentários:
A questão nos informa que **a quantidade de novos clientes** está aumentando conforme uma PG.

De janeiro/2021 para fevereiro/2021, a empresa ganhou **4 clientes**.
De fevereiro/2021 para março/2021, a empresa ganhou **8 clientes**.
De março/2021 para abril/2021, a empresa ganhou **16 clientes**.

Note que a tabela do enunciado corrobora com o que é informado. Assim, podemos concluir que a quantidade de novos clientes **sempre dobra de um mês para o outro**. Sendo assim,

De abril/2021 para maio/2021, a empresa ganhará 32 clientes, totalizando 92.
De maio/2021 para junho/2021, a empresa ganhará 64 clientes, **totalizando 156**.

Sendo, perceba que em junho/2021 **a empresa terá um total de 156 clientes**, quantia essa **superior a 150**, conforme aponta o item.

Gabarito: CERTO.

2. (CESPE/PETROBRAS/2022) Considere que $P(t) = 160 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$ expresse a quantidade aproximada de moradores de um determinado condomínio em t anos para $0 \leq t \leq 15$, em que $t = 0$ corresponda ao momento de constituição do condomínio. Com base nessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Os quinze primeiros termos da progressão geométrica de primeiro termo igual a 240 e terceiro termo igual a 540 são iguais ao valor da função no $P(t)$ nos números $1{,}2,\ \ldots{,}15$.

Comentários:
A questão falou de uma **progressão geométrica** com $a_1 = 240$ e $a_3 = 540$.

Com esses dois valores, conseguimos **determinar a_2** por meio da seguinte relação:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \quad \rightarrow \quad a_2^2 = 240 \cdot 540 \quad \rightarrow \quad a_2^2 = 129600 \quad \rightarrow \quad a_2 = 360$$

Com o valor de a_2, é possível determinar **a razão dessa PG**.

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{360}{240} \quad \rightarrow \quad q = \frac{3}{2}$$

Sendo assim, o termo geral dessa PG pode ser escrito como:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_n = 240 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_n = 240 \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{2}\right)} \quad \rightarrow \quad \boxed{a_n = 160 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

Note que **a expressão do termo geral é <u>igual</u> a função $P(t)$**. Sendo assim, os termos dessa PG serão iguais ao aos valores da função no $P(t)$ quando $t = 1,2, \ldots, 15$.

Gabarito: CERTO.

3. (CESPE/TELEBRAS/2022) João acaba de assumir um cargo de assistente administrativo em uma empresa e foi designado para a tarefa de examinar as demandas de clientes e dar a elas o devido encaminhamento. Considerando que João ainda não tem experiência com essa tarefa, seu chefe decide que passará para ele, no primeiro dia, 10 demandas, no segundo, 15, no terceiro, 20, e assim sucessivamente, crescendo segundo uma Progressão Aritmética até o oitavo dia, quando então estabilizará o número de demandas diárias. Para executar sua tarefa, João leva sempre 5 minutos para tomar conhecimento dos detalhes de cada demanda, enquanto que a fase de encaminhamento (decidir o que fazer e executar os procedimentos necessários) leva 12 minutos nas demandas do primeiro dia, 6 minutos nas demandas do segundo, 3 minutos nas demandas do terceiro dia, e assim sucessivamente, decrescendo segundo uma Progressão Geométrica até o oitavo dia, quando então o tempo de encaminhamento se estabiliza. Com base nessa situação hipotética, julgue o item seguinte.

No quinto dia de trabalho João já estará levando menos de 6 minutos no exame de cada demanda de cliente.

Comentários:
Pessoal, é superimportante perceber que o tempo gasto na fase de conhecimento **<u>não</u> muda**. É sempre 5 minutos por demanda. Por sua vez, o tempo da fase encaminhando **<u>cai pela metade</u> a cada dia**, conforme uma progressão geométrica de **razão igual a 1/2**. Com isso, podemos organizar uma tabela.

Dia	Tempo Fase de Conhecimento	Tempo Fase de Encaminhamento	Tempo Total Gasto (por demanda)
1º dia	5 min	12 min	17 min
2º dia	5 min	6 min	11 min
3º dia	5 min	3 min	8 min
4º dia	5 min	1,5 min	6,5 min
5º dia	5 min	0,75 min	**5,75 min**

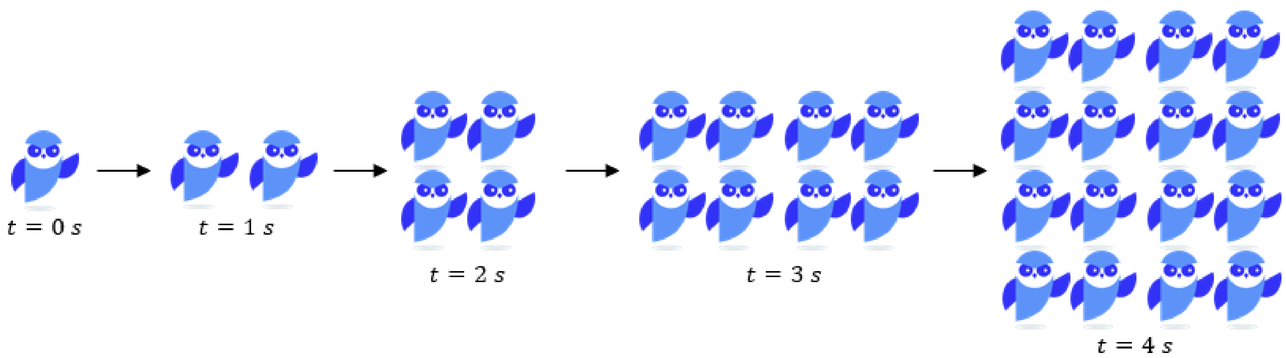
Com isso, vemos que é verdade que **no 5º dia** o tempo gasto por demanda já **será inferior a 6 minutos**.

Gabarito: CERTO.

4. (CESPE/IBGE/2021) Um organismo vivo tem a capacidade de reproduzir-se dividindo-se em dois outros organismos semelhantes a ele. A cada segundo, cada novo organismo gerado amadurece e se reproduz, gerando dois outros organismos. Em certo experimento, em um instante inicial, um desses organismos foi isolado e passou-se a contabilizar a população p_n dos organismos gerados a partir daquele que foi isolado, decorridos exatamente n segundos desde o instante inicial. Nessa situação, supondo-se que no decorrer dos 10 primeiros segundos do experimento nenhum dos organismos pereceu, tem-se que

A) $p_{10} < 400$.
B) $400 \leq p_{10} < 600$.
C) $600 \leq p_{10} < 800$.
D) $800 \leq p_{10} < 1.000$.
E) $1.000 \leq p_{10}$.

Comentários:
Imagine que nosso organismo é uma coruja. Temos o seguinte esquema.



Antes de começarmos o experimento, temos uma coruja. Um segundo após o início do experimento, essa coruja transforma-se em duas! Mais um segundo depois, cada uma dessas duas corujas se transformará em mais duas, o que fará totalizar uma população de 4 corujas. Note que **a população dobra de tamanho a cada segundo!** Com isso, a quantidade de indivíduos evolui conforme uma **progressão geométrica de razão 2**. Se queremos saber a população depois dos dez segundos, **temos que encontrar o a_{10}** (o enunciado chama de p_{10}). Assim, usando **a fórmula do termo geral de uma PG**.

$$p_{10} = p_1 \cdot q^9$$

A população no primeiro segundo é $p_1 = 2$ (temos das corujas no instante $t = 1\ s$). Assim,

$$p_{10} = 2 \cdot 2^9 \quad \rightarrow \quad p_{10} = 2^{10} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p_{10} = 1024}$$

Assim, temos que $\boldsymbol{p_{10} \geq 1.000}$, conforme afirma a alternativa E.

Gabarito: LETRA E.

5. (CESPE/TJ-PA/2020) No dia 1º de janeiro de 2019, uma nova secretaria foi criada em certo tribunal, a fim de receber todos os processos a serem protocolados nessa instituição. Durante o mês de janeiro de

2019, 10 processos foram protocolados nessa secretaria; a partir de então, a quantidade mensal de processos protocolados na secretaria durante esse ano formou uma progressão geométrica de razão igual a 2. Nessa situação hipotética, a quantidade de processos protocolados nessa secretaria durante os meses de junho e julho de 2019 foi igual a

A) 320.

B) 480.

C) 640.

D) 960.

E) 1.270.

Comentários:

Temos uma progressão geométrica formada pela quantidade de processos protocolados mensalmente em um tribunal. O enunciado nos informou que $\boldsymbol{a_1 = 10}$ e $\boldsymbol{q = 2}$.

Além disso, como **o primeiro termo dessa PG está associado ao mês de janeiro ($\boldsymbol{n = 1}$),** as quantidades de processos protocolados em junho e em julho estarão associados **aos índices 6 e 7 dessa sequência**. Vamos encontrá-los utilizando **a fórmula do termo geral da PG**.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Em junho, $n = 6$.

$$a_6 = 10 \cdot 2^{6-1} \quad \rightarrow \quad a_6 = 10 \cdot 2^5 \quad \rightarrow \quad a_6 = 10 \cdot 32 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_6 = 320}$$

Em julho, $n = 7$.

$$a_7 = 10 \cdot 2^{7-1} \quad \rightarrow \quad a_7 = 10 \cdot 2^6 \quad \rightarrow \quad a_6 = 10 \cdot 64 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_7 = 640}$$

Para saber a quantidade de processos protocolados nos dois meses, basta **somarmos as quantidades**.

$$\boldsymbol{S = a_6 + a_7 = 320 + 640 = 960}$$

Gabarito: LETRA D.

6. (CESPE/IFF/2018) O segundo termo de uma progressão geométrica é 5 e o quinto termo é 40/27. Para essa progressão, a soma dos n primeiros termos é igual a

A) $\left(\frac{45}{2}\right) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

B) $\left(\frac{15}{2}\right) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

C) $\left(\frac{45}{2}\right) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$

D) $\left(\frac{15}{2}\right) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$

E) $\left(\frac{45}{2}\right) \times \left(\frac{15}{2}\right) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

Comentários:

O enunciado nos forneceu a_2 e a_5. Ele pergunta a soma dos n primeiros termos dessa PG. Lembre-se da fórmula.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Portanto, **precisamos descobrir o a_1 e a razão q**, para colocarmos na fórmula. Nesse intuito, vamos usar a fórmula do termo geral da PG.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

O enunciado disse que $\boldsymbol{a_2 = 5}$. Assim,

$$5 = a_1 \cdot q^{2-1} \quad \rightarrow \quad a_1 \cdot q = 5 \qquad (1)$$

Além disso, $\boldsymbol{a_5 = \frac{40}{27}}$.

$$\frac{40}{27} = a_1 \cdot q^{5-1} \quad \rightarrow \quad a_1 \cdot q^4 = \frac{40}{27} \qquad (2)$$

Vamos dividir a equação (2) pela equação (1), membro a membro.

$$\frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q} = \frac{\frac{40}{27}}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{q^4}{q} = \frac{8}{27} \quad \rightarrow \quad q^3 = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3} \quad \rightarrow \quad q = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{q = \frac{2}{3}}$$

Podemos substituir a razão q na equação (1) e determinar a_1.

$$a_1 \cdot \frac{2}{3} = 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = \frac{15}{2}}$$

Pronto, agora vamos substituir a_1 e q na fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{\left(\frac{15}{2}\right) \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1} \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{\left(\frac{15}{2}\right) \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}{-\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{S_n = \left(\frac{45}{2}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$$

Gabarito: LETRA A.

7. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) Sobre uma mesa há 9 caixas vazias. Em uma dessas caixas, será colocado um grão de feijão; depois, em outra caixa, serão colocados três grãos de feijão. Prosseguindo-se sucessivamente, será escolhida uma caixa vazia, e nela colocada uma quantidade de grãos de feijão igual ao triplo da quantidade colocada na caixa anteriormente escolhida, até que não reste caixa vazia. Nessa situação, nas 9 caixas será colocada uma quantidade de grãos de feijão igual a

A) $\frac{3^9-1}{2}$

B) $3^0 - 1$

C) $\frac{3^{10}-1}{2}$

D) $3^{10} - 1$

E) $\frac{3^8-3}{2}$

Comentários:

As quantidades de feijões em cada uma das caixas formam uma **progressão geométrica de razão 3**. Afinal, sempre uma caixa é preenchida com **o triplo da quantidade na caixa anteriormente escolhida**.

$\text{CAIXA } 1 = \mathbf{1}$ grão de feijão
$\text{CAIXA } 2 = \mathbf{3}$ grãos de feijão
$\text{CAIXA } 3 = \mathbf{9}$ grãos de feijão
$\text{CAIXA } 4 = \mathbf{27}$ grãos de feijão
$\text{CAIXA } 5 = \mathbf{81}$ grãos de feijão
$\text{CAIXA } 6 = \mathbf{243}$ grãos de feijão
...

Para descobrir a quantidade nas **9 caixas**, podemos usar a fórmula da **soma dos n primeiros termos da PG**.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Substituindo $\boldsymbol{a_1 = 1}$, $\boldsymbol{q = 3}$ **e** $\boldsymbol{n = 9}$.

$$S_9 = \frac{1 \cdot (3^9 - 1)}{3 - 1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_9 = \frac{3^9 - 1}{2}}$$

Gabarito: LETRA A.

8. (CESPE/SEDUC-AL/2018) Com relação a uma sequência numérica $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n}$, julgue o item subsequente.

Se a sequência for uma progressão geométrica (PG), em que $a_1 = 5$ e $a_4 = 135$, então a razão dessa PG será maior que 4.

Comentários:
Temos uma progressão geométrica com $\boldsymbol{a_1 = 5}$ **e** $\boldsymbol{a_4 = 135}$. Devemos usar a fórmula do termo geral para encontrar a razão.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Usando $\boldsymbol{n = 4}$.

$$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} \quad \rightarrow \quad a_4 = a_1 \cdot q^3$$

Substituindo $a_1 = 5$ e $a_4 = 135$:

$$135 = 5 \cdot q^3 \quad \rightarrow \quad q^3 = 27 \quad \rightarrow \quad q^3 = 3^3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{q = 3}$$

Logo, **a razão da progressão geométrica é 3**. Como **temos um número menor que 4**, o item está incorreto.

Gabarito: ERRADO.

9. (CESPE/MIN/2013) Julgue o seguinte item, relativo a sistemas numéricos e sistema legal de medidas.

A soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ é inferior a 2.

Comentários:
Observe que a soma do item é a soma de termos de uma progressão geométrica.

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right\}$$

Nessa PG, temos que $\boldsymbol{a_1 = 1, q = \frac{1}{2}}$ **e um total de 7 termos**. Podemos usar a fórmula da soma.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Substituindo cada um dos valores, temos que:

$$S_7 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} \quad \rightarrow \quad S_7 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad S_7 = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^7}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_7 = 2 - \frac{1}{2^6}}$$

Veja que a soma dos termos **é o número 2 menos um termo positivo ($\boldsymbol{1/2^6}$).** Logo, certamente o resultado da soma será um número menor que o 2, conforme afirma o item.

Gabarito: CERTO.

10. (CESPE/TCE-RS/2013) A respeito do controle e manutenção dos 48 veículos de um órgão público, julgue o item seguinte.

Se, em 2010, os veículos desse órgão consumiram 16.000 L de combustível e se, nos anos seguintes, o consumo cresceu em progressão geométrica à razão de 10% ao ano, então, o total de combustível consumido por esses veículos em 2010, 2011 e 2012 foi inferior a 50.000 L.

