

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

* DEFINIÇÃO *

SÃO EQUAÇÕES DO TIPO $p(x) = 0$, ONDE $p(x)$
É UM POLINÔMIO, OU SEJA

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

↳ EQUAÇÃO ALGÉBRICA DE GRAU "n".



$$\rightarrow x^4 + 5x^3 + 2x = 0 \rightarrow \text{Grau 4}$$

$$\rightarrow x^6 - 2x^2 = 5x^5 + 2$$



$$x^6 - 5x^5 - 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow \text{Grau 6}$$

$$\rightarrow \cancel{x^4} - 3\cancel{x^3} + 4x = \cancel{x^4} - 3\cancel{x^3} - 2$$

$$4x + 2 = 0 \rightarrow \underline{\text{Grau 1}}$$



RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO

RAÍZES OU ZEROS DE UMA EQUAÇÃO SÃO OS VALORES QUE A TORNAM VERDADEIRA.

-1 É RAIZ DA EQUAÇÃO :

$$-2x^3 + 3x^2 + 17x + 12 = 0$$

$$-2(-1)^3 + 3(-1)^2 + 17(-1) + 12 =$$

$$2 + 3 - 17 + 12 = 0$$

1 NÃO É RAIZ DA EQUAÇÃO :

$$x^2 - 5x + 7 = 0$$

$$(1)^2 - 5(1) + 7 = 1 - 5 + 7 = 3$$



EXEMPLO

VERIFIQUE SE 2 E -3 SÃO RAÍZES DA EQUAÇÃO ALGÉBRICA:

$$2x^3 - 9x^2 - 2x + 24 = 0$$

$$2(2)^3 - 9(2)^2 - 2(2) + 24 = 0$$

$$16 - 36 - 4 + 24 = 0$$

$$\boxed{0 = 0} \quad 2 \text{ É RAÍZ}$$

$$2(-3)^3 - 9(-3)^2 - 2(-3) + 24 = 0$$

$$-54 - 81 + 6 + 24 =$$

$$-105 + 30 = 0$$

$$\boxed{-105 = 0} \rightarrow -3 \text{ NÃO É RAÍZ}$$



* TEOREMA FUNDAMENTAL *

TODO POLINÔMIO DE GRAU n
POSSUI n RAÍZES

$$2x + 1 = 0 \rightarrow 1 \text{ RAÍZ}$$

$$x^2 - 5x + 14 = 0 \rightarrow 2 \text{ RAÍZES}$$

$$x^{15} - 1 = 0 \rightarrow 15 \text{ RAÍZES}$$

$$\cancel{x^6} + x^2 = \cancel{x^6} - 3 \rightarrow$$

$$x^2 + 3 = 0 \rightarrow 2 \text{ RAÍZES}$$



* TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO *

TODO POLINÔMIO DE GRAU n
PODE SER FATORADO EM " n " TERMOS
DE 1.º GRAU "

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

↙ REESCREVENDO

$$P(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_{n-1})(x - r_n)$$

$r_1, r_2, \dots, r_n$: RAÍZES DO $P(x)$



REESCREVA $p(x) = 1x^2 - 5x + 6$ SABENDO QUE SUAS RAÍZES SÃO 2 E 3.

$$p(x) = a_2 (x - r_1)(x - r_2)$$

Diagram showing the general form of a quadratic polynomial with roots r_1 and r_2 . Arrows point from the roots to the corresponding terms in the formula.

$$p(x) = 1(x - 2)(x - 3)$$

Diagram showing the specific polynomial with roots 2 and 3. The roots are circled, and arrows point from the numbers 2 and 3 below to the circled terms in the formula.

$$p(x) = x^2 - 3x - 2x + 6$$

$$p(x) = x^2 - 5x + 6$$



EXEMPLO

ESCREVA UM POLINÔMIO DE GRAU 2 QUE TENHA
RAÍZES 3 E -5.

$$p(x) = K(x-3)(x-(-5))$$

$$p(x) = K(x-3)(x+5)$$

$$p(x) = K(x^2 + 5x - 3x - 15)$$

$$p(x) = K(x^2 + 2x - 15)$$

$$K = 1 \rightarrow p(x) = x^2 + 2x - 15$$

$$K = 2 \rightarrow p(x) = 2x^2 + 4x - 30$$

$\times 2$



EXEMPLO

ESCREVA UM POLINÔMIO QUE TENHA $-1, 2$ E 6
COMO 3 DE SUAS RAÍZES.

$$p(x) = K(x - (-1))(x - 2)(x - 6) \cdot q(x)$$

$$p(x) = K(x + 1)(x - 2)(x - 6) \cdot q(x)$$



EXEMPLO

SEJA $p(x)$ UM POLINÔMIO DE GRAU 3, COM

$$p(2) = p(3) = p(4) = 2 \quad \text{e} \quad p(5) = 14$$

Calcule $p(0)$.

$$q(x) = p(x) - 2 \quad ; \quad q(2) = p(2) - 2$$

$$q(2) = 0$$

$$q(3) = p(3) - 2$$

$$q(3) = 0$$

$$q(4) = p(4) - 2$$

$$q(4) = 0$$

2, 3 e 4 SÃO RAÍZES DE $q(x)$



$$q(x) = K(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$q(5) = p(5) - 2 \rightarrow q(5) = 14 - 2 = 12$$

$$q(5) = K(5-2)(5-3)(5-4)$$

$$12 = K \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$12 = 6K$$

$$\boxed{K = 2} \rightarrow \underline{q(x) = 2(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$p(x) = q(x) + 2 \rightarrow \boxed{p(x) = 2(x-2)(x-3)(x-4) + 2}$$

$$p(0) = 2(0-2)(0-3)(0-4) + 2$$

$$= 2(-2)(-3)(-4) + 2$$

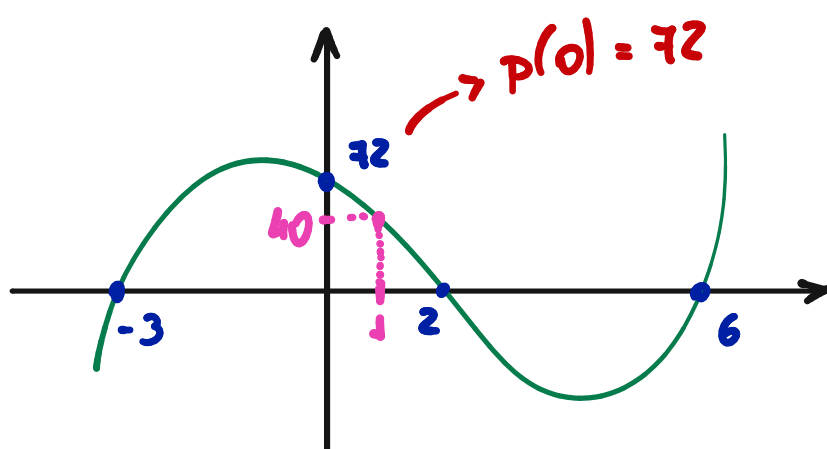
$$= -48 + 2$$

$$\boxed{p(0) = -46}$$



EXEMPLO

O GRÁFICO DE $p(x)$, DE GRAU 3, É MOSTRADO ABAIXO. CALCULE $p(1)$.



