Aula 17

Banco do Brasil - Matemática - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

10 de Janeiro de 2023

Índice

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Fala, concurseiro! Estamos juntos em mais uma aula e hoje falaremos sobre:

Sequências, Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Trata-se de um **assunto bastante comum** em provas e, portanto, fundamental na sua preparação. Nas próximas páginas, você entenderá o que é uma sequência, faremos também **uma análise das sequências mais famosas** e traremos bastante exemplos para não ficarmos apenas na teoria.

Nessa aula, existem algumas fórmulas que você deve guardar na memória. Portanto, anote-as em um canto de fácil visualização e faça a lista de exercícios proposta ao final desse livro. A prática de questões é nossa maior aliada quando temos que memorizar alguma fórmula. Portanto, nada de só ver a teoria! *Ok?!*

Um forte abraço,
Prof. Francisco Rebouças.

Para **tirar dúvidas**, não deixe de utilizar o nosso fórum. Lá, estaremos sempre à disposição para ajudá-lo. Se preferir, você também **pode entrar em contato diretamente comigo** através dos seguintes canais:

E-mail - Prof. Francisco Rebouças:

prof.franciscoreboucas@gmail.com

Telegram - Prof. Francisco Rebouças:

https://t.me/prof_fco

"Tente uma, duas, três vezes e se possível tente a quarta, a quinta e quantas vezes for necessário. Só não desista nas primeiras tentativas, a persistência é amiga da conquista. Se você quer chegar onde a maioria não chega, faça o que a maioria não faz." (Bill Gates)

SEQUÊNCIAS, PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Introdução às Sequências Numéricas

De modo objetivo, podemos definir as sequências afirmando que são **listas de números em que os termos obedecem a uma determinada regra de sucessão**.

- (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...);
- (1, 1 ,2 ,2 ,3 ,3, 4, 4, ...);
- (2, 4, 8, 16, 32, ...);
- (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...);

Normalmente, as sequências aparecem representadas na forma acima: entre parênteses, termo separados por vírgulas e com as reticências ao final, caso necessário. Ademais, é possível representar as sequências da seguinte forma:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$$

Nesse tipo de representação, temos que o a_1 é lido como "a índice um", a_2 é o "a índice dois", a_3 é o "a índice três" e assim sucessivamente. Por exemplo, na sequência $(3, 6, 9, 12, 15, \dots)$ temos que:

- $a_1 = 3$
- $a_2 = 6$
- $a_3 = 9$
- $a_4 = 12$
- $a_5 = 15$

Esse índice que está subscrito ao "a" indica a ordem do termo! a_1é o primeiro termo da sequência, a_2 é o segundo termo da sequência, a_3 é o terceiro. Quando queremos representar um termo de uma sequência e não sabemos qual a sua ordem, simplesmente o denotamos como $\boldsymbol{a_n}$ e o lemos **"a índice n"**.

É importante falar que algumas sequências podem ser representadas pelo seu termo geral. Por exemplo, $(3, 6, 9, 12, 15, \dots)$ pode ser explicitada como $\boldsymbol{a_n = 3 \cdot n}, n \in \mathbb{N}^*$. Assim, ficamos com:

- Quando $n = 1$, então $a_1 = 3 \cdot 1 \Rightarrow a_1 = 3$
- Quando $n = 2$, então $a_2 = 3 \cdot 2 \Rightarrow a_2 = 6$
- Quando $n = 3$, então $a_3 = 3 \cdot 3 \Rightarrow a_3 = 9$
- Quando $n = 4$, então $a_4 = 3 \cdot 4 \Rightarrow a_4 = 12$
- Quando $n = 5$, então $a_5 = 3 \cdot 5 \Rightarrow a_5 = 15$

Veja que obtivemos exatamente os mesmos números da sequência que estávamos tratando, inclusive na ordem dada. Conclusão: nossas sequências podem ser representadas de formas diferentes, por meio da lei de formação e não só na forma explícita $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$.

Existem **sequências que apresentam um padrão muito específico**. Essas sequências ganham um nome especial e trataremos delas nos tópicos subsequentes. Como exemplo, podemos citar a sequência de Fibonacci, a progressão aritmética e a progressão geométrica.

HORA DE PRATICAR!

(PM-SP/2020) Na sequência de números: 4, 8, 6, 12, 10, 20, 18, 36, 34, ..., o primeiro termo que é maior do que 100 é o número

a) 122.
b) 126.
c) 132.
d) 136.

Comentários:

Para aquecer um pouco, vamos resolver essa questão e ver como é a pegada. A primeira coisa que podemos perceber na sequência dada, é que temos alguns termos que são o dobro do anterior.

$$4, \underbrace{8}_{\times 2},\ 6, \underbrace{12}_{\times 2},\ 10, \underbrace{20}_{\times 2},\ 18, \underbrace{36}_{\times 2},\ 34, \underbrace{\ldots}_{\times 2},$$

Observe ainda que o número que multiplicamos por dois é duas unidades menor do que o seu anterior.

$$4, 8 \xrightarrow{-2} 6, 12 \xrightarrow{-2} 10, 20 \xrightarrow{-2} 18, 36 \xrightarrow{-2} 34, 68, \ \ldots$$

$$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$$

Seguindo a lógica que encontramos, podemos completar a sequência para achar o primeiro termo que é maior do que 100.

$$4, 8, 6, 12, 10, 20, 18, 36, 34, 68, 66, \color{red}{132} \ldots$$

Gabarito: LETRA C.

Sequência de Fibonacci

Pessoal, a sequência de Fibonacci é muito conhecida no meio matemático. Reconhecê-la na hora da prova pode ser um diferencial, de modo a propiciar mais confiança e agilidade na questão. *E qual é a sequência de Fibonacci?*

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots)$$

Você consegue desvendar o padrão dessa sequência? A sequência de Fibonacci é definida a partir de dois valores iniciais: o primeiro e o segundo termo. Em uma sequência qualquer, chamaríamos esses termos de a_1 e a_2. No entanto, estamos falando da sequência de Fibonacci e por esse motivo, chamamos esses termos de $\boldsymbol{F_1}$ **e** $\boldsymbol{F_2}$**.**

Note que os dois primeiros termos dessa sequência são iguais a 1! Depois, cada termo subsequente é formado pela soma dos dois anteriores! Percebeu?

- $F_3 = F_1 + F_2 \implies F_3 = 1 + 1 = 2$
- $F_4 = F_3 + F_2 \implies F_4 = 2 + 1 = 3$
- $F_5 = F_4 + F_3 \implies F_5 = 3 + 2 = 5$
- $F_6 = F_5 + F_4 \implies F_6 = 5 + 3 = 8$
- Por aí vai...

Podemos representar esses fatos de uma forma resumida e organizada. Para essa finalidade, definimos a sequência de Fibonacci da seguinte forma:

$$F_n = \begin{cases} 1, se\ n = 1 \\ 1, se\ n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, se\ n \geq 3 \end{cases}$$

Veja que é tudo o que a gente falou até aqui, mas utilizando a notação matemática. Os dois primeiros termos são iguais a 1 e um termo genérico F_n é dado como a soma dos dois termos anteriores a ele: $\boldsymbol{F_{n-1} + F_{n-2}}$.

Podemos, ainda, representar a sequência de Fibonacci de mais um jeito, **através de uma fórmula**! Qualquer termo da sequência de Fibonacci pode ser obtido usando a seguinte expressão:

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

É um jeito mais trabalhoso de obtermos os termos, pois precisaremos ficar desenvolvendo os binômios. Recomendo que, para escrever a sequência, utilize nossa regra de somar os dois termos anteriores, lembrando que **os dois primeiros termos são iguais a um**.

No mais, é importante ter uma noção do aspecto da fórmula, pois poderá te ajudar em eventuais questões. Falando nelas, vamos fazer algumas?

(ALESE/2018) Um servidor público, no seu primeiro dia de trabalho, atendeu uma única pessoa, o que se repetiu no segundo dia. A partir do terceiro, o número de pessoas atendidas por ele sempre foi igual à soma dos números de pessoas atendidas nos dois dias anteriores. Seu supervisor prometeu que, se houvesse um dia em que ele atendesse 50 ou mais pessoas, ele ganharia uma folga extra. Considerando que o padrão de atendimentos descrito se manteve, o servidor ganhou sua primeira folga extra ao final do

A) oitavo dia de trabalho.
B) décimo dia de trabalho.
C) décimo segundo dia de trabalho.
D) vigésimo dia de trabalho.
E) vigésimo segundo dia de trabalho.

Comentários:

Vamos montar uma sequência com as informações fornecidas no enunciado. Temos que um servidor público atendeu uma pessoa no primeiro dia de trabalho, $\boldsymbol{a_1 = 1}$. No segundo dia, o servidor atendeu também uma pessoa, $\boldsymbol{a_2 = 1}$. A partir do terceiro dia, o número de pessoas atendidas é igual à soma dos dois dias anteriores. Por exemplo, $\boldsymbol{a_3 = a_1 + a_2 = 2}$.

Note que a sequência cujo os dois primeiros termos são 1 e os demais termos é a soma do dois anteriores é uma sequência muito conhecida no meio matemático: é a sequência de Fibonacci. Lembre-se:

$$F_n = \begin{cases} 1, se\ n = 1 \\ 1, se\ n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, se\ n\ \geq 3 \end{cases}$$

Logo, queremos achar o primeiro termo da sequência de Fibonacci maior do que 50. Como fazemos isso? O jeito mais fácil é escrever todos eles!

F_1	F_2	$F_3 = F_1 + F_2$	$F_4 = F_2 + F_3$	$F_5 = F_3 + F_4$
1	1	2	3	5
$F_6 = F_4 + F_5$	$F_7 = F_6 + F_5$	$F_8 = F_7 + F_6$	$F_9 = F_8 + F_7$	$F_{10} = F_9 + F_8$
8	13	21	34	55

Encontramos, portanto, que ao fim do décimo dia o servidor terá atendido 55 pessoas e ganhará a sua primeira folga extra.

Gabarito: Letra B.

Progressão Aritmética

Conceito

A **progressão aritmética** é o tipo de sequência mais comum em questões. De modo geral, é qualquer sequência cujo termo subsequente difere do anterior por uma constante. É mais fácil do que você está pensando! Vamos ver alguns exemplos para começar a destrinchar essa matéria!

- $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots)$
- $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$
- $(21, 14, 7, 0, -7, -14, -21, \dots)$
- $(0, 50, 100, 150, 200, 250, \dots)$

Você é capaz de identificar os padrões das sequências acima? Todas elas são exemplos de progressões aritméticas. À medida que "se anda" na sequência, os termos sempre aumentam (ou diminuem) de um mesmo um valor.

- $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior mais 1.
- $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior mais 2.
- $(21, 14, 7, 0, -7, \ \dots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior menos 7.
- $(0, 50, 100, 150, 200, \ \dots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior mais 50.

Esse número que adicionamos a cada termo é chamado de razão (r). Quando a razão é positiva, nós dizemos que a **PA é crescente**, quando é negativa, dizemos que a **PA é decrescente**. Ademais, a razão de uma progressão aritmética também poderá ser igual a zero ($r = 0$), nesse caso, dizemos que a PA é constante.

RESUMINDO

PA	Condições	Exemplos
Crescente	$r > 0$	$(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$
Decrescente	$r < 0$	$(100, 90, 80, 70, \dots)$
Constante	$r = 0$	$(5, 5, 5, 5, 5, \dots)$

Um fato que eu gostaria de ressaltar com vocês é que a escolha da letra "a" para representar elementos de uma sequência **é só uma convenção**. Na prática, você poderá ver sequências representadas das mais diferentes maneiras, por exemplo, utilizando a letra "b" no lugar da letra "a": $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots)$.

Esse tipo de notação é válido! Não tem problema algum, **é ao gosto do freguês**! Por isso, quando você ver sequências representadas com outras letras, continua sendo uma sequência e **a abordagem é exatamente a que estamos fazendo aqui**. *Entendido?*

(PREF. LARANJAL PAUL/2019) A sequência numérica (50, 54, 58, 62, 66) é uma progressão do tipo:
A) Geométrica de razão 2.
B) Geométrica de razão 4.
C) Aritmética de razão 2.
D) Aritmética de razão 4.
E) Aritmética de razão 6.

Comentários:
Apesar de não termos estudado ainda a progressão geométrica, conseguimos perceber que a sequência do enunciado tem a seguinte propriedade: **a diferença entre qualquer um dos termos e o seu anterior é constante e igual a 4 (quatro)**. Dessa forma, temos caracterizada uma PA de razão igual a 4.

Gabarito: LETRA D.

(PREF. LARANJAL PAUL/2019/MOD) Assinale a alternativa que apresenta a sequência numérica que é uma Progressão Aritmética:
A) $(2{,}25;\ 2{,}5;\ 2{,}75; 3)$.
B) $(2;\ 4;\ 8;\ 16)$.
C) $(5{,}3;\ 5{,}5;\ 5{,}6;\ 5; 7)$.

D) $(6;\ 12;\ 16;\ 24)$.

Comentários:
A) CERTO. A diferença entre um termo e o seu anterior é sempre constante.

$$(2{,}25 \xrightarrow{+0{,}25} 2{,}5 \xrightarrow{+0{,}25} 2{,}75 \xrightarrow{+0{,}25} 3)$$

Os "saltos" são sempre constantes e iguais a 0,25 (essa é a razão). Dessa forma, trata-se de uma PA.

B) **ERRADO.** Nesse caso, a diferença entre um termo e o seu anterior não é constante.

$$(2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+8} 16)$$

C) **ERRADO.** Mesma justificativa da alternativa anterior. A diferença entre um termo e seu anterior não é constante (uma hora é 0,2 e outra hora é 0,1). Dessa forma não podemos dizer que é uma PA.

$$(5{,}3 \xrightarrow{+0{,}2} 5{,}5 \xrightarrow{+0{,}1} 5{,}6 \xrightarrow{+0{,}1} 5{,}7)$$

D) **ERRADO.** Mais uma vez, a diferença entre um termo e o seu anterior não é constante.

$$(6 \xrightarrow{+6} 12 \xrightarrow{+4} 16 \xrightarrow{+8} 24)$$

Gabarito: LETRA A.