Comentários:
Pessoal, apesar da questão falar em progressão geométrica, nem precisamos usar conceitos de sequências. Basicamente, o item afirma que **a quantidade de combustível consumido aumenta 10% ao ano**. Se no ano de 2010 foram consumidos 16.000 L, então **em 2011** será consumido **16.000 + 1.600 (10% de 16.000) = 17.600 L**.

Por sua vez, **10% de 17.600 é 1.760**. Assim, para obter a quantidade de combustível consumido **em 2012**, devemos somar essa quantidade com 17.600. Ficamos com, $17.600 + 1.760 = 19.360\ L$. *Vamos organizar todas essas informações em uma tabela?!*

Ano	2010	2011	2012
Combustível Consumido	16.000 L	17.600 L	19.360 L
10%	1.600 L	1.760 L	1.936 L

A quantidade de combustível consumida **nos três anos** é obtida quando somamos o que foi gasto em cada um dos anos.

$$Total\ Consumido = 16.000 + 17.600 + 19.360$$

$$Total\ Consumido = 52.960\ L$$

Logo, **o total de combustível consumido não foi inferior a 50.000**, tornando o item está **errado**.

Gabarito: ERRADO.

(BRB/2011) Texto para as próximas questões
Considerando que, em uma progressão aritmética de termos $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, a razão seja positiva, $a_1 = 2$ e os termos a_1, a_3 e a_{11} estejam, nessa ordem, em progressão geométrica, julgue os itens a seguir.

11. (CESPE/BRB/2011) A razão dessa progressão aritmética será um número racional, não inteiro.

Comentários:
Se $a_1, a_2, ..., a_n$ são termos de uma progressão aritmética, então podemos escrevê-los em função de a_1 e da razão r. Perceba que o enunciado nos forneceu $a_1 = 2$.

$a_1 = a_1 = 2$
$a_2 = a_1 + r = 2 + r$
$a_3 = a_1 + 2r = 2 + 2r$
$a_4 = a_1 + 3r = 2 + 3r$
$a_5 = a_1 + 4r = 2 + 4r$
...

Além disso, **a_1, a_3 e a_{11} estão em PG**. Nessas condições,

$$(a_3)^2 = a_1 \cdot a_{11}$$

Substituindo $\boldsymbol{a_1 = 2}$, $\boldsymbol{a_3 = 2 + 2r}$ e $\boldsymbol{a_{11} = 2 + 10r}$

$$(2 + 2r)^2 = 2 \cdot (2 + 10r)$$

$$4 + 8r + 4r^2 = 4 + 20r$$

$$4r^2 = 12r$$

$$r = \frac{12}{4}$$

$$\boldsymbol{r = 3}$$

Pronto, veja que **a razão da PA é igual a 3** e, portanto, **é um número inteiro**. Logo, **o item está errado**.

Gabarito: ERRADO.

12. (CESPE/BRB/2011) Para cada $\boldsymbol{n}$ ímpar, $\boldsymbol{a_n}$ será sempre um número par.

Comentários:
Ora, se n é ímpar, podemos escrever que $\boldsymbol{n = 2k + 1}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Ademais, lembre-se da **fórmula do termo geral da PA.**

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Substituindo $\boldsymbol{n = 2k + 1}$ e $\boldsymbol{a_1 = 2}$.

$$a_n = 2 + \big((2k + 1) - 1\big) \cdot r \quad \rightarrow \quad a_n = 2 + 2kr \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_n = 2 \cdot (1 + kr)}$$

Assim, sempre que n for ímpar, $\boldsymbol{a_n}$ **terá o fator 2** e, portanto, **será par.** Lembre-se que um número par é qualquer número que possa ser escrito na forma $n = 2t$, com t inteiro. Assim, para uma resposta completa, precisamos garantir que $\boldsymbol{(1 + kr)}$ é um inteiro. **Ora, 1 é inteiro, k é inteiro e r é um inteiro** (conforme vimos no item anterior), o que acarreta $(1 + kr)$ inteiro. Assim, $\boldsymbol{a_n}$ **realmente é um número par**.

Gabarito: CERTO.

CESGRANRIO

13. (CESGRANRIO/BASA/2018) Considere a sequência numérica cujo termo geral é dado por $\boldsymbol{a_n = 2^{1-3n}}$, para $\boldsymbol{n \geq 1}$. Essa sequência numérica é uma progressão

A) geométrica, cuja razão é 1/8
B) geométrica, cuja razão é -6.
C) geométrica, cuja razão é -3.
D) aritmética, cuja razão é -3.
E) aritmética, cuja razão é 1/8

Comentários:
O enunciado deu uma fórmula bem estranha para o termo geral. Vamos s**ubstituir alguns valores de $\boldsymbol{n}$** para determinar os termos dessa PG.

- Para $n = 1$:

$$a_1 = 2^{1-3\cdot1} \quad \rightarrow \quad a_1 = 2^{1-3} \quad \rightarrow \quad a_1 = 2^{-2} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2^2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = \frac{1}{4}}$$

- Para $n = 2$:

$$a_2 = 2^{1-3\cdot2} \quad \rightarrow \quad a_2 = 2^{1-6} \quad \rightarrow \quad a_2 = 2^{-5} \quad \rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2^5} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = \frac{1}{32}}$$

- Para $n = 3$:

$$a_3 = 2^{1-3\cdot3} \quad \rightarrow \quad a_3 = 2^{1-9} \quad \rightarrow \quad a_3 = 2^{-8} \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{2^8} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_3 = \frac{1}{256}}$$

- Para $n = 4$:

$$a_4 = 2^{1-3\cdot4} \quad \rightarrow \quad a_4 = 2^{1-12} \quad \rightarrow \quad a_4 = 2^{-11} \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{2^{11}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = \frac{1}{2048}}$$

Observe que temos uma sequência com a seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{32}, \frac{1}{256}, \frac{1}{2048}, \dots\right)$$

Está com uma "carazona" de progressão geométrica, não é verdade? Para confirmar, vamos ver se **a razão entre termos consecutivos é constante.**

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Devemos achar **o mesmo resultado** para:

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{256}}{\frac{1}{32}} = \frac{32}{256} = \frac{1}{8}$$

Portanto, veja que realmente temos uma **progressão geométrica cuja razão é 1/8**. Podemos marcar letra A.

Gabarito: LETRA A.

14. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Sabe-se que, em uma determinada progressão geométrica, a razão é 0,8. Se o quinto termo é 4.096; então, o Limite da Soma dos n primeiros dessa P.G., quando n tende a infinito, é igual a

A) 10.000

B) 20.000
C) 30.000
D) 40.000
E) 50.000

Comentários:
Em outras palavras, o enunciado nos informou sobre uma **progressão geométrica infinita**. Note que a razão dela é tal que $|q| < 1$. Nessas condições, podemos aplicar a fórmula que vimos na teoria.

$$\boldsymbol{S_\infty = \frac{a_1}{1-q}} \qquad (1)$$

A fórmula acima nos fornece a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica com razão $|q| < 1$.

Para calcular a soma pedida, **nós precisamos do $\boldsymbol{a_1}$**. No entanto, o enunciado nos disse o a_5. Para determinar o a_5, podemos usar a fórmula do termo geral.

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{a_5}{q^4}$$

Substituindo $\boldsymbol{a_5 = 4.096}$ e $\boldsymbol{q = 0,8 = \frac{8}{10}}$, ficamos com:

$$a_1 = \frac{4.096}{\left(\frac{8}{10}\right)^4} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{4.096}{\frac{8^4}{10.000}} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{\cancel{4.096}}{\cancel{4.096}} \cdot 10.000 \quad \rightarrow \quad a_1 = 10.000$$

Pronto, agora vamos substituir em (1).

$$S_\infty = \frac{10.000}{1-0,8} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{10.000}{0,2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_\infty = 50.000}$$

Assim, podemos marcar a alternativa E.

Gabarito: LETRA E.

15. (CESGRANRIO/BB/2018) Para $\boldsymbol{x > 0}$, seja $\boldsymbol{S_x}$ a soma

$$\boldsymbol{S_x = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-nx} = 2^{-x} + 4^{-x} + 8^{-x} + \cdots}$$

O número real $\boldsymbol{x}$ para o qual se tem $\boldsymbol{S_x = \frac{1}{4}}$.
A) 4
B) $\log_2 5$
C) $3/2$
D) $5/2$
E) $\log_2 3$

Comentários:

Galera, **não se preocupem com o símbolo do somatório**. Veja que o enunciado deu a soma:

$$S_x = 2^{-x} + 4^{-x} + 8^{-x} + \cdots$$

Sempre que vocês se depararem com uma soma infinita, **vale a pena lembrar de uma PG**. Lembre-se que na PG infinita com $|q| < 1$, temos uma fórmula bem legal para calcular **a soma de infinitos números**.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Vamos associar os elementos da soma do enunciado aos termos de uma PG.

$$a_1 = 2^{-x} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2^x}$$

$$a_2 = 4^{-x} \quad \rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{4^x}$$

$$a_3 = 8^{-x} \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{8^x}$$

A razão q é dada por:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{\left(\frac{1}{4^x}\right)}{\left(\frac{1}{2^x}\right)} \quad \rightarrow \quad q = \frac{2^x}{4^x} \quad \rightarrow \quad q = \left(\frac{2}{4}\right)^x \quad \rightarrow \quad q = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{2^x}$$

Agora, podemos substituir $a_1 = \frac{1}{2^x}$ e $q = \frac{1}{2^x}$ na fórmula da soma dos infinitos termos da PG.

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2^x}}{1 - \frac{1}{2^x}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{1}{2^x - 1}$$

O enunciado disse que **o valor dessa soma é igual a 1/4**.

$$\frac{1}{2^x - 1} = \frac{1}{4}$$

Multiplicando cruzado.

$$2^x - 1 = 4 \quad \rightarrow \quad 2^x = 5$$

Nessa situação, precisamos **aplicar log nos dois lados para descer o expoente**.

$$\log_2 2^x = \log_2 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \log_2 5}$$

Gabarito: LETRA B.

16. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2017) A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = \frac{3^{n+4} - 81}{2 \cdot 3^n}$$

Quanto vale o quarto termo dessa progressão geométrica?

A) 1

B) 3

C) 27

D) 39

E) 40

Comentários:

O enunciado falou em uma PG. A única informação que temos é que **a soma dos n termos iniciais é igual a:**

$$S_n = \frac{3^{n+4} - 81}{2 \cdot 3^n}$$

Queremos saber **o quarto termo da sequência**, ou seja, a_4.

Para isso, quero que você perceba uma coisa:

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

Mas, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$$S_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4$$

$$S_4 = S_3 + a_4$$

Reorganizando,

$$a_4 = S_4 - S_3$$

Observe que, naturalmente, **o quarto termo da sequência é a subtração entre S_4 e S_3**.

- Para $n = 3$:

$$S_3 = \frac{3^{3+4} - 81}{2 \cdot 3^3} \rightarrow S_3 = \frac{3^7 - 81}{2 \cdot 27} \rightarrow S_3 = \frac{2187 - 81}{54} \rightarrow S_3 = \frac{2106}{54} \rightarrow S_3 = 39$$

- Para $n = 4$:

$$S_4 = \frac{3^{4+4} - 81}{2 \cdot 3^4} \rightarrow S_4 = \frac{3^8 - 81}{2 \cdot 81} \rightarrow S_4 = \frac{6561 - 81}{162} \rightarrow S_4 = \frac{6480}{162} \rightarrow S_4 = 40$$

Logo,

$$a_4 = S_4 - S_3 \quad \rightarrow \quad a_4 = 40 - 39 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = 1}$$

Gabarito: LETRA A.

17. (CESGRANRIO/BASA/2015) Uma sequência de números reais tem seu termo geral, a_n, dado por $a_n = 4 \cdot 2^{3n+1}$, para $n \geq 1$. Essa sequência é uma progressão

A) geométrica, cuja razão é igual a 2.
B) geométrica, cuja razão é igual a 32.
C) aritmética, cuja razão é igual a 3.
D) aritmética, cuja razão é igual a 1.
E) geométrica, cuja razão é igual a 8.

Comentários:
Pessoal, nessa situação, vamos **substituir valores de n** para encontrar os termos dessa sequência.

$$\boldsymbol{a_n = 4 \cdot 2^{3n+1}}$$

Para $n = 1$, temos que:

$$a_1 = 4 \cdot 2^{3 \cdot 1 + 1} \quad \rightarrow \quad a_1 = 4 \cdot 2^4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = 64}$$

Para $n = 2$, temos que:

$$a_2 = 4 \cdot 2^{3 \cdot 2 + 1} \quad \rightarrow \quad a_1 = 4 \cdot 2^7 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = 512}$$

Para $n = 3$, temos que:

$$a_3 = 4 \cdot 2^{3 \cdot 3 + 1} \quad \rightarrow \quad a_3 = 4 \cdot 2^{10} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_3 = 4.096}$$

Com os três primeiros termos, já conseguimos perceber que **não temos uma progressão aritmética**, pois a diferença entre os termos não é constante. Assim, certamente temos uma PG. Para determinar a razão, podemos fazer:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{512}{64} = 8$$

Pronto, observe que temos uma **progressão geométrica de razão igual a 8**. Podemos marcar a letra E.

Gabarito: LETRA E.

18. (CESGRANRIO/BR/2015) Considere a progressão geométrica finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}, a_{12})$, na qual o primeiro termo vale metade da razão e $a_7 = 64 \cdot a_4$. O último termo dessa progressão é igual a

A) 2^{12}
B) 2^{16}
C) 2^{22}

D) 2^{23}
E) 2^{34}

Comentários:
O enunciado quer **o último termo** da progressão geométrica dada, ou seja, a_{12}. Para determiná-lo, precisaremos encontrar o a_1 e a razão q. Se o **primeiro termo vale metade da razão**, podemos escrever que:

$$a_1 = \frac{q}{2} \qquad (1)$$

Além disso, o enunciado informou que $\boldsymbol{a_7 = 64 \cdot a_4}$. Lembre-se que:

$$a_7 = a_1 \cdot q^6$$
$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

Usando essas expressões na relação dada no enunciado, ficamos com:

$$\cancel{a_1} \cdot q^6 = 64 \cdot \cancel{a_1} \cdot q^3$$
$$q^{\cancel{6}} = 64 \cdot \cancel{q^3}$$
$$q^3 = 64 \quad \rightarrow \quad q = \sqrt[3]{64} \quad \rightarrow \quad q = 4$$

Pronto, temos a razão da PG. Como **o primeiro termo é metade desse valor**,

$$a_1 = \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad a_1 = 2$$

Com **o primeiro termo e a razão**, conseguimos **determinar qualquer termo** dessa progressão geométrica.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

O último termo é tal que $\boldsymbol{n = 12}$, vamos substituir os valores que temos.

$$a_{12} = 2 \cdot 4^{12-1} \quad \rightarrow \quad a_{12} = 2 \cdot 4^{11} \quad \rightarrow \quad a_{12} = 2 \cdot (2^2)^{11} \quad \rightarrow \quad a_{12} = 2 \cdot 2^{22} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{12} = 2^{23}}$$

Gabarito: LETRA D.