$$p(x) = K(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

$$p(x) = K(x + 3)(x - 2)(x - 6)$$

$$p(0) = 72 \rightarrow K(0 + 3)(0 - 2)(0 - 6) = 72$$

$$36K = 72$$

$$K = 2$$

$$p(x) = 2(x + 3)(x - 2)(x - 6)$$



$$p(1) = 2(1+3)(1-2)(1-6)$$

$$p(1) = 2 \cdot 4 \cdot (-1)(-5)$$

$$p(1) = 40$$



* MULTIPLICIDADE DAS RAÍZES *

A MULTIPLICIDADE DE UMA RAÍZ
É O NÚMERO DE VEZES QUE ELA
APARECE NA DECOMPOSIÇÃO."

$$p(x) = a(x - r_1)^k (x - r_2)^m (x - r_3)^n$$

r_1 : RAÍZ DE MULTIPLICIDADE k

r_2 : RAÍZ DE MULTIPLICIDADE m

r_3 : RAÍZ DE MULTIPLICIDADE n



$$p(x) = 4(x-1)^2(x+2)^5$$

1 - 2

1 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE 2

- 2 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE 5

$$p(x) = 3x^2(x+5)(x-6)^4(x+2)^3(x-0)^2$$

- 5 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE 1

6 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE 4

- 2 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE 3

0 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE 2



EXEMPLO

DETERMINE AS MULTIPLICIDADES DE CADA RAIZ
DO POLINÔMIO :

$$p(x) = 2 \cdot x \cdot (x - 6)^2 \cdot (x - 3)^5 \cdot (x + 7)^3 \cdot (x + 1)^1$$

$(x-0)$

6 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE 2

3 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE 5

- 7 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE 3

- 1 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE 1

0 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE 1



EXEMPLO

ESCREVA UM POLINÔMIO QUE POSSUI 1 COMO RAIZ DE MULTIPLICIDADE 4, 5 COMO RAIZ DUPLA, -6 COMO RAIZ SIMPLES E 3 COMO RAIZ DE MULTIPLICIDADE 7.

$$p(x) = K(x-1)^4(x-5)^2(x+6)(x-3)^7 \cdot q(x)$$



EXEMPLO

Se 2 é raiz dupla da equação.

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12 = 0,$$

Calcule as outras raízes.

$$(x-2)^2(x-a)(x-b) = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4)(x^2 - ax - bx + ab) =$$

$$\begin{aligned} &\underline{x^4} - \underline{ax^3} - \underline{bx^3} + \underline{abx^2} - \underline{4x^3} + \underline{4ax^2} + \underline{4bx^2} - \underline{4abx} + \\ &\quad + \underline{4x^2} - \underline{4ax} - \underline{4bx} + 4ab = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x^4 + (-a - b - 4)x^3 + (ab + 4a + 4b + 4)x^2 + \\ &\quad (-4a - 4b - 4ab)x + 4ab \end{aligned}$$

$$-a - b - 4 = -6$$

$$a + b = 2$$

$$4ab = -12$$

$$ab = -3$$

$$a = 3$$

$$b = -1$$



Se 2 é Raiz $\rightarrow P(x)$ é Divisível por $x-2$

2		1	-6	9	4	-12
		1	-4	1	6	0 ✓

$$p(x) = (x-2)(x^3 - 4x^2 + x + 6)$$

2		1	-4	1	6
		1	-2	-3	0 ✓

$$\underline{p(x) = (x-2)(x-2)(x^2 - 2x - 3)}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{array}{l} x' = 3 \\ x'' = -1 \end{array}$$