Termo Geral de uma PA

Em uma progressão aritmética de forma geral $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$, sempre poderemos escrever um termo como função da razão (r) e do primeiro termo (a_1).

- $a_2 = a_1 + r$
- $a_3 = a_2 + r \implies a_3 = (a_1 + r) + r \implies a_3 = a_1 + 2r$

- $a_4 = a_3 + r \implies a_4 = (a_1 + 2r) + r \implies a_4 = a_1 + 3r$

Utilizamos o fato de que, em uma PA, **um determinado termo é igual ao seu anterior mais uma constante**. Para descobrir o a_5, nós só precisamos do a_1 e da razão (r), **não sendo necessário escrever todos os termos da PA até o a_5**. Imagine, por exemplo, que você quer saber o a_{50} da sequência $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$.

Você concorda que listar os 50 termos não seria uma tarefa bacana, né? No entanto, se você souber o a_1 e a razão (r), é possível encontrá-lo em segundos. A **fórmula do termo geral de uma progressão aritmética** é dada pela expressão abaixo, guarde ela bem!

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Por exemplo, para obter o a_{50} da sequência $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$, basta sabermos que $a_1 = 2$ e $r = 2$.

$$a_{50} = 2 + (50 - 1) \cdot 2 \quad \rightarrow \quad a_{50} = 2 + 49 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_{50} = 100}$$

E se a razão for negativa, como fazemos? **Absolutamente do mesmo jeito, não vai mudar nada**. Vamos pegar a sequência $(21, 14, 7, 0, -7, \ \dots)$ que possui razão $r = -7$ e primeiro termo $a_1 = 21$. Veja que é uma PA decrescente. Qual será o a_{75}? Da fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, podemos fazer:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{75} = 21 + (75 - 1) \cdot (-7) \quad \rightarrow \quad a_{75} = 21 - 74 \cdot 7 \quad \rightarrow \quad a_{75} = -497$$

(CÂMARA DOS DEPUTADOS/2014) Em determinado colégio, todos os 215 alunos estiveram presentes no primeiro dia de aula; no segundo dia letivo, 2 alunos faltaram; no terceiro dia, 4 alunos faltaram; no quarto dia, 6 alunos faltaram, e assim sucessivamente. Com base nessas informações, julgue o próximo item, sabendo que o número de alunos presentes às aulas não pode ser negativo.

No vigésimo quinto dia de aula, faltaram 50 alunos

Comentários:

O número de faltosos aumenta conforme **uma progressão aritmética de razão 2**, observe:

$\boldsymbol{a_1} = \mathbf{0}$
$\boldsymbol{a_2} = \mathbf{2}$
$\boldsymbol{a_3} = \mathbf{4}$
$\boldsymbol{a_4} = \mathbf{6}$

Sabemos que a fórmula do termo geral de uma PA é dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Queremos calcular quantos alunos faltaram no 25° dia ($n = 25$). Como a razão é 2 ($r = 2$), então:

$$a_{25} = 0 + (25-1) \cdot 2$$

$$a_{25} = 48$$

Logo, no 25° dia, faltaram 48 alunos.

Gabarito: ERRADO

(IFRR/2020) Em uma determinada Progressão Aritmética, sabe-se que a razão vale 3 e o termo 15 vale 40. Assinale a alternativa que indica corretamente o valor do termo 31 desta Progressão Aritmética.
A) 16.
B) 31.
C) 48.
D) 88.
E) 96.

Comentários:
A questão falou em progressão aritmética de razão igual a 3 e de termo 15 igual a 40. Dessa forma,

$$r = 3 \quad \text{e} \quad a_{15} = 40$$

Com essas duas informações, precisamos descobrir o $\boldsymbol{a_{31}}$.

Na minha opinião, uma solução mais simples é encontrarmos o a_1 com as informações acima e, depois, encontrar o a_{31}. Lembre-se que com a **razão (r) e o primeiro termo (a_1), é possível encontrar qualquer termo da PA.**

$$a_{15} = a_1 + (15-1)r \quad \rightarrow \quad a_{15} = a_1 + 14r$$

Substituindo os valores que temos.

$$40 = a_1 + 14 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad a_1 = 40 - 42 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = -2}$$

Agora, com a razão (r) e o primeiro termo (a_1), podemos determinar o a_{31}.

$$a_{31} = a_1 + (31 - 1) \cdot r \quad \rightarrow \quad a_{31} = a_1 + 30r$$

Substituindo os valores da razão e do primeiro termo.

$$a_{31} = -2 + 30 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{31} = 88}$$

Gabarito: LETRA D.

Progressão Aritmética de 3 termos

É muito comum aparecer em provas uma progressão aritmética de 3 termos. Isso acontece pois elas possuem uma propriedade bem especial. Por exemplo, imagine que temos a seguinte PA: $(2, 4, 6)$. Note que o termo central é a média aritmética dos outros dois!

$$\frac{2\ (a_1) + 6\ (a_3)}{2} = 4\ (a_2)$$

Isso sempre será verdade, para qualquer PA. Vou lhe mostrar o porquê.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{4-2} & \mathbf{4+2} \\ & \downarrow & \downarrow \\ (2, & 4, & 6) \end{array}$$

Note que o termo anterior ao termo central é igual ao termo central menos a razão. Analogamente, o termo posterior é o termo central mais a razão. No caso dessa PA que estamos trabalhando, **a razão é igual a 2**. Genericamente, podemos representar essa mesma situação da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{a_2 - r} & \boldsymbol{a_2 + r} \\ & \downarrow & \downarrow \\ (a_1, & a_2, & a_3) \end{array}$$

A média aritmética entre a_1 e a_3 é:

$$M = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Substituindo $a_1 = a_2 - r$ e $a_3 = a_2 + r$:

$$M = \frac{(a_2 - \cancel{r}) + (a_2 + \cancel{r})}{2} \quad \rightarrow \quad M = \frac{\cancel{2} \cdot a_2}{\cancel{2}} \quad \rightarrow \quad M = a_2$$

Ora, se $M = a_2$, então podemos escrever que:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Vamos ver na prática como saber isso pode nos ajudar?

(PREF. LINHARES/2020) A sequência $(3x - 2, 2x + 3, 5x - 8)$ é uma progressão aritmética de três termos. O valor do segundo termo dessa sequência é:

A) 11.
B) 10.
C) 13.
D) 12.
E) 4.

Comentários:

Olha aí, moçada. **Uma progressão aritmética com três termos**. Vamos entendê-la.

$$(\underbrace{3x - 2}_{a_1}, \underbrace{2x + 3}_{a_2}, \underbrace{5x - 8}_{a_3})$$

Ora, sabemos que:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Assim, substituindo pelas expressões:

$$2x + 3 = \frac{(3x - 2) + (5x - 8)}{2}$$

$$4x + 6 = 3x - 2 + 5x - 8$$

$$4x + 6 = 8x - 10$$

$$4x = 16 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 4}$$

Com o valor de x determinado, basta substituí-lo na expressão do a_2.

$$a_2 = 2x + 3 \quad \rightarrow \quad a_2 = 2 \cdot 4 + 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = 11}$$

Gabarito: LETRA A.

Interpolação de termos em uma PA

Para entender o que significa interpolar, vou abrir essa teoria já com um exercício. Acredito que será mais fácil visualizarmos com um exemplo!

EXEMPLIFICANDO

(PREF. JAGUAPITÃ/2020) A progressão aritmética $(8, \ldots, 29)$ possui 6 termos entre o primeiro e o último. Qual é o sexto termo dessa sequência?
A) 16.
B) 20.
C) 23.
D) 29.

Comentários:
Observe que o enunciado nos forneceu dois termos e pede para determinarmos outro termo que está entre esses dois. Simplificadamente, isso é interpolar, tudo bem? Quando precisamos deduzir um ou mais valores que estão entre outros dois. Vamos resolver esse exercício para entender como devemos proceder no contexto das PAs. É importantíssimo notar que o enunciado falou que existem 6 termos entre o primeiro e o último. Assim,

$$(\overset{a_1}{\overset{\uparrow}{8}}, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5, \boldsymbol{a_6}, a_7}_{\text{6 termos entre o primeiro e o último}}, \overset{a_8}{\overset{\uparrow}{29}})$$

O enunciado pede o sexto termo (a_6), por isso, o destaque em vermelho.

Pronto, temos o problema esquematizado. Lembre-se sempre que com o primeiro termo e a razão, conseguimos determinar qualquer outro termo da sequência. Nós temos o primeiro termo, falta encontrarmos a razão dessa PA. Como fazemos isso?! Por meio da fórmula do termo geral. Sabemos o a_1 e o a_8. Assim,

$$a_8 = a_1 + 7r \quad \rightarrow \quad 29 = 8 + 7r \quad \rightarrow \quad 21 = 7r \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = 3}$$

Com o primeiro termo e a razão, conseguimos encontrar o a_6.

$$a_6 = a_1 + 5r \quad \rightarrow \quad a_6 = 8 + 5 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad a_6 = 8 + 15 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_6 = 23}$$

Gabarito: LETRA C.

Soma dos n primeiros termos de uma PA

Existe mais uma fórmula dentro do universo da progressão aritmética que é a da **soma dos n primeiros termos**. Imagine que temos a seguinte PA: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots)$. *Qual é a soma dos 100 primeiros termos?* Utilizando a fórmula da **soma dos n primeiros termos de uma PA**, podemos responder isso rapidamente.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

INDO MAIS FUNDO!

Vamos tentar chegar na fórmula acima de uma maneira simplificada? Primeiro, considere a seguinte PA: (1, 2, 3, 4, ..., 96, 97, 98, 99, 100). É uma PA com 100 termos e razão 1. Agora, observe o esquema abaixo:

$2 + 98 = 101$

$4 + 97 = 101$

$$(1, 2, 3, 4, 5, \dots, 97, 98, 99, 100)$$

$3 + 98 = 101$

$1 + 100 = 101$

A intenção é visualizar o seguinte: a soma do primeiro com o último termo é igual a soma do segundo com o penúltimo termo e assim sucessivamente. Assim, podemos escrever que:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \cdots$$

Quantos pares conseguiremos formar? Ora, se são 100 termos, então faremos 50 pares, isto é, n/2. A soma dos termos será exatamente a soma desses 50 pares, concorda? Todos eles valem $(a_1 + a_n)$. Portanto, basta multiplicarmos $(a_1 + a_n)$ por $\frac{n}{2}$, que é quantidade de pares. Assim,

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

Vamos utilizar a fórmula para calcular a soma da PA em análise.

Substituindo na fórmula $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$ e $n = 100$:

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot \cancel{100}}{\cancel{2}}$$

$$S_{100} = (1 + 100) \cdot 50$$

$$S_{100} = 5050$$

Portanto, a soma dos 100 primeiros termos da progressão aritmética $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots)$ **é 5050**.

HORA DE
PRATICAR!

(PREF. TAPEJARA /2019) A soma dos 50 primeiros termos da sequência numérica $(-10, -5, 0, \ldots)$ é:
A) 5500.
B) 5625.
C) 5725.
D) 5800.
E) 5925.

Comentários:
O enunciado quer a soma dos 50 primeiros termos. Você deve lembrar da fórmula.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Como são os 50 primeiros termos, temos que $\boldsymbol{n = 50}$. Além disso, o primeiro termo da sequência é -10. Assim, $\boldsymbol{a_1 = -10}$. Portanto, falta apenas achar a_{50} para conseguirmos usar a fórmula. Nesse intuito, devemos usar:

$$a_{50} = a_1 + 49r$$

Olhando para a sequência, percebemos que **a diferença entre um termo e o seu anterior é sempre igual a 5.** Logo, essa é a nossa razão ($\boldsymbol{r=5}$).

$$a_{50}=-10+49\cdot 5 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{a_{50}=235}$$

Pronto, temos todos os valores para usarmos a fórmula da soma.

$$S_{50}=\frac{(a_1+a_{50})\cdot 50}{2} \quad\rightarrow\quad S_{50}=(-10+235)\cdot 25 \quad\rightarrow\quad S_{50}=225\cdot 25 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{S_{50}=5.625}$$

Gabarito: LETRA B.

Progressão Geométrica

Conceito

Na parte de progressões aritméticas, vimos que elas são caracterizadas pela presença de uma razão, que somamos ao termo anterior para obtermos o termo subsequente. **Na progressão geométrica, também teremos uma razão que entrará não somando o termo anterior, mas multiplicando-o**! Vamos com calma! São exemplos de PGs as seguintes sequências:

- $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots);$
- $(5, 25, 125, 625, \ldots);$

Veja que, na primeira sequência acima, **cada termo subsequente é o dobro do anterior**. Na segunda sequência, multiplicamos cada próximo termo por 5 em relação ao termo passado. **Esses números que multiplicamos os termos são as razões de cada sequência e, no estudo das PGs, denotamos ela por q e não mais por r.**

Podemos também pensar em uma PG em termos do quociente. Para identificarmos uma PG, podemos olhar para o quociente de dois termos consecutivos. Lembre-se que na PA falávamos da diferença entre dois termos, aqui nas progressões geométricas, falaremos de quociente. Vamos pegar, por exemplo, a PG $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$. Note que:

$$\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \frac{64}{32} = 2$$

Portanto, **2 é a razão dessa progressão geométrica**. Genericamente, escrevemos assim,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \qquad ou \qquad a_n = q \cdot a_{n-1}$$

EXEMPLIFICANDO

(PREF. HONÓRIO SERPA/2019) Sobre Progressões Aritméticas e Geométricas, é correto afirmar que:
A) Uma Progressão Aritmética é uma sequência de números composta por um valor inicial e um outro valor fixo, que é multiplicado ao valor anterior para encontrar o próximo.
B) Uma Progressão Geométrica é uma sequência de números composta por um valor inicial e um outro valor fixo, que é adicionado ao valor anterior para encontrar o próximo.
C) Não há Progressão Geométrica ou Aritmética com números negativos.
D) Progressões Aritméticas de razão negativa geram sequências de números decrescentes.