19. (CESGRANRIO/BR/2015) Considere a_n e b_n os termos gerais de duas progressões geométricas, cujas razões são 4 e 1/2, respectivamente. Tem-se, portanto, que $c_n = a_n \cdot b_n$ é o termo geral de uma progressão geométrica cuja razão é igual a
A) 8
B) 9/2
C) 2
D) 1/2
E) 1/8

Comentários:
Se a_n e b_n são os termos gerais de **duas progressões geométricas**, podemos escrever:

$$a_n = a_1 \cdot q_a^{n-1}$$

$$b_n = b_1 \cdot q_b^{n-1}$$

O enunciado falou que as razões são $\boldsymbol{q_a = 4}$ e $\boldsymbol{q_b = \frac{1}{2}}$. Vamos substituir esses valores nas expressões acima.

$$a_n = a_1 \cdot 4^{n-1}$$

$$b_n = b_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Temos também uma outra progressão geométrica cujo termo geral é $\boldsymbol{c_n = a_n \cdot b_n}$. Assim,

$$c_n = (a_1 \cdot 4^{n-1}) \cdot \left(b_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \quad \rightarrow \quad c_n = (a_1 \cdot b_1) \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^{n-1} \quad \rightarrow \quad c_n = (a_1 \cdot b_1) \cdot 2^{n-1}$$

Compare a expressão que obtemos acima com **a expressão do termo geral** de uma PG.

$$c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$$

Bem parecido, né? Quando fazemos **uma comparação** entre as duas expressões, podemos tirar que:

$$c_1 = a_1 b_1$$
$$q = 2.$$

Gabarito: LETRA C.

20. (CESGRANRIO/BASA/2013) A sequência $\boldsymbol{a_n, n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $\boldsymbol{a_1 = -2}$ e cuja razão é $\boldsymbol{r = 3}$. Uma progressão geométrica, $\boldsymbol{b_n}$, é obtida a partir da primeira, por meio da relação

$$\boldsymbol{b_n = 3^{a_n}, n \in \mathbb{N}}$$

Se $\boldsymbol{b_1}$ e $\boldsymbol{q}$ indicam o primeiro termo e a razão dessa progressão geométrica, então $\boldsymbol{\frac{q}{b_1}}$ vale

A) 243.
B) 3.
C) $1/243$.
D) $-2/3$.
E) $-27/6$.

Comentários:
Questão bacana! Ela trabalha tanto com as progressões aritméticas quanto com as progressões geométricas. Ótima para treino. Se **$a_n, n \in \mathbb{N}$ é uma progressão aritmética**, então podemos escrever:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Vamos substituir $\boldsymbol{a_1 = -2}$ e $\boldsymbol{r = 3}$.

$$a_n = -2 + (n-1) \cdot 3$$

Usando a propriedade **distributiva** da multiplicação.

$$a_n = -2 + 3n - 3$$

$$a_n = 3n - 5$$

Assim, o termo geral da progressão geométrica b_n do enunciado fica:

$$b_n = 3^{a_n} \quad \rightarrow \quad b_n = 3^{3n-5} \quad \rightarrow \quad b_n = \frac{3^{3n}}{3^5} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b_n = \frac{3^{3n}}{243}}$$

Agora, podemos **substituir valores para $\boldsymbol{n}$** e descobrir quais são os termos dessa PG.

- Para $n = 1$:

$$b_1 = \frac{3^{3\cdot 1}}{243} \quad \rightarrow \quad b_1 = \frac{3^3}{243} \quad \rightarrow \quad b_1 = \frac{27}{243} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b_1 = \frac{1}{9}}$$

- Para $n = 2$:

$$b_2 = \frac{3^{3\cdot 2}}{243} \quad \rightarrow \quad b_2 = \frac{3^6}{243} \quad \rightarrow \quad b_2 = \frac{729}{243} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b_2 = 3}$$

Com b_1 e b_2 já conseguimos determinar **a razão** dessa PG.

$$q = \frac{b_2}{b_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{3}{\frac{1}{9}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{q = 27}$$

O enunciado pediu o valor de $\boldsymbol{q/b_1}$.

$$\frac{q}{b_1} = \frac{27}{\frac{1}{9}} = 243$$

Gabarito: LETRA A.

21. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2012) Seja a progressão geométrica: $\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{5}, \ldots$ O quarto termo dessa progressão é:

A) 0

B) $-1/5^6$

C) $1/5^9$

D) 1
E) 5

Comentários:
Pessoal, antes de começar a resolver o exercício, gostaria de fazer uma **breve revisão com vocês**. Essa questão envolve **manipulações de raízes**. Lembre-se, da nossa aula de operações básicas, que:

Quem está por dentro, está por cima.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Quem está por fora, está por baixo.

Escrever uma raiz na forma de uma potência com expoente fracionário pode facilitar bastante os cálculos, pois aí **poderemos usar com algumas propriedades conhecidas**. Relembre algumas:

P1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

P2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

P3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

P4) $a^0 = 1.$

Agora, vamos para a questão! O enunciado forneceu alguns termos de uma **progressão geométrica** e quer que encontremos o $\boldsymbol{a_4}$. Para isso, precisamos **determinar a razão da PG**.

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow \quad q = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{2}}} \quad \rightarrow \quad q = 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad q = 5^{-\frac{1}{6}}$$

Agora, devemos usar **a fórmula do termo geral** para determinar o a_4.

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \rightarrow \quad a_4 = \sqrt{5} \cdot \left(5^{-\frac{1}{6}}\right)^3 \quad \rightarrow \quad a_4 = \sqrt{5} \cdot 5^{-\frac{3}{6}} \quad \rightarrow \quad a_4 = \sqrt{5} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$$

Podemos simplificar um pouco mais, note que $\boldsymbol{\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}}$. Assim,

$$a_4 = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad a_4 = 5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad a_4 = 5^0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = 1}$$

Gabarito: LETRA D.

22. (CESGRANRIO/BNDES/2011) A soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, cuja razão tem módulo menor que 1, é igual a 6, e a soma dos quadrados dos termos dessa progressão é igual a 12. Quanto vale o primeiro termo da progressão geométrica?

A) 1
B) 3
C) 6
D) 9
E) 12

Comentários:

Sabemos que a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica cuja razão é tal que $|q| < 1$ é dada pela seguinte fórmula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

A primeira informação que temos é que **o resultado dessas soma é igual a 6**. Assim,

$$\frac{a_1}{1-q} = 6 \quad \rightarrow \quad a_1 = 6 - 6q \quad \rightarrow \quad a_1 + 6q = 6 \quad (1)$$

A segunda informação é que **a soma dos quadrados dos termos dessa progressão é igual a 12**. Ou seja,

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \cdots = 12$$

A sequência formada por $(\boldsymbol{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, \ldots})$ **também é uma PG**. Para convencer vocês disso, vou tentar mostrar um exemplo prático. Considere a seguinte sequência:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$$

É uma **PG infinita com $\boldsymbol{q = \frac{1}{2}}$**. Agora, vamos criar uma outra sequência em que cada um dos termos seja o quadrado do termo correspondente na sequência acima.

$$\left(1^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{8}\right)^2, \left(\frac{1}{16}\right)^2, \ldots\right)$$

$$\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \ldots\right)$$

Observe que **a sequência resultante é também uma PG com razão $\boldsymbol{q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}}$**.

Como $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, \ldots)$ é também uma PG, podemos usar a fórmula da soma infinita.

A sequência formada pelos quadrados possui **primeiro termo igual a $\boldsymbol{a_1^2}$ e razão $\boldsymbol{q^2}$**. Assim,

$$S_\infty = \frac{a_1^2}{1-q^2}$$

Como o enunciado falou que **o resultado dessa soma é 12**, temos que:

$$\frac{a_1^2}{1-q^2} = 12 \quad \rightarrow \quad a_1^2 + 12q^2 = 12 \quad (2)$$

Queremos **determinar o primeiro termo**, a_1. Para isso, vamos isolar q em (1) e substituir em (2).

$$a_1 + 6q = 6 \quad \rightarrow \quad q = \frac{6-a_1}{6}$$

Substituindo em (2):

$$a_1^2 + 12 \cdot \left(\frac{6-a_1}{6}\right)^2 = 12$$

$$a_1^2 + 12 \cdot \frac{(36 - 12a_1 + a_1^2)}{36} = 12$$

$$a_1^2 + \frac{(36 - 12a_1 + a_1^2)}{3} = 12$$

$$\frac{3a_1^2 + 36 - 12a_1 + a_1^2}{3} = 12$$

$$4a_1^2 - 12a_1 + \cancel{36} = \cancel{36}$$

$$4a_1^2 - 12a_1 = 0 \quad \rightarrow \quad 4a_1^2 = 12a_1 \quad \rightarrow \quad a_1^2 = 3a_1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = 3}$$

Gabarito: LETRA B.

FGV

23. (FGV/ALERO/2018) Se x - 1, x + 1, x + 7 são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica, o quarto termo é

A) 27.

B) 18.

C) 16.

D) 9.

E) 8.

Comentários:

Lembre-se que se temos três termos consecutivos de uma PG, podemos escrever que **o quadrado do termo central é igual ao produto dos termos vizinhos**. Com a PG do enunciado, podemos escrever:

$$(x+1)^2 = (x-1)(x+7)$$

Desenvolvendo o quadrado e usando a **propriedade distributiva** no produto:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 - x + 7x - 7$$

$$4x = 8 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Com o valor de x encontrado, podemos **determinar os três primeiros** termos dessa PG:

$$1, 3, 9$$

Note que **o primeiro termo (a_1) é 1 e a razão (q) é 3**. Para achar o quarto termo dessa sequência, basta multiplicarmos o terceiro termo pela razão.

$$a_4 = a_3 \cdot q \quad \rightarrow \quad a_4 = 9 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = 27}$$

Gabarito: LETRA A.

24. (FGV/SSP-AM/2015) Um supersapo faz uma sequência de saltos dobrando sempre, a cada salto, a distância do salto anterior. No 1º, 2º e 3º saltos, o supersapo saltou, respectivamente, 5 cm, 10 cm e 20 cm. O salto em que o supersapo saltou pela primeira vez mais de 10 metros foi o:
A) 8º salto;
B) 9º salto;
C) 10º salto;
D) 11º salto;
E) 12º salto;

Comentários:
Note que a distâncias saltadas pelo supersapo formam uma **progressão geométrica de razão igual a 2**.

- 1ª salto (a_1) é igual a 5 cm.
- 2ª salto (a_2) é igual a 10 cm.
- 3ª salto (a_3) é igual a 20 cm.
...
- 8ª salto (a_8) é igual a x cm.
- 9ª salto (a_9) é igual a y cm.

Como estamos procurando **a primeira vez que ele salta mais do que 10 m (1000 cm)**, então vamos começar encontrando quanto ele salta no 8º salto (primeiro salto das alternativas). Para isso, devemos usar **a fórmula do termo geral da PG**.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\mathrm{a_8 = a_1 \cdot q^7} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a_8 = 5 \cdot 2^7} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a_8 = 5 \cdot 128} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a_8 = 640\ cm}$$

Note que **o 8º salto ainda é <u>menor</u> do que 1000 cm** (10 m). Vamos ver o 9º salto.

$$\mathrm{a_9 = a_1 \cdot q^8} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a_8 = 5 \cdot 2^8} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a_8 = 5 \cdot 256} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a_8 = 1280\ cm}$$

Agora, sim! **O nono salto é o primeiro maior que 10 metros! Será um salto de 12,8 m!** Podemos marcar a alternativa B.

Gabarito: LETRA B.

25. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Observe a expressão abaixo.

$$\boldsymbol{S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots}$$

Considerando-se um número muito grande de termos sendo adicionados, o valor de S tende a:

A) 1
B) 2
C) 4
D) 8
E) ∞

Comentários:

Ora, sempre que você ver somas infinitas em sua prova, pense na soma dos termos de uma PG infinita. **Ela pode ser sua saída!** Note que a soma S do enunciado é a soma dos termos de uma PG com **primeiro termo igual $(\boldsymbol{a_1})$ a 1** e **razão (q) igual a 1/2**.

Aprendemos que quando $|q| < 1$, então **a soma dos termos de uma PG infinita irá convergir** para um número e essa soma pode ser encontrada por meio da expressão:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

É exatamente a fórmula que precisamos. **Vamos substituir os valores de $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{q}$**.

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \qquad \rightarrow \qquad S_\infty = 2$$

Gabarito: LETRA B.

26. (FGV/SEDUC-AM/2014) Considere a sequência de $\boldsymbol{N+1}$ termos: $\mathbf{1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{N-1}, 3^N}$

Seja $\boldsymbol{S_N}$ a soma dos N primeiros termos dessa sequência.

O valor de $\mathbf{3^N} - \boldsymbol{S_N}$ é

A) menor do que zero.
B) maior do que zero e menor do que S_N.
C) maior do que S_N e menor do que $\frac{3^N}{2}$
D) maior do que $\frac{3^N}{2}$ e menor do que S_{N+1}.
E) igual a S_N+1.

Comentários:

A sequência do enunciado é uma progressão geométrica de **primeiro termo (a_1) igual a 1 e de razão (q) igual a 3**. Vimos na teoria que **a soma dos n primeiros termos da PG** é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Logo, **substituindo a_1 e q**, então ficamos com:

$$S_N = \frac{1 \cdot (3^N - 1)}{3 - 1} \quad \rightarrow \quad S_N = \frac{3^N - 1}{2}$$

Queremos o valor de $\mathbf{3^N - S_N}$:

$$E = 3^N - S_N \quad \rightarrow \quad E = 3^N - \left(\frac{3^N}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad E = \frac{3^N}{2} + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad E = \frac{3^N + 1}{2}$$

Nesse ponto da questão, é interessante olharmos para as alternativas.

- **E não é menor que zero** (pois é um número positivo). Com isso, descartamos a A.

- **E não é menor que S_N**. Note que o numerador da expressão E é maior. Logo, descartamos a B.

- **E não é menor que $\frac{3^N}{2}$**. Note que o numerador da expressão E é maior. Logo, descartamos a C.

Para marcarmos entre a D ou a E, seria interessante calcularmos $S_N + 1$

$$S_N + 1 = \frac{3^N - 1}{2} + 1 \quad \rightarrow \quad S_N + 1 = \frac{3^N + 1}{2}$$

Percebemos que **$S_N + 1$ tem o mesmo valor que E**, de forma que podemos já marcar a alternativa correta.

Gabarito: LETRA E.

27. (FGV/DETRAN MA/2013) Observe as progressões (a_n) e (b_n), n = 1, 2, 3, ... a seguir:

a_n	1	5	9	13	17	...
b_n	1	2	4	8	16	...

A diferença entre os vigésimos quintos termos dessas progressões, ou seja, $b_{25} - a_{25}$.

A) é menor do que 10^2.
B) fica entre 10^2 e 10^4.
C) fica entre 10^4 e 10^6.
D) fica entre 10^6 e 10^8.
E) é maior do que 10^8.

Comentários:

(a_n) é uma progressão aritmética de **primeiro termo (a_1) igual a 1 e razão (r) igual a 4**.

(b_n) é uma progressão geométrica de **primeiro termo (b_1) igual a 1 e razão (q) igual a 2**.