$$p(x) = (x-2)^2(x-3)(x+1)$$



MULTIPLICIDADE - ANÁLISE GRÁFICA

RAIZ DE
MULTIPLICIDADE ÍMPAR

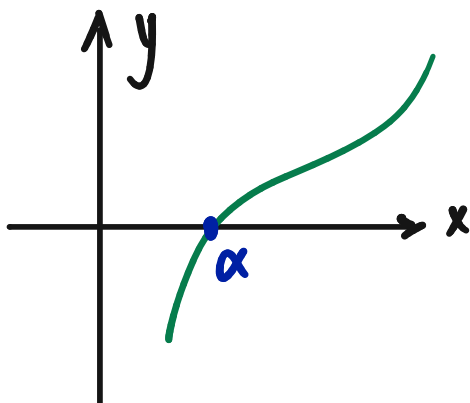


CORTA
O EIXO x

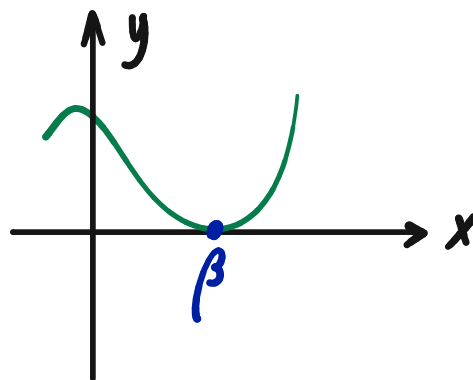
RAIZ DE
MULTIPLICIDADE PAR



TANGENCIA
O EIXO x

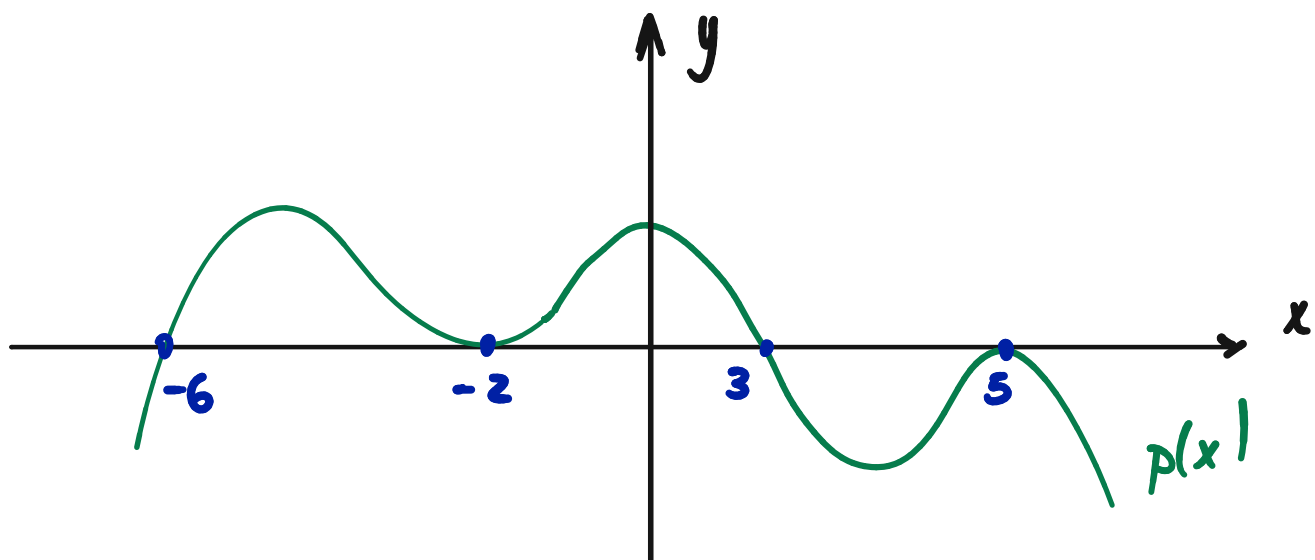


α É RAIZ DE
MULTIPLICIDADE ÍMPAR



β É RAIZ DE
MULTIPLICIDADE PAR





-6 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE ÍMPAR

-2 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE PAR

3 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE ÍMPAR

5 É RAIZ DE MULTIPLICIDADE PAR



EXEMPLO

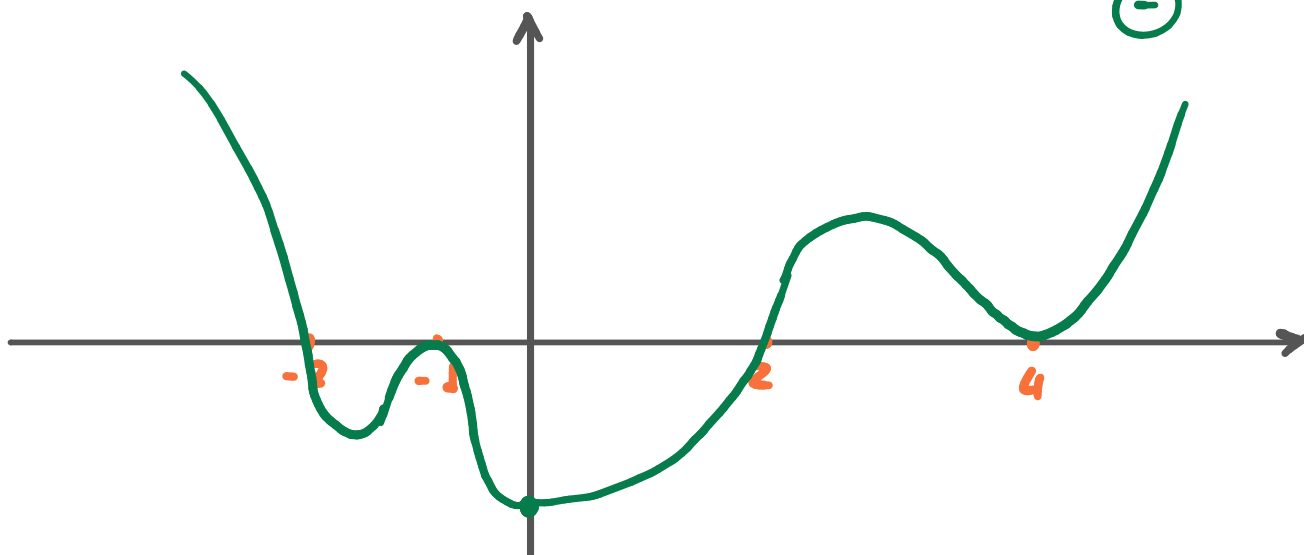
ESBOCE O GRÁFICO DO POLINÔMIO

$$p(x) = (x+2)(x+1)^2(x-2)^3(x-4)^6$$

↓	↓	↓	↓
-2	-1	2	4
Ímpar	Par	Ímpar	Par

$$p(0) = (0+2)(0+1)^2(0-2)^3(0-4)^6 = 2 \cdot 1 \cdot (-8) \cdot (-4)^6$$

⊖



EXEMPLO

RESOLVA A INEQUAÇÃO :

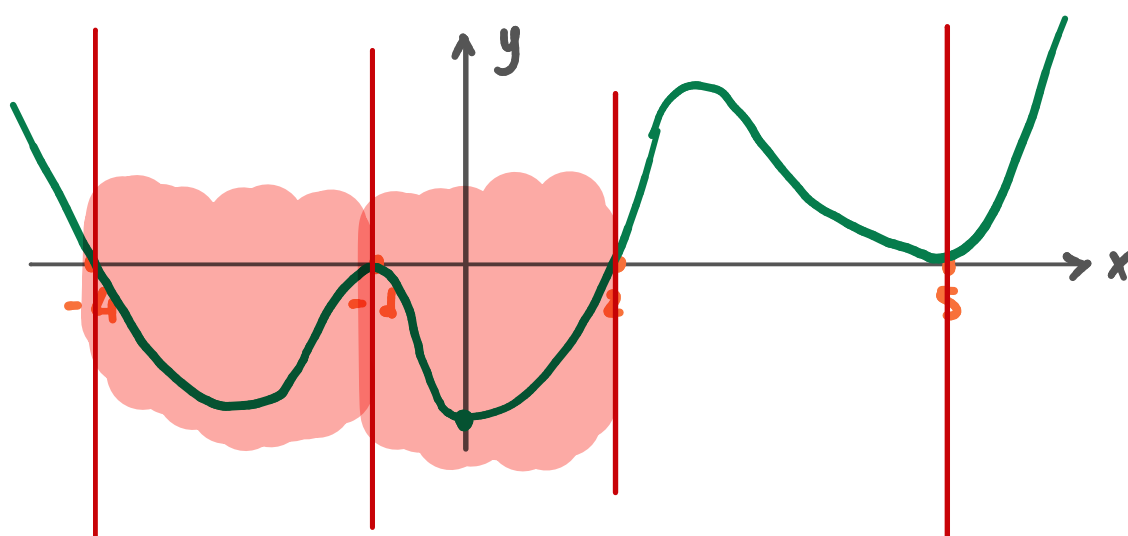
$$(x+1)^2(x-2)^3(x+4)(x-5)^4 < 0$$

↓	↓	↓	↓
-1	2	-4	5
PAR	ÍMPAR	ÍMPAR	PAR

$$p(0) = (0+1)^2(0-2)^3(0+4)(0-5)^4$$

↑

$$= 1 \cdot (-8) \cdot (4) \cdot (625) \quad \ominus$$



$$x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 2 ; x \neq -1$$



TEOREMA DAS RAÍZES COMPLEXAS CONJUGADAS

SEJA $p(x)$ UM POLINÔMIO DE COEFICIENTES REAIS. SE $z = a + bi$ É RAÍZ DE $p(x)$, ENTÃO $\bar{z} = a - bi$ TAMBÉM O É.

$$\text{SE } p(z) = 0 \rightarrow p(\bar{z}) = 0$$

OBS 1: VÁLIDO SOMENTE QUANDO OS COEFICIENTES DE $p(x)$ SÃO REAIS.

OBS 2: z E $\bar{z}$ SÃO RAÍZES DE MESMA MULTIPLICIDADE



Se $1+i$ e $2-3i$ SÃO RAÍZES DA EQ.

$$x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 34x + 26 = 0$$

CALCULE AS OUTRAS RAÍZES DESSA EQUAÇÃO.

$$1+i \rightarrow \boxed{1-i}$$

$$2-3i \rightarrow \boxed{2+3i}$$



TEOREMA DAS RAIZES COMPLEXAS CONJUGADAS

DEM.:

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$z \in \text{RAIZ}$ ($z = a + bi$)

$$\rightarrow p(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

$$0 = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

$$0 = a_n \cdot z^n + \dots + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$$

$$0 = \overline{a_n} \cdot \overline{z}^n + \dots + \overline{a_2} \cdot \overline{z}^2 + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0}$$

$$0 = a_n \cdot \overline{z}^n + \dots + a_2 \cdot \overline{z}^2 + a_1 \cdot \overline{z} + a_0 \rightarrow p(\overline{z}) = 0$$

$\overline{z} \in \text{RAIZ DE } p(x)$



EXEMPLO

CALCULE O Nº DE RAÍZES REAIS POSSÍVEIS
DESSA EQUAÇÃO. SE $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$x^9 + ax^7 - bx^6 + cx^2 - d = 0$$

TOTAL DE 9 RAÍZES.

