Aula 05

BNB (Analista Bancário) Matemática Financeira - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

19 de Abril de 2023

Índice

CONCEITOS INICIAIS – SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

A aula de hoje está intrinsicamente relacionada ao **pagamento de um crédito**, seja ele um empréstimo, um financiamento, etc.

Imagine que depois de aprovado e, para comemorar sua posse, você se dirija a um banco a fim de tomar um empréstimo para comprar um carro (um "auto" presente de aprovação). Quando você compactua o empréstimo com o banco, as características desse financiamento devem ser previamente estabelecidas.

O valor a ser tomado emprestado, a taxa de juros que será aplicada, o tempo que se levará para pagar este valor e também a modalidade do Sistema de Amortização a ser utilizado. Esta última estabelece a forma como o valor do saldo devedor será calculado.

Sistema de Amortização é um plano de pagamento de um crédito que define a forma como o valor do saldo devedor será calculado.

Vejamos alguns conceitos relacionados aos Sistemas de Amortização.

Saldo Devedor (SD)

Literalmente, é o ***quantum*** **ainda se deve pagar**.

O **Saldo Devedor** se divide em: Saldo Devedor inicial do período e Saldo Devedor final do período.

O Saldo Devedor final do período i será igual ao Saldo Devedor inicial do período i menos a Amortização do período i.

$$\boldsymbol{SD_{final\ i} = SD_{inicial\ i} - A_i}$$

Amortização (A)

É a parte da prestação a ser paga que está **"abatendo"** o valor inicial do empréstimo sem o cálculo dos Juros.

Juros (J)

É a remuneração do Capital emprestado. Importante ter em mente que a Taxa de Juros sempre incidirá no Saldo Devedor inicial do período.

Os **Juros de cada período i** são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.

$$\boldsymbol{J_i = i \times SD_{inicial\ i}}$$

Prestação (P)

Como o próprio nome sugere, é a **Prestação** paga no período. É dado pela soma da Amortização mais os Juros do período.

$$\boldsymbol{P = A + J}$$

RESUMINDO

Conceito Iniciais

- Saldo Devedor (SD)
- Amortização (A)
- Juros (J)
- Prestação (P)

Vamos agora, estudar cada um dos Sistemas de Amortização exigido no seu concruso. Iremos ver detalhadamente as características e a metodologia de cálculo e, ao final de cada método, resolveremos questões de concurso para melhor fixação do conteúdo.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

Conforme o próprio nome sugere, é o Sistema em que as **Amortizações são constates** e matematicamente iguais a:

$$\boxed{A = \frac{E}{n}}$$

Onde,

$A = Amortização; E = Empréstimo; n = número\ de\ parcelas\ ou\ prestações$

EXEMPLIFICANDO

Exemplo: Voltemos ao exemplo inicial da aula em que você, para comprar um carro, toma emprestado R$ 100.000,00 para pagamento em 5 prestações mensais a uma taxa de 10% ao mês que será amortizado pelo SAC.

A partir de agora, começaremos a utilizar uma tabela (sempre que preciso) para nos ajudar nas contas. A tabela será a mesma a ser utilizada em qualquer Sistema de Amortização. Porém, **a forma de cálculo será individual para cada Sistema**.

Vejamos. O primeiro passo é montar uma tabela com as seguintes colunas:

Período (p)	$SD_{inicial}$	Amortização (A)	Juros (J)	Prestação (P)	SD_{final}

O segundo passo é estabelecer a **equação de cálculo de cada coluna** desta tabela. No SAC teremos:

$constante \rightarrow A = \frac{E}{n}$

$P = A + J$

Período (p)	$SD_{inicial}$	Amortização (A)	Juros (J)	Prestação (P)	SD_{final}

$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$

$SD_{final} = SD_{inicial} - A$

Esta tabela auxiliar nos ajudará nas contas de cada período. Antes de preenchermos a tabela, iremos analisar algumas características do SAC.

CARACTERÍSTICAS DO SAC

Amortizações Constantes

Conforme estudamos, as Amortizações do SAC são constantes e iguais a:

$$\boxed{A = \frac{E}{n}}$$

Juros Decrescentes

Observe em nossa tabela que **os Juros do SAC são decrescentes**.

E mais, são **decrescentes em PA** (progressão aritmética) de **razão** igual a:

$$\boxed{r = -i \times A}$$

Prestações Decrescentes

Assim como os Juros, **as Prestações no SAC são decrescentes** (na mesma razão dos Juros).