Comentários:
A) Uma ~~**Progressão Aritmética**~~ é uma sequência de números composta por um valor inicial e um outro valor fixo, que é multiplicado ao valor anterior para encontrar o próximo.

ERRADO. O enunciado trocou as sequências. Na verdade, essa é a definição **de progressão geométrica** e não de progressão aritmética.

B) Uma ~~Progressão Geométrica~~ é uma sequência de números composta por um valor inicial e um outro valor fixo, que é adicionado ao valor anterior para encontrar o próximo.
ERRADO. Mais uma vez, o enunciado inverteu os conceitos. Na verdade, trata-se de uma progressão aritmética, não de progressão geométrica, conforme afirma a alternativa.

C) ~~Não há~~ Progressão Geométrica ou Aritmética com números negativos.
ERRADO. Pessoal, não há problema algum existir PAs e PGs com números negativos. Inclusive, ao longo da aula trabalhamos com vários exemplos em que eles estarão presentes.

D) Progressões Aritméticas de razão negativa geram sequências de números decrescentes.
CERTO. Essa é verdade! Conforme vimos anteriormente, **quando a razão é negativa, a PA será decrescente.**

Gabarito: LETRA D.
(PREF. JANDAIA DO SUL/2019) Assinale a alternativa que apresenta CORRETAMENTE uma diferença entre progressões aritméticas e progressões geométricas.
A) Uma progressão aritmética é composta por um termo inicial e um fator que é multiplicado várias vezes a este termo inicial, já em uma progressão geométrica, esse fator é somado várias vezes ao termo inicial.
B) Uma progressão aritmética não tem fim, já uma progressão geométrica sempre converge a um valor.
C) Em uma progressão aritmética, os elementos são formados a partir de somas de um fator, já em uma progressão geométrica, os elementos são formados a partir de multiplicações de um fator.
D) A principal diferença entre uma progressão aritmética e geométrica é que a primeira possui termo inicial, e a segunda não.
Comentários:
Mais uma questão para reforçamos a diferença entre PA e PG.

A) Uma progressão aritmética é composta por um termo inicial e um fator que é multiplicado várias vezes a este termo inicial, já em uma progressão geométrica, esse fator é somado várias vezes ao termo inicial.
ERRADO. Alternativa inverteu os conceitos de PA e PG. Fique esperto! Você deve ter começado a perceber que **as bancas gostam de inverter as duas**!

B) Uma progressão aritmética não tem fim, já uma progressão geométrica sempre converge a um valor.
ERRADO. Nada disso, pessoal. Uma **PA pode ter fim**, não tem nada que impeça isso. Ademais, veremos que **nem sempre uma progressão geométrica converge a um valor**.

C) Em uma progressão aritmética, os elementos são formados a partir de somas de um fator, já em uma progressão geométrica, os elementos são formados a partir de multiplicações de um fator.
CERTO. Dessa vez, temos os conceitos apresentados corretamente!

D) A principal diferença entre uma progressão aritmética e geométrica é que a primeira possui termo inicial, e a segunda não.
ERRADO. Pessoal, toda sequência numérica possuirá um termo inicial. Não há como uma sequência existir sem um termo inicial.

Gabarito: LETRA C.

Classificação

Para **avaliar se uma progressão geométrica é crescente ou decrescente**, fazemos uma análise um pouco mais elaborada do que fizemos nas PAs. Veja as duas PGs a seguir.

I. $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$

II. $(-1, -2, -4, -8, -16, -32, \dots)$

Note que a razão das sequências acima é a mesma ($q = 2$). No entanto, **a sequência I é crescente, enquanto a sequência II é decrescente**. Assim, uma análise apenas da razão é insuficiente para determinarmos se uma PG é crescente ou decrescente. *E para quem devemos olhar também?!* **Para o primeiro termo**!

- Para razões maior que um $(q > 1)$

- Se o primeiro termo for positivo ($a_1 > 0$), então a PG é crescente.
- Se o primeiro termo for negativo ($a_1 < 0$), então a PG é decrescente.

Agora, veja essas outras duas sequências:

III. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$

IV. $\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$

Mais uma vez, **as duas sequências acima possuem a mesma razão** $\left(q = \frac{1}{2}\right)$. No entanto, a sequência III é decrescente, enquanto a sequência IV é crescente. Mais uma vez, vamos precisar olhar para o primeiro termo.

- Para razões entre 0 e 1 $(0 < q < 1)$

- Se o primeiro termo for positivo ($a_1 > 0$), então a PG é decrescente.
- Se o primeiro termo for negativo ($a_1 < 0$), então a PG é crescente.

E quando a razão for igual a um $(q = 1)$? Nesses casos, **a PG será constante**. Veja alguns exemplos:

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$$

$$(-5, -5, -5, -5, \dots)$$

Por fim, quando a razão for negativa $(q < 0)$, vamos ter o que chamamos de **PG alternada**. Considere uma PG com a razão $q = -2$.

$$(1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots)$$

Quando temos uma razão negativa a sequência ficará alternando de sinal! Vamos fazer um resumo!

RESUMINDO

PG	Condições	Exemplos
Crescente	$a_1 > 0 \quad \text{e} \quad q > 1$	$(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$
	$a_1 < 0 \quad \text{e} \quad 0 < q < 1$	$\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\right)$
Decrescente	$a_1 > 0 \quad \text{e} \quad 0 < q < 1$	$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$
	$a_1 < 0 \quad \text{e} \quad q > 1$	$(-1, -3, -9, -27, \dots)$
Alternada	$q < 0$	$(1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots)$
Constante	$q = 1$	$(2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots)$

Termo Geral de uma PG

Assim como na PA, a PG possui uma fórmula para o termo geral em função da razão (q), do primeiro termo (a_1) e da ordem (n) do termo procurado.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Se, por acaso, você precisasse descobrir o a_{11} da sequência $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$, o que faria? Obviamente, uma **solução seria listar todos os termos até o a_{11}** sempre multiplicando o termo anterior por 2 para obter o termo subsequente. No entanto, você também poderia **aplicar a fórmula do termo geral** e descobrir de imediato:

$$a_{11} = 2 \cdot 2^{11-1} \quad \rightarrow \quad a_{11} = 2 \cdot 2^{10} \quad \rightarrow \quad a_{11} = 2^{11} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{11} = 2048}$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. VILA VELHA/2020) Numa Progressão Geométrica, o primeiro termo da sequência é igual a 4096 e a razão dessa progressão é igual a 1/2. Com base nessas informações, o valor do 14º termo é:
A) 2.

B) 1.
C) 1/4.
D) 1/2.
E) 4.

Comentários:
Questão para treinarmos a fórmula do **termo geral de uma progressão geométrica**.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

O enunciado nos forneceu $\boldsymbol{a_1 = 4096}$ **e** $\boldsymbol{q = 1/2}$. Como estamos procurando o 14º termo, então $\boldsymbol{n = 14}$.

$$a_{14} = a_1 \cdot q^{14-1} \quad \rightarrow \quad a_{14} = a_1 \cdot q^{13}$$

Substituindo os valores.

$$a_{14} = 4096 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \quad \rightarrow \quad a_{14} = \frac{4096}{2^{13}} \quad \rightarrow \quad a_{14} = \frac{4096}{8192} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{14} = \frac{1}{2}}$$

Gabarito: LETRA D.

Progressão Geométrica de 3 termos

Assim como vimos na PA, também temos uma **progressão geométrica de três termos** que costuma aparecer bastante em provas. Para resolvê-la, é preciso saber uma propriedade importante. *Você lembra que na PA a média aritmética do primeiro e do terceiro termo é igual ao segundo termo?* Pronto. Vamos buscar uma relação parecida aqui, mas que envolva os três termos de uma PG. Como exemplo, considere a seguinte PG.

$$(2, 8, 32)$$

Na progressão geométrica acima, **a razão é 4**. Observe.

$$(2 \xrightarrow{\times 4} 8 \xrightarrow{\times 4} 32)$$

Podemos também imaginá-la da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} 8/4 & & 8 \times 4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (2, & 8, & 32) \end{array}$$

Note que **o primeiro termo é igual ao termo central dividido pela razão**. Analogamente, **o terceiro termo é o termo central multiplicado pela razão**. Vamos pegar esse raciocínio e aplicar para uma PG genérica.

$$\begin{array}{ccc} a_2/q & & a_2 \times q \\ \downarrow & & \downarrow \\ (a_1, & a_2, & a_3) \end{array}$$

Vamos multiplicar o primeiro e o terceiro termo:

$$M = a_1 \cdot a_3 \quad \rightarrow \quad M = \left(\frac{a_2}{\cancel{q}}\right) \cdot (a_2 \cdot \cancel{q}) \quad \rightarrow \quad M = a_2^2$$

Perceba então que o produto do primeiro e do terceiro termo é igual ao quadrado do termo central! Assim,

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Professor, esse resultado é importante mesmo? É sim, pessoal! Ele vai nos possibilitar resolver questões muito mais rapidamente. Observe!

(PREF. IBIAÇÁ/2019) A sequência $(x - 120;\ x;\ x + 600)$ forma uma progressão geométrica. O valor de x é:
A) 40.
B) 120.
C) 150.
D) 200.
E) 250.

Comentários:
Temos uma **PG de três termos**! Nesses casos, sabemos que podemos usar a seguinte relação:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Olhando para a sequência dada, temos que:

$a_1 = x - 120$
$a_2 = x$
$a_3 = x + 600$

Substituindo na expressão:

$$x^2 = (x - 120) \cdot (x + 600)$$

Aplicando a **propriedade distributiva da multiplicação** no lado direito da equação acima, ficamos com:

$$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} - 120x + 600x - 72000$$
$$480x = 72000$$
$$x = \frac{72000}{480} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 150}$$

Gabarito: LETRA C.

Interpolação de termos em uma PG

Você deve ter começado a perceber que há muita semelhança entre os tópicos de PA e PG. Aqui, também tentaremos determinar um ou mais termos entre outros dois. Um jeito bom de explicar esse tópico continua sendo por uma questão. Vamos lá?

(PREF. VN DO IMIGRANTE /2016) A sequência a seguir é uma progressão geométrica decrescente composta por 5 termos:

$$1000, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \quad 8/5$$

A soma dos três termos que preenchem corretamente as lacunas nessa sequência é igual a:
A) 248.
B) 264.
C) 275.
D) 292.

Comentários:
Moçada, temos o a_1 e o a_5. Queremos determinar três termos que existem entre esses dois, sabendo que a PG é decrescente. Dessa forma, observe o esquema abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & & & & a_5 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 1000, & \underline{\;a_2\;}, & \underline{\;a_3\;}, & \underline{\;a_4\;}, & 8/5 \end{array}$$

Quando estamos diante situações como essa. O primeiro passo é descobrir a razão. Lembre-se que com o primeiro termo e a razão, podemos encontrar qualquer termo de uma PA ou PG. Nesse intuito, **vamos usar a fórmula do termo geral para relacionar a_1 e a_5**, que são os dois valores que possuímos.

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 \quad \rightarrow \quad \frac{8}{5} = 1000 \cdot q^4 \quad \rightarrow \quad q^4 = \frac{8}{5000} \quad \rightarrow \quad q^4 = \frac{1}{625} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{q = \frac{1}{5}}$$

Como a razão determinada, podemos encontrar a_2, a_3 e a_4.

$$a_2 = a_1 \cdot q \quad \rightarrow \quad a_2 = 1000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = 200}$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \quad \rightarrow \quad a_3 = 1000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1000}{25} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_3 = 40}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \rightarrow \quad a_4 = 1000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{1000}{125} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = 8}$$

Pronto, o enunciado pede a soma desses três valores.

$$a_2 + a_3 + a_4 = 200 + 40 + 8 = 248$$

Gabarito: LETRA A.

Pessoal, para interpolar termos, precisamos sempre **determinar a razão da progressão**. Vamos fazer isso utilizando a fórmula do termo geral. A intenção desse tópico é apenas deixá-lo esperto para esse tipo de cobrança. No fundo, **não envolve conhecimentos novos**. É apenas uma forma de aplicarmos o que já vimos. Tudo bem? Vamos prosseguir então!

Soma dos termos de uma PG.

E como faríamos para obter a soma de n primeiros termos de uma progressão geométrica? Assim como na PA, também podemos somar os termos de uma PG por meio de uma fórmula. Visualize-a.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Essa é a **fórmula da soma dos n primeiro termos de uma PG**. Como exemplo, vamos calcular a soma dos 11 primeiros termos da PG $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$:

Primeiro passo é identificar a razão. Veja que um termo é sempre o dobro do anterior. Assim, $q = 2$. Além da razão, **também precisamos do primeiro termo**. Ao olhar para a sequência do exemplo, tiramos que $a_1 = 2$. Como estamos procurando a soma dos 11 primeiros termos, então $\boldsymbol{n = 11}$. Basta substituir esses valores na fórmula, vamos lá?

$$S_{11} = \frac{2 \cdot (2^{11} - 1)}{2 - 1} \quad \rightarrow \quad S_{11} = \frac{2 \cdot (2048 - 1)}{1} \quad \rightarrow \quad S_{11} = 2 \cdot 2047 \quad \rightarrow \quad S_{11} = 4094$$

Galera, essa é **a soma dos n primeiros termos**. No entanto, **uma sequência é tão grande quanto você queira** e caso ela tenha infinitos termos, sob algumas condições, você poderá somar todos eles por meio de uma fórmula específica. Vamos detalhar isso um pouco mais.

Continue considerando a PG que estávamos trabalhando: $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$. Observe que **os termos continuam aumentando cada vez mais**, de modo que a soma dos infinitos termos certamente também dará um **número estratosférico (infinito).**

Agora, imagine que estamos com a sequência $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$. Note que se trata de uma P.G. com razão $q = \frac{1}{2}$. **Os termos vão se tornando cada vez menores**. Com isso, a soma vai tender a se "estabilizar" em um valor e poderemos calculá-lo. Vamos ver?