Para determinarmos a_{25}, precisamos usar a **fórmula do termo geral da PA**.

$$a_{25} = a_1 + 24r$$

Usando, os valores de a_1 e r, ficamos com:

$$a_{25} = 1 + 24 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad a_{25} = 1 + 96 \quad \rightarrow \quad a_{25} = 97$$

Por sua vez, para determinarmos b_{25}, precisamos usar a **fórmula do termo geral da PG**.

$$b_{25} = a_1 q^{24}$$

Usando, os valores de b_1 e q, ficamos com:

$$b_{25} = 1 \cdot 2^{24} \quad \rightarrow \quad b_{25} = 2^{24}$$

Ora, 2^{24} *é muita coisa né?* Logo, vamos começar a fazer uns "malabarismos". Veja.

$$b_{25} = (2^{12})^2$$

2^{12} é mais tranquilo! Lembre-se que $2^{12} = 4096$.

$$b_{25} = 4096 \cdot 4096 \quad \rightarrow \quad b_{25} = 16.777.216$$

Professor, isso é um absurdo! Nunca iria fazer essa multiplicação no braço!

A verdade é que não precisa, moçada! Podemos tentar aproximar os números, afinal, **devemos apenas indicar o intervalo em que está o valor**. Para isso, vamos fazer a seguinte aproximação:

$$2^{12} \cong 4000$$

Assim,

$$b_{25} \cong (4000)^2 \quad \rightarrow \quad b_{25} \cong (4 \cdot 1000)^2 \quad \rightarrow \quad b_{25} \cong 16 \cdot 1.000.000 \quad \rightarrow \quad b_{25} \cong 16 \cdot 10^6$$

Note que **a_{25} é praticamente nada comparado a b_{25}**. Sendo assim,

$$b_{25} - a_{25} \cong b_{25}$$

Como **b_{25} está entre 10^6 e 10^8**, podemos marcar a alternativa D.

Gabarito: LETRA D.

28. (FGV/SEE-PE/2016) Considere o conjunto de números $\{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2015}, 2^{2016}\}$. A diferença entre o maior elemento desse conjunto e a soma dos demais elementos é

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 2^{2015}
E) -2^{2015}

Comentários:

O conjunto de números é formado por termos de uma PG cujo primeiro termo (a_1) é 1 e razão (q) é 2. **O maior elemento desse conjunto é 2^{2016}**. Por sua vez, a soma dos demais elementos pode ser encontrada usando **a fórmula da soma de termos de uma PG:**

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Do elemento 1 até o 2^{2015} são 2016 termos. Lembre-se que 1 é 2^0, sendo assim, o expoente do 2 vai de 0 a 2015. Por esse motivo, teremos 2016 termos e não 2015. Com isso,

$$S_{2016} = \frac{1 \cdot (2^{2016} - 1)}{2 - 1} \quad \rightarrow \quad S_{2016} = 2^{2016} - 1$$

Queremos **a diferença entre o maior elemento e a soma** encontrada acima.

$$Dif = 2^{2016} - (2^{2016} - 1) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Dif = 1}$$

Gabarito: LETRA B.

29. (FGV/SEDUC-SP/2013) Considere a soma $S = 175 + 140 + 112 + \ldots$ em que cada parcela é 20% menor do que a anterior. Se o número de parcelas crescer indefinidamente o valor de S tenderá para o número

A) 845.
B) 855.
C) 865.
D) 875.
E) 885.

Comentários:

Note que a questão está somando infinitos termos. Quando você se deparar com situações assim, você já deve ligar a parte do seu cérebro **relacionada às <u>progressões geométricas</u>** (*hahaha*). Ressalto que o problema poderá tratar de outras coisas... Mas, no contexto de provas de concursos, **é <u>quase</u> certo** que as somas infinitas que aparecerem estejam relacionadas com PG, tudo bem? Observe o seguinte:

$$q = \frac{140}{175} = \frac{112}{140} = 0{,}8$$

Os números que estão sendo somados são termos de uma progressão geométrica de **primeiro termo (a_1) igual a 175** e **razão (q) igual a 0,8**. Quando temos uma razão tal que **|q|<1,** a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita converge para um valor. Esse valor pode ser encontrado por meio da seguinte expressão:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Substituindo os valores de a_1 e q.

$$S_\infty = \frac{175}{1-0{,}8} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{175}{0{,}2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_\infty = 875}$$

Gabarito: LETRA D.

VUNESP

30. (VUNESP/EsFCEx/2021) Três números cuja soma é 36 formam uma progressão aritmética de razão r, sendo $r > 0$. Se somarmos 2 ao terceiro termo dessa progressão aritmética, sem alterar os outros dois termos, eles vão formar uma progressão geométrica de razão q. O resultado da operação $\sqrt{\frac{r}{q}}$ é:

A) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Comentários:
Vamos trabalhar com a primeira informação:

- Três números cuja soma é 36 formam uma progressão aritmética de razão r.

$$(a_1, a_2, a_3)$$

Podemos ainda escrever essa mesma sequência da seguinte forma:

$$(a_2 - r, \qquad a_2, \qquad a_2 + r)$$

Quando **somamos esses três números**, ficamos com:

$$(a_2 - r) + a_2 + (a_2 + r) = 36$$

$$3a_2 = 36 \quad \rightarrow \quad a_2 = 12$$

Com isso, a sequência fica assim:

$$(12 - r, \qquad 12, \qquad 12 + r)$$

Agora vamos para a segunda informação:

- **Se somarmos 2 ao terceiro termo dessa progressão aritmética, sem alterar os outros dois termos, eles vão formar uma progressão geométrica de razão q.**

$$(12 - r, \qquad 12, \qquad 14 + r)$$

Agora, como **somamos 2 ao <u>terceiro termo</u>**, ficamos com uma PG. Nessas situações, sabemos que **o quadrado do termo central é igual ao produto dos outros dois**.

$$(12 - r)(14 + r) = 12^2$$

$$168 + 12r - 14r - r^2 = 144$$

$$-2r - r^2 = -24 \quad \rightarrow \quad r^2 + 2r - 24 = 0$$

Opa! Precisamos resolver uma **equação de segundo grau para encontrar r**. Para isso, usaremos Bhaskara.

- Cálculo do Discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) \quad \rightarrow \quad \Delta = 4 + 96 \quad \rightarrow \quad \Delta = 100$$

- Cálculo das Raízes:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad r = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{-2 \pm 10}{2}$$

$$r' = \frac{-2 - 10}{2} \quad \rightarrow \quad r' = -\frac{12}{2} \quad \rightarrow \quad r' = -6$$

$$r'' = \frac{-2 + 10}{2} \quad \rightarrow \quad r'' = \frac{8}{2} \quad \rightarrow \quad r'' = 4$$

Você deve estar se perguntando qual dos dois é o valor de r que vamos considerar! Veja que **o enunciado disse que r é <u>positivo</u> ($r > 0$)**. Sendo assim, vamos trabalhar apenas com $r = 4$. Com r determinado, escrevemos novamente a PG.

$$(12 - 4, \qquad 12, \qquad 14 + 4)$$

$$(8, \qquad 12, \qquad 18)$$

Para encontrar a razão dessa PG, **dividimos um termo pelo seu anterior**:

$$q = \frac{12}{8} \quad \rightarrow \quad q = \frac{3}{2}$$

Analogamente, também poderíamos ter feito:

$$q = \frac{18}{12} \quad \rightarrow \quad q = \frac{3}{2}$$

Com r e q determinados, podemos encontrar **o valor da expressão** pedida no enunciado.

$$E = \sqrt{\frac{r}{q}} \quad \rightarrow \quad E = \sqrt{\frac{4}{\frac{3}{2}}} \quad \rightarrow \quad E = \sqrt{\frac{8}{3}} \quad \rightarrow \quad E = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Gabarito: LETRA A.

31. (VUNESP/IPSM SJC/2018) Na sequência numérica ..., $-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$, o quinto termo é -8. O produto do primeiro com o décimo quinto termos dessa sequência é igual a

A) -2
B) -1
C) 1.
D) 2.
E) 4.

Comentários:

A sequência numérica do enunciado é uma **progressão geométrica de razão igual a -1/2**. Para perceber isso, devemos dividir um termo pelo seu anterior e notar que **essa razão é constante**.

$$q = \frac{4}{-8} \quad \rightarrow \quad q = -\frac{1}{2}$$

$$q = \frac{-2}{4} \quad \rightarrow \quad q = -\frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{-2} \quad \rightarrow \quad q = -\frac{1}{2}$$

Ademais, **o enunciado disse que quinto termo é o -8**. Lembre-se da fórmula geral do termo da PG:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Com $n = 5$, ficamos com:

$$a_5 = a_1 q^4$$

Já sabemos quem é a_5 e q, podemos determinar a_1.

$$-8 = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \quad \rightarrow \quad 8 = a_1 \cdot \frac{1}{16} \quad \rightarrow \quad a_1 = 128 \quad \rightarrow \quad a_1 = 2^7$$

Também precisamos encontrar **o décimo quinto termo** dessa sequência. Para isso, só usarmos $n = 15$ na fórmula do termo geral.

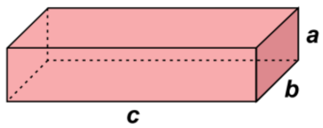
$$a_{15} = a_1 \cdot q^{14} \quad \rightarrow \quad a_{15} = 2^7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{14} \quad \rightarrow \quad a_{15} = \frac{2^7}{2^{14}} \quad \rightarrow \quad a_{15} = \frac{1}{2^7}$$

O enunciado pergunta qual é o **produto entre a_1 e a_{15}**.

$$a_1 \cdot a_{15} = 2^7 \cdot \left(\frac{1}{2^7}\right) \quad \rightarrow \quad a_1 \cdot a_{15} = 1$$

Gabarito: LETRA C.

32. (VUNESP/PM-SP/2015) A figura seguinte mostra um reservatório com formato de paralelepípedo reto-retângulo, cujas dimensões a, b e c estão, nessa ordem, em Progressão Geométrica crescente, sendo sua soma igual a 10,5 m.



Se o volume desse reservatório é 27 m³, então a área da sua base bc é, em m², igual a

A) 27
B) 26
C) 18
D) 15
E) 12

Comentários:

O enunciado disse que as dimensões do paralelepípedo **estão em progressão geométrica**. Sendo assim,

$$(a, \quad b, \quad c)$$

Considere que $\boldsymbol{q}$ **seja a razão dessa PG**. Com isso, podemos reescrever os termos dessa forma:

$$\left(\frac{b}{q}, \quad b, \quad bq\right)$$

O volume de um paralelepípedo é o **produto de suas três dimensões**.

$$\frac{b}{q} \cdot b \cdot bq = 27 \quad \rightarrow \quad b^3 = 27 \quad \rightarrow \quad b = 3$$

Pronto! Já descobrimos uma das dimensões. A sequência, em termos de q, fica assim:

$$\left(\frac{3}{q}, \quad 3, \quad 3q\right)$$

Agora, vamos usar a informação de que **a soma desses lados é igual a 10,5**.

$$\frac{3}{q} + 3 + 3q = 10{,}5 \quad \rightarrow \quad 3q + \frac{3}{q} - 7{,}5 = 0$$

Multiplicando tudo por q para **sumir com esse q do denominador**.

$$3q^2 - 7{,}5q + 3 = 0$$

Uma equação do segundo grau! Podemos **simplificá-la dividindo-a por 3**.

$$q^2 - 2{,}5q + 1 = 0$$

Esse -2,5 ainda está incomodando. Vamos **multiplicar tudo por 2**.

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

Pronto! Agora, **vamos resolvê-la usando Bhaskara**.

- **Cálculo do Discriminante:**

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \Delta = 25 - 16 \quad \rightarrow \quad \Delta = 9$$

- **Cálculo das Raízes:**

$$q = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad q = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \quad \rightarrow \quad q = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$q' = \frac{5-3}{4} \quad \rightarrow \quad q' = \frac{2}{4} \quad \rightarrow \quad q' = \frac{1}{2}$$

$$q'' = \frac{5+3}{4} \quad \rightarrow \quad q'' = \frac{8}{4} \quad \rightarrow \quad q'' = 2$$

O enunciado nos disse que **a PG é crescente**. Assim, só podemos ter $q = 2$. Dessa forma, temos que:

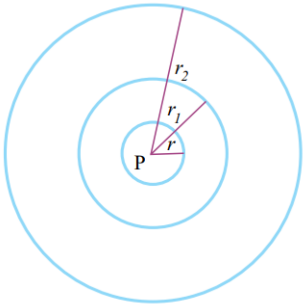
$$\left(\frac{3}{2}, \quad 3, \quad 3 \cdot 2\right) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{3}{2}, \quad 3, \quad 6\right)$$

Queremos encontrar a área bc.

$$bc = 3 \cdot 6 \quad \rightarrow \quad bc = 18$$

Gabarito: LETRA C.

33. (VUNESP/PM-SP/2014) Planejando uma operação de policiamento ostensivo, um oficial desenhou em um mapa três círculos concêntricos de centro P, conforme mostrado na figura.



Sabe-se que as medidas dos raios r, r_1 e r_2 estão, nessa ordem, em progressão geométrica. Se $r + r_1 + r_2 = 52$ cm, e $r \cdot r_2 = 144$ cm², então $r + r_2$ é igual, em centímetros, a

A) 36.
B) 38.
C) 39.
D) 40.
E) 42.

Comentários:

Opa, beleza! Os raios estão em **progressão geométrica**. Considere que **a razão dessa PG seja q**. Dessa forma, podemos escrever essa sequência assim:

$$\left(\frac{r_1}{q}, \qquad r_1, \qquad r_1 q\right)$$

O enunciado nos falou que $r \cdot r_2 = 144$. Logo,

$$\frac{r_1}{q} \cdot r_1 q = 144 \quad \rightarrow \quad r_1^2 = 144 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r_1 = 12}$$

Além disso, temos que:

$$r + r_1 + r_2 = 52$$

Usando que $r_1 = 12$:

$$r + 12 + r_2 = 52 \quad \rightarrow \quad r + r_2 = 40$$

Essa é justamente **a soma buscada pela questão**! Podemos marcar a alternativa D.

Gabarito: LETRA D.

34. (VUNESP/PC-SP/2013) O 1º elemento de uma sequência numérica é 8. O 2º e o 3º elementos dessa mesma sequência são, respectivamente, 4 e 2. Essa sequência continua, mantendo sempre a mesma lógica, e tem $1/2048$ como o último elemento, conforme é mostrado a seguir:

$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2048}$$

O número total de elementos dessa sequência é

A) 13.
B) 12.
C) 11.
D) 14.
E) 15.

Comentários:
Pessoal, essa sequência é uma **progressão geométrica decrescente**! Para perceber isso, devemos pegar um termo e dividir pelo anterior. Note que **essa divisão sempre dará o mesmo número**, que é justamente quem chamamos de razão.

$$q = \frac{4}{8} \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{2}{4} \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

Para encontrar o total de elementos dessa sequência, podemos usar **a fórmula do termo geral da PG**.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Vamos usar que $a_n = 1/2048$, $a_1 = 8$ e $q = 1/2$. Nossa tarefa é determinar "n".

$$\frac{1}{2048} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

É interessante notar que **estamos trabalhando apenas com potências de 2**.

$$2^{-11} = 2^3 \cdot 2^{1-n} \qquad \rightarrow \qquad 2^{4-n} = 2^{-11}$$

Para que essa igualdade seja verificada, como temos a mesma base, **os expoentes também devem ser iguais**.

$$4 - n = -11 \qquad \rightarrow \qquad n = 15$$

Logo, **a sequência em questão possui 15 termos**.

Gabarito: LETRA E.