ESQUEMATIZANDO

SAC

- *Amortizações* → ***Constante***: $\boxed{A = \frac{E}{n}}$
- *Juros* → ***Decrescente***: $\boxed{J_i = i \times SD_{inicial\ i}}$
- $r = -i \times A$
- *Prestações* → ***Decrescente***: $\boxed{P_i = A + J_i}$

Vamos, agora, **voltar ao exemplo e preencher a tabela** com base nas características que acabamos de estudar.

Exemplo: Voltemos ao exemplo inicial da aula em que você, para comprar um carro, toma emprestado R$ 100.000,00 para pagamento em 5 prestações mensais a uma taxa de 10% ao mês que será amortizado pelo SAC.

Primeiro passo é calcular a Amortização e preencher a tabela com os respectivos valores da Amortização:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{100.000}{5} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 20.000}}$$

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	**20.000**			
2		**20.000**			
3		**20.000**			
4		**20.000**			
5		**20.000**			

Você sabe que o <u>Saldo Devedor final de um período será igual ao Saldo Devedor inicial deste período menos a Amortização</u> (que no SAC é constante). Então já podemos **preencher toda a coluna do SD final** (coluna SD inicial menos coluna A). Observe:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	**100.000**	20.000			**80.000**
2	**80.000**	20.000			**60.000**
3	**60.000**	20.000			**40.000**
4	**40.000**	20.000			**20.000**
5	**20.000**	20.000			**0**

Próximo passo é calcular os Juros do primeiro período e a razão da PA de decréscimo dos Juros.

$$J_1 = i \times SD_{inicial\,1}$$

$$J_1 = 0{,}1 \times 100.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 10.000}}$$

E a razão de decréscimo será igual a:

$$r = -i \times A$$

$$r = -0{,}1 \times 20.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r = -2.000}}$$

Sendo assim, já podemos preencher toda a **coluna dos Juros**. Acompanhe:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	$\mathbf{10.000}$		80.000
2	80.000	20.000	$10.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{8.000}$		60.000
3	60.000	20.000	$8.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{6.000}$		40.000
4	40.000	20.000	$6.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{4.000}$		20.000
5	20.000	20.000	$4.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{2.000}$		0

E, por fim, para preencher a coluna da <u>Prestação</u>, basta **somar a coluna da Amortização com a coluna dos Juros**. Ou, podemos também, calcular a primeira prestação e utilizar a mesma razão calculada acima para o decréscimo da prestação.

Como vimos, a Prestação no SAC (assim como os Juros) é decrescente em PA com razão $r = -i \times A$.

A primeira prestação é igual a:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 20.000 + 10.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_1 = 30.000}}$$

Preenchendo a tabela final teremos:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	10.000	$\mathbf{30.000}$	80.000
2	80.000	20.000	8.000	$30.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{28.000}$	60.000
3	60.000	20.000	6.000	$28.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{26.000}$	40.000
4	40.000	20.000	4.000	$26.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{24.000}$	20.000
5	20.000	20.000	2.000	$24.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{22.000}$	0

Antes de partirmos para as questões de concurso sobre o SAC quero apenas dar uma dica.

Algumas questões de concurso pedem para você calcular a **última cota dos Juros no SAC**, isto é, qual será o Juros no último período.

A banca quer que você se acabe nas contas e com isso aumente sua chance de errar. Então, atente-se ao fato de que **os Juros no último período é igual ao módulo da razão da PA de decréscimo dos Juros**.

Observe na tabela acima o valor dos Juros do quinto período. R$ 2.000,00 correto? Perceba, agora, o valor da razão de decréscimo.

$$r = -i \times A$$

$$r = -0{,}1 \times 20.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = -2.000}$$

Ou seja, os valores são **iguais em módulo**.

Os Juros no **último período** do SAC é igual ao módulo da razão da PA de decréscimo dos Juros.

Vejamos algumas questões de concurso que versam sobre o SAC.

(CGE RN - 2019) João comprou um imóvel cujo valor à vista é de R$ 150.000,00 da seguinte forma: 30% de entrada e o restante em 60 parcelas no sistema SAC com taxa anual de 6%. Nessas condições, o valor de cada parcela de amortização será igual a:

a) 1.500,00

b) 1.750,00
c) 2.500,00
d) 1.230,00

Comentários:

João comprou um imóvel cujo valor à vista é de R$ 150.000,00 dando 30% de entrada e financiando o restante pelo SAC, isto é, João financiou os 70% restantes.

Primeiro passo é **calcular o valor E do financiamento** que corresponde a 70% de R$ 150.000.

$$E = \frac{70}{100} \times 150.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E = 105.000}}$$

De posse do valor do Empréstimo (financiamento), calculamos o valor da Amortização.