- Soma dos dois primeiros termos: $2 + 1 = \mathbf{3}$
- Soma dos três primeiros termos: $2 + 1 + 1/2 = \mathbf{3,5}$
- Soma dos quatro primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \mathbf{3,75}$
- Soma dos cinco primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \mathbf{3,875}$
- Soma dos sete primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \mathbf{3,9375}$
- Soma dos oito primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \mathbf{3,96875}$
- Soma dos nove primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \mathbf{3,984375}$
- Soma dos dez primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \mathbf{3,9921875}$

Galera, vocês conseguem perceber que nossa primeira soma foi igual a 3 e depois de somar vários outros termos **não passamos nem do número 4**? Isso porque **os termos diminuem cada vez mais e mais**. O limite da soma quando o número de termos tender ao infinito será exatamente 4. A fórmula que nos fornece esse valor é:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Essa é **a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG**. Ressalto que ela **só será válida quando o módulo da razão for menor do que um, isto é, $|q| < 1$**. Agora, vamos ver na prática!

HORA DE PRATICAR!

(SEFAZ-RS/2018) Sobre uma mesa há 9 caixas vazias. Em uma dessas caixas, será colocado um grão de feijão; depois, em outra caixa, serão colocados três grãos de feijão. Prosseguindo-se sucessivamente, será escolhida uma caixa vazia, e nela colocada uma quantidade de grãos de feijão igual ao triplo da quantidade colocada na caixa anteriormente escolhida, até que não reste caixa vazia. Nessa situação, nas 9 caixas será colocada uma quantidade de grãos de feijão igual a

A) $\frac{3^9-1}{2}$

B)$3^9 - 1$

C) $\frac{3^{10}-1}{2}$

D) $3^{10} - 1$

E) $\frac{3^8-3}{2}$

Comentários:

Pessoal, temos 9 caixas. Na primeira caixa será colocado um único grão de feijão, depois será colocado 3 grãos em outra, depois o triplo (9) e assim sucessivamente... Veja que está sendo formado uma sequência muito conhecida:

$$(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$$

Portanto, temos uma **P.G. de razão 3**. O enunciado pede a soma de todos os grãos colocados nas caixas. Em outras palavras, queremos **a soma dos 9 primeiros termos** dessa sequência (são 9 caixas). Lembre-se:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Olhando para a sequência, tiramos que $a_1 = 1$, $q = 3$ e $n = 9$. Logo,

$$S_9 = \frac{1 \cdot (3^9 - 1)}{3 - 1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_9 = \frac{3^9 - 1}{2}}$$

Gabarito: LETRA A.

(CRMV-ES/2018) Marque a alternativa que apresente a soma da progressão geométrica infinita abaixo.

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$$

A) 1

B) $\frac{5}{3}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{2}{3}$
E) $\frac{4}{3}$

Comentários:
Pessoal, questão apenas para testarmos o que vimos. O enunciado quer a soma da progressão geométrica infinita dada. Sabemos que **a soma dos termos de uma P.G. infinita** é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Para calcular essa soma, basta sabermos **o primeiro termo (a_1) e a razão (q)**. Olhando para a sequência do enunciado, temos que $a_1 = 1$. Além disso, a razão pode ser encontrada dividindo dois termos consecutivos:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{\frac{1}{4}}{1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{4}$$

Veja que $|q| < 1$ e, portanto, **a fórmula é aplicável**. Substituindo os valores de a_1 e q:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{1}{\frac{3}{4}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_\infty = \frac{4}{3}}$$

Gabarito: LETRA E.

Produto dos n primeiros termos de uma PG

Nesse tópico, esticaremos um pouco a baladeira para ficarmos 100% preparados para a prova. No estudo da PG, existe uma fórmula que não possui semelhante no estudo da PA. Além da soma, também existe o produto dos n primeiros termos!

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Você deve estar **interessado em saber como chegamos na fórmula acima**. Considere a PG: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$. Queremos saber o produto nos n primeiros termos. Lembre-se que:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$a_4 = a_1 \cdot q^3$
...
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

O produto dos n primeiros termos é:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Substituindo:

$$P_n = a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \cdot (a_1 \cdot q^3) \ldots \cdot (a_1 \cdot q^{n-1})$$

$$P_n = a_1^n \cdot q^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$$

Lembre-se que **o produto de potências de mesma base**, nós conservamos a base e somamos os expoentes. Ademais, a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ pode ser interpretada como **a soma dos $(n-1)$ termos de uma PA**. Assim, podemos usar a fórmula que vimos lá em PA para calcular essa soma.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{(1 + (n-1))(n-1)}{2} \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Pronto! Esse é o resultado daquela soma no expoente do q.

$$\boldsymbol{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Pessoal, essa é a forma mais comum de apresentar o produto dos n primeiros termos de uma PG. No entanto, existe uma fórmula "mais apresentável":

$$P_n = (a_1 . a_n)^{\frac{n}{2}}$$

Ela é obtida manipulando algebricamente a expressão que já deduzimos. Qualquer uma delas vai oferecer o mesmo resultado para o produto, tudo bem?

HORA DE PRATICAR!

(ESFCEX/2021) Considere uma progressão geométrica em que o primeiro termo é igual a 1 e a razão é igual a $\sqrt{2}$. Sabendo-se que o produto dos termos dessa progressão é 2^{18} e que $P_n = (a_1 . a_n)^{n/2}$, então o número de termos dessa progressão é igual a

A) 8.
B) 9.

C) 7.
D) 6.
E) 12.

Comentários:
Pessoal, note que o examinador foi do bem! Ele mesmo já deu a fórmula do produto no enunciado, então, o aluno não precisaria deduzi-la ou decorá-la.

$$P_n = (a_1 . a_n)^{\frac{n}{2}}$$

Além da fórmula, ela nos forneceu as seguintes informações:

$$a_1 = 1$$
$$q = \sqrt{2}$$
$$P_n = 2^{18}$$

Como o enunciado pede **o número de termos dessa progressão**, ele está nos perguntando quem é n. Veja que temos o primeiro termo e a razão, uma fórmula melhor para trabalhar seria:

$$\boldsymbol{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Caso não se lembrasse, você poderia substituir $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ na expressão fornecida no enunciado, que obteria a mesma coisa! Faça o teste!

$$2^{18} = 1^n \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Como $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, fazemos:

$$2^{18} = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{n(n-1)}{2}} \quad \rightarrow \quad 2^{18} = 2^{(n^2-n)/4}$$

De equações exponenciais, sabemos que **quando temos a mesma base, podemos igualar os expoentes**.

$$18 = \frac{n^2 - n}{4} \quad \rightarrow \quad n^2 - n = 72 \quad \rightarrow \quad n^2 - n - 72 = 0$$

Precisamos resolver essa equação de segundo. Devemos usar **Bhaskara**.

- Cálculo do Discriminante (Δ)

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72) \quad \rightarrow \quad \Delta = 1 + 288 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta = 289}$$

- Cálculo das raízes (n_1 e n_2)

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad n_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{289}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad n_1 = \frac{1 - 17}{2} \quad \rightarrow \quad n_1 = -8$$

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad n_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{289}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad n_2 = \frac{1 + 17}{2} \quad \rightarrow \quad n_2 = 9$$

A raiz negativa não tem sentido para nós, uma vez que estamos querendo saber o número de termos da progressão (é necessariamente um número maior que zero). Assim, **apenas a raiz positiva nos interessa**.

$$\boldsymbol{n = 9}$$

Gabarito: LETRA B.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Chegamos ao fim da teoria. A seguir, temos uma lista de exercícios para facilitar a fixação do aprendizado. Nas primeiras 30 questões, buscamos desenvolver o raciocínio sequencial. As sequências que aparecem não exigem o conhecimento de fórmulas. Vamos deduzindo os padrões com as informações que são passadas pelo enunciado.

Depois dessa primeira parte, faremos as questões de progressões aritméticas e progressões geométricas propriamente ditas. Nelas, usaremos bastante as fórmulas que estudamos ao longo da aula e será excelente para a memorização. Tudo bem?! Espero que tenha aproveitado bastante e continue forte nos estudos!

Um forte abraço,
Prof. Francisco Rebouças.

RESUMO

Informações Relevantes

- Podemos criar inúmeras sequências, cada uma com padrões distintos. Na hora dos exercícios, devemos buscar identificar esse padrão e fazer as conclusões pertinentes.
- No Raciocínio Sequencial, as sequências cobradas são as mais variadas possíveis. No entanto, o conhecimento de algumas pode facilitar bastante a hora da resolução.
- Existem algumas sequências que são famosas, como a sequência de Fibonacci. A partir do terceiro termo, cada termo é formado pela soma dos dois anteriores.

$$Sequência\ de\ Fibonacci = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$$

- A Progressão Aritmética é uma sequência em que a diferença entre termos consecutivos é constante.

$$Exemplo\ de\ PA\ (1) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$$
$$Exemplo\ de\ PA\ (2) = (100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, \dots)$$

- A Progressão Geométrica é uma sequência em que a razão entre termos consecutivos é constante.

$$Exemplo\ de\ PG(1) = (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots)$$

Formulário

Sequência de Fibonacci

$$F_n = \begin{cases} 1, se\ n = 1 \\ 1, se\ n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, se\ n \geq 3 \end{cases} \qquad F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Termo Geral de uma PA

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Soma dos n primeiros termos de uma PA

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Termo Geral de uma PG

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Soma dos n primeiros termos de uma PG

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$$

Soma de uma PG infinita ($|q| < 1$): $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$

QUESTÕES COMENTADAS - CESGRANRIO

Progressão Aritmética

1. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) O quarto, o quinto e o sexto termos de uma progressão aritmética são expressos por $x+1, x^2+4$ e $2x^2+3$, respectivamente. A soma dos dez primeiros termos dessa progressão aritmética é igual a

A) 260
B) 265
C) 270
D) 275
E) 280

Comentários:

Temos **três termos consecutivos** de uma PA.

$a_4 = x + 1$

$a_5 = x^2 + 4$

$a_6 = 2x^2 + 3$

Sabemos que **o termo central é a média aritmética dos termos extremos**. Assim,

$$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2}$$

Substituindo pelas expressões do enunciado:

$$x^2 + 4 = \frac{(x+1) + (2x^2+3)}{2}$$

Multiplicando cruzado.

$$2 \cdot (x^2 + 4) = 2x^2 + x + 4$$

Usando a propriedade **distributiva** da multiplicação no lado esquerdo.

$$\cancel{2x^2} + 8 = \cancel{2x^2} + x + 4$$

Cortando o **"$2x^2$"** que aparece em ambos os lados.

$$x + 4 = 8 \qquad \rightarrow \qquad x = 4$$

Determinamos o valor de x, então sabemos quem é cada um dos termos.

$a_4 = x + 1 \quad \rightarrow \quad a_4 = 4 + 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = 5}$

$a_5 = x^2 + 4 \quad \rightarrow \quad a_5 = 4^2 + 4 \quad \rightarrow \quad a_5 = 16 + 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_5 = 20}$

$a_6 = 2x^2 + 3 \quad \rightarrow \quad a_6 = 2 \cdot 4^2 + 3 \quad \rightarrow \quad a_6 = 2 \cdot 16 + 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_6 = 35}$

Observe que **a razão da PA é igual a 15**.

$$r = a_5 - a_4 = 20 - 5 = 15$$

Só para confirmar, poderíamos fazer também

$$r = a_6 - a_5 = 35 - 20 = 15$$

Com a razão, conseguimos encontrar o primeiro termo dessa PA, basta usarmos **a fórmula do termo geral**.

$$a_4 = a_1 + 3r$$

Sabemos que $\boldsymbol{a_4 = 5}$ e que $\boldsymbol{r = 15}$.

$$5 = a_1 + 3 \cdot 15 \quad \rightarrow \quad 5 = a_1 + 45 \quad \rightarrow \quad a_1 = -40$$

O enunciado pergunta **a soma dos dez primeiros termos**. Por esse motivo, precisamos do a_{10}.

$$a_{10} = a_1 + 9r \quad \rightarrow \quad a_{10} = -40 + 9 \cdot 15 \quad \rightarrow \quad a_{10} = -40 + 135 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{10} = 95}$$

Agora sim podemos usar a fórmula da soma dos n primeiros termos.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad \rightarrow \quad S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \quad \rightarrow \quad S_{10} = (-40 + 95) \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_{10} = 275}$$

Gabarito: LETRA D.

2. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Em uma progressão aritmética, o décimo termo é o quádruplo do terceiro. Se o sétimo termo é igual a 19, então o segundo termo é igual a

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

Comentários:

O enunciado disse que **o décimo termo é o quádruplo do terceiro**. Assim,

$$a_{10} = 4 \cdot a_3$$

Usando que $a_{10} = a_1 + 9r$ e que $a_3 = a_1 + 2r$, podemos **substituir** na expressão acima.

$$a_1 + 9r = 4 \cdot (a_1 + 2r)$$

Aplicando **a propriedade distributiva** da multiplicação no lado direito.

$$a_1 + 9r = 4a_1 + 8r$$

Isolando $\boldsymbol{a_1}$ **no lado esquerdo** e a **razão $\boldsymbol{r}$ do lado direito**, resulta em:

$$3a_1 = r \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{r}{3} \quad (1)$$

Agora, devemos usar a segunda informação que o enunciado nos deu: **o sétimo termo é igual a 19**.

$$a_7 = a_1 + 6r \quad \rightarrow \quad a_1 + 6r = 19 \quad (2)$$

Usando (1) em (2):

$$\frac{r}{3} + 6r = 19 \quad \rightarrow \quad \frac{r + 18r}{3} = 19 \quad \rightarrow \quad \frac{19r}{3} = 19 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = 3}$$

Podemos determinar o a_1 também, substituindo o valor da razão em (1).

$$a_1 = \frac{r}{3} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{3}{3} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = 1}$$

Pronto. **Obtemos $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{r}$**, podemos encontrar **qualquer termo da PA**. O enunciado quer o a_2.

$$a_2 = a_1 + r \quad \rightarrow \quad a_2 = 1 + 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = 4}$$

Gabarito: LETRA B.

3. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Considere uma progressão aritmética, em que $\boldsymbol{a_8 = a_2 + a_6}$, e a soma dos 10 primeiros termos dessa sequência é igual a 330. Assim, a razão dessa progressão é igual a

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 13

Comentários:

O enunciado disse que $\boldsymbol{a_8 = a_2 + a_6}$. Podemos usar a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, para escrever essa mesma expressão em termos de a_1 e r. Note que:

$$a_8 = a_1 + 7r$$

$$a_6 = a_1 + 5r$$

$$a_2 = a_1 + r$$

Fazendo a substituição na expressão do enunciado.

$$(a_1 + 7r) = (a_1 + r) + (a_1 + 5r)$$

$$a_1 + 7r = 2a_1 + 6r$$

Deixando tudo que tem $\boldsymbol{a_1}$ **do lado esquerdo** e tudo que tem $\boldsymbol{r}$ **do lado direito**.

$$a_1 = r \qquad (1)$$

Ademais, o enunciado revelou que **a soma dos 10 primeiros termos é igual a 330**.

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2}$$

Vamos utilizar que $\boldsymbol{S_{10} = 330}$ e que $\boldsymbol{a_{10} = a_1 + 9r}$.

$$\frac{[a_1 + (a_1 + 9r)] \cdot 10}{2} = 330 \qquad \rightarrow \qquad (2a_1 + 9r) \cdot 5 = 330$$

Dividindo os dois lados da equação por 5 (o famoso passando o "5" dividindo), ficamos com:

$$2a_1 + 9r = 66 \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) formam um sistema de duas equações e duas incógnitas, podemos resolvê-lo.

Substituindo (1) em (2).

$$2r + 9r = 66 \qquad \rightarrow \qquad 11r = 66 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{r = 6}$$

Encontramos **a razão da PA**! Podemos marcar o gabarito, letra A.

Gabarito: LETRA A.

4. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) O número de passageiros que uma empresa de transporte aéreo tem transportado para uma petroleira vem diminuindo, segundo o padrão apresentado na tabela a seguir:

Ano	Número de passageiros transportados por ano
2014	10.000
2015	9.600
2016	9.200
2017	8.800

Supondo-se que esse padrão se mantenha, a previsão para a quantidade total de passageiros transportados por essa empresa, no período de 2014 a 2025, contando-se com os anos 2014 e 2025, será igual a

A) 86.400
B) 93.600
C) 103.800
D) 172.800
E) 187.200

Comentários:

Pessoal, a cada ano o número de passageiros transportados cai 400. Assim, temos uma **PA decrescente cuja razão é $r = -400$**. Atente-se ao sinal!! Queremos **a quantidade total** de passageiros, transportados durante o período de 2014 a 2025. Vamos modificar um pouco a tabela do enunciado.

a_n	Ano	Número de passageiros transportados por ano
a_1	2014	10.000
a_2	2015	9.600
a_3	2016	9.200
a_4	2017	8.800
a_5	2018	8.400
a_6	2019	8.000
a_7	2020	7.600
a_8	2021	7.200
a_9	2022	6.800
a_{10}	2023	6.400
a_{11}	2024	6.000
a_{12}	2025	5.600

Vamos precisar somar tudo isso? Não, nós podemos usar a fórmula da **soma dos n primeiros termos** para obter a quantidade total de passageiros de uma forma mais direta. É importante notar que **o período de 2014 a 2025 envolve 12 anos**, quando contamos também os anos 2014 e 2025. Assim,

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} \quad \rightarrow \quad S_{12} = (10.000 + 5.600) \cdot 6 \quad \rightarrow \quad S_{12} = 15.600 \cdot 6 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_{12} = 93.600}$$

Logo, a quantidade de passageiros transportados pela empresa, no período considerado, será de 93.600.

Gabarito: LETRA B.

5. (CESGRANRIO/BB/2018) Uma sequência numérica tem seu termo geral representado por a_n, para $n \geq 1$. Sabe-se que $a_1 = 0$ e que a sequência cujo termo geral é $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \geq 1$, é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $b_1 = 9$ e cuja razão é igual a 4. O termo a_{1000} é igual a

A) 2.002.991
B) 2.002.995
C) 4.000.009
D) 4.009.000
E) 2.003.000

Comentários:

O enunciado falou que (b_n) representa uma progressão aritmética em que $b_1 = 9$ e $r = 4$. Ademais, disse que podemos escrever o termo geral dessa PA como função de uma outra sequência (a_n).

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

Com isso, podemos escrever que:

$$b_1 = \boldsymbol{a_2} - a_1$$

$$b_2 = \boldsymbol{a_3} \boldsymbol{-} \boldsymbol{a_2}$$

$$b_3 = a_4 \boldsymbol{-} \boldsymbol{a_3}$$

$$\dots \dots$$

$$b_{n-1} = \boldsymbol{a_n} - a_{n-1}$$

$$b_n = a_{n+1} \boldsymbol{-} \boldsymbol{a_n}$$

Observe que em uma equação vamos ter, por exemplo, o a_2 e em outra o "$-a_2$". Você concorda que quando somarmos todas essas equações, **esses vários pares que aparecem do lado direito vão se anular**? No final, vamos ter uma expressão bem enxuta. Que tal fazermos isso?!

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = (\cancel{a_2} - a_1) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_4} - \cancel{a_3}) + \cancel{\cdots} + (\cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}}) + (a_{n+1} - \cancel{a_n})$$

Do lado esquerdo temos a soma dos n primeiros termos de uma PA e do lado direito sobrou a_{n-1} e $-a_1$.

$$\frac{(b_1 + b_n) \cdot n}{2} = a_{n-1} - a_1$$

O enunciado informou que $a_1 = 0$.

$$a_{n+1} = \frac{(b_1 + b_n) \cdot n}{2}$$

Queremos determinar a_{1000}. Assim, devemos usar $n = 999$.

$$a_{999+1} = a_{1000} = \frac{(b_1 + b_{999}) \cdot 999}{2}$$

É possível encontrar b_{999} pois **sabemos o primeiro termo e a razão da PA**.

$$b_{999} = b_1 + 998 \cdot r$$

Substituindo $b_1 = 9$ e $r = 4$.

$$b_{999} = 9 + 998 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad b_{999} = 9 + 3.992 \quad \rightarrow \quad b_{999} = 4.001$$

Voltando para a expressão que encontramos:

$$a_{1000} = \frac{(b_1 + b_{999}) \cdot 999}{2} \quad \rightarrow \quad a_{1000} = \frac{(9 + 4.001) \cdot 999}{2} \quad \rightarrow \quad a_{1000} = \frac{4010 \cdot 999}{2}$$

$$\rightarrow \quad a_{1000} = 2005 \cdot 999 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{1000} = 2.002.995}$$

Gabarito: LETRA B.

6. (CESGRANRIO/BB/2018) Para obter uma amostra de tamanho 1.000 dentre uma população de tamanho 20.000, organizada em um cadastro em que cada elemento está numerado sequencialmente de 1 a 20.000, um pesquisador utilizou o seguinte procedimento:

I - calculou um intervalo de seleção da amostra, dividindo o total da população pelo tamanho da amostra: 20.000/1.000 = 20;

II - sorteou aleatoriamente um número inteiro, do intervalo [1, 20]. O número sorteado foi 15; desse modo, o primeiro elemento selecionado é o 15º;

III - a partir desse ponto, aplica-se o intervalo de seleção da amostra: o segundo elemento selecionado é o 35º (15+20), o terceiro é o 55º (15+40), o quarto é o 75º (15+60), e assim sucessivamente.

O último elemento selecionado nessa amostra é o
A) 19.997º
B) 19.995º
C) 19.965º
D) 19.975º
E) 19.980º

Comentários:
O primeiro elemento selecionado é o 15º. Assim, vamos escrever que:

$$a_1 = 15$$

Depois, **o segundo elemento selecionado é o 35**. Logo,

$$a_2 = 35$$

Depois disso, **o terceiro elemento é o 55º**.

$$a_3 = 55$$

Conseguimos perceber **que esses elementos formam uma PA cuja razão é igual a 20**. Como **a amostra tem 1.000 elementos**, conseguimos usar o termo geral para calcular o último elemento dessa sequência.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{1000} = 15 + 999 \cdot 20$$

$$a_{1000} = 15 + 19.980$$

$$\boldsymbol{a_{1000} = 19.995}$$

Logo, **o último elemento** selecionado nessa amostra é o **19.995º**.

Gabarito: LETRA B.

7. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2018) Se a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é S_n, então a expressão $S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n$ equivale a

A) $(n+1)(n+2)$

B) $n(n+1)$

C) S_n

D) S_{n+1}

E) 0

Comentários:

Pessoal, veja que o enunciado pede um resultado bem geral. Desse modo, **o resultado da expressão deve ser válido para <u>qualquer</u> PA**. Vamos escolher uma?

$$\{2, 4, 8, 10, 12, 14, 16\}$$

Considere a PA acima. A expressão do enunciado é:

$$E = S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n$$

Se $n = 2$, então:

$$E = S_5 - 3S_4 + 3S_4 - S_2$$

Da nossa PA, temos que:

$S_2 = a_1 + a_2 = 2 + 4 = 6$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 4 + 8 = 14$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 4 + 8 + 10 = 24$

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 + 4 + 8 + 10 + 12 = 36$

Assim, vamos substituir na expressão.

$$E = S_5 - 3S_4 + 3S_4 - S_2$$

$$E = 36 - 3 \cdot 24 + 3 \cdot 14 - 6$$

$$E = 36 - 72 + 42 - 6$$

$$E = 78 - 78$$

$$E = 0$$

Portanto, **o resultado da expressão é 0.** Como exercício, pense em uma nova progressão aritmética e repita os cálculos que fizemos aqui. A expressão continuará resultando em 0.

Gabarito: LETRA E.

8. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2018) Considere n números inteiros, ímpares, positivos e diferentes, representados por $a_1, a_2, \dots, a_n$, tais que a soma $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 10000$. Qual é o maior valor possível para n?
A) 99
B) 100
C) 1000
D) 4999
E) 5000

Comentários:
Pessoal, devemos perceber que **para "n" assumir o maior valor possível, esses números $(a_1, a_2, \dots)$ devem ser os menores possíveis**. Assim, precisamos de mais números para que, quando somados, resultem em 10000. Com isso, quais são **os menores** números ímpares, positivos e diferentes que conseguimos pensar?

$$(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots)$$

Dessa forma, essa sequência de ímpares **é uma progressão aritmética de razão igual a 2**.

$$a_1 = 1$$
$$r = 2$$

O **e-nésimo termo** dessa PA é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2$$

$$a_n = 1 + 2n - 2$$

$$a_n = 2n - 1$$

Sabemos que **a soma dos termos dessa PA é igual a 10.000**. Assim,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Substituindo $S_n = 10000$, $a_1 = 1 \; e \; a_n = 2n - 1$:

$$\frac{[1 + (2n-1)] \cdot n}{2} = 10000$$

Multiplicando cruzado.

$$[1 + (2n-1)] \cdot n = 20000$$

Resolvendo **dentro dos parênteses e colchetes**:

$$2n^2 = 20000$$

Dividindo os dois lados por 2.

$$n^2 = 10.000$$

Tirando a raiz quadrada.

$$n = \pm 100$$

Como estamos falando de **número de termos**, devemos considerar apenas **o resultado positivo**.

$$n = 100$$

Gabarito: LETRA B.

9. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2018) Em uma progressão aritmética de 5 termos e primeiro termo 5, a soma dos quadrados dos três primeiros termos é igual à soma dos quadrados dos dois últimos termos. O maior valor possível para o último termo dessa progressão aritmética é

A) 5,5

B) 6
C) 6,5
D) 7
E) 7,5

Comentários:
O enunciado fala em uma PA de **5 termos**, em que $a_1 = 5$. Assim, podemos imaginar algo do tipo:

$$(5, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

Se é uma **progressão aritmética**, podemos escrever essa mesma sequência da seguinte forma:

$$\big(5, (5+r), (5+2r), (5+3r), (5+4r)\big)$$

r representa a razão da PA.

Como o enunciado diz que **a soma dos quadrados dos três primeiros termos** é igual à **soma dos quadrados dos dois últimos termos**, podemos escrever que:

$$5^2 + (5+r)^2 + (5+2r)^2 = (5+3r)^2 + (5+4r)^2$$

Lembre-se que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Vamos usar isso nos binômios acima.

$$25 + (5^2 + 2\cdot 5\cdot r + r^2) + (5^2 + 2\cdot 5\cdot 2r + (2r)^2) = (5^2 + 2\cdot 5\cdot 3r + (3r)^2) + (5^2 + 2\cdot 5\cdot 4r + (4r)^2)$$

$$\cancel{25} + \cancel{25} + 10r + r^2 + 25 + 20r + 4r^2 = \cancel{25} + 30r + 9r^2 + \cancel{25} + 40r + 16r^2$$

$$25 + 30r + 5r^2 = 70r + 25r^2$$

$$20r^2 + 40r - 25 = 0$$

Para simplificar a equação, podemos **dividir os dois lados por 5**.

$$4r^2 + 8r - 5 = 0$$

Encontramos uma **equação de segundo grau**. Para resolvê-la, vamos usar Bhaskara.

- Cálculo do Discriminante (Δ)

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = 8^2 - 4\cdot 4\cdot(-5) \quad \rightarrow \quad \Delta = 64 + 80 \quad \rightarrow \quad \Delta = 144$$

- Cálculo da Raiz (n)

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad r = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{2\cdot 4} \quad \rightarrow \quad r = \frac{-8 \pm 12}{8} \quad \rightarrow \quad r = \frac{-2 \pm 3}{2}$$

$$r_1 = -\frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r_1 = -2,5}$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r_2 = 0,5}$$

Encontramos dois valores possíveis para a razão! Como estamos procurando pelo **maior valor possível de último termo**, temos que considerar a razão com valor positivo ($r = 0{,}5$). Assim, **o maior termo é o $\boldsymbol{a_5}$**.

$$a_5 = a_1 + 4r \quad \rightarrow \quad a_5 = 5 + 0{,}5 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad a_5 = 5 + 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_5 = 7}$$

Gabarito: LETRA D.