35. (VUNESP/PREF.SJC/2012) Em 2011, alunos de uma escola americana, conseguiram dobrar um rolo de papel higiênico de 3,9 km de extensão 13 vezes. A grande dificuldade dessa brincadeira é que a curvatura lateral faz o tamanho aumentar mais rapidamente que a simples sobreposição de camadas.

Para evitar o problema da curvatura lateral, um grupo de estudantes decidiu sempre recortar ao meio o bloco de papel e sobrepor as duas partes, conforme exemplifica o desenho. Assim, a partir de uma folha de 4 metros, o grupo efetuou dois recortes e, a cada recorte, sobrepôs as partes, ficando com um comprimento final de 1 m.

Suponha que esse grupo de estudantes quisesse recortar um rolo de papel higiênico 19 vezes, de acordo com o exemplo, e que tivessem calculado que o comprimento final ficaria em 1 m. O comprimento inicial desse rolo precisaria ser, em km, aproximadamente

A) 50.
B) 500.
C) 5000.
D) 50000.
E) 500000.

Comentários:

Beleza!! Essa é uma questão **de progressão geométrica** em que não sabemos o primeiro termo, **mas conhecemos a razão e o último termo**!!

$$(a_1, a_2, \ldots, 4, 2, 1)$$

Observe que **a razão dessa PG é igual a 1/2**. Isso acontece pois o papel é sempre cortado na metade!! Como esse corte é feito 19 vezes, então **podemos concluir que essa sequência tem 20 termos**. Para entender isso, olhe para a foto da questão. Veja que temos três comprimentos, mas apenas dois cortes foram feitos.

Diante disso, podemos escrever, pela fórmula do termo geral:

$$a_{20} = a_1 q^{19}$$

Como $a_{19} = 1$ e $q = \frac{1}{2}$, ficamos com:

$$1 = a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \quad \rightarrow \quad a_1 = 2^{19}$$

Pronto, determinamos **qual deve ser o comprimento inicial do rolo**. A dificuldade agora é descobrir quanto vale 2^{19}. Eu recomendo muito que você decore **as potências de base 2 do expoente 0 até o 10**. Elas caem muito e prova e **vai te poupar um bom tempo de multiplicação**! Note que,

$$2^{19} = 2^9 \cdot 2^{10} = 512 \cdot 1024 = 524.288$$

O valor que encontramos está em metros. Para **transformá-lo em quilômetros**, devemos **dividi-lo por 1000**.

$$\frac{524.288}{1000} = 524{,}288 \text{ km}$$

A alternativa mais próxima é a B que trouxe 500 km.

Gabarito: LETRA B.

36. (VUNESP/PREF. SJC/2012) A solução real da equação $x+\frac{2x}{3}+\frac{4x}{9}+\frac{8x}{27}+\frac{16x}{81}+\ldots=3$ é

A) 1/4
B) 1/2
C) 1
D) 3/2
E) 2

Comentários:

Questão bem legal! Vamos começar colocando o "x" em evidência.

$$x\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\ldots\right)=3$$

Note que a soma dentro do parênteses é infinita. Nessas situações, você sempre deverá pensar em progressão geométrica. *Ela deve ser sua primeira tentativa de saída para o problema!* Isso acontece pois a soma dos termos de uma PG infinita pode ser encontrada por meio de uma fórmula simples:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-q}$$

Muitos alunos ficam perdidos quando se deparam uma soma infinita, acham que é impossível resolver. No entanto, moçada, **se identificarmos o primeiro termo e a razão da progressão**, pronto! Sabemos calcular essa soma infinita!!

Para ter certeza que é uma progressão geométrica, devemos dividir cada um dos termos da soma pelo seu anterior. Se essa divisão **resultar sempre no mesmo número**, então estaremos diante de uma PG e **a razão será exatamente o valor dessa divisão**. Por exemplo,

$$q=\frac{\frac{2}{3}}{1}\quad\rightarrow\quad q=\frac{2}{3}$$

$$q=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}}\quad\rightarrow\quad q=\frac{2}{3}$$

Pronto! Temos ainda mais um condição para garantir que essa soma vai convergir para o número e que podemos usar a fórmula. **O módulo da razão deve ser menor que 1 ($|q|<1$).** Ora, veja que 2/3=0,666.... Sendo assim, estamos dentro da condição e podemos aplicar a fórmula!

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-q}\quad\rightarrow\quad S_\infty=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\quad\rightarrow\quad S_\infty=3$$

Podemos usar esse valor na equação,

$$x\cdot 3=3\quad\rightarrow\quad x=1$$

Gabarito: LETRA E.

37. (VUNESP/PM-SP/2007) Um grupo de garotos possui uma caixa com 630 bolinhas de gude e faz a seguinte brincadeira: o 1º garoto retira 10 bolinhas; o 2º retira o dobro de bolinhas retiradas pelo 1º; o 3º retira o dobro de bolinhas retiradas pelo 2º e assim sucessivamente cada um retirando o dobro de bolinhas retiradas pelo seu anterior, até o último garoto. Sabendo que não sobrou nenhuma bolinha na caixa e todos os garotos retiraram a quantidade correta de bolinhas que lhes cabia, pode-se afirmar que o número de garotos que participou dessa brincadeira foi

A) 5.
B) 6.
C) 7.
D) 8.
E) 9.

Comentários:

Seja a_1 a quantidade de bolinhas retiradas pelo primeiro garoto
Seja a_2 a quantidade de bolinhas retiradas pelo segundo garoto.
Seja a_3 a quantidade de bolinhas retiradas pelo terceiro garoto.

Prosseguindo assim, temos uma sequência formada pela quantidade de bolinhas retiradas por cada um dos garotos.

$$(10, 20, 40, 80, \dots)$$

Como cada garoto tira o dobro de bolinhas do que o anterior, então estamos diante uma **progressão geométrica de razão igual a 2**. **A soma de todas as bolinhas retiradas deve totalizar as 630**. Com isso, devemos usar a fórmula da soma dos n termos de uma PG.

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Substituindo $S_n = 630$, $a_1 = 10$ e $q = 2$, queremos determinar "n".

$$630 = \frac{10 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \quad \rightarrow \quad 2^n - 1 = 63 \quad \rightarrow \quad 2^n = 64$$

$$2^n = 2^6 \quad \rightarrow \quad n = 6$$

Pronto! Concluímos que **6 garotos participaram da brincadeira**.

Gabarito: LETRA B.

38. (VUNESP/PC-SP/2013) Observe a sequência numérica:

$$\frac{1}{1.000.000}, \quad \frac{1}{100.000}, \quad \frac{1}{10.000}, \quad \frac{1}{1.000}, \dots$$

Sabendo-se que o 1º elemento dessa sequência é 1/1.000.000, o 2º elemento é 1/100.000, e assim sucessivamente, o primeiro número natural dessa sequência corresponderá ao

A) 9º elemento.

B) 10º elemento.

C) 7º elemento.

D) 8º elemento.

E) 11º elemento.

Comentários:

Note que a sequência do enunciado é uma **progressão geométrica crescente de razão igual a 10**. Com isso, **o primeiro número natural dessa sequência certamente será o 1**. Para encontrar qual será a sua ordem, podemos usar a fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Usando $a_n = 1$, $a_1 = 1/1.000.000$ e $q = 10$, podemos determinar "n".

$$1 = \frac{1}{1000000} \cdot 10^{n-1} \quad \rightarrow \quad 10^{-6} \cdot 10^{n-1} = 10^0 \quad \rightarrow \quad 10^{n-7} = 10^0$$

Como **as bases são iguais**, podemos igualar os expoentes.

$$n - 7 = 0 \quad \rightarrow \quad n = 7$$

Logo, **o primeiro número natural será o 7º elemento**.

Gabarito: LETRA C.

Outras Bancas

39. (INST. MAIS/IPREV. SANTOS/2022) Seja a sequência:

$$\boldsymbol{(5; a; a + 60; \ldots)}$$

Sabendo que essa sequência consiste em uma progressão geométrica e que a é um número par, é correto afirmar que o seu 4º termo vale

A) 250

B) 320

C) 420

D) 480

Comentários:

Sabemos que se temos três termos consecutivos a_1, a_2 e a_3 em progressão geométrica, então vale a relação:

$$\boldsymbol{a_2^2 = a_1 \cdot a_3}$$

Do enunciado, podemos tirar $a_1 = 5$, $a_2 = a$ e $a_3 = a + 60$. Substituindo,

$$a^2 = 5 \cdot (a + 60) \quad \rightarrow \quad a^2 = 5a + 300 \quad \rightarrow \quad a^2 - 5a - 300 = 0$$

Temos uma **equação de segundo grau**, vamos **usar Bhaskara** para resolvê-la.

- Cálculo do Discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-300) \quad \rightarrow \quad \Delta = 25 + 1200 \quad \rightarrow \quad \Delta = 1225$$

- Cálculo das Raízes

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a_e} \quad \rightarrow \quad a = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1225}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad a = \frac{5 \pm 35}{2}$$

$$a' = \frac{5 + 35}{2} \quad \rightarrow \quad a' = \frac{40}{2} \quad \rightarrow \quad a' = 20$$

$$a'' = \frac{5 - 35}{2} \quad \rightarrow \quad a'' = \frac{-30}{2} \quad \rightarrow \quad a'' = -15$$

Como o enunciado fala que **"a" é par**, então

$$\boxed{a = 20}$$

Com o valor de "a", podemos escrever nossa progressão geométrica.

$$(\mathbf{5}; \mathbf{20}; \mathbf{80}; \ldots)$$

Observe que se trata de uma **PG de razão igual a 4**. Sendo assim, o quarto termo é dado por:

$$a_4 = a_3 q \quad \rightarrow \quad a_4 = 80 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad a_4 = 320$$

Gabarito: LETRA B.

40. (CETREDE/UFC/2022) Considere a soma $S = 1 + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \ldots$.

Marque a alternativa que corresponde ao valor de S.

A) 977/90
B) 97/90
C) 17/15
D) 177/90

Comentários:

Pessoal, sempre que a gente se deparar com somas infinitas, é **super válido pensarmos naquela fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG**. Lembre-se que poderemos utilizá-la quando $|q| < 1$. Note que os seguintes termos formam uma PG infinita:

$$\left(\frac{7}{10^2}, \frac{7}{10^3}, \frac{7}{10^4}, \frac{7}{10^5}, \dots\right)$$

Como você pode ter observado, a razão dessa PG é:

$$q = \frac{1}{10}$$

Sendo assim, **temos uma PG infinita com $|q| < 1$**, podemos usar a fórmula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Substituindo os valores de a_1 e q:

$$S_\infty = \frac{\frac{7}{10^2}}{1-\frac{1}{10}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{\frac{7}{10^2}}{\frac{9}{10}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{7}{90}$$

A soma do enunciado é:

$$\boldsymbol{S = 1 + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \dots}$$

Logo,

$$S = 1 + S_\infty \quad \rightarrow \quad S = 1 + \frac{7}{90} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{S = \frac{97}{90}}}$$

Gabarito: LETRA B.

41. (INST. MAIS/CM PRAIA GRANDE/2022) Carmem começou a juntar dinheiro em seu cofrinho. No 1º domingo do ano ela depositou certa quantidade e todo domingo posterior ela dobrou a quantidade depositada no domingo anterior. Sabendo que no 7º domingo ela depositou R$ 384,00 em seu cofrinho, assinale a alternativa que apresenta a quantia total que Carmem possuía em seu cofrinho um dia antes do 7º domingo.

A) R$ 192,00.
B) R$ 378,00.
C) R$ 540,00.
D) R$ 762,00.

Comentários:

Opa, questão que contextualizou bem as **progressões geométricas**!

Se Carmem **dobra a quantidade** depositada no cofre a cada domingo, então **a razão dessa PG é igual a 2**.

$$q = 2$$

Além disso, como o enunciado afirma **que no 7º domingo ela depositou R$ 384,00**. Com isso,

$$a_7 = 384$$

Da fórmula do termo geral, podemos encontrar **quanto ela depositou no 1º domingo**, isto é, a_1.

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{384}{2^6} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{384}{64} \quad \rightarrow \quad a_1 = 6$$

Para determinar quanto Carmem tem no cofre um dia antes do 7º domingo, basta **somarmos os 6 primeiros** termos dessa PG.

$$S_6 = \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} \quad \rightarrow \quad S_6 = \frac{6 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} \quad \rightarrow \quad S_6 = 6 \cdot 63 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{S_6 = 378}}$$

Gabarito: LETRA B.

LISTA DE QUESTÕES

Progressão Aritmética

CEBRASPE

(CESPE/TELEBRAS/2022) Texto para as próximas questões

João acaba de assumir um cargo de assistente administrativo em uma empresa e foi designado para a tarefa de examinar as demandas de clientes e dar a elas o devido encaminhamento. Considerando que João ainda não tem experiência com essa tarefa, seu chefe decide que passará para ele, no primeiro dia, 10 demandas, no segundo, 15, no terceiro, 20, e assim sucessivamente, crescendo segundo uma Progressão Aritmética até o oitavo dia, quando então estabilizará o número de demandas diárias. Para executar sua tarefa, João leva sempre 5 minutos para tomar conhecimento dos detalhes de cada demanda, enquanto que a fase de encaminhamento (decidir o que fazer e executar os procedimentos necessários) leva 12 minutos nas demandas do primeiro dia, 6 minutos nas demandas do segundo, 3 minutos nas demandas do terceiro dia, e assim sucessivamente, decrescendo segundo uma Progressão Geométrica até o oitavo dia, quando então o tempo de encaminhamento se estabiliza. Com base nessa situação hipotética, julgue os itens seguinte.

1. (CESPE/TELEBRAS/2022) Quando estabilizar sua tarefa, João estará recebendo para exame mais de 50 demandas de clientes por dia.

2. (CESPE/TELEBRAS/2022) A sequência formada pelos tempos diários que João leva para examinar todas as demandas de cada dia forma uma Progressão Aritmética.

3. (CESPE/TELEBRAS/2022) Julgue o item a seguir, relacionados a problemas aritméticos.

Se, para uma progressão aritmética, a soma dos 2 primeiros termos é 100 e a soma dos 6 primeiros termos é 276, então existirá um $n \in N$ tal que a soma dos primeiros termos dessa progressão aritmética será negativa.

4. (CESPE/IBGE/2021) No desenvolvimento de uma pesquisa, Carlos, agente de pesquisas e mapeamento, durante 20 dias consecutivos, visitou diversos domicílios distintos, de acordo com o seguinte esquema:

- no primeiro dia da pesquisa, Carlos visitou 12 domicílios distintos;
- do segundo ao sétimo dia da pesquisa, Carlos visitou 9 domicílios distintos por dia;
- do oitavo ao vigésimo dia da pesquisa, Carlos visitou 8 domicílios distintos por dia.

Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

I. Para $1 \leq n \leq 20$, denotando-se por dn a quantidade de domicílios visitados por Carlos no n-ésimo dia da pesquisa, tem-se que $\{d_1, d_2, ..., d_{20}\}$ é uma progressão aritmética.

II. Para $1 \leq n \leq 20$, denotando-se por tn a quantidade total de domicílios visitados por Carlos desde o primeiro até o n-ésimo dia da pesquisa, tem-se que $\{t_1, t_2, \ldots, t_{20}\}$ é uma progressão aritmética.

III. No âmbito da pesquisa realizada, durante os 20 dias de sua duração, Carlos visitou 170 domicílios distintos.

Assinale a opção correta.

A) Apenas o item III está certo.
B) Apenas os itens I e II estão certos.
C) Apenas os itens I e III estão certos.
D) Apenas os itens II e III estão certos.
E) Todos os itens estão certos.