No SAC, conforme o próprio nome sugere, é o Sistema em que **as Amortizações são constantes** e matematicamente iguais a:

$$A = \frac{E}{n}$$

Onde,

$A = Amortização = ?\ ; E = Empréstimo = 105.000\ ; n = número\ prestações = 60$

Vamos substituir os valores e calcular o valor de cada parcela de amortização:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{105.000}{60} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 1.750}$$

Gabarito: Alternativa **B**

(Liquigás - 2018) Pelo sistema de amortização constante, a primeira prestação mensal (parcela), sem carência, de um financiamento de R$ 10.000,00 a uma taxa de juros de 10% a.m, pelo prazo de 5 meses, será de, aproximadamente,

a) R$ 3.000,00
b) R$ 2.638,00
c) R$ 2.000,00
d) R$ 1.638,00
e) R$ 1.000,00

Comentários:

A primeira prestação será calculada pela **soma da Amortização mais os Juros** do primeiro período, pois como estudamos, a prestação de um período é dada pela seguinte soma:

$$P_i = A + J_i$$

$$P_1 = A + J_1$$

Vamos calcular separadamente cada parcela.

- **Amortização**

No SAC a Amortização é constante e calculada pela divisão do valor do Empréstimo pela quantidade de prestações. Logo:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{10.000}{5} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 2.000}}$$

- **Juros do Primeiro período**

Os Juros de cada período i são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}1 \times 10.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 1.000}}$$

Observe que o Saldo Devedor inicial do primeiro período é o próprio valor do Empréstimo, uma vez que nada ainda foi pagado.

Então, a **primeira Prestação** mensal será igual a:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 2.000 + 1.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_1 = 3.000}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(CM Araraquara - 2018) A empresa NTN contratou um empréstimo no seu banco de relacionamento no valor de $ 800.000,00, com juros pré-fixados de 10% ao ano. O pagamento do citado empréstimo será em 4 parcelas anuais e consecutivas, calculadas pelo Sistema de Amortização Constante – Tabela SAC. Assinale a alternativa que aponta o valor da prestação que deverá ser paga ao banco no segundo ano.

a) $ 200.000
b) $ 220.000
c) $ 240.000
d) $ 260.000
e) $ 280.000

Comentários:

A ideia dessa questão é similar da anterior. Porém, estamos aumentando a dificuldade.

A segunda prestação será calculada pela soma da Amortização mais os Juros do segundo período, pois como estudamos, a prestação de um período é dada pela seguinte soma:

$$P_i = A + J_i$$

$$P_2 = A + J_2$$

Vamos calcular separadamente cada parcela.

- **Amortização**

No SAC a amortização é constante e calculada pela divisão do valor do Empréstimo pela quantidade de parcelas. Logo:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{800.000}{4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 200.000}}$$

- **Juros do segundo período**

Para calcular os Juros, podemos seguir por diversos caminhos. Podemos utilizar a tabela até a segunda linha (segundo período) para nos auxiliar. Outro caminho é calcular os Juros do primeiro período e a razão de decréscimo e assim calcular os juros do segundo período. Ou então, podemos simplesmente fazer as contas sem o auxílio da tabela.

Iremos fazer pelo auxílio da tabela para melhor entendimento.

Nossa tabela até então será esta:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	800.000
1	800.000	200.000			
2		200.000			

Não precisamos da tabela por completo uma vez que a banca nos questiona o valor da segunda prestação.

Vamos preencher a tabela (nos campos que nos interessam) com os seguintes valores:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	800.000
1	800.000	200.000			600.000
2	600.000	200.000			

Perceba que não precisamos calcular os Juros do primeiro período nem a primeira prestação. Até poderíamos calcular., mas já estamos começando a **poupar tempo de prova**.

Observe também que o Saldo Devedor final do primeiro período de R$ 600.000 é dado pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período (R$ 800.000) menos a Amortização (que é constante e iguais em todos os períodos) de R$ 200.000.

De posse desses valores, calculamos o **valor dos Juros do segundo período**.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_2 = i \times SD_{inicial\ 2}$$

$$J_2 = 0{,}1 \times 600.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_2 = 60.000}}$$

Então, a **segunda Prestação** será igual a:

$$P_2 = A + J_2$$

$$P_1 = 200.000 + 60.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_2 = 260.000}$$

Vamos preencher a tabela só para finalizar a questão.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	800.000
1	800.000	200.000			600.000
2	600.000	200.000	60.000	**260.000**	400.000

Gabarito: Alternativa **D**

(ISS Florianópolis - 2014) Uma pessoa financiou 100% de um imóvel no valor de R$ 216.000,00 em 9 anos. O pagamento será em prestações mensais e o sistema de amortização é o sistema de amortização constante (SAC).