10. (CESGRANRIO/EPE/2014) A sequência $\boldsymbol{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20})}$ é uma progressão aritmética de 20 termos, na qual $\boldsymbol{a_8 + a_9 = a_5 + a_3 + 189}$. A diferença entre o último e o primeiro termo dessa progressão, nessa ordem, é igual a

A) 19
B) 21
C) 91
D) 171
E) 399

Comentários:

O enunciado quer **a diferença entre o último e o primeiro termo** dessa PA. Logo, estamos procurando:

$$E = a_{20} - a_1$$

Da fórmula do **termo geral da PA**, podemos escrever que: $a_{20} = a_1 + 19r$.

$$E = (a_1 + 19r) - a_1 \quad \rightarrow \quad E = 19r$$

Portanto, precisamos determinar **a razão** dessa sequência.

Para isso, vamos utilizar a informação passada pelo enunciado.

$$a_8 + a_9 = a_5 + a_3 + 189$$

$$(a_1 + 7r) + (a_1 + 8r) = (a_1 + 4r) + (a_1 + 2r) + 189$$

$$\cancel{2a_1} + 15r = \cancel{2a_1} + 6r + 189$$

$$9r = 189 \quad \rightarrow \quad r = \frac{189}{9} \quad \rightarrow \quad r = 21 \quad (1)$$

Agora, basta **substituirmos o valor da razão em $\boldsymbol{(1)}$**.

$$E = 19r \quad \rightarrow \quad E = 19 \cdot 21 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E = 399}$$

Gabarito: LETRA E.

11. (CESGRANRIO/BNDES/2013) Progressões aritméticas são sequências numéricas nas quais a diferença entre dois termos consecutivos é constante. A sequência (5, 8, 11, 14, 17, ..., 68, 71) é uma progressão aritmética finita que possui

A) 67 termos
B) 33 termos
C) 28 termos
D) 23 termos
E) 21 termos

Comentários:

Sabemos o primeiro termo ($\boldsymbol{a_1 = 5}$), o último termo ($\boldsymbol{a_n = 71}$) e a razão ($\boldsymbol{r = 3}$) da progressão aritmética. Portanto, conseguimos determinar "n" por meio da **fórmula do termo geral**. Vejamos.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$71 = 5 + (n-1) \cdot 3$$

Vamos passar o "5" para o lado esquerdo e fazer a subtração correspondente.

$$66 = (n-1) \cdot 3$$

Agora, vamos passar o "3" dividindo.

$$n - 1 = 22$$

Isolando o "n".

$$n = 23$$

Portanto, a progressão em análise possui **23 termos**.

Gabarito: LETRA D.

Questões Comentadas - Cesgranrio

Sequências

1. (CESGRANRIO/BB/2012) Uma sequência numérica infinita $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots)$ é tal que a soma dos n termos iniciais é igual a $n^2 + 6n$. O quarto termo dessa sequência é igual a

A) 9
B) 13
C) 17
D) 32
E) 40

Comentários:

A sequência nos deu uma sequência infinita. A única informação que temos é que **a soma dos n termos iniciais é igual a $S_n = n^2 + 6n$**. Queremos saber o quarto termo da sequência, ou seja, e_4.

Para isso, quero que você perceba uma coisa primeiro:

$$S_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

Mas, $S_3 = e_1 + e_2 + e_3$

$$S_4 = (\mathbf{e_1 + e_2 + e_3}) + e_4$$

$$S_4 = \mathbf{S_3} + e_4$$

Reorganizando,

$$e_4 = S_4 - S_3$$

Observe que, naturalmente, **o quarto termo da sequência é a subtração entre S_4 e S_3**.

- Para $n = 3$:

$$S_3 = 3^2 + 6 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad S_3 = 9 + 18 \quad \rightarrow \quad S_3 = 27$$

- Para $n = 4$:

$$S_4 = 4^2 + 6 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad S_4 = 16 + 24 \quad \rightarrow \quad S_3 = 40$$

Logo,

$$e_4 = S_4 - S_3 \quad \rightarrow \quad e_4 = 40 - 27 \quad \rightarrow \quad \mathbf{e_4 = 13}$$

Gabarito: LETRA B.

2. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Uma sequência é formada de tal modo que o seu primeiro termo é 20 e seu vigésimo termo é 11. Além disso, a partir do terceiro termo, cada termo é igual à média aritmética de todos os termos que o antecedem. Determine o segundo termo dessa sequência.
A) 2
B) 11
C) 15,5
D) 20
E) 31

Comentários:
Temos uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{19}, a_{20})$. O enunciado falou que $\boldsymbol{a_1 = 20}$ e $\boldsymbol{a_{20} = 11}$.

Além disso, nos disse que, **a partir do terceiro termo**, cada termo é igual à média aritmética de todos os termos que **o antecedem**. Assim, por exemplo,

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad \rightarrow \quad a_1 + a_2 = 2a_3 \qquad (1)$$

Ademais,

$$a_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2)

$$a_4 = \frac{2a_3 + a_3}{3} \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{3a_3}{3} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = a_3} \quad (3)$$

Opa, encontramos que $a_4 = a_3$. Vamos estudar mais essa sequência.

$$a_5 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$$

Usando (1) e (3):

$$a_5 = \frac{2a_3 + a_3 + a_3}{4} \quad \rightarrow \quad a_5 = \frac{4a_3}{4} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_5 = a_3}$$

Assim, $a_3 = a_4 = a_5$.

Minha intenção ao fazer essas contas é mostrar para vocês que, a sequência que o enunciado construiu é tal que $\boldsymbol{a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = \cdots = a_{19} = a_{20}}$. Voltando na expressão (1), podemos reescrevê-la.

$$a_2 = 2a_3 - a_1 \quad \rightarrow \quad a_2 = 2a_{20} - a_1 \quad \rightarrow \quad a_2 = 2 \cdot 11 - 20 \quad \rightarrow \quad a_2 = 22 - 20 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = 2}$$

Gabarito: LETRA A.

3. (CESGRANRIO/BR/2010) Determinado sistema especialista apresenta a sequência lógica a seguir.

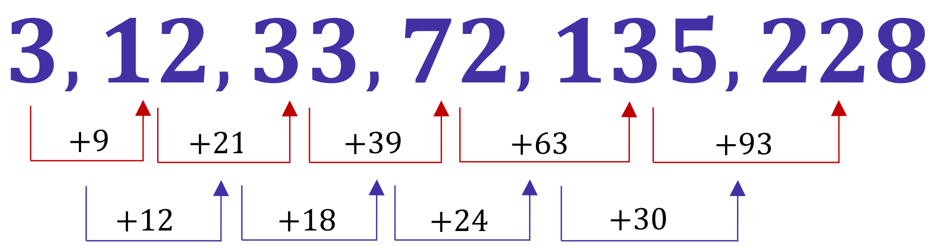
$$\mathbf{3, 12, 33, 72, 135, 228}$$

Qual o próximo número dessa sequência?

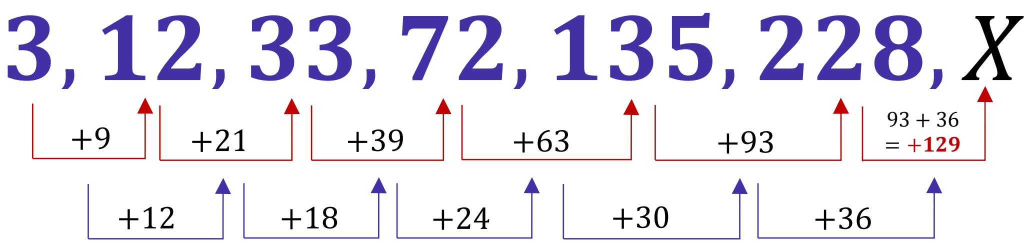
A) 331
B) 357
C) 418
D) 421
E) 816

Comentários:

O enunciado nos forneceu uma sequência que precisamos descobrir o padrão.



Perceba que os "**incrementos dos incrementos**" são múltiplos de 6, começando pelo 12. Assim, o próximo incremento aumentará de 36.



Logo, o próximo termo será:

$$X = 228 + 129 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{X = 357}$$

Gabarito: LETRA B.

4. (CESGRANRIO/IBGE/2006) Na sequência (1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ...) o número que sucede 22 é:

A) 28
B) 29
C) 30
D) 31
E) 32

Comentários:

Temos que descobrir o padrão da sequência fornecida.

$$\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{4},\ \mathbf{7},\ \mathbf{11},\ \mathbf{16},\ \mathbf{22},\ \mathrm{X}$$

$$+1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +5 \quad +6 \quad +7$$

Veja que sempre vamos somando **uma unidade a mais**. Assim, o número que sucede o 22 é:

$$X = 22 + 7 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{X = 29}$$

Gabarito: LETRA B.

Questões Comentadas - Cesgranrio

Progressão Geométrica

1. (CESGRANRIO/BASA/2018) Considere a sequência numérica cujo termo geral é dado por $a_n = 2^{1-3n}$, para $n \geq 1$. Essa sequência numérica é uma progressão

A) geométrica, cuja razão é 1/8
B) geométrica, cuja razão é -6.
C) geométrica, cuja razão é -3.
D) aritmética, cuja razão é -3.
E) aritmética, cuja razão é 1/8

Comentários:

O enunciado deu uma fórmula bem estranha para o termo geral. Vamos s**ubstituir alguns valores de n** para determinar os termos dessa PG.

- Para $n = 1$:

$$a_1 = 2^{1-3\cdot1} \quad \rightarrow \quad a_1 = 2^{1-3} \quad \rightarrow \quad a_1 = 2^{-2} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2^2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = \frac{1}{4}}$$

- Para $n = 2$:

$$a_2 = 2^{1-3\cdot2} \quad \rightarrow \quad a_2 = 2^{1-6} \quad \rightarrow \quad a_2 = 2^{-5} \quad \rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2^5} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = \frac{1}{32}}$$

- Para $n = 3$:

$$a_3 = 2^{1-3\cdot3} \quad \rightarrow \quad a_3 = 2^{1-9} \quad \rightarrow \quad a_3 = 2^{-8} \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{2^8} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_3 = \frac{1}{256}}$$

- Para $n = 4$:

$$a_4 = 2^{1-3\cdot4} \quad \rightarrow \quad a_4 = 2^{1-12} \quad \rightarrow \quad a_4 = 2^{-11} \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{2^{11}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = \frac{1}{2048}}$$

Observe que temos uma sequência com a seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{32}, \frac{1}{256}, \frac{1}{2048}, \dots\right)$$

Está com uma "carazona" de progressão geométrica, não é verdade? Para confirmar, vamos ver se **a razão entre termos consecutivos é constante.**

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$$

Devemos achar **o mesmo resultado** para:

$$q=\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{1}{256}}{\frac{1}{32}}=\frac{32}{256}=\frac{1}{8}$$

Portanto, veja que realmente temos uma **progressão geométrica cuja razão é 1/8**. Podemos marcar letra A.

Gabarito: LETRA A.

2. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Sabe-se que, em uma determinada progressão geométrica, a razão é 0,8. Se o quinto termo é 4.096; então, o Limite da Soma dos n primeiros dessa P.G., quando n tende a infinito, é igual a

A) 10.000
B) 20.000
C) 30.000
D) 40.000
E) 50.000

Comentários:

Em outras palavras, o enunciado nos informou sobre uma **progressão geométrica infinita**. Note que a razão dela é tal que $|q|<1$. Nessas condições, podemos aplicar a fórmula que vimos na teoria.

$$\boldsymbol{S_\infty=\frac{a_1}{1-q}} \qquad (1)$$

A fórmula acima nos fornece a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica com razão $|q|<1$.

Para calcular a soma pedida, **nós precisamos do $\boldsymbol{a_1}$**. No entanto, o enunciado nos disse o a_5. Para determinar o a_5, podemos usar a fórmula do termo geral.

$$a_5=a_1\cdot q^4 \quad \rightarrow \quad a_1=\frac{a_5}{q^4}$$

Substituindo $\boldsymbol{a_5=4.096}$ e $\boldsymbol{q=0,8=\frac{8}{10}}$, ficamos com:

$$a_1=\frac{4.096}{\left(\frac{8}{10}\right)^4} \quad \rightarrow \quad a_1=\frac{4.096}{\frac{8^4}{10.000}} \quad \rightarrow \quad a_1=\frac{\cancel{4.096}}{\cancel{4.096}}\cdot 10.000 \quad \rightarrow \quad a_1=10.000$$

Pronto, agora vamos substituir em (1).

$$S_\infty = \frac{10.000}{1 - 0{,}8} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{10.000}{0{,}2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_\infty = 50.000}$$

Assim, podemos marcar a alternativa E.

Gabarito: LETRA E.

3. (CESGRANRIO/BB/2018) Para $x > 0$, seja S_x a soma

$$\boldsymbol{S_x = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-nx} = 2^{-x} + 4^{-x} + 8^{-x} + \cdots}$$

O número real x para o qual se tem $S_x = \frac{1}{4}$.

A) 4
B) $\log_2 5$
C) $3/2$
D) $5/2$
E) $\log_2 3$

Comentários:
Galera, **não se preocupem com o símbolo do somatório**. Veja que o enunciado deu a soma:

$$S_x = 2^{-x} + 4^{-x} + 8^{-x} + \cdots$$

Sempre que vocês se depararem com uma soma infinita**, vale a pena lembrar de uma PG**. Lembre-se que na PG infinita com $|q| < 1$, temos uma fórmula bem legal para calcular **a soma de infinitos números**.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Vamos associar os elementos da soma do enunciado aos termos de uma PG.

$$a_1 = 2^{-x} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2^x}$$

$$a_2 = 4^{-x} \quad \rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{4^x}$$

$$a_3 = 8^{-x} \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{8^x}$$

A razão q é dada por:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{\left(\frac{1}{4^x}\right)}{\left(\frac{1}{2^x}\right)} \quad \rightarrow \quad q = \frac{2^x}{4^x} \quad \rightarrow \quad q = \left(\frac{2}{4}\right)^x \quad \rightarrow \quad q = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{2^x}$$

Agora, podemos substituir $a_1 = \frac{1}{2^x}$ e $q = \frac{1}{2^x}$ na fórmula da soma dos infinitos termos da PG.