5. (CESPE/PRF/2021) Em uma operação da PRF, foram fiscalizados: 20 veículos automotores até o fim da primeira hora; 60 veículos automotores até o fim da segunda hora; 120 veículos automotores até o fim da terceira hora; 200 veículos automotores até o fim da quarta hora; e 300 veículos automotores até o fim da quinta hora. O padrão numérico observado manteve-se até o fim da décima hora, quando, então, foi finalizada a operação. Considerando essa situação hipotética, julgue o item seguinte.

Considere que $\{q_n\}$, para n variando de 1 a 10, seja a sequência numérica formada pelas quantidades de veículos fiscalizados apenas no decorrer da n-ésima hora de realização da operação, ou seja, q_1 é a quantidade de veículos fiscalizados apenas no decorrer da primeira hora de realização da operação; q_2 é a quantidade de veículos fiscalizados apenas no decorrer da segunda hora de realização da operação; e assim por diante. Nessa situação, a sequência $\{q_n\}$, para n variando de 1 a 10, é uma progressão aritmética.

6. (CESPE/TJ-PR/2019) O protocolo de determinado tribunal associa, a cada dia, a ordem de chegada dos processos aos termos de uma progressão aritmética de razão 2: a cada dia, o primeiro processo que chega recebe o número 3, o segundo, o número 5, e assim sucessivamente. Se, em determinado dia, o último processo que chegou ao protocolo recebeu o número 69, então, nesse dia, foram protocolados

A) 23 processos.
B) 33 processos.
C) 34 processos.
D) 66 processos.
E) 67 processos.

7. (CESPE/IFF/2018) Se, em uma progressão aritmética, o segundo termo for igual a −1 e o quinto termo for igual a 11, então o décimo termo será igual a

A) 30.
B) 31.
C) 35.
D) 50.
E) 95.

8. (CESPE/FUB/2018) A tabela seguinte mostra as quantidades de livros de uma biblioteca que foram emprestados em cada um dos seis primeiros meses de 2017. A partir dessa tabela, julgue o próximo item.

Mês	1	2	3	4	5	6
Quantidade	50	150	250	250	300	200

Situação hipotética: Os livros emprestados no referido semestre foram devolvidos somente a partir de julho de 2017 e os números correspondentes às quantidades de livros devolvidos a cada mês formavam uma progressão aritmética em que o primeiro termo era 90 e razão, 30.

Assertiva: Nessa situação, mais de 200 livros foram devolvidos somente a partir de 2018.

9. (CESPE/SEDUC-AL/2018) Com relação a uma sequência numérica $a_1, a_2, \ldots, a_n$, julgue o item subsequente.

Se a sequência estiver em progressão aritmética com razão igual a 10 e $a_1 = 5$, então $a_{10} > 100$.

10. (CESPE/SEDUC-AL/2018) Com relação a uma sequência numérica $a_1, a_2, \ldots, a_n$, julgue o item subsequente.

Considere que a sequência seja formada pelos seguintes termos, nessa ordem: $10, 12, 15, 19, 24, 30, 37$. Nesse caso, a sequência numérica $b_j = a_{j+1} - a_j$, em que $j = 1, 2, \ldots, 6$ forma uma progressão aritmética.

CESGRANRIO

11. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) O quarto, o quinto e o sexto termos de uma progressão aritmética são expressos por $x + 1, x^2 + 4$ e $2x^2 + 3$, respectivamente. A soma dos dez primeiros termos dessa progressão aritmética é igual a

A) 260

B) 265

C) 270

D) 275

E) 280

12. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Em uma progressão aritmética, o décimo termo é o quádruplo do terceiro. Se o sétimo termo é igual a 19, então o segundo termo é igual a

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

13. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Considere uma progressão aritmética, em que $a_8 = a_2 + a_6$, e a soma dos 10 primeiros termos dessa sequência é igual a 330. Assim, a razão dessa progressão é igual a

A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 13

14. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) O número de passageiros que uma empresa de transporte aéreo tem transportado para uma petroleira vem diminuindo, segundo o padrão apresentado na tabela a seguir:

Ano	Número de passageiros transportados por ano
2014	10.000
2015	9.600
2016	9.200
2017	8.800

Supondo-se que esse padrão se mantenha, a previsão para a quantidade total de passageiros transportados por essa empresa, no período de 2014 a 2025, contando-se com os anos 2014 e 2025, será igual a

A) 86.400
B) 93.600
C) 103.800
D) 172.800
E) 187.200

15. (CESGRANRIO/BB/2018) Uma sequência numérica tem seu termo geral representado por a_n, para $n \geq 1$. Sabe-se que $a_1 = 0$ e que a sequência cujo termo geral é $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \geq 1$, é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $b_1 = 9$ e cuja razão é igual a 4. O termo a_{1000} é igual a

A) 2.002.991
B) 2.002.995
C) 4.000.009
D) 4.009.000
E) 2.003.000

16. (CESGRANRIO/BB/2018) Para obter uma amostra de tamanho 1.000 dentre uma população de tamanho 20.000, organizada em um cadastro em que cada elemento está numerado sequencialmente de 1 a 20.000, um pesquisador utilizou o seguinte procedimento:

I - calculou um intervalo de seleção da amostra, dividindo o total da população pelo tamanho da amostra: 20.000/1.000 = 20;

II - sorteou aleatoriamente um número inteiro, do intervalo [1, 20]. O número sorteado foi 15; desse modo, o primeiro elemento selecionado é o 15º;

III - a partir desse ponto, aplica-se o intervalo de seleção da amostra: o segundo elemento selecionado é o 35º (15+20), o terceiro é o 55º (15+40), o quarto é o 75º (15+60), e assim sucessivamente.

O último elemento selecionado nessa amostra é o

A) 19.997º
B) 19.995º

C) 19.965º
D) 19.975º
E) 19.980º

17. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2018) Se a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é S_n, então a expressão $S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n$ equivale a
A) $(n+1)(n+2)$
B) $n(n+1)$
C) S_n
D) S_{n+1}
E) 0

18. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2018) Considere n números inteiros, ímpares, positivos e diferentes, representados por $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tais que a soma $\sum_{i=1}^{N} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 10000$. Qual é o maior valor possível para n?
A) 99
B) 100
C) 1000
D) 4999
E) 5000

FGV

19. (FGV/CBM-AM/2022) A soma de 8 números inteiros consecutivos é 5764. O maior desses números é
A) 724.
B) 723.
C) 720.
D) 717.
E) 707.

20. (FGV/PM-SP/2021) Um sargento organizou um grupo de soldados em 16 filas, com 2 soldados na primeira fila e 3 soldados a mais em cada fila subsequente: 2, 5, 8, 11, ... Se o sargento organizasse o mesmo grupo de soldados em filas de 14 soldados cada uma, o número total de filas seria
A) 14.
B) 16.
C) 24.
D) 28.
E) 32.

21. (FGV/MPE-RJ/2019) Em uma rua retilínea há 20 postes espaçados igualmente entre si. A distância entre dois postes quaisquer consecutivos é de 15 metros. A distância entre o terceiro poste e o décimo sétimo poste é:
A) 225 metros
B) 210 metros
C) 195 metros

D) 180 metros
E) 165 metros

22. (FGV/PREF. ANGRA/2019) Laura construiu uma progressão aritmética decrescente começando com o número 500 e subtraindo 7 unidades sucessivamente:

$$\mathbf{500 \quad 493 \quad 486 \quad 479 \quad \ldots}$$

O primeiro número dessa sequência que possui apenas dois algarismos é
A) 98.
B) 97.
C) 96.
D) 95.
E) 94.

23. (FGV/ALERO/2018) Os números $x+1$, $2x-1$ e $x+5$, nessa ordem, são os três primeiros termos de uma progressão aritmética. O quarto termo dessa progressão aritmética é
A) 11.
B) 10.
C) 9.
D) 8.
E) 7.

24. (FGV/ALERO/2018) A soma dos termos da progressão aritmética 8, 11, 14 ,..., 2015, 2018 é
A) 680736.
B) 679723.
C) 678710.
D) 677697.
E) 676684.

25. (FGV/PREF. SALVADOR/2017) Duzentas e dez fichas são arrumadas em linhas, de tal forma que a primeira linha tenha 1 ficha, a segunda linha tenha 2 fichas, e assim sucessivamente, até a linha de número N, com exatamente, N fichas. A soma dos algarismos de N é
A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

26. (FGV/MPE-RJ/2016) Cláudio dividiu um círculo em 15 setores circulares. As medidas dos ângulos centrais desses setores, em graus, são números inteiros positivos e formam uma progressão aritmética. A menor medida possível, em graus, do ângulo central do menor desses setores é:
A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.

E) 5.

27. (FGV/SEE-PE/2016) Considere a sequência de números naturais que começa com 3, termina com 699 e a diferença entre cada termo, a partir do segundo e o anterior, é 6. O número de termos dessa sequência é

A) 115.
B) 116.
C) 117.
D) 118.
E) 119.

28. (FGV/PREF. NITEROI/2015) Na sequência abaixo, as diferenças entre termos consecutivos repetem-se alternadamente:

$$\mathbf{1, 5, 8, 12, 15, 19, 22, 26, 29, 33, \ldots}$$

O 100º elemento dessa sequência é:

A) 344.
B) 346.
C) 348.
D) 351.
E) 355.

29. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Arquimedes dividiu um círculo em nove setores circulares. As medidas dos ângulos centrais correspondentes a esses setores circulares, em graus, são números inteiros e formam uma progressão aritmética. A medida em graus de um desses nove ângulos é, obrigatoriamente:

A) 20
B) 30
C) 40
D) 45
E) 60

VUNESP

30. (VUNESP/PREF. VALINHOS/2019) André e Daniel receberam uma mesma quantia em dinheiro. Eles gastaram, desse dinheiro, a mesma quantia por dia durante vários dias. Após 57 dias, André ficou com R$ 43,00, e após 58 dias, Daniel ficou com R$ 29,00. O valor que cada um desses rapazes recebeu foi

A) R$ 613,00.
B) R$ 783,00.
C) R$ 841,00.
D) R$ 910,00.
E) R$ 1.002,00.

31. (VUNESP/PM-SP/2020) O percurso de um treinamento de corrida é composto por 5 etapas com distâncias diferentes em cada uma delas. Uma nova etapa sempre tem 100 metros a mais que a etapa

anterior. Sabendo que a quarta etapa do treinamento é percorrer 1200 metros, a distância total do percurso é igual a

A) 6 100 metros.
B) 5 900 metros.
C) 5 700 metros.
D) 5 500 metros.

32. (VUNESP/PREF. BARRETOS/2018) Dois colegas estão treinando para uma competição de ciclismo marcada para o mês que vem. A cada dia de treino, eles percorrem 5 km a mais do que percorreram no dia anterior. Sabendo-se que, em quatro dias de treino, eles percorreram um total de 150 km, é correto afirmar que no 4º dia, em km, eles percorreram

A) 30.
B) 35.
C) 45.
D) 50.
E) 55.

33. (VUNESP/PM-SP/2019) O alvo representado na figura é formado por três círculos concêntricos, ou seja, com centros em um mesmo ponto: um círculo menor, outro, intermediário, e um círculo maior:

Sabendo-se que as medidas dos raios dos três círculos formam uma progressão aritmética, e que a soma dessas medidas é 120 cm, o raio do círculo intermediário, em centímetros, mede

A) 25.
B) 30.
C) 35.
D) 40.
E) 45.

34. (VUNESP/SME-BARRETOS/2018) Observe a lei de formação das sequências numéricas I e II, em que alguns números são indicados por letras:

I. –14, –11, m, –5, –2, 1, n,
II. –5, p, 3, q, 11,15, 19

Desse modo, é correto afirmar que (m + n – p – q) é igual a

A) -12;
B) -11;
C) -10;

D) 6;
E) 10.

35. (VUNESP/PREF. SERTÃOZINHO/2018) Os números $\sqrt{9-k}, -k, 3-k$, nessa ordem, são os três primeiros elementos de uma progressão aritmética. Nessa sequência numérica, o valor do quarto elemento é igual a
A) 0.
B) 4.
C) 9.
D) 11.
E) 13.

36. (VUNESP/PREF. SERRANA/2018) Uma progressão aritmética tem o sexto elemento igual a 27 e o décimo terceiro elemento igual a 55. O quadragésimo elemento dessa sequência é igual a
A) 160.
B) 161.
C) 162.
D) 163.
E) 164.

37. (VUNESP/PM-SP/2017) Considere a elaboração, pelo Centro de Inteligência da Polícia Militar (CIPM), de um planejamento estratégico para a deflagração de uma operação policial ostensiva em uma região R, com alta incidência do tráfico de drogas. A questão abaixo tem como referência essa proposição.

Na região R, um terreno especialmente visado, na forma de um quadrilátero, tem medidas dos lados, em metros, dadas pela sequência $a+1, 2a, a^2-1, b$, cujos termos formam, nessa ordem, uma progressão aritmética crescente. Nessas condições, é correto afirmar que a soma das medidas dos lados desse terreno é, em metros, igual a
A) 20.
B) 24.
C) 26.
D) 28.
E) 30.

38. (VUNESP/CRO-SP/2015) Cada uma das duas sequências seguintes possui um padrão de formação:

$$(1, 3, 5, 7, \dots)$$
$$(0, 2, 4, 6, \dots)$$

A soma do milésimo termo da primeira sequência com o centésimo termo da segunda sequência é igual a
A) 1019.
B) 1947.
C) 1985.
D) 2033.
E) 2197.

39. (VUNESP/DESENVOLVE/2014) Dada a sequência de números (809; 910; 1011; 1112; ...) e observando a diferença entre dois números consecutivos, podemos determinar todos os outros termos. Considere as diferenças entre o 34º e o 32º termos, entre o 65º e o 62º termos e entre o 102º e o 97º. A soma dessas diferenças é igual a

A) 1001.
B) 1010.
C) 1110.
D) 1111.
E) 10100.

Outras Bancas

40. (NUCEPE/PM-PI/2022) No treinamento para o teste físico da PM, Marinho estabeleceu que sempre correria 500m a mais que no dia anterior. Sabe-se que, no terceiro dia de treinamento, ele percorreu 3200m. Quantos quilômetros Marinho percorrerá no décimo quinto dia de treinamento?

A) 9,2 km
B) 9,5 km
C) 9,8 km
D) 10,0 km
E) 10,2 km

41. (OBJETIVA/CM IPIRANGA DO NORTE/2022) Considerando-se que a razão de certa progressão aritmética é igual a 12, e que o seu primeiro termo é igual a 9, assinalar a alternativa que apresenta o valor da soma dos 8 primeiros termos dessa progressão:

A) 396
B) 400
C) 404
D) 408

42. (FAUEL/CM DOURADINA/2022) Mariana faz caminhada em seu bairro toda segunda-feira. A cada semana, ela aumenta 0,5 km no seu trajeto. Na primeira vez que caminhou, ela percorreu 800 m. Depois de 8 semanas, quantos km Mariana estará caminhando?

A) 2,3 km
B) 3,5 km
C) 4,3 km
D) 8,35 km

43. (INST. MAIS/IPREV SANTOS/2022) Em um estacionamento, o preço da primeira hora é de R$ 10,00, e o preço das horas seguintes, a partir da segunda, cai em progressão aritmética. Sabendo que o preço da segunda hora é de R$ 9,00 e o preço da oitava hora é de R$ 4,50, é correto afirmar que um motorista que deixar o veículo neste estacionamento por sete horas pagará

A) R$ 37,25.
B) R$ 42,75.
C) R$ 47,25.
D) R$ 52,75.