Sabendo que o valor da terceira prestação é de R$2.848,00, a taxa de juros mensal cobrada é de:

a) 0,2%
b) 0,4%
c) 0,5%
d) 0,6%
e) 0,8%

Comentários:

Vamos, primeiramente, calcular o valor da Amortização.

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{216.000}{9 \times 12} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 2.000}}$$

Observe que as parcelas são mensais e o tempo, no enunciado, é fornecido em anos. 9 anos são iguais a 9×12 meses.

Com isso, já podemos preencher alguns campos da nossa tabela auxiliar.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	216.000
1	216.000	2.000			214.000
2	214.000	2.000			212.000
3	212.000	2.000	J_3	2.848	

Perceba que o Saldo Devedor final de um período será sempre igual ao Saldo Devedor inicial menos a Amortização.

Sabemos que a Prestação é igual a soma dos Juros com a Amortização. Sendo assim, os Juros do terceiro período serão iguais a:

$$P_3 = A + J_3$$

$$2.848 = 2.000 + J_3$$

$$J_3 = 2.848 - 2.000 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{J_3 = 848}}$$

Os Juros de cada período i são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_3 = i \times SD_{inicial\ 3}$$

$$848 = i \times 212.000$$

$$i = \frac{848}{212.000} \rightarrow \boldsymbol{i = 0,004\ ou\ 0,4\%\ ao\ mês}$$

Gabarito: Alternativa **B**

(EPE - 2010) Se uma pessoa pagasse uma dívida em prestações mensais usando o Sistema de Amortização Constante (SAC), pagaria prestações sucessivas

a) Iguais
b) Crescentes
c) Com parcelas de amortização crescentes
d) Com parcelas de juros decrescentes
e) Com juros apenas na última

Comentários:

Uma questão teórica sobre o SAC. Vamos relembrar nossa **esquematização**:

$$\text{SAC} \begin{cases} Amortizações \rightarrow \textbf{Constante}: \boxed{A = \frac{E}{n}} \\ Juros \rightarrow \textbf{Decrescente}: \boxed{J_i = i \times SD_{inicial\ i}} \\ \qquad r = -i \times A \\ Prestações \rightarrow \textbf{Decrescente}: \boxed{P_i = A + J_i} \end{cases}$$

Vejamos as alternativas uma a uma.

a) Iguais

INCORRETO. As prestações são **DECRESCENTES**. Prestações iguais é característica do Sistema Francês de Amortização (nosso próximo tópico).

b) Crescentes

INCORRETO. As prestações são **DECRESCENTES**.

c) Com parcelas de amortização crescentes

INCORRETO. As amortizações são **CONSTANTES**.

d) Com parcelas de juros decrescentes

CORRETO. Os Juros (assim como as prestações) são **DECRESCENTES**.

e) Com juros apenas na última

INCORRETO. Há incidência de Juros em todas as prestações.

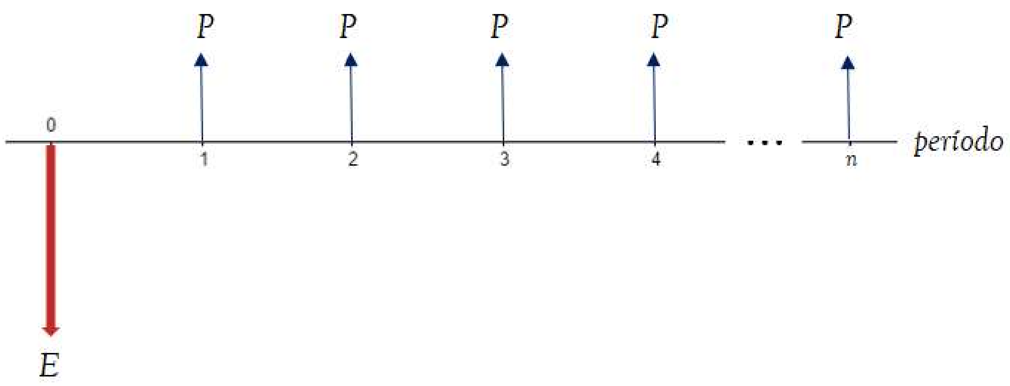
Gabarito: Alternativa **D**

Terminamos o SAC. Sistema com **elavado grau de cobrança** na prova. Certifique-se que entendeu a mecânica de pagamento do Sistema e a forma de cálculo.

Faça uma pausa. Levante-se. Tome um **café** e vamos começar mais um Sistema bastante cobrado: O Sistema Francês de Amortização.

Sistema Francês de Amortização (SF)

Neste Sistema de Amortização, as **Prestações são constantes** e iguais em todos os períodos. Graficamente seria algo, genericamente, igual a:



Lembrando que o **Valor Atual** (no nosso caso o valor E tomado Emprestado) de uma série de rendas certas **Postecipadas** é o valor no momento "0", também chamado de Valor Presente (VP), que **equivale a soma** de todas as **n** rendas certas **P** descontadas pela mesma taxa de juros **i**.