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2^x}}{1 - \frac{1}{2^x}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{1}{2^x - 1}$$

O enunciado disse que **o valor dessa soma é igual a 1/4**.

$$\frac{1}{2^x - 1} = \frac{1}{4}$$

Multiplicando cruzado.

$$2^x - 1 = 4 \quad \rightarrow \quad 2^x = 5$$

Nessa situação, precisamos **aplicar log nos dois lados para descer o expoente**.

$$\log_2 2^x = \log_2 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \log_2 5}$$

Gabarito: LETRA B.

4. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2017) A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é dada por:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{3^{n+4} - 81}{2 \cdot 3^n}}$$

Quanto vale o quarto termo dessa progressão geométrica?
A) 1
B) 3
C) 27
D) 39
E) 40

Comentários:
O enunciado falou em uma PG. A única informação que temos é que **a soma dos n termos iniciais é igual a:**

$$\boldsymbol{S_n = \frac{3^{n+4} - 81}{2 \cdot 3^n}}$$

Queremos saber **o quarto termo da sequência**, ou seja, a_4.

Para isso, quero que você perceba uma coisa:

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

Mas, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$$S_4 = (\boldsymbol{a_1 + a_2 + a_3}) + a_4$$

$$S_4 = \boldsymbol{S_3} + a_4$$

Reorganizando,

$$a_4 = S_4 - S_3$$

Observe que, naturalmente, **o quarto termo da sequência é a subtração entre S_4 e S_3**.

- Para $n = 3$:

$$S_3 = \frac{3^{3+4} - 81}{2 \cdot 3^3} \quad \rightarrow \quad S_3 = \frac{3^7 - 81}{2 \cdot 27} \quad \rightarrow \quad S_3 = \frac{2187 - 81}{54} \quad \rightarrow \quad S_3 = \frac{2106}{54} \quad \rightarrow \quad S_3 = 39$$

- Para $n = 4$:

$$S_4 = \frac{3^{4+4} - 81}{2 \cdot 3^4} \quad \rightarrow \quad S_4 = \frac{3^8 - 81}{2 \cdot 81} \quad \rightarrow \quad S_4 = \frac{6561 - 81}{162} \quad \rightarrow \quad S_4 = \frac{6480}{162} \quad \rightarrow \quad S_4 = 40$$

Logo,

$$a_4 = S_4 - S_3 \quad \rightarrow \quad a_4 = 40 - 39 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = 1}$$

Gabarito: LETRA A.

5. (CESGRANRIO/BASA/2015) Uma sequência de números reais tem seu termo geral, a_n, dado por $a_n = 4 \cdot 2^{3n+1}$, para $n \geq 1$. Essa sequência é uma progressão

A) geométrica, cuja razão é igual a 2.
B) geométrica, cuja razão é igual a 32.
C) aritmética, cuja razão é igual a 3.
D) aritmética, cuja razão é igual a 1.
E) geométrica, cuja razão é igual a 8.

Comentários:

Pessoal, nessa situação, vamos **substituir valores de n** para encontrar os termos dessa sequência.

$$\boldsymbol{a_n = 4 \cdot 2^{3n+1}}$$

Para $n = 1$, temos que:

$$a_1 = 4 \cdot 2^{3\cdot 1+1} \quad \rightarrow \quad a_1 = 4 \cdot 2^4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = 64}$$

Para $n = 2$, temos que:

$$a_2 = 4 \cdot 2^{3\cdot 2+1} \quad \rightarrow \quad a_1 = 4 \cdot 2^7 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = 512}$$

Para $n = 3$, temos que:

$$a_3 = 4 \cdot 2^{3\cdot 3+1} \quad \rightarrow \quad a_3 = 4 \cdot 2^{10} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_3 = 4.096}$$

Com os três primeiros termos, já conseguimos perceber que **não temos uma progressão aritmética**, pois a diferença entre os termos não é constante. Assim, certamente temos uma PG. Para determinar a razão, podemos fazer:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{512}{64} = 8$$

Pronto, observe que temos uma **progressão geométrica de razão igual a 8**. Podemos marcar a letra E.

Gabarito: LETRA E.

6. (CESGRANRIO/BR/2015) Considere a progressão geométrica finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}, a_{12})$, na qual o primeiro termo vale metade da razão e $a_7 = 64 \cdot a_4$. O último termo dessa progressão é igual a

A) 2^{12}
B) 2^{16}
C) 2^{22}
D) 2^{23}
E) 2^{34}

Comentários:

O enunciado quer **o último termo** da progressão geométrica dada, ou seja, a_{12}. Para determiná-lo, precisaremos encontrar o a_1 e a razão q. Se o **primeiro termo vale metade da razão**, podemos escrever que:

$$a_1 = \frac{q}{2} \qquad (1)$$

Além disso, o enunciado informou que $\boldsymbol{a_7 = 64 \cdot a_4}$. Lembre-se que:

$$a_7 = a_1 \cdot q^6$$
$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

Usando essas expressões na relação dada no enunciado, ficamos com:

$$\cancel{a_1} \cdot q^6 = 64 \cdot \cancel{a_1} \cdot q^3$$
$$q^{\cancel{6}} = 64 \cdot \cancel{q^3}$$

$$q^3 = 64 \quad \rightarrow \quad q = \sqrt[3]{64} \quad \rightarrow \quad q = 4$$

Pronto, temos a razão da PG. Como **o primeiro termo é metade desse valor**,

$$a_1 = \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad a_1 = 2$$

Com **o primeiro termo e a razão**, conseguimos **determinar qualquer termo** dessa progressão geométrica.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

O último termo é tal que $\boldsymbol{n = 12}$, vamos substituir os valores que temos.

$$a_{12} = 2 \cdot 4^{12-1} \quad \rightarrow \quad a_{12} = 2 \cdot 4^{11} \quad \rightarrow \quad a_{12} = 2 \cdot (2^2)^{11} \quad \rightarrow \quad a_{12} = 2 \cdot 2^{22} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{12} = 2^{23}}$$

Gabarito: LETRA D.

7. (CESGRANRIO/BR/2015) Considere a_n e b_n os termos gerais de duas progressões geométricas, cujas razões são 4 e 1/2, respectivamente. Tem-se, portanto, que $c_n = a_n \cdot b_n$ é o termo geral de uma progressão geométrica cuja razão é igual a

A) 8
B) 9/2
C) 2
D) 1/2
E) 1/8

Comentários:

Se a_n e b_n são os termos gerais de **duas progressões geométricas**, podemos escrever:

$$a_n = a_1 \cdot q_a^{n-1}$$

$$b_n = b_1 \cdot q_b^{n-1}$$

O enunciado falou que as razões são $\boldsymbol{q_a = 4}$ e $\boldsymbol{q_b = \frac{1}{2}}$. Vamos substituir esses valores nas expressões acima.

$$a_n = a_1 \cdot 4^{n-1}$$

$$b_n = b_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Temos também uma outra progressão geométrica cujo termo geral é $\boldsymbol{c_n = a_n \cdot b_n}$. Assim,

$$c_n = (a_1 \cdot 4^{n-1}) \cdot \left(b_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \quad \rightarrow \quad c_n = (a_1 \cdot b_1) \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^{n-1} \quad \rightarrow \quad c_n = (a_1 \cdot b_1) \cdot 2^{n-1}$$

Compare a expressão que obtemos acima com **a expressão do termo geral** de uma PG.

$$c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$$

Bem parecido, né? Quando fazemos **uma comparação** entre as duas expressões, podemos tirar que:

$$c_1 = a_1 b_1$$
$$q = 2.$$

Gabarito: LETRA C.

8. (CESGRANRIO/BASA/2013) A sequência a_n, $n \in \mathbb{N}$ é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $a_1 = -2$ e cuja razão é $r = 3$. Uma progressão geométrica, b_n, é obtida a partir da primeira, por meio da relação

$$\boldsymbol{b_n = 3^{a_n}, n \in \mathbb{N}}$$

Se b_1 e q indicam o primeiro termo e a razão dessa progressão geométrica, então $\frac{q}{b_1}$ vale

A) 243.
B) 3.
C) $1/243$.
D) $-2/3$.
E) $-27/6$.

Comentários:
Questão bacana! Ela trabalha tanto com as progressões aritméticas quanto com as progressões geométricas. Ótima para treino. Se **a_n, $n \in \mathbb{N}$ é uma progressão aritmética**, então podemos escrever:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Vamos substituir $a_1 = -2$ e $r = 3$.

$$a_n = -2 + (n-1) \cdot 3$$

Usando a propriedade **distributiva** da multiplicação.

$$a_n = -2 + 3n - 3$$

$$a_n = 3n - 5$$

Assim, o termo geral da progressão geométrica b_n do enunciado fica:

$$b_n = 3^{a_n} \quad \rightarrow \quad b_n = 3^{3n-5} \quad \rightarrow \quad b_n = \frac{3^{3n}}{3^5} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b_n = \frac{3^{3n}}{243}}$$

Agora, podemos **substituir valores para n** e descobrir quais são os termos dessa PG.

- Para $n = 1$:

$$b_1 = \frac{3^{3\cdot 1}}{243} \quad \rightarrow \quad b_1 = \frac{3^3}{243} \quad \rightarrow \quad b_1 = \frac{27}{243} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b_1 = \frac{1}{9}}$$

- Para $n = 2$:

$$b_2 = \frac{3^{3\cdot 2}}{243} \quad \rightarrow \quad b_2 = \frac{3^6}{243} \quad \rightarrow \quad b_2 = \frac{729}{243} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b_2 = 3}$$

Com b_1 e b_2 já conseguimos determinar **a razão** dessa PG.

$$q = \frac{b_2}{b_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{3}{\frac{1}{9}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{q = 27}$$

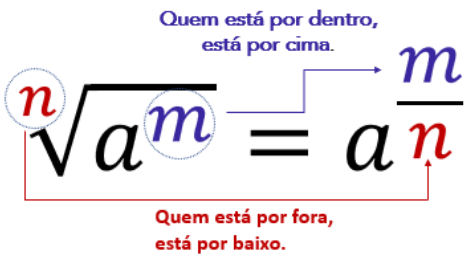
O enunciado pediu o valor de $\boldsymbol{q/b_1}$.

$$\frac{q}{b_1} = \frac{27}{\frac{1}{9}} = 243$$

Gabarito: LETRA A.

9. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2012) Seja a progressão geométrica: $\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{5}, \ldots$ O quarto termo dessa progressão é:
A) 0
B) $-1/5^6$
C) $1/5^9$
D) 1
E) 5

Comentários:
Pessoal, antes de começar a resolver o exercício, gostaria de fazer uma **breve revisão com vocês**. Essa questão envolve **manipulações de raízes**. Lembre-se, da nossa aula de operações básicas, que:



Escrever uma raiz na forma de uma potência com expoente fracionário pode facilitar bastante os cálculos, pois aí **poderemos usar com algumas propriedades conhecidas**. Relembre algumas:

P1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

P2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

P3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

P4) $a^0 = 1.$

Agora, vamos para a questão! O enunciado forneceu alguns termos de uma **progressão geométrica** e quer que encontremos o $\boldsymbol{a_4}$. Para isso, precisamos **determinar a razão da PG**.

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow \quad q = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{2}}} \quad \rightarrow \quad q = 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad q = 5^{-\frac{1}{6}}$$

Agora, devemos usar **a fórmula do termo geral** para determinar o a_4.

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \rightarrow \quad a_4 = \sqrt{5} \cdot \left(5^{-\frac{1}{6}}\right)^3 \quad \rightarrow \quad a_4 = \sqrt{5} \cdot 5^{-\frac{3}{6}} \quad \rightarrow \quad a_4 = \sqrt{5} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$$

Podemos simplificar um pouco mais, note que $\boldsymbol{\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}}$. Assim,

- $$a_4 = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad a_4 = 5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad a_4 = 5^0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = 1}$$

Gabarito: LETRA D.

10. (CESGRANRIO/BNDES/2011) A soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, cuja razão tem módulo menor que 1, é igual a 6, e a soma dos quadrados dos termos dessa progressão é igual a 12. Quanto vale o primeiro termo da progressão geométrica?

A) 1
B) 3
C) 6
D) 9
E) 12

Comentários:

Sabemos que a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica cuja razão é tal que $|q| < 1$ é dada pela seguinte fórmula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

A primeira informação que temos é que **o resultado dessas soma é igual a 6**. Assim,

$$\frac{a_1}{1-q} = 6 \quad \rightarrow \quad a_1 = 6 - 6q \quad \rightarrow \quad a_1 + 6q = 6 \qquad (1)$$

A segunda informação é que **a soma dos quadrados dos termos dessa progressão é igual a 12**. Ou seja,

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \cdots = 12$$

A sequência formada por $(\boldsymbol{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, \ldots})$ **também é uma PG**. Para convencer vocês disso, vou tentar mostrar um exemplo prático. Considere a seguinte sequência:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$$

É uma **PG infinita com $\boldsymbol{q = \frac{1}{2}}$**. Agora, vamos criar uma outra sequência em que cada um dos termos seja o quadrado do termo correspondente na sequência acima.

$$\left(1^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{8}\right)^2, \left(\frac{1}{16}\right)^2, \ldots\right)$$

$$\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \ldots\right)$$

Observe que **a sequência resultante é também uma PG com razão $\boldsymbol{q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}}$**.

Como $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, \ldots)$ é também uma PG, podemos usar a fórmula da soma infinita.