Complexo Não Reais	Reais
0	9
2	7
4	5
6	3
8	1



EXEMPLO

CALCULE AS RAÍZES DA EQUAÇÃO

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$$

SABENDO QUE $1 - i$ É UMA DELAS.

$1 + i$ TAMBÉM É RAÍZ.

$$(x - (1 + i))(x - (1 - i))(x - a) = 0$$

$$(x^2 - (1 - i)x - (1 + i)x + (1 + i)(1 - i))(x - a) = 0$$

$$(x^2 - x + \cancel{ix} - x \cancel{-ix} + 1 \cancel{+i} \cancel{-i} + 1)(x - a) = 0$$

$$(x^2 - 2x + 2)(x - a) = 0$$

$$x^3 - ax' - 2x^2 + 2ax + 2x - 2a = 0$$

$$x^3 + (-a - 2)x^2 + (2a + 2)x - 2a = 0$$



$$-a - 2 = -5 \rightarrow \boxed{a = 3}$$

$$2a + 2 = 8 \rightarrow \boxed{a = 3}$$

$$-2a = -6 \rightarrow \boxed{a = 3}$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 6 \text{ é Div. Por } (x - (1+i))(x - (1-i))$$

$$\text{é Div. Por } x^2 - 2x + 2$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 5x^2 + 8x - 6 \quad | \quad x^2 - 2x + 2 \\
 \underline{-x^3 + 2x^2 - 2x} \\
 -3x^2 + 6x - 6 \\
 \underline{+3x^2 - 6x + 6} \\
 0
 \end{array}$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = \underbrace{(x-3)}_3 \underbrace{(x^2 - 2x + 2)}_{\substack{1+i \\ 1-i}}$$



EXEMPLO

CALCULE OS VALORES DE m E n REAIS
SABENDO QUE $1+i$ É RAIZ DA EQUAÇÃO

$$\underbrace{x^3 - 4x^2 + mx + n}_{p(x)} = 0$$

$1-i$ É RAIZ.

$p(x)$ É DIVISÍVEL POR $(x - (1+i))(x - (1-i))$

$p(x)$ É DIVISÍVEL POR $x^2 - 2x + 2$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + mx + n \quad \bigg| \quad x^2 - 2x + 2 \\ -x^3 + 2x^2 - 2x \quad \quad \quad x - 2 \\ \hline -2x^2 + (m-2)x + n \\ +2x^2 - 4x + 4 \\ \hline (m-6)x + n+4 = 0 \end{array}$$

$$m-6=0 \rightarrow \boxed{m=6}$$

$$n+4=0 \rightarrow \boxed{n=-4}$$



EXEMPLO

SEJA $p(x)$ O POLINÔMIO DE MENOR GRAU POSSÍVEL TAL QUE:

→ COEFICIENTES REAIS ✓

→ POSSUI i E $2i$ COMO RAÍZES ✓

→ $p(1) = 0$ (1 É RAÍZ) ✓

→ COEFICIENTE DO TERMO DE MAIOR GRAU É 3

Calcule $p(2)$.

SE i É RAÍZ → $-i$ TAMBÉM É.

SE $2i$ É RAÍZ → $-2i$ TAMBÉM É.

$$p(x) = 3(x-1)(x-i)(x+i)(x-2i)(x+2i)$$

$$p(x) = 3(x-1)(x^2 - (-1))(x^2 - (-4))$$

$$p(x) = 3(x-1)(x^2+1)(x^2+4)$$

$$p(2) = 3(2-1)(2^2+1)(2^2+4) = 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 8 = \underline{120}$$



* TEOREMA DAS RAÍZES IRRACIONAIS CONJUGADAS *

SEJA $p(x)$ UM POLINÔMIO DE COEFICIENTES RACIONAIS. SE O IRRACIONAL $w = a + \sqrt{b}$ É RAIZ DE $p(x)$, ENTÃO $w^* = a - \sqrt{b}$ TAMBÉM O É.

$$\text{SE } p(w) = 0 \quad \longrightarrow \quad p(w^*) = 0$$

OBS 1: VÁLIDO SOMENTE QUANDO OS COEFICIENTES DE $p(x)$ SÃO RACIONAIS.

OBS 2: w E w^* SÃO RAÍZES DE MESMA MULTIPLICIDADE



$1 + \sqrt{2}$ e $2 - \sqrt{5}$ SÃO RAÍZES DA EQUAÇÃO

$$x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 6x + 1 = 0$$

CALCULE AS RAÍZES RESTANTES.

$1 + \sqrt{2} \rightarrow 1 - \sqrt{2}$ TAMBÉM É RAIZ

$2 - \sqrt{5} \rightarrow 2 + \sqrt{5}$ " " "



EXEMPLO

Se $2 + \sqrt{3}$ é raiz da equação abaixo,

Calcule as raízes restantes.

$$\overbrace{x^3 - 3x^2 + x + (1)}^{p(x)} = 0$$

Se $2 + \sqrt{3}$ é raiz $\rightarrow 2 - \sqrt{3}$ também é

$$p(x) = (x - (2 + \sqrt{3}))(x - (2 - \sqrt{3}))(x - a)$$

$$p(x) = (x^2 - (2 - \sqrt{3})x - (2 + \sqrt{3})x + (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}))(x - a)$$

$$p(x) = (x^2 - 2x + \cancel{\sqrt{3}} - 2x - \cancel{\sqrt{3}} + 4 - 3)(x - a)$$

$$p(x) = (x^2 - 4x + 1)(x - a)$$

$$p(x) = \dots (-a)$$

$$-a = 1 \rightarrow \boxed{a = -1} \quad \text{raiz} = -1$$



* RELAÇÕES DE GIRARD *

RELAÇÕES DE GIRARD SÃO RELAÇÕES
EXISTENTES ENTRE OS COEFICIENTES E
AS RAÍZES DE UM POLINÔMIO.



→ POLINÔMIO DE GRAU 2

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

RAÍZES : r_1 , r_2

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

$$p(x) = a(x^2 - r_1x - r_2x + r_1r_2)$$

$$p(x) = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$-a(r_1 + r_2) = b \rightarrow$$

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}$$

$$a.r_1r_2 = c \rightarrow$$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$



$$\text{Ex: } p(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = 5 \\ r_1 \cdot r_2 &= \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r_1 &= 2 \\ r_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$q(x) = x^2 - 3x - 4$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{-(-3)}{1} = 3 \\ r_1 \cdot r_2 &= \frac{-4}{1} = -4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r_1 &= 4 \\ r_2 &= -1 \end{aligned}$$



→ POLINÔMIO DE GRAU 3

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

RAÍZES : r_1 , r_2 , r_3

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

$$= a(x^2 - r_1x - r_2x + r_1r_2)(x - r_3)$$

$$= a(x^3 - \underline{r_3x^2} - \underline{r_1x^2} + \underline{r_1r_3x} - \underline{r_2x^2} + \underline{r_2r_3x} + \underline{r_1r_2x} - \underline{r_1r_2r_3})$$

$$= ax^3 - a(r_1 + r_2 + r_3)x^2 + a(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) - a.r_1r_2r_3$$