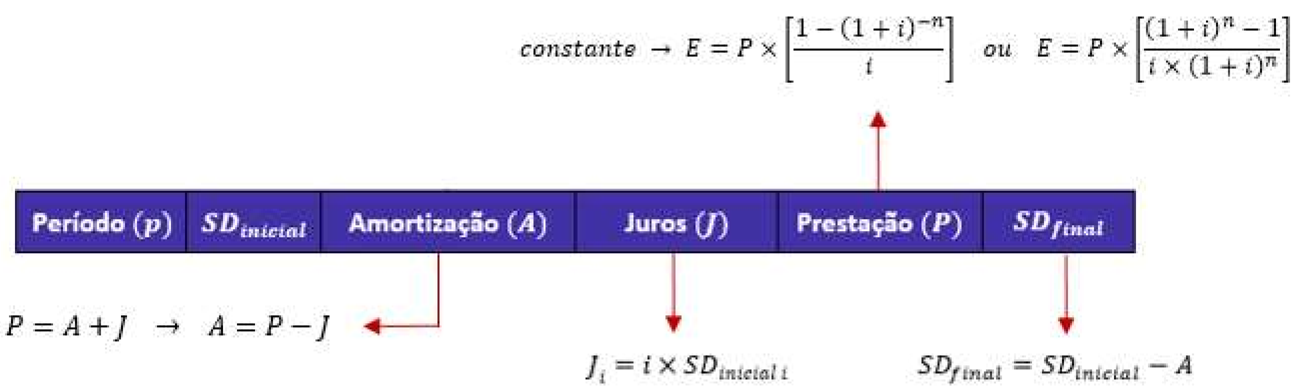
Sendo assim, a fórmula de cálculo da Prestação será:

$$\boldsymbol{E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad ou \quad E = P \times \left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i \times (1+i)^{n}}\right]}$$

Onde,

$E = Valor\ do\ Empréstimo\ \ ;\ \ P = Valor\ das\ Prestações\ iguais\ \ ;\ \ n = número\ de\ prestações\ \ ;\ \ i = Taxa\ de\ Juros$

No SF também iremos utilizar uma tabela auxiliar para montar a tabela completa do pagamento do Empréstimo. Todavia, **algumas alterações serão feitas**. Observe:



4 observações devem ser feitas:

1. A forma de **cálculo dos Juros** será a mesma **independentemente** do Sistema de Amortização. Será sempre igual a **Taxa de Juros vezes o Saldo Devedor inicial** do Período.

2. O **Saldo Devedor final do período** também não muda de cálculo. Será sempre o **Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização**.

3. No SF, a Prestação é constante e será calculada pelas fórmulas apresentadas.

4. **Atenção a este quarto ponto**. Diferentemente do SAC onde as amortizações eram constantes, no SF as Amortizações variam e não há uma fórmula de cálculo direto para elas. Devemos primeiro calcular a Prestação, depois os Juros, e a Amortização será a diferença entre esses fatores.

RESUMINDO

- **No SAC:** Amortização → Juros do Período → Prestação do Período

- **No SF:** Prestação → Juros do Período → Amortização do Período

CARACTERÍSTICAS DO SF

Prestações Constantes

Conforme estudamos, no SF as **Prestações são iguais** e calculadas pela seguinte fórmula:

$$E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad ou \quad E = P \times \left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i \times (1+i)^{n}}\right]$$

Juros Decrescentes

No SF **os Juros são decrescentes**. Mas, diferentemente do SAC, aqui **não há decréscimo constante**. Não há uma relação de recorrência entre os Juros de um período e os Juros do período seguinte.

Amortizações Crescentes

No SF, **as Amortizações são CRESCENTES**. E mais, são crescentes em **Progressão Geométrica (PG) de razão** $\boldsymbol{q = (1 + i)}$.

Sendo assim, podemos usar a **fórmula do termo geral da PG para o cálculo da Amortização** no período n desejado.

ESQUEMATIZANDO

SF

- *Prestações* $\rightarrow$ ***Constante***

$$E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad ou \quad E = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

- *Juros* $\rightarrow$ ***Decrescente***: $J_i = i \times SD_{inicial\ i}$

- *Amortizações* $\rightarrow$ ***Crescente*** $P = A_i + J_i$

$$q = (1 + i)$$

Sistema (Tabela) Price

O **Sistema Price** é um caso <u>específico</u> do Sistema Francês de Amortização. Para fins de prova, em resoluções numéricas, você irá adotá-las como **expressões sinônimas**.