A sequência formada pelos quadrados possui **primeiro termo igual a $\boldsymbol{a_1^2}$ e razão $\boldsymbol{q^2}$**. Assim,

$$S_\infty = \frac{a_1^2}{1-q^2}$$

Como o enunciado falou que **o resultado dessa soma é 12**, temos que:

$$\frac{a_1^2}{1-q^2} = 12 \quad \rightarrow \quad a_1^2 + 12q^2 = 12 \qquad (2)$$

Queremos **determinar <u>o primeiro termo</u>**, a_1. Para isso, vamos isolar q em (1) e substituir em (2).

$$a_1 + 6q = 6 \quad \rightarrow \quad q = \frac{6 - a_1}{6}$$

Substituindo em (2):

$$a_1^2 + 12 \cdot \left(\frac{6 - a_1}{6}\right)^2 = 12$$

$$a_1^2 + 12 \cdot \frac{(36 - 12a_1 + a_1^2)}{36} = 12$$

$$a_1^2 + \frac{(36 - 12a_1 + a_1^2)}{3} = 12$$

$$\frac{3a_1^2 + 36 - 12a_1 + a_1^2}{3} = 12$$

$$4a_1^2 - 12a_1 + \cancel{36} = \cancel{36}$$

$$4a_1^2 - 12a_1 = 0 \quad \rightarrow \quad 4a_1^2 = 12a_1 \quad \rightarrow \quad a_1^2 = 3a_1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = 3}$$

Gabarito: LETRA B.

11. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2010) Qual é o número que deve ser somado aos números 1, 5 e 7 para que os resultados dessas somas, nessa ordem, formem três termos de uma progressão geométrica?
A) -9
B) -5
C) -1
D) 1
E) 9

Comentários:
Devemos **somar um número, digamos x**, a cada um dos números do enunciado. O resultado disso deve ser uma progressão geométrica de três termos.
$a_1 = 1 + x$
$a_2 = 5 + x$
$a_3 = 7 + x$

Em uma **PG de três termos**, sabemos que o termo central é a média geométrica dos outros dois. Assim,

$$a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3}$$

Substituindo as expressões.

$$(5 + x) = \sqrt{(1 + x)(7 + x)}$$

Elevando ao quadrado os dois lados.

$$(5 + x)^2 = (1 + x)(7 + x)$$

$$25 + 10x + x^2 = 7 + x + 7x + x^2$$

$$25 + 10x + \cancel{x^2} = 7 + 8x + \cancel{x^2}$$

$$2x = -18 \quad \rightarrow \quad x = -9$$

Logo, **o número que estamos procurando é -9**.

Gabarito: LETRA A.

12. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2010) A série alternada, apresentada a seguir, converge absolutamente.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

Seu valor é de
A) 1/2
B) 1/3
C) 1/4
D) 1/5
E) 1/6

Comentários:
Pessoal, veja que **temos uma soma infinita**. Do que lembramos? De progressão geométrica!! Vamos ordenar cada um dos termos dessa soma!

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right)$$

Se a sequência é alternada, devemos ter uma **razão negativa**. Para encontrá-la, basta fazermos:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \rightarrow \quad q = -\frac{2}{4} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{q = -\frac{1}{2}}$$

Note que $|q| < 1$, assim, podemos usar aquela fórmula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Substituindo $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = -\frac{1}{2}$.

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_\infty = \frac{1}{3}}$$

Gabarito: LETRA B.

13. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2010) Qual a soma dos 5 primeiros termos da sequência geométrica 5, 10, ...?

A) 77,5
B) 80
C) 155
D) 160
E) 635

Comentários:

O enunciado falou em progressão geométrica **e forneceu dois termos consecutivos**. É possível achar a razão.

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{10}{5} \quad \rightarrow \quad q = 2$$

Com a razão e o primeiro termo, conseguimos calcular **a soma dos 5 primeiros termos**. Lembre-se:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Usando $a_1 = 5$, $q = 2$ e $n = 5$:

$$S_5 = \frac{5 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} \quad \rightarrow \quad S_5 = 5 \cdot (32 - 1) \quad \rightarrow \quad S_5 = 5 \cdot 31 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_5 = 155}$$

Gabarito: LETRA C.

LISTA DE QUESTÕES - CESGRANRIO

Progressão Aritmética

1. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) O quarto, o quinto e o sexto termos de uma progressão aritmética são expressos por $x+1, x^2+4$ e $2x^2+3$, respectivamente. A soma dos dez primeiros termos dessa progressão aritmética é igual a

A) 260
B) 265
C) 270
D) 275
E) 280

2. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Em uma progressão aritmética, o décimo termo é o quádruplo do terceiro. Se o sétimo termo é igual a 19, então o segundo termo é igual a

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

3. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Considere uma progressão aritmética, em que $a_8 = a_2 + a_6$, e a soma dos 10 primeiros termos dessa sequência é igual a 330. Assim, a razão dessa progressão é igual a

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 13

4. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) O número de passageiros que uma empresa de transporte aéreo tem transportado para uma petroleira vem diminuindo, segundo o padrão apresentado na tabela a seguir:

Ano	Número de passageiros transportados por ano
2014	10.000
2015	9.600
2016	9.200
2017	8.800

Supondo-se que esse padrão se mantenha, a previsão para a quantidade total de passageiros transportados por essa empresa, no período de 2014 a 2025, contando-se com os anos 2014 e 2025, será igual a

A) 86.400
B) 93.600

C) 103.800
D) 172.800
E) 187.200

5. (CESGRANRIO/BB/2018) Uma sequência numérica tem seu termo geral representado por a_n, para $n \geq 1$. Sabe-se que $a_1 = 0$ e que a sequência cujo termo geral é $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \geq 1$, é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $b_1 = 9$ e cuja razão é igual a 4. O termo a_{1000} é igual a

A) 2.002.991
B) 2.002.995
C) 4.000.009
D) 4.009.000
E) 2.003.000

6. (CESGRANRIO/BB/2018) Para obter uma amostra de tamanho 1.000 dentre uma população de tamanho 20.000, organizada em um cadastro em que cada elemento está numerado sequencialmente de 1 a 20.000, um pesquisador utilizou o seguinte procedimento:

I - calculou um intervalo de seleção da amostra, dividindo o total da população pelo tamanho da amostra: 20.000/1.000 = 20;

II - sorteou aleatoriamente um número inteiro, do intervalo [1, 20]. O número sorteado foi 15; desse modo, o primeiro elemento selecionado é o 15º;

III - a partir desse ponto, aplica-se o intervalo de seleção da amostra: o segundo elemento selecionado é o 35º (15+20), o terceiro é o 55º (15+40), o quarto é o 75º (15+60), e assim sucessivamente.

O último elemento selecionado nessa amostra é o

A) 19.997º
B) 19.995º
C) 19.965º
D) 19.975º
E) 19.980º

7. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2018) Se a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é S_n, então a expressão $S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n$ equivale a

A) $(n+1)(n+2)$
B) $n(n+1)$
C) S_n
D) S_{n+1}
E) 0

8. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2018) Considere n números inteiros, ímpares, positivos e diferentes, representados por $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tais que a soma $\sum_{i=1}^{N} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 10000$. Qual é o maior valor possível para n?

A) 99
B) 100

C) 1000
D) 4999
E) 5000

9. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2018) Em uma progressão aritmética de 5 termos e primeiro termo 5, a soma dos quadrados dos três primeiros termos é igual à soma dos quadrados dos dois últimos termos. O maior valor possível para o último termo dessa progressão aritmética é
A) 5,5
B) 6
C) 6,5
D) 7
E) 7,5

10. (CESGRANRIO/EPE/2014) A sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20})$ é uma progressão aritmética de 20 termos, na qual $a_8 + a_9 = a_5 + a_3 + 189$. A diferença entre o último e o primeiro termo dessa progressão, nessa ordem, é igual a
A) 19
B) 21
C) 91
D) 171
E) 399

11. (CESGRANRIO/BNDES/2013) Progressões aritméticas são sequências numéricas nas quais a diferença entre dois termos consecutivos é constante. A sequência (5, 8, 11, 14, 17, ..., 68, 71) é uma progressão aritmética finita que possui
A) 67 termos
B) 33 termos
C) 28 termos
D) 23 termos
E) 21 termos

GABARITO

1. LETRA D
2. LETRA B
3. LETRA A
4. LETRA A
5. LETRA B
6. LETRA B
7. LETRA E
8. LETRA B
9. LETRA D
10. LETRA E
11. LETRA D

Lista de Questões - Cesgranrio

Sequências

1. (CESGRANRIO/BB/2012) Uma sequência numérica infinita $(e_1, e_2, e_3, ..., e_n, ...)$ é tal que a soma dos n termos iniciais é igual a $n^2 + 6n$. O quarto termo dessa sequência é igual a

A) 9
B) 13
C) 17
D) 32
E) 40

2. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Uma sequência é formada de tal modo que o seu primeiro termo é 20 e seu vigésimo termo é 11. Além disso, a partir do terceiro termo, cada termo é igual à média aritmética de todos os termos que o antecedem. Determine o segundo termo dessa sequência.

A) 2
B) 11
C) 15,5
D) 20
E) 31

3. (CESGRANRIO/BR/2010) Determinado sistema especialista apresenta a sequência lógica a seguir.

$$3, 12, 33, 72, 135, 228$$

Qual o próximo número dessa sequência?

A) 331
B) 357
C) 418
D) 421
E) 816

4. (CESGRANRIO/IBGE/2006) Na sequência (1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ...) o número que sucede 22 é:

A) 28
B) 29
C) 30
D) 31
E) 32

GABARITO

1. LETRA B
2. LETRA A
3. LETRA B
4. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES - CESGRANRIO

Progressão Geométrica

1. (CESGRANRIO/BASA/2018) Considere a sequência numérica cujo termo geral é dado por $a_n = 2^{1-3n}$, para $n \geq 1$. Essa sequência numérica é uma progressão

A) geométrica, cuja razão é 1/8

B) geométrica, cuja razão é -6.

C) geométrica, cuja razão é -3.

D) aritmética, cuja razão é -3.

E) aritmética, cuja razão é 1/8.

2. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Sabe-se que, em uma determinada progressão geométrica, a razão é 0,8. Se o quinto termo é 4.096; então, o Limite da Soma dos n primeiros dessa P.G., quando n tende a infinito, é igual a

A) 10.000

B) 20.000

C) 30.000

D) 40.000

E) 50.000

3. (CESGRANRIO/BB/2018) Para $x > 0$, seja S_x a soma

$$S_x = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-nx} = 2^{-x} + 4^{-x} + 8^{-x} + \cdots$$

O número real x para o qual se tem $S_x = \frac{1}{4}$.

A) 4

B) $\log_2 5$

C) $3/2$

D) $5/2$

E) $\log_2 3$

4. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2017) A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = \frac{3^{n+4} - 81}{2 \cdot 3^n}$$

Quanto vale o quarto termo dessa progressão geométrica?

A) 1

B) 3

C) 27

D) 39

E) 40

5. (CESGRANRIO/BASA/2015) Uma sequência de números reais tem seu termo geral, a_n, dado por $a_n = 4 \cdot 2^{3n+1}$, para $n \geq 1$. Essa sequência é uma progressão

A) geométrica, cuja razão é igual a 2.
B) geométrica, cuja razão é igual a 32.
C) aritmética, cuja razão é igual a 3.
D) aritmética, cuja razão é igual a 1.
E) geométrica, cuja razão é igual a 8.

6. (CESGRANRIO/BR/2015) Considere a progressão geométrica finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}, a_{12})$, na qual o primeiro termo vale metade da razão e $a_7 = 64 \cdot a_4$. O último termo dessa progressão é igual a

A) 2^{12}
B) 2^{16}
C) 2^{22}
D) 2^{23}
E) 2^{34}

7. (CESGRANRIO/BR/2015) Considere a_n e b_n os termos gerais de duas progressões geométricas, cujas razões são 4 e 1/2, respectivamente. Tem-se, portanto, que $c_n = a_n \cdot b_n$ é o termo geral de uma progressão geométrica cuja razão é igual a

A) 8
B) 9/2
C) 2
D) 1/2
E) 1/8

8. (CESGRANRIO/BASA/2013) A sequência $a_n, n \in \mathbb{N}$ é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $a_1 = -2$ e cuja razão é $r = 3$. Uma progressão geométrica, b_n, é obtida a partir da primeira, por meio da relação

$$b_n = 3^{a_n}, n \in \mathbb{N}$$

Se b_1 e q indicam o primeiro termo e a razão dessa progressão geométrica, então $\frac{q}{b_1}$ vale

A) 243.
B) 3.
C) $1/243$.
D) $-2/3$.
E) $-27/6$.

9. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2012) Seja a progressão geométrica: $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{5}$, ... O quarto termo dessa progressão é:

A) 0
B) $-1/5^6$
C) $1/5^9$
D) 1

E) 5

10. (CESGRANRIO/BNDES/2011) A soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, cuja razão tem módulo menor que 1, é igual a 6, e a soma dos quadrados dos termos dessa progressão é igual a 12. Quanto vale o primeiro termo da progressão geométrica?

A) 1
B) 3
C) 6
D) 9
E) 12

11. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2010) Qual é o número que deve ser somado aos números 1, 5 e 7 para que os resultados dessas somas, nessa ordem, formem três termos de uma progressão geométrica?
A) -9
B) -5
C) -1
D) 1
E) 9

12. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2010) A série alternada, apresentada a seguir, converge absolutamente.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

Seu valor é de
A) 1/2
B) 1/3
C) 1/4
D) 1/5
E) 1/6

13. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2010) Qual a soma dos 5 primeiros termos da sequência geométrica 5,10, ...?
A) 77,5
B) 80
C) 155
D) 160
E) 635

Gabarito

1. LETRA A
2. LETRA E
3. LETRA B
4. LETRA A
5. LETRA E
6. LETRA D
7. LETRA C
8. LETRA A
9. LETRA D
10. LETRA B
11. LETRA A
12. LETRA B
13. LETRA C

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.