$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$p(x) = ax^3 - a(r_1 + r_2 + r_3)x^2 + a(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - a.r_1r_2r_3$$

$$-a(r_1 + r_2 + r_3) = b \rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-b}{a}$$

$$a(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) = c \rightarrow r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a}$$

$$-a.r_1r_2r_3 = d \rightarrow r_1.r_2.r_3 = \frac{-d}{a}$$



→ POLINÔMIO DE GRAU 4

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

RAÍZES : r_1 , r_2 , r_3 , r_4

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{b}{a}$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 = \frac{c}{a}$$

$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = -\frac{d}{a}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{e}{a}$$



→ POLINÔMIO DE GRAU "n"

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

RAÍZES : $r_1, r_2, \dots, r_n$

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = - \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n + r_2 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$\vdots$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$



EXEMPLO

SEJAM a, b e c AS RAÍZES DA EQUAÇÃO

$$x^3 + 3x^2 - 7x - 6 = 0$$

ESCREVA SUAS RELAÇÕES DE GIRARD.

$$a + b + c = -\frac{3}{1} \rightarrow a + b + c = -3$$

$$ab + ac + bc = +\frac{-7}{1} \rightarrow ab + ac + bc = -7$$

$$a \cdot b \cdot c = -\frac{-6}{1} \rightarrow a \cdot b \cdot c = 6$$



EXEMPLO

DETERMINE AS RAÍZES DA EQUAÇÃO SABENDO QUE $2+i$ É UMA DELAS:

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$$

$$\text{RAÍZES : } 2+i, 2-i, K$$

$$\text{R. G.: } 2 + \cancel{i} + 2 - \cancel{i} + K = - \frac{-7}{1}$$

$$K + 4 = 7$$

$$K = 3$$

$$\text{R.G.: } (2+i)(2-i)K = - \frac{(-15)}{1} = 15$$

$$(4 - (-1))K = 15 \rightarrow 5K = 15 \rightarrow K = 3$$



EXEMPLO

DETERMINE AS RAÍZES DA EQUAÇÃO SABENDO QUE DUAS DELAS SÃO IGUAIS.

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

RAÍZES : a, a, b

$$\text{R.G.: } a + a + b = -\frac{-4}{1} \rightarrow \boxed{2a + b = 4}$$

$$\text{R.G.: } a \cdot a + ab + ab = \frac{5}{1} \rightarrow \boxed{a^2 + 2ab = 5}$$

$b = 4 - 2a$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot (4 - 2a) = 5$$

$$a^2 + 8a - 4a^2 = 5$$

$$\boxed{3a^2 - 8a + 5 = 0}$$



$$3a^2 - 8a + 5 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow \Delta = 64 - 60$$

$$\underline{\Delta = 4}$$

$$a = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 2}{6}$$

$$\boxed{a = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}} ; \boxed{a = 1}$$

$$3a^2 - 8a + 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{3} \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{5}{3} - 2 =$$

$$\frac{125}{27} - \frac{100}{9} + \frac{25}{3} - 2 =$$

$$\frac{125 - 300 + 225 - 54}{27} = -\frac{4}{27} \neq 0$$

$$x = 1 \rightarrow 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

$$1, 1, b \rightarrow 2 + b = 4 \rightarrow \boxed{b = 2}$$

{ 1, 1, 2 }



EXEMPLO

SE a, b, c, d SÃO RAÍZES DA EQUAÇÃO
ABAIXO, CALCULE O VALOR DE:

$$\frac{1}{abc} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{bcd} = K$$

$$x^4 + 5x^3 - x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$K = \frac{1}{abc} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{bcd}$$

$$K = \frac{d + c + b + a}{abcd} = \frac{a + b + c + d}{a \cdot b \cdot c \cdot d}$$

$$a + b + c + d = -5 \quad ; \quad a \cdot b \cdot c \cdot d = -7$$

$$K = \frac{-5}{-7} \rightarrow$$

$$K = \frac{5}{7}$$



EXEMPLO

CALCULE AS RAÍZES DA EQUAÇÃO ABAIXO SABENDO QUE ELAS ESTÃO EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA.

$$x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$$

$$\text{Raízes : } a - r, a, a + r$$

$$\text{R.G. : } a - r + a + a + r = \frac{-(-12)}{1}$$

$$3a = 12$$

$$a = 4$$

$$\text{Raízes : } (4 - r, 4, 4 + r)$$

$$(4 - r) \cdot 4(4 + r) = - \frac{-48}{1} \rightarrow 16 - r^2 = 12$$

$$r^2 = 4 \rightarrow r = \pm 2$$

$$r = 2 \rightarrow 2, 4, 6$$

$$r = -2 \rightarrow 6, 4, 2$$

$$\rightarrow S = \{2, 4, 6\}$$



EXEMPLO

SEJA $p(x) = x^3 + mx - 20$. QUAS RAÍZES SÃO a, b E c , COM $m \in \mathbb{R}$. CALCULE $a^3 + b^3 + c^3$.

$$\begin{cases} a^3 + ma - 20 = 0 \\ b^3 + mb - 20 = 0 \\ c^3 + mc - 20 = 0 \end{cases}$$

⊕

$$a^3 + b^3 + c^3 + \underbrace{m(a+b+c)}_0 - 60 = 0$$

$$\underline{x^3 + 0x^2 + mx - 20 = 0} \rightarrow \underline{a+b+c = 0}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 0 = 60$$

$$\boxed{a^3 + b^3 + c^3 = 60}$$



EXEMPLO

DETERMINE A RELAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES b E c PARA QUE A EQUAÇÃO POSSUA DUAS RAÍZES IGUAIS.

$$x^3 + bx + c = 0$$

Raízes : m, m, n

$$\text{R.G. : } 2m + n = 0 \rightarrow \boxed{n = -2m}$$

$$\text{R.G. : } m^2 + 2mn = b \rightarrow m^2 + 2m \cdot (-2m) = b$$

$$\boxed{b = -3m^2} \rightarrow m^2 = -\frac{b}{3} \quad (\text{I})$$

$$\text{R.G. : } m^2 n = -c \rightarrow m^2 \cdot (-2m) = -c$$

$$\boxed{2m^3 = c} \rightarrow m^3 = \frac{c}{2} \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}) \quad m^6 = \frac{-b^3}{27}$$

$$\rightarrow \frac{-b^3}{27} = \frac{c^3}{4} \rightarrow \boxed{27c^3 = -4b^3}$$