A **única diferença** reside na <u>Taxa de Juros</u> do Empréstimo.

- Na Tabela Price, a Taxa de Juros fornecida é a Nominal. E, então, para resolver, você precisa inicialmente converter a Taxa Nominal em Taxa Efetiva.

- Já o Sistema Francês, fornece a Taxa Efetiva diretamente.

Dito isto, vamos aos **exercícios de concursos** sobre SF.

(ISS Novo Hamburgo - 2020) Considere um empréstimo bancário realizado no valor de R$ 100.000,00 para ser liquidado em 100 prestações mensais, iguais e consecutivas, vencendo a primeira ao final do 1º mês. Sabe-se que o empréstimo foi realizado pelo regime do Sistema Francês (Tabela Price) de Amortização, à taxa de juros compostos de 2% ao mês, obtendo-se o valor de R$ 2.800,00 para cada prestação.

Com base nos dados apresentados, o saldo devedor do empréstimo, após o pagamento da 2ª prestação, será de

a) R$ 99.380,00.
b) R$ 99.200,00.
c) R$ 98.384,00.
d) R$ 98.551,68.
e) R$ 98.702,71.

Comentários:

Vamos resolver essa questão com o auxílio da tabela para melhor compreensão.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000			2.800	
2				2.800	

Começaremos calculando os **Juros do primeiro período**.

Os Juros de cada período i são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}02 \times 100.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 2.000}}$$

De posse do valor da Prestação e dos Juros do primeiro período, calculamos o valor da **Amortização do primeiro período**.

$$P = A_1 + J_1$$

$$2.800 = A_1 + 2.000$$

$$A_1 = 2.800 - 2.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_1 = 800}}$$

E, para finalizar o primeiro período, calculamos o **Saldo Devedor final**.

$$SD_{final\ i} = SD_{inicial\ i} - A_i$$

$$SD_{final\ 1} = SD_{inicial\ 1} - A_1$$

$$SD_{final\ 1} = 100.000 - 800 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{SD_{final\ 1} = 99.200}}$$

Preenchendo a tabela:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	800	2.000	2.800	99.200
2	99.200			2.800	

Iremos, agora, repetir os cálculos acima para o segundo período.

Os Juros do segundo período serão iguais a:

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_2 = i \times SD_{inicial\ 2}$$

$$J_2 = 0{,}02 \times 99.200 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_2 = 1.984}}$$

E a Amortização será igual a:

$$P = A_2 + J_2$$

$$2.800 = A_2 + 1.984$$

$$A_2 = 2.800 - 1.984 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_2 = 816}}$$

Por fim, calculamos o valor solicitado pelo enunciado, isto é, o Saldo Devedor final do segundo período.

$$SD_{final\ i} = SD_{inicial\ i} - A_i$$

$$SD_{final\ 2} = SD_{inicial\ 2} - A_2$$

$$SD_{final\ 2} = 99.200 - 816 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{SD_{final\ 2} = 98.384}$$

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	800	2.000	2.800	99.200
2	99.200	816	1.984	2.800	**98.384**

Antes de passarmos para o próximo exercício, há uma <u>outra maneira de se calcular a Amortização</u> do segundo período.

De posse da Amortização do primeiro período, poderíamos multiplicar por $(1+i)$, pois como vimos, **a Amortização no SF é crescente em PG de razão $\boldsymbol{q = (1 + i)}$**.

Então, ficaríamos com:

$$A_2 = A_1 \times (1 + i)$$

$$A_2 = 800 \times (1 + 0{,}02) \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_2 = 816}}$$

E a continuação da resolução seria igual à da forma acima.

Perceba que há mais de 1 maneira de se chegar ao resultado. Estou te apresentando os diversos caminhos para que você opte por um e se sinta **confortável** para resolver. Eu, <u>particularmente</u>, gosto muito de trabalhar com o auxílio da tabela em questões que pedem até o terceiro período. Mais que isso temos que realmente trabalhar apenas com fórmulas.

Gabarito: Alternativa **C**

(IDAN - 2019) Uma prefeitura do interior do estado adquiriu um equipamento de terraplanagem no valor de $ 300.000,00. Impossibilitada de efetuar o pagamento à vista, a citada prefeitura solicitou ao banco de seu relacionamento um financiamento para a compra do equipamento. O banco aceitou a operação, financiando o valor total do equipamento em 10 parcelas iguais e consecutivas no valor de $ 33.398,00 cada uma. Os juros pactuados foram de 2% ao mês. A primeira parcela vence 30 dias a partir da assinatura do contrato e pagamento pelo banco ao fornecedor, e o sistema de amortização é o PRICE. Com base nos dados acima descritos, assinale a alternativa correta que indica respectivamente o valor aproximado dos juros e da amortização do capital, relativos à segunda prestação do financiamento.

a) $ 6.000,00 e $ 27.398,00

b) $ 6.000,00 e $ 27.946,00
c) $ 5.452,00 e $ 27.946,00
d) $ 4.893,00 e $ 28.505,00

Comentários:

Vamos resolver essa questão **sem auxílio da tabela** e de uma maneira mais rápida (tal como você fará na sua prova).