44. (AOCP/CM BAURU/2022) Assinale a alternativa que apresenta o valor de x para que $(x+2, 5x, 4x^2)$ forme uma progressão aritmética decrescente.

A) 1

B) 1/4

C) 4

D) 1/2

E) 2

Gabarito

1. ERRADO
2. ERRADO
3. CERTO
4. LETRA A
5. CERTO
6. LETRA C
7. LETRA B
8. ERRADO
9. ERRADO
10. CERTO
11. LETRA D
12. LETRA B
13. LETRA A
14. LETRA B
15. LETRA B
16. LETRA B
17. LETRA E
18. LETRA B
19. LETRA A
20. LETRA D
21. LETRA B
22. LETRA E
23. LETRA A
24. LETRA B
25. LETRA B
26. LETRA C
27. LETRA C
28. LETRA C
29. LETRA C
30. LETRA C
31. LETRA D
32. LETRA C
33. LETRA D
34. LETRA C
35. LETRA E
36. LETRA D
37. LETRA D
38. LETRA E
39. LETRA B
40. LETRA A
41. LETRA D
42. LETRA C
43. LETRA D
44. LETRA B

Lista de Questões

Sequências

CESPE

1. (CESPE/PRE. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item a seguir: Na sequência de Fibonacci - (F_m), em que $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \ldots$, os elementos podem ser obtidos a partir da fórmula:

$$F_m = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^m - \left(1-\sqrt{3}\right)^m}{2^m\sqrt{3}}$$

2. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) Para construir a sequência a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, de números positivos, foram dados a_1 e a_2, e, a partir de a_3, cada termo foi construído como sendo o produto de todos os termos anteriores. Se $a_5 < 1$, então, nessa sequência,

A) todos os termos são, necessariamente, menores que 1.
B) apenas dois termos são menores que 1.
C) apenas três termos são menores que 1.
D) apenas um termo pode ser maior que 1.
E) dois termos podem ser maiores que 1.

Texto para as próximas questões

A sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ é definida por $a_0 = 1, a_1 = 3$, e, para número cada inteiro $n \geq 1$, $a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-2}$ e $a_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n-1}$. Com relação a essa sequência, julgue os itens:

3. (CESPE/ABIN/2018) Existem infinitos valores inteiros de p e q tais que $a_p = a_q$.

4. (CESPE/ABIN/2018) A soma $a_{10} + a_9$ é superior a 20.

Texto para as próximas questões

A sequência infinita $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ é definida da seguinte maneira: para cada $j = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$A_j = 1$, se j for múltiplo de 3;
$A_j = 3$, se $j - 1$ for múltiplo de 3;
$A_j = 5$, se $j - 2$ for múltiplo de 3.

Dessa forma, por exemplo, $A_1 = 3$ e $A_2 = 5$. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

5. (CESPE/BNB/2018) O produto $A_{14} \times A_{30}$ é igual a 8.

6. (CESPE/BNB/2018) A soma dos primeiros 60 termos dessa sequência é igual a 160.

CESGRANRIO

7. (CESGRANRIO/BB/2012) Uma sequência numérica infinita $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots)$ é tal que a soma dos n termos iniciais é igual a $n^2 + 6n$. O quarto termo dessa sequência é igual a

A) 9
B) 13
C) 17
D) 32
E) 40

8. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Uma sequência é formada de tal modo que o seu primeiro termo é 20 e seu vigésimo termo é 11. Além disso, a partir do terceiro termo, cada termo é igual à média aritmética de todos os termos que o antecedem. Determine o segundo termo dessa sequência.

A) 2
B) 11
C) 15,5
D) 20
E) 31

9. (CESGRANRIO/BR/2010) Determinado sistema especialista apresenta a sequência lógica a seguir.

$$\mathbf{3, 12, 33, 72, 135, 228}$$

Qual o próximo número dessa sequência?

A) 331
B) 357
C) 418
D) 421
E) 816

10. (CESGRANRIO/IBGE/2006) Na sequência (1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ...) o número que sucede 22 é:

A) 28
B) 29
C) 30
D) 31
E) 32

FCC

11. (FCC/SABESP/2019) Em 1655, o matemático John Wallis desenvolveu uma série infinita para o cálculo de $\frac{\pi}{2}$, conforme mostra a fórmula abaixo:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \ldots$$

Com os termos desse produto infinito ordenados exatamente como na fórmula, a fração na 50ª posição é:

A) $\frac{51}{53}$

B) $\frac{50}{49}$

C) $\frac{26}{25}$

D) $\frac{26}{27}$

E) $\frac{50}{51}$

12. (FCC/TJ-MA/2019) Observando o padrão de formação da sequência infinita (2, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 6, ...), nota-se que os termos iguais a 1 aparecem nas posições 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, e assim por diante. A 300ª vez em que o termo igual a 1 aparece nessa sequência está na posição:

A) 342.
B) 330.
C) 336.
D) 324.
E) 348.

13. (FCC/METRO-SP/2019) Dada a sequência (101, 2002, 30003, 400004, 5000005, ...), seu 10º termo é 10000000000010. O maior termo dessa sequência, que é menor do que 10^{100}, é o

A) 95º
B) 99º
C) 97º
D) 98º
E) 96º

14. (FCC/CM DE FORTALEZA/2019) Considere a sequência numérica em que o primeiro termo é 1, o segundo termo é um inteiro positivo k, e os demais termos são definidos como a soma de todos os termos anteriores, isto é, $a_n = a_{n-1} + ... + a_1$. Se o 13º termo é 6144, o valor de k é:

A) 8
B) 6
C) 3
D) 4
E) 5

15. (FCC/TRF-3/2019) Serão confeccionados números em cobre para numerar as portas dos apartamentos de um condomínio de 5 torres com 8 andares cada uma e com quatro apartamentos por andar. A numeração seguirá a seguinte regra: os apartamentos do andar k terão números k1, k2, k3 e k4, isto é, no primeiro andar de cada torre estarão os apartamentos 11, 12, 13 e 14. A quantidade de algarismos 3 que será confeccionada é igual a

A) 30.
B) 12.
C) 100.
D) 80.

E) 60.

FGV

16. (FGV/ALERO/2018) Uma sequência de números naturais é tal que dado um termo x qualquer dessa sequência, se ele é par, então o próximo termo será x/2; se ele é ímpar, então o próximo termo será x+5. Se o primeiro termo dessa sequência é 6, então o décimo termo será
A) 2.
B) 3.
C) 4.
D) 6.
E) 8.

17. (FGV/ALERO/2018) Em uma sequência de números, para quaisquer três termos consecutivos x, y, z vale a relação z = 3y – x. Se o 18º termo dessa sequência é 2 e o 20º termo é 10, então o 14º termo é
A) 2.
B) 4.
C) 10.
D) 16.
E) 26.

18. (FGV/COMPESA/2018) Considere uma sequência de números na qual cada número, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores. Se o quinto número dessa sequência é 88 e o sétimo é 229, então o segundo número é
A) 17.
B) 18.
C) 19.
D) 20.
E) 21.

19. (FGV/TJ-RO/2015) Em uma sequência numérica, cada termo a partir do terceiro é a soma dos dois termos anteriores. O 7º e o 9º termos são, respectivamente, 29 e 76. O 2º termo dessa sequência é:
A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

20. (FGV/PREF. NITEROI/2015) A sequência 2, 2, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 2, 2, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 2, ... mantém o padrão apresentado indefinidamente. A soma dos 2015 primeiros termos dessa sequência é:
A) 7560.
B) 7555.
C) 7550
D) 7545.
E) 7540.

VUNESP

21. (VUNESP/ALESP/2022) A sequência de números a seguir foi construída com um padrão lógico e é uma sequência ilimitada:

$$\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 40, \ldots.}$$

A partir dessas informações, identifique o termo da posição 74 e o termo da posição 95. A soma destes dois termos é igual a

A) 244.

B) 277.

C) 255.

D) 266.

E) 233.

22. (VUNESP/PC-SP/2022) A sequência a seguir foi criada com um padrão lógico e é ilimitada.

$$\mathbf{1, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 31, 33, 35, 37, 40, 41, \ldots}$$

Identifique os seguintes números que pertencem a esta sequência:

- O número que antecede o 90.
- O número que é o sucessor do 127.
- O número que antecede o 503.

A soma desses três números identificados apresenta como algarismo da unidade, o algarismo

A) 6.

B) 8.

C) 9.

D) 3.

E) 1.

23. (VUNESP/CMSJC/2022) Considere a sequência de números 7123459, 8224360, 5223441, 6224332, 4223442, ..., em que cada termo, do segundo termo em diante, é formado a partir de um padrão que altera os algarismos do termo anterior. Utilizando- se esse mesmo padrão, o 100º termo da sequência que se inicia por 359982721 é:

A) 222222222

B) 342232422

C) 343434343

D) 422222222

E) 432242322

24. (VUNESP/TJ-SP/2019) Considere a sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{10}, \ \ldots\right)$. O produto entre o 7º, o 11º e o 20º termos é igual a

A) $10/11$

B) $3/4$

C) $5/6$

D) $21/13$
E) $15/19$

25. (VUNESP/TJ-SP/2019) Considere a sequência $\left(\frac{1}{5}, \frac{5}{10}; \frac{10}{15}; \frac{15}{20}; \frac{20}{25}, \ldots\right)$ O produto entre o 30º e o 31º termos é igual a
A) $27/29$
B) $25/27$
C) $31/33$
D) $23/25$
E) $29/31$

Outras Bancas

26. (RBO/PREF. NAVEGANTES/2022) Na sequência: 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 13, ... os próximos três números são:
A) 14, 17, 18
B) 14, 15, 16
C) 16, 17, 18
D) 16, 19, 20
E) 15, 16, 17

27. (IBADE/CRM AC/2022) Qual é o próximo termo da sequência (1, - 2, 7, - 20, ...)?
A) 61
B) 27
C) 52
D) 35
E) 31

28. (INST. MAIS/PREF. PRAIA GRANDE/2022) Dada a sequência -1, 0, 3, 8, 15, x, 35, y e 63, assinale a alternativa que apresenta o valor de $x + y$.
A) 48.
B) 55.
C) 72.
D) 96.

29. (IDIB/GOINFRA/2022) Seja a sequência $\{4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, x, \ldots.\}$. Determine o valor de x para que a sequência continue seguindo o mesmo padrão.
A) $x = 0$
B) $x = 1/3$
C) $x = 4/3$
D) $x = 5/3$
E) $x = 8/3$

Gabarito

1. ERRADO
2. LETRA D
3. CERTO
4. CERTO
5. ERRADO
6. ERRADO
7. LETRA B
8. LETRA A
9. LETRA B
10. LETRA B
11. LETRA E
12. LETRA D
13. LETRA E
14. LETRA E
15. LETRA E
16. LETRA C
17. LETRA E
18. LETRA B
19. LETRA C
20. LETRA B
21. LETRA B
22. LETRA B
23. LETRA E
24. LETRA A
25. LETRA E
26. LETRA A
27. LETRA A
28. LETRA C
29. LETRA E

LISTA DE QUESTÕES

Progressão Geométrica

CEBRASPE

1. (CESPE/PETROBRAS/2022) Uma empresa distribuidora de combustíveis atendia, ao término do ano de 2020, apenas 30 clientes. Após a implementação de medidas administrativas, a quantidade de novos clientes dessa empresa, no primeiro semestre de 2021 (contada sempre em relação ao mês anterior), aumentou em progressão geométrica. Na tabela a seguir, está registrada a quantidade total de clientes da empresa no final dos 4 primeiros meses de 2021.

Total de Clientes da Empresa				
Meses	Janeiro/2021	Fevereiro/2021	Março/2021	Abril/2021
Total de Clientes	32	36	44	60

Com base nessa situação hipotética e nos dados apresentados na tabela, julgue o item a seguir.

A quantidade de clientes da empresa no final de junho de 2021 era superior a 150.

2. (CESPE/PETROBRAS/2022) Considere que $P(t) = 160 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$ expresse a quantidade aproximada de moradores de um determinado condomínio em t anos para $0 \leq t \leq 15$, em que $t = 0$ corresponda ao momento de constituição do condomínio. Com base nessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Os quinze primeiros termos da progressão geométrica de primeiro termo igual a 240 e terceiro termo igual a 540 são iguais ao valor da função no $P(t)$ nos números $1,2,\ \ldots,15$.

3. (CESPE/TELEBRAS/2022) João acaba de assumir um cargo de assistente administrativo em uma empresa e foi designado para a tarefa de examinar as demandas de clientes e dar a elas o devido encaminhamento. Considerando que João ainda não tem experiência com essa tarefa, seu chefe decide que passará para ele, no primeiro dia, 10 demandas, no segundo, 15, no terceiro, 20, e assim sucessivamente, crescendo segundo uma Progressão Aritmética até o oitavo dia, quando então estabilizará o número de demandas diárias. Para executar sua tarefa, João leva sempre 5 minutos para tomar conhecimento dos detalhes de cada demanda, enquanto que a fase de encaminhamento (decidir o que fazer e executar os procedimentos necessários) leva 12 minutos nas demandas do primeiro dia, 6 minutos nas demandas do segundo, 3 minutos nas demandas do terceiro dia, e assim sucessivamente, decrescendo segundo uma Progressão Geométrica até o oitavo dia, quando então o tempo de encaminhamento se estabiliza. Com base nessa situação hipotética, julgue o item seguinte.

No quinto dia de trabalho João já estará levando menos de 6 minutos no exame de cada demanda de cliente.

4. (CESPE/IBGE/2021) Um organismo vivo tem a capacidade de reproduzir-se dividindo-se em dois outros organismos semelhantes a ele. A cada segundo, cada novo organismo gerado amadurece e se reproduz,

gerando dois outros organismos. Em certo experimento, em um instante inicial, um desses organismos foi isolado e passou-se a contabilizar a população pn dos organismos gerados a partir daquele que foi isolado, decorridos exatamente n segundos desde o instante inicial. Nessa situação, supondo-se que no decorrer dos 10 primeiros segundos do experimento nenhum dos organismos pereceu, tem-se que

A) $p_{10} < 400$.
B) $400 \leq p_{10} < 600$.
C) $600 \leq p_{10} < 800$.
D) $800 \leq p_{10} < 1.000$.
E) $1.000 \leq p_{10}$.

5. (CESPE/TJ-PA/2020) No dia 1.º de janeiro de 2019, uma nova secretaria foi criada em certo tribunal, a fim de receber todos os processos a serem protocolados nessa instituição. Durante o mês de janeiro de 2019, 10 processos foram protocolados nessa secretaria; a partir de então, a quantidade mensal de processos protocolados na secretaria durante esse ano formou uma progressão geométrica de razão igual a 2. Nessa situação hipotética, a quantidade de processos protocolados nessa secretaria durante os meses de junho e julho de 2019 foi igual a

A) 320.
B) 480.
C) 640.
D) 960.
E) 1.270.