$$(\text{II}) \quad m^6 = \frac{c^3}{4}$$



* TEOREMA DE BOLZANO *

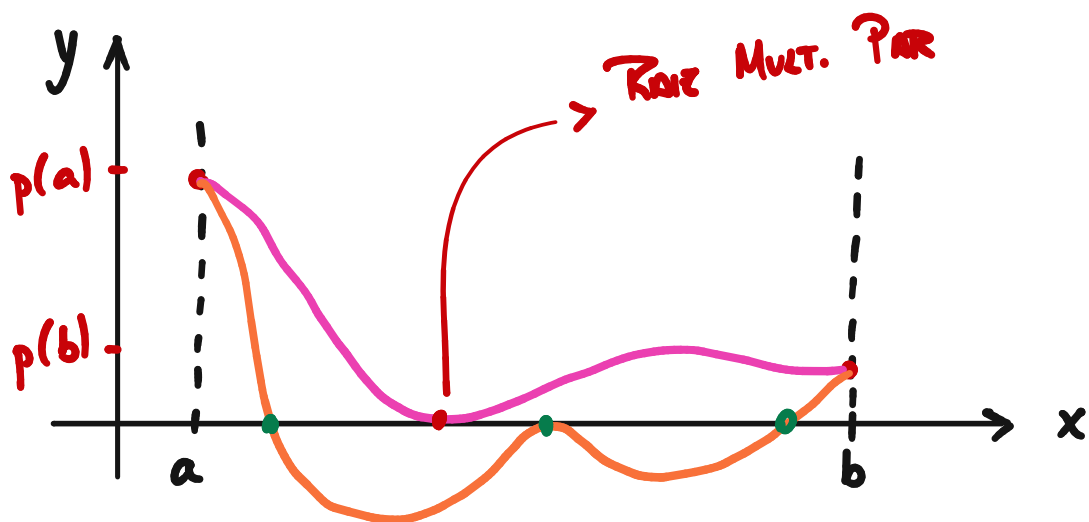
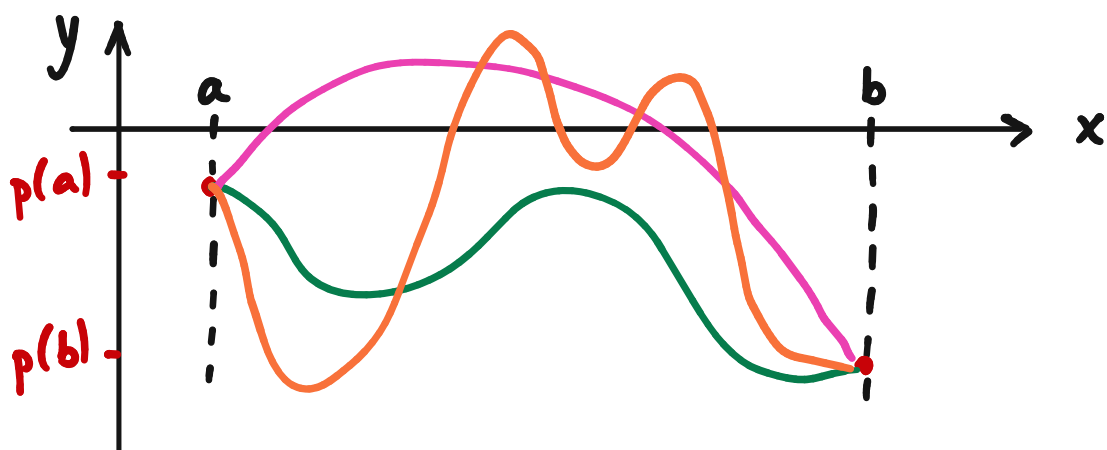
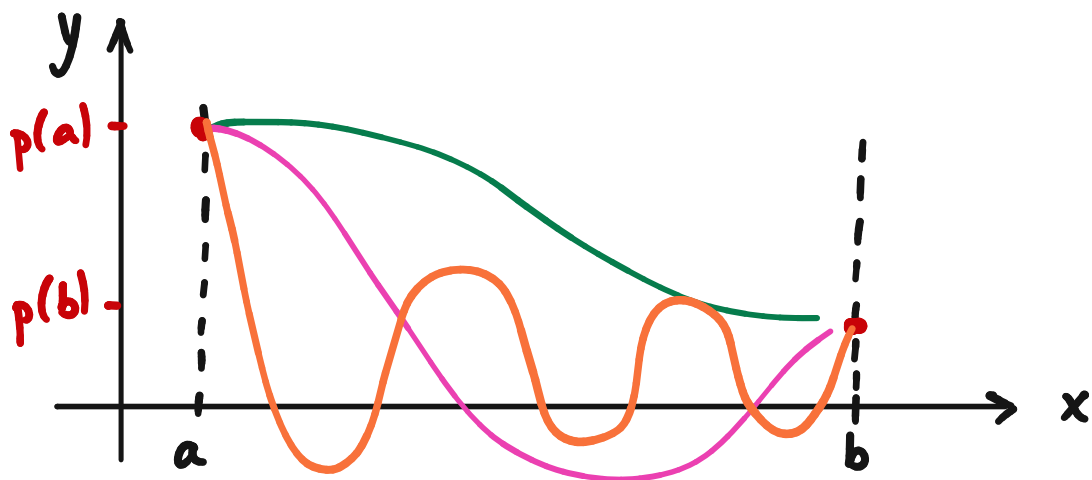
SEJA $p(x)$ UM POLINÔMIO E $]a, b[$ UM INTERVALO REAL.

* SE $p(a)$ E $p(b)$ TEM MESMO SINAL, ENTÃO ENTÃO O Nº DE RAÍZES REAIS ENTRE a E b É PAR OU NÃO EXISTE RAÍZ.

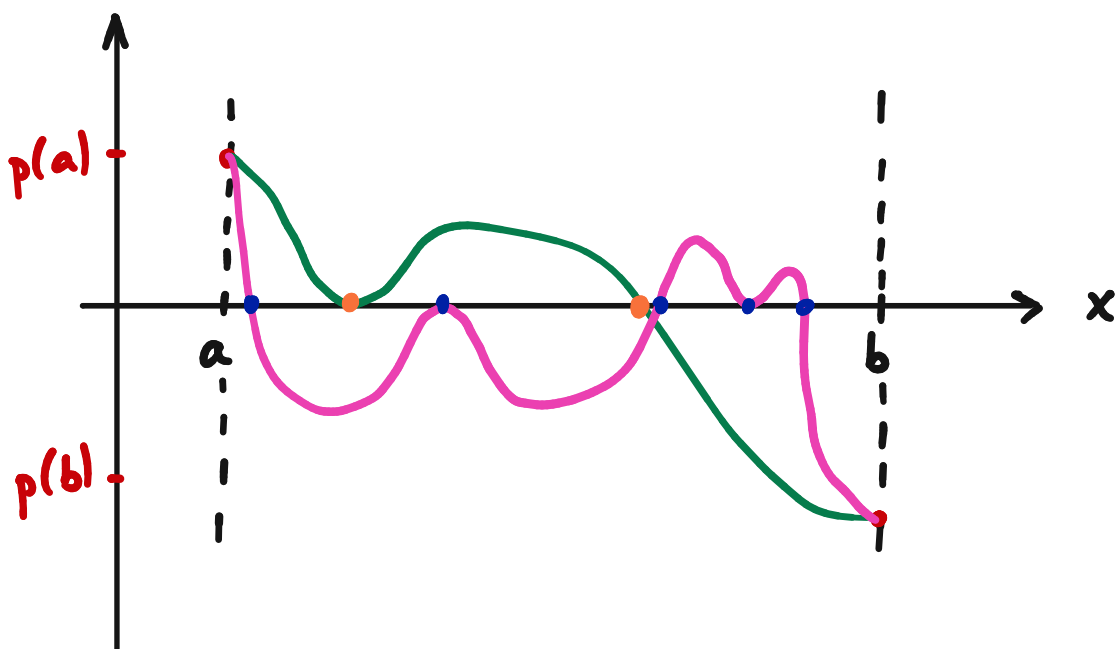
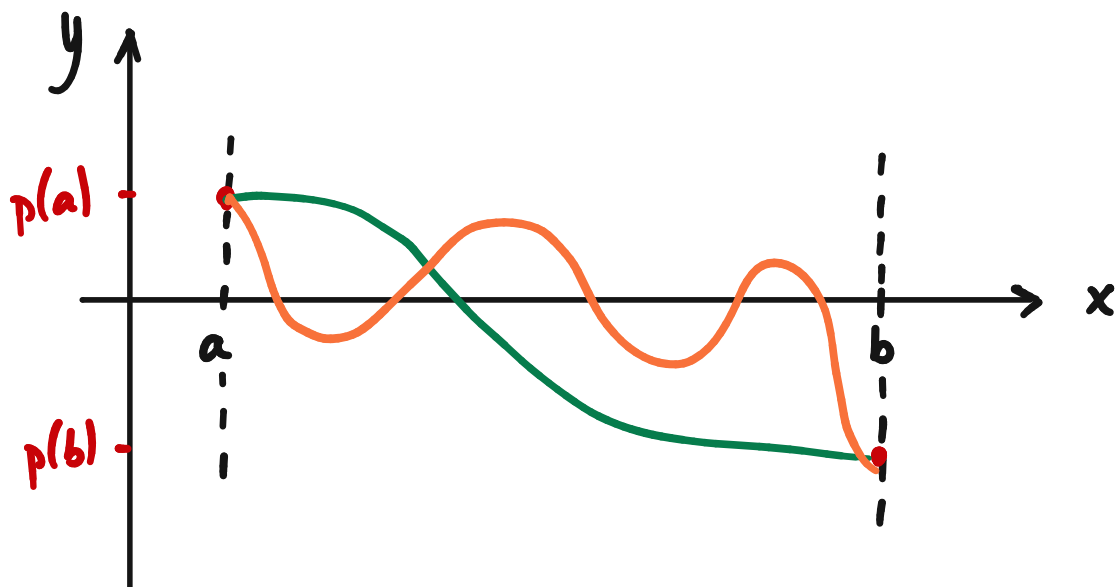
* SE $p(a)$ E $p(b)$ TEM SINAIS CONTRÁRIOS, ENTÃO ENTÃO O Nº DE RAÍZES REAIS ENTRE a E b É ÍMPAR.