Primeiro passo é calcular os Juros do primeiro período.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}02 \times 300.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 6.000}}$$

De posse dos Juros e da Prestação, calculamos a Amortização do período.

$$P = A_1 + J_1$$

$$33.398 = A_1 + 6.000$$

$$A_1 = 33.398 - 6.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_1 = 27.398}}$$

Sabemos que no SF, as Amortizações são crescentes em PG de razão $q = (1 + i)$.

Então, a Amortização do segundo período será igual a:

$$A_2 = A_1 \times (1 + i)$$

$$A_2 = 27.938 \times (1 + 0{,}02)$$

$$A_2 = 27.938 \times 1{,}02 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_2 = 27.945,96}}$$

E, de posse da Amortização do segundo período e da Prestação, calculamos os **Juros do segundo período**.

$$P = A_2 + J_2$$

$$33.398 = 27.945{,}96 + J_2$$

$$J_2 = 33.398 - 27.945{,}96 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J_2 = 5.452,04}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(MP TCE SC - 2014) Quanto aos sistemas de amortização constante (SAC) e Price sem indexação monetária, é correto afirmar:

a) No sistema Price a participação das amortizações na prestação diminui ao longo do tempo.
b) No sistema Price o valor das prestações diminui ao longo do tempo.
c) No sistema Price as prestações se constituem numa progressão aritmética crescente.
d) Tanto no sistema SAC quanto no Price a parcela dos juros na prestação diminui ao longo do tempo.
e) Tanto no sistema SAC quanto no Price as prestações se constituem numa progressão aritmética crescente.

Comentários:

Ótima questão para **revisarmos conceitualmente** os 2 Sistemas de Amortização estudados. Vamos repetir os esquemas de ambos e analisar as alternativas separadamente.

- **Sistema de Amortização Constante**

SAC

- *Amortizações* → ***Constante***: $A = \frac{E}{n}$
- *Juros* → ***Decrescente***: $J_i = i \times SD_{inicial\ i}$
- $r = -i \times A$
- *Prestações* → ***Decrescente***: $P_i = A + J_i$

- **Sistema Francês de Amortização**

SF

- $E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$ ou $E = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$
- *Prestações* → ***Constante***
- *Juros* → ***Decrescente***: $J_i = i \times SD_{inicial\ i}$
- *Amortizações* → ***Crescente*** $P = A_i + J_i$
- $q = (1+i)$

a) No sistema Price a participação das amortizações na prestação diminui ao longo do tempo.

INCORRETO. No Sistema Price, as Amortizações são **CRESCENTES** ao longo do tempo.

b) No sistema Price o valor das prestações diminui ao longo do tempo.

INCORRETO. No Sistema Price, as Prestações são **CONSTANTES** ao longo do tempo.

c) *No sistema Price as prestações se constituem numa progressão aritmética crescente.*

INCORRETO. No Sistema Price, as Prestações são **CONSTANTES**.

d) *Tanto no sistema SAC quanto no Price a parcela dos juros na prestação diminui ao longo do tempo.*

CORRETO. Nos dois Sistemas de Amortizações a cota dos Juros é **DECRESCENTE** ao longo do tempo. Os juros de cada período são obtidos pela multiplicação da taxa de juros vezes o Saldo Devedor inicial do período. Se o Saldo Devedor inicial diminui ao longo do tempo, os Juros também irão diminuir.

Atente-se que, apenas no SAC os Juros são decrescentes em PA. No SF, os Juros são decrescentes, mas não há uma equação de recorrência para esse decréscimo.

e) *Tanto no sistema SAC quanto no Price as prestações se constituem numa progressão aritmética crescente.*

INCORRETO. A assertiva está incorreta para ambos os Sistemas. No SAC as prestações são **DECRESCENTES** em PA e no SF as prestações são **CONSTANTES**.

Gabarito: Alternativa **D**

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO (SAM)

Não é propriamente um novo sistema a ser estudado. Neste sistema, a prestação do período (assim como os Juros e a Amortização) será calculada pela **média aritmética** dos outros dois Sistemas já estudados, isto é, será a média do valor da Prestação do SAC e do valor da Prestação do SF.