6. (CESPE/IFF/2018) O segundo termo de uma progressão geométrica é 5 e o quinto termo é 40/27. Para essa progressão, a soma dos n primeiros termos é igual a

A) $\left(\frac{45}{2}\right) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$

B) $\left(\frac{15}{2}\right) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$

C) $\left(\frac{45}{2}\right) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$

D) $\left(\frac{15}{2}\right) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$

E) $\left(\frac{45}{2}\right) \times \left(\frac{15}{2}\right) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$

7. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) Sobre uma mesa há 9 caixas vazias. Em uma dessas caixas, será colocado um grão de feijão; depois, em outra caixa, serão colocados três grãos de feijão. Prosseguindo-se sucessivamente, será escolhida uma caixa vazia, e nela colocada uma quantidade de grãos de feijão igual ao triplo da quantidade colocada na caixa anteriormente escolhida, até que não reste caixa vazia. Nessa situação, nas 9 caixas será colocada uma quantidade de grãos de feijão igual a

A) $\frac{3^{0}-1}{2}$

B) $3^{0} - 1$

C) $\frac{3^{10}-1}{2}$

D) $3^{10}-1$

E) $\frac{3^{8}-3}{2}$

8. (CESPE/SEDUC-AL/2018) Com relação a uma sequência numérica $a_1, a_2, \dots, a_n$, julgue o item subsequente.

Se a sequência for uma progressão geométrica (PG), em que $a_1 = 5$ e $a_4 = 135$, então a razão dessa PG será maior que 4.

9. (CESPE/MIN/2013) Julgue o seguinte item, relativo a sistemas numéricos e sistema legal de medidas.

A soma 1 $+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$ é inferior a 2.

10. (CESPE/TCE-RS/2013) A respeito do controle e manutenção dos 48 veículos de um órgão público, julgue o item seguinte.

Se, em 2010, os veículos desse órgão consumiram 16.000 L de combustível e se, nos anos seguintes, o consumo cresceu em progressão geométrica à razão de 10% ao ano, então, o total de combustível consumido por esses veículos em 2010, 2011 e 2012 foi inferior a 50.000 L.

(BRB/2011) Texto para as próximas questões
Considerando que, em uma progressão aritmética de termos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, a razão seja positiva, $a_1 = 2$ e os termos a_1, a_3 e a_{11} estejam, nessa ordem, em progressão geométrica, julgue os itens a seguir.

11. (CESPE/BRB/2011) A razão dessa progressão aritmética será um número racional, não inteiro.

12. (CESPE/BRB/2011) Para cada n ímpar, a_n será sempre um número par.

CESGRANRIO

13. (CESGRANRIO/BASA/2018) Considere a sequência numérica cujo termo geral é dado por $a_n = 2^{1-3n}$, para $n \geq 1$. Essa sequência numérica é uma progressão
A) geométrica, cuja razão é 1/8
B) geométrica, cuja razão é -6.
C) geométrica, cuja razão é -3.
D) aritmética, cuja razão é -3.
E) aritmética, cuja razão é 1/8.

14. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Sabe-se que, em uma determinada progressão geométrica, a razão é 0,8. Se o quinto termo é 4.096; então, o Limite da Soma dos n primeiros dessa P.G., quando n tende a infinito, é igual a

A) 10.000
B) 20.000
C) 30.000
D) 40.000
E) 50.000

15. (CESGRANRIO/BB/2018) Para $x > 0$, seja S_x a soma

$$S_x = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-nx} = 2^{-x} + 4^{-x} + 8^{-x} + \cdots$$

O número real x para o qual se tem $S_x = \frac{1}{4}$.

A) 4
B) $\log_2 5$
C) $3/2$
D) $5/2$
E) $\log_2 3$

16. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2017) A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = \frac{3^{n+4} - 81}{2 \cdot 3^n}$$

Quanto vale o quarto termo dessa progressão geométrica?

A) 1
B) 3
C) 27
D) 39
E) 40

17. (CESGRANRIO/BASA/2015) Uma sequência de números reais tem seu termo geral, a_n, dado por $a_n = 4 \cdot 2^{3n+1}$, para $n \geq 1$. Essa sequência é uma progressão

A) geométrica, cuja razão é igual a 2.
B) geométrica, cuja razão é igual a 32.
C) aritmética, cuja razão é igual a 3.
D) aritmética, cuja razão é igual a 1.
E) geométrica, cuja razão é igual a 8.

18. (CESGRANRIO/BR/2015) Considere a progressão geométrica finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}, a_{12})$, na qual o primeiro termo vale metade da razão e $a_7 = 64 \cdot a_4$. O último termo dessa progressão é igual a

A) 2^{12}
B) 2^{16}

C) 2^{22}
D) 2^{23}
E) 2^{34}

19. (CESGRANRIO/BR/2015) Considere a_n e b_n os termos gerais de duas progressões geométricas, cujas razões são 4 e 1/2, respectivamente. Tem-se, portanto, que $c_n = a_n \cdot b_n$ é o termo geral de uma progressão geométrica cuja razão é igual a

A) 8
B) 9/2
C) 2
D) 1/2
E) 1/8

20. (CESGRANRIO/BASA/2013) A sequência $a_n, n \in \mathbb{N}$ é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $a_1 = -2$ e cuja razão é $r = 3$. Uma progressão geométrica, b_n, é obtida a partir da primeira, por meio da relação

$$b_n = 3^{a_n}, n \in \mathbb{N}$$

Se b_1 e q indicam o primeiro termo e a razão dessa progressão geométrica, então $\frac{q}{b_1}$ vale

A) $243.$
B) $3.$
C) $1/243.$
D) $-2/3.$
E) $-27/6.$

21. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2012) Seja a progressão geométrica: $\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{5}, \ldots$ O quarto termo dessa progressão é:

A) 0
B) $-1/5^6$
C) $1/5^9$
D) 1
E) 5

22. (CESGRANRIO/BNDES/2011) A soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, cuja razão tem módulo menor que 1, é igual a 6, e a soma dos quadrados dos termos dessa progressão é igual a 12. Quanto vale o primeiro termo da progressão geométrica?

A) 1
B) 3
C) 6
D) 9
E) 12

FGV

23. (FGV/ALERO/2018) Se x - 1, x + 1, x + 7 são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica, o quarto termo é

A) 27.
B) 18.
C) 16.
D) 9.
E) 8.

24. (FGV/SSP-AM/2015) Um supersapo faz uma sequência de saltos dobrando sempre, a cada salto, a distância do salto anterior. No 1º, 2º e 3º saltos, o supersapo saltou, respectivamente, 5 cm, 10 cm e 20 cm. O salto em que o supersapo saltou pela primeira vez mais de 10 metros foi o:

A) 8º salto;
B) 9º salto;
C) 10º salto;
D) 11º salto;
E) 12º salto;

25. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Observe a expressão abaixo.

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Considerando-se um número muito grande de termos sendo adicionados, o valor de S tende a:

A) 1
B) 2
C) 4
D) 8
E) ∞

26. (FGV/SEDUC-AM/2014) Considere a sequência de $N + 1$ termos: $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{N-1}, 3^N$

Seja S_N a soma dos N primeiros termos dessa sequência.

O valor de $3^N - S_N$ é

A) menor do que zero.
B) maior do que zero e menor do que S_N.
C) maior do que S_N e menor do que $\frac{3^N}{2}$
D) maior do que $\frac{3^N}{2}$ e menor do que S_{N+1}.
E) igual a S_N+1.

27. (FGV/DETRAN MA/2013) Observe as progressões (a_n) e (b_n), n = 1, 2, 3, ... a seguir:

a_n	1	5	9	13	17	...

b_n	1	2	4	8	16	...

A diferença entre os vigésimos quintos termos dessas progressões, ou seja, $b_{25} - a_{25}$.
A) é menor do que 10^2.
B) fica entre 10^2 e 10^4.
C) fica entre 10^4 e 10^6.
D) fica entre 10^6 e 10^8.
E) é maior do que 10^8.

28. (FGV/SEE-PE/2016) Considere o conjunto de números $\{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2015}, 2^{2016}\}$. A diferença entre o maior elemento desse conjunto e a soma dos demais elementos é
A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 2^{2015}
E) -2^{2015}

29. (FGV/SEDUC-SP/2013) Considere a soma $S = 175 + 140 + 112 + \ldots$ em que cada parcela é 20% menor do que a anterior. Se o número de parcelas crescer indefinidamente o valor de S tenderá para o número
A) 845.
B) 855.
C) 865.
D) 875.
E) 885.

VUNESP

30. (VUNESP/EsFCEx/2021) Três números cuja soma é 36 formam uma progressão aritmética de razão r, sendo $r > 0$. Se somarmos 2 ao terceiro termo dessa progressão aritmética, sem alterar os outros dois termos, eles vão formar uma progressão geométrica de razão q. O resultado da operação $\sqrt{\frac{r}{q}}$ é:

A) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

31. (VUNESP/IPSM SJC/2018) Na sequência numérica ..., $-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$, o quinto termo é -8. O produto do primeiro com o décimo quinto termos dessa sequência é igual a

A) -2

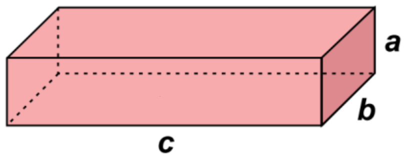
B) -1

C) 1.

D) 2.

E) 4.

32. (VUNESP/PM-SP/2015) A figura seguinte mostra um reservatório com formato de paralelepípedo reto-retângulo, cujas dimensões a, b e c estão, nessa ordem, em Progressão Geométrica crescente, sendo sua soma igual a 10,5 m.



Se o volume desse reservatório é 27 m³, então a área da sua base bc é, em m², igual a

A) 27

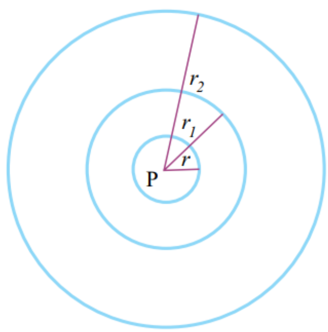
B) 26

C) 18

D) 15

E) 12

33. (VUNESP/PM-SP/2014) Planejando uma operação de policiamento ostensivo, um oficial desenhou em um mapa três círculos concêntricos de centro P, conforme mostrado na figura.



Sabe-se que as medidas dos raios r, r_1 e r_2 estão, nessa ordem, em progressão geométrica. $Se\ r + r_1 + r_2 = 52$ cm, e $r \cdot r_2 = 144$ cm², então $r + r_2$ é igual, em centímetros, a

A) 36.

B) 38.

C) 39.

D) 40.

E) 42.

34. (VUNESP/PC-SP/2013) O 1º elemento de uma sequência numérica é 8. O 2º e o 3º elementos dessa mesma sequência são, respectivamente, 4 e 2. Essa sequência continua, mantendo sempre a mesma lógica, e tem $1/2048$ como o último elemento, conforme é mostrado a seguir:

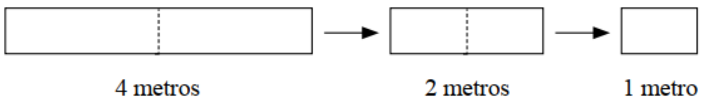
$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2048}$$

O número total de elementos dessa sequência é

A) 13.
B) 12.
C) 11.
D) 14.
E) 15.

35. (VUNESP/PREF.SJC/2012) Em 2011, alunos de uma escola americana, conseguiram dobrar um rolo de papel higiênico de 3,9 km de extensão 13 vezes. A grande dificuldade dessa brincadeira é que a curvatura lateral faz o tamanho aumentar mais rapidamente que a simples sobreposição de camadas.

Para evitar o problema da curvatura lateral, um grupo de estudantes decidiu sempre recortar ao meio o bloco de papel e sobrepor as duas partes, conforme exemplifica o desenho. Assim, a partir de uma folha de 4 metros, o grupo efetuou dois recortes e, a cada recorte, sobrepôs as partes, ficando com um comprimento final de 1 m.



Suponha que esse grupo de estudantes quisesse recortar um rolo de papel higiênico 19 vezes, de acordo com o exemplo, e que tivessem calculado que o comprimento final ficaria em 1 m. O comprimento inicial desse rolo precisaria ser, em km, aproximadamente

A) 50.
B) 500.
C) 5000.
D) 50000.
E) 500000.

36. (VUNESP/PREF. SJC/2012) A solução real da equação $x + \frac{2x}{3} + \frac{4x}{9} + \frac{8x}{27} + \frac{16x}{81} + \ldots = 3$ é

A) 1/4
B) 1/2
C) 1
D) 3/2
E) 2

37. (VUNESP/PM-SP/2007) Um grupo de garotos possui uma caixa com 630 bolinhas de gude e faz a seguinte brincadeira: o 1º garoto retira 10 bolinhas; o 2º retira o dobro de bolinhas retiradas pelo 1º; o 3º retira o dobro de bolinhas retiradas pelo 2º e assim sucessivamente cada um retirando o dobro de bolinhas

retiradas pelo seu anterior, até o último garoto. Sabendo que não sobrou nenhuma bolinha na caixa e todos os garotos retiraram a quantidade correta de bolinhas que lhes cabia, pode-se afirmar que o número de garotos que participou dessa brincadeira foi

A) 5.
B) 6.
C) 7.
D) 8.
E) 9.

38. (VUNESP/PC-SP/2013) Observe a sequência numérica:

$$\frac{1}{1.000.000}, \quad \frac{1}{100.000}, \quad \frac{1}{10.000}, \quad \frac{1}{1.000}, \ldots$$

Sabendo-se que o 1º elemento dessa sequência é 1/1.000.000, o 2º elemento é 1/100.000, e assim sucessivamente, o primeiro número natural dessa sequência corresponderá ao

A) 9º elemento.
B) 10º elemento.
C) 7º elemento.
D) 8º elemento.
E) 11º elemento.

Outras Bancas

39. (INST. MAIS/IPREV. SANTOS/2022) Seja a sequência:

$$(5; a; a + 60; \ldots)$$

Sabendo que essa sequência consiste em uma progressão geométrica e que a é um número par, é correto afirmar que o seu 4º termo vale

A) 250
B) 320
C) 420
D) 480

40. (CETREDE/UFC/2022) Considere a soma $S = 1 + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \ldots$.

Marque a alternativa que corresponde ao valor de S.

A) 977/90
B) 97/90
C) 17/15
D) 177/90

41. (INST. MAIS/CM PRAIA GRANDE/2022) Carmem começou a juntar dinheiro em seu cofrinho. No 1º domingo do ano ela depositou certa quantidade e todo domingo posterior ela dobrou a quantidade

depositada no domingo anterior. Sabendo que no 7º domingo ela depositou R$ 384,00 em seu cofrinho, assinale a alternativa que apresenta a quantia total que Carmem possuía em seu cofrinho um dia antes do 7º domingo.

A) R$ 192,00.
B) R$ 378,00.
C) R$ 540,00.
D) R$ 762,00.

Gabarito

1. CERTO
2. CERTO
3. CERTO
4. LETRA E
5. LETRA D
6. LETRA A
7. LETRA A
8. ERRADO
9. CERTO
10. ERRADO
11. ERRADO
12. CERTO
13. LETRA A
14. LETRA E
15. LETRA B
16. LETRA A
17. LETRA E
18. LETRA D
19. LETRA C
20. LETRA A
21. LETRA D
22. LETRA B
23. LETRA A
24. LETRA B
25. LETRA B
26. LETRA E
27. LETRA D
28. LETRA B
29. LETRA D
30. LETRA A
31. LETRA C
32. LETRA C
33. LETRA D
34. LETRA E
35. LETRA B
36. LETRA E
37. LETRA B
38. LETRA C
39. LETRA B
40. LETRA B
41. LETRA B

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:

PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.