* $p(a)$ e $p(b)$: MESMO SINAL



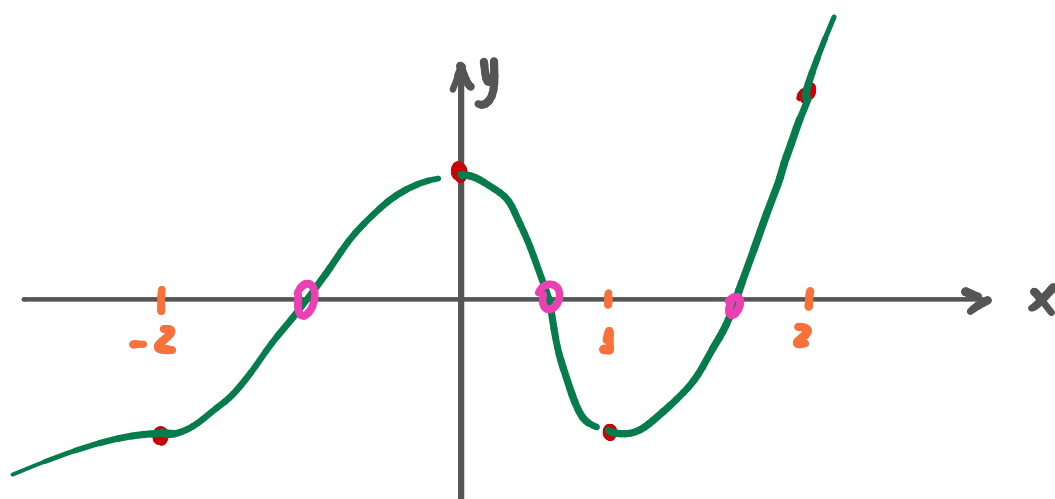
* $p(a)$ e $p(b)$: SINAIS CONTRÁRIOS



EXEMPLO

SEJA $p(x) = x^3 - 3x + 1$.

CALCULE $p(-2)$, $p(0)$, $p(1)$ E $p(2)$, E ANALISE
O Nº DE RAÍZES REAIS DE $p(x)$.



$$p(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 1 = -1$$

$$p(0) = 1$$

$$p(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$$

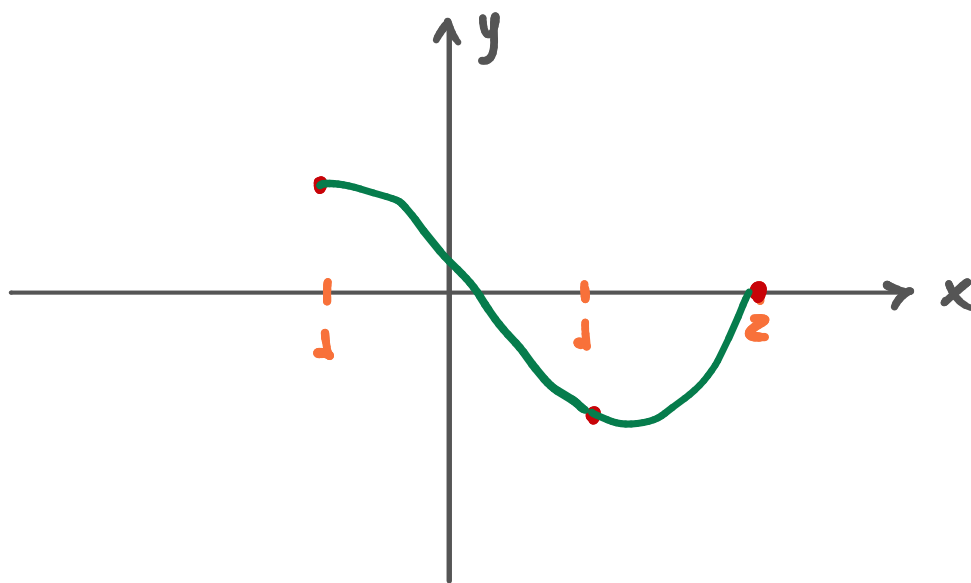
$$p(2) = 2^3 - 3(2) + 1 = 3$$



EXEMPLO

SEJA $p(x)$ DE GRAU 3 COM COEFICIENTES REAIS
COM RAÍZES $2 \in i$.

SE $p(1) \cdot p(-1) < 0$, CALCULE O N° DE RAÍZES
REAIS ENTRE -1 E 1 .



RAÍZES : $2, i, -i$

ENTRE $1 \in -1 \rightarrow \textcircled{1}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{7}, \dots$



* TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS *

$$\begin{cases} p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Se $p(x)$ possuir raiz racional, essa será da forma:

$$r = \pm \frac{\text{Div}(a_0)}{\text{Div}(a_n)}$$



$$2x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$D_{11}(5) = \{1, 5\}$$

$$D_{11}(2) = \{1, 2\}$$

POSSÍVEIS RAÍZES RACIONAIS:

$$\left\{ \pm \frac{1}{1} ; \pm \frac{5}{1} ; \pm \frac{1}{2} ; \pm \frac{5}{2} \right\}$$



EXEMPLO

DETERMINE AS POSSÍVEIS RAÍZES RACIONAIS
DA EQUAÇÃO:

$$4x^5 + 5x^3 + x - 9 = 0$$

$$r = \pm \frac{\text{Div}(9)}{\text{Div}(4)}$$

$$\text{Div}(9) = \{ 1, 3, 9 \}$$

$$\text{Div}(4) = \{ 1, 2, 4 \}$$

POSSÍVEIS RAÍZES RACIONAIS

$$\left\{ \pm \frac{1}{1} ; \pm \frac{3}{1} ; \pm \frac{9}{1} ; \pm \frac{1}{2} ; \pm \frac{3}{2} ; \pm \frac{9}{2} ; \right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{4} ; \pm \frac{3}{4} ; \pm \frac{9}{4} \right\}$$



EXEMPLO

DETERMINE AS RAÍZES DA EQUAÇÃO :

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$a_0 = 6 : a_1 = 1 \rightarrow \{ \pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6 \}$$

$$1 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$$

1 É RAÍZ

1	1	-2	2	-7	6
	1	-1	1	-6	0

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x^3 - x^2 + x - 6)$$

$$q(-1) = -1 - 1 + (-1) - 6 = -9$$

$$q(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0 \rightarrow 2 \text{ É RAÍZ}$$



$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 3 & 0
 \end{array}$$

$x^2 + x + 3$

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x^2 + x + 3)$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $1 \quad 2$

$$x^2 + x + 3 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \rightarrow \underline{\Delta = -11}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2} \rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}}$$

$$\text{Raíces : } \left\{ 1 ; 2 ; \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} ; \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2} \right\}$$



EXEMPLO

SE AS RAÍZES DA EQUAÇÃO SÃO INTEIROS POSITIVOS, CALCULE O VALOR DE "a + b".

$$x^4 + ax^3 + 17x^2 + bx + 6 = 0$$

POSSÍVEIS : { 1, 2, 3, 6 }

$$\text{PRODUTO : } r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{6}{1} = 6$$

{ 1, 1, 1, 6 } ou { 1, 1, 2, 3 }

1 é RAÍZ :

$$1 + a \cdot 1 + 17 \cdot 1 + b + 6 = 0$$

$$a + b = -24$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 = 17$$

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6 = 21$$

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 17$$

EXEMPLO

FATORE O POLINÔMIO EM POLINÔMIOS DE GRAU 1.

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4) = 0$$

POSSÍVEIS
RACIONAIS $\left\{ \pm 1, \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24 \right\}$

$$p(-1) = 1 + 8 + 17 - 2 - 24 = 0 \rightarrow -1 \text{ é Raiz}$$

-1	1	-8	17	2	-24
	1	-9	26	-24	0

$$q(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = (x+1)(x^3 - 9x^2 + 26x - 24)$$

$$q(-1) = -1 - 9 - 26 - 24 = -60$$

$$q(2) = 8 - 36 + 52 - 24 = 0 \rightarrow 2 \text{ é Raiz}$$



2		1	- 9	26	- 24
		1	- 7	12	0

$$s(x) = x^2 - 7x + 12$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = (x+1)(x-2)(x^2 - 7x + 12)$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$S = 7 \quad P = 12 \rightarrow \{3, 4\}$$

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = (x+1)(x-2)(x-3)(x-4)$$



EXEMPLO

Mostre Que O Número $1 + \sqrt{2}$ É Irracional.

$$x = 1 + \sqrt{2}$$

$$(x - 1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

Possíveis Raízes
Racionais : $\{ \pm 1 \}$

Não Possui Raiz Racional

$1 + \sqrt{2}$ Não É Racional



EXEMPLO

MOSTRE QUE $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ É
Um Número Inteiro.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$a = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \rightarrow a^3 = 7 + 5\sqrt{2}$$

$$b = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} \rightarrow b^3 = 7 - 5\sqrt{2}$$

$$x = a + b$$

$$a \cdot b = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt[3]{7^2 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{49 - 50} = \sqrt[3]{-1} = -1$$



$$x = a + b$$

$$x^3 = (a + b)^3$$

$$x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$x^3 = 14 + 3 \cdot (-1) \cdot x$$

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

Possíveis R. Racionais : $\{ \pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14 \}$

$$x = 2 \rightarrow 8 + 6 - 14 = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 3 & -14 \\ \hline & 1 & 2 & 7 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 7 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 7 = -24$$

So Complexo

$$x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \rightarrow 2$$



APROFUNDAMENTO

$$\text{SEJA } p(x) = x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$$

$$\text{SE } p(1) = 1 ; p(2) = 2 ; p(3) = 3 ; p(4) = 4 ;$$

$$p(5) = 5 \text{ E } p(6) = 6, \text{ CALCULE } p(7).$$

$$p(x) = q(x) + s(x)$$

$$q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$$

$$s(x) = x$$

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) + x$$

$$p(7) = (7-1)(7-2)(7-3)(7-4)(7-5)(7-6) + 7$$

$$p(7) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 7$$

$$p(7) = 727$$



SOBRE $p(x) = x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 8x^2 + 16x$:

- a) APENAS 1 RAIZ REAL.
- b) DUAS RAÍZES REAIS DISTINTAS.
- c) DUAS RAÍZES REAIS IGUAIS.
- d) QUATRO RAÍZES REAIS, TODAS DISTINTAS

$$p(x) = x(x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 16)$$

$x = 0$ É RAIZ

RAÍZES RAZ. POSSÍVEIS : $\{ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16 \}$

$$p(1) \neq 0$$

$$p(-1) = -1 + 2 - 6 + 12 - 8 + 16 = 15 \neq 0$$

$$p(-2) = -32 + 32 - 48 + 48 - 16 + 16 = 0$$

-2 É RAIZ



-2		1	2	6	12	8	16
		1	0	6	0	8	0

└──────────────────┘

$$q(x) = x^4 + 6x^2 + 8$$

$$p(x) = x \cdot (x+2) (x^4 + 6x^2 + 8)$$

$$x' = y$$

$$y^2 + 6y + 8 = 0 \rightarrow S = -6 \quad P = 8$$

$$y = -2 \rightarrow x' = -2 \rightarrow x = \pm i\sqrt{2}$$

ou

$$y = -4 \rightarrow x' = -4 \rightarrow x = \pm 2i$$



DETERMINE AS RAÍZES COMUNS AOS POLINÔMIOS :

$$p(x) = x^5 + x^4 - 8x^2 - 9x + 15$$

$$q(x) = 3x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 4x - 10$$

1 É RAÍZ DE $p(x)$

1	1	1	0	-8	-9	15
	1	2	2	-6	-15	0

$x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x - 15$

$$p(x) = (x-1)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x - 15)$$

$$q(x) = 3x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 4x - 10$$

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x - 15 = 0 & (-3) \\ 3x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 4x - 10 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x - 15 = 0 \quad (-3) \\ 3x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 4x - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cancel{3}x^4 - \cancel{6}x^3 - 6x^2 + 18x + 45 = 0 \\ \textcircled{+} \cancel{3}x^4 + \cancel{6}x^3 + 13x^2 - 4x - 10 = 0 \end{cases}$$

$$7x^2 + 14x + 35 = 0$$

$$\boxed{x^2 + 2x + 5 = 0} \rightarrow \text{Raízes Comuns}$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$$

$$\Delta = -16$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

$$\boxed{x = -1 \pm 2i}$$