No SAM as Prestações são iguais à **Média Aritmética** das prestações calculadas pelo SAC e pelo SF

No Sistema de Amortização Misto (SAM) a **Prestação de cada período** será igual a:

$$P_{misto\ i} = \frac{P_{SAC\ i} + P_{SF\ i}}{2}$$

Onde,

$P_{misto\ i} = Prestação\ do\ SAM\ no\ período\ i$

$P_{SAC\ i} = Prestação\ do\ SAC\ no\ período\ i$

$P_{SF\ i} = Prestação\ no\ SF\ no\ período\ i$

Vejamos em exercícios de concursos este tópico.

(Auditor TCE ES - 2012 Adaptada) Uma empresa, com o objetivo de captar recursos financeiros para ampliação de seu mercado de atuação, apresentou projeto ao Banco Alfa, que, após análise, liberou R$ 1.000.000,00 de empréstimo, que deverá ser quitado em 12 parcelas mensais, a juros nominais de 18% ao ano, capitalizados mensalmente.

Considerando essa situação, julgue o item a seguir.

Considere que, pelo sistema de amortização constante, a primeira parcela de quitação do empréstimo seja igual a R$ 90.000,00 e, pelo sistema Price, igual a R$ 83.000,00. Então, pelo sistema misto, a primeira parcela de quitação do empréstimo será inferior a R$ 82.000,00.

Comentários:

A primeira parcela, pelo Sistema Misto, será igual a média aritmética da parcela pelo SAC e da parcela pelo SF.

$$P_{misto} = \frac{P_{SAC} + P_{SF}}{2}$$

$$P_{misto} = \frac{90.000 + 83.000}{2}$$

$$P_{misto} = \frac{173.000}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_{misto} = 86.500}$$

Então, pelo sistema misto, a primeira parcela de quitação do empréstimo será **SUPERIOR** a R$ 82.000,00.

Gabarito: **ERRADO**

(TCE PR - 2016 Adaptada) Um empréstimo de R$ 240.000 deverá ser quitado, no sistema Price, em 12 parcelas mensais iguais, com a primeira parcela programada para vencer um mês após a contratação do empréstimo. A taxa de juros nominal contratada foi de 12% ao ano capitailizados mensalmente e, com isso, cada prestação ficou em R$ 21.324.

Nessa situação, se a pessoa que contratou o empréstimo tivesse optado pelo sistema de amortização misto, com a mesma taxa de juros, a terceira prestação seria igual a

a) R$ 21.133.
b) R$ 22.000.
c) R$ 21.815.
d) R$ 21.662.
e) R$ 21.410.

Comentários:

A terceira prestação, pelo Sistema Misto, será igual a média aritmética da terceira prestação do SAC e da terceira prestação do SF.

$$P_{misto\ 3} = \frac{P_{SAC\ 3} + P_{SF\ 3}}{2}$$

Vamos calcular separadamente cada termo.

- **Sistema Francês (SF)**

O enunciado já nos fornece o valor da prestação no SF. Lembrando que **no SF as prestações são constantes** ao longo do tempo. Então,

$$\boxed{P_{SF\,3} = 21.324}$$

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Primeiro passo é calcular o valor da Amortização. O valor da Amortização que é constante será igual a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{240.000}{12} \rightarrow \boxed{A = 20.000}$$

De posse da Amortização, já podemos preencher algumas células da nossa tabela. Observe.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	240.000
1	240.000	20.000			220.000
2	220.000	20.000			200.000
3	200.000	20.000			

Perceba que com o valor da Amortização, já conseguimos preencher toda a coluna do Saldo Devedor final do período, uma vez que o Saldo Devedor final é igual ao Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização.

Iremos, agora, calcular os Juros do terceiro período.

Os Juros de cada período i são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_3 = i \times SD_{inicial\ 3}$$

$$J_3 = 0{,}01 \times 200.000 \rightarrow \boxed{J_3 = 2.000}$$

Atente-se para a conversão do Taxa de Juros anual para mensal. Você não deixou passar esse detalhe certo?

A Taxa de Juros foi fornecida em ano e os pagamentos do empréstimo são mensais. Devemos transformar a taxa nominal anual em taxa efetiva mensal (treinamos essa conversão exaustivamente na aula de Juros Compostos).

Primeiro, tenha em mente que "**QUEM MANDA É O PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO**". Sendo assim, devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização

"E como passamos da unidade de tempo do período da taxa para a unidade de tempo do período de capitalização? "

Basta fazermos uma **simples divisão/multiplicação**.

$$i_{mensal} = \frac{i_{anual}}{12}$$

$$i_{mensal} = \frac{0{,}12}{12} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_{mensal} = 0{,}01}}$$

Voltando à questão. De posse da Amortização e dos Juros do terceiro período, calculamos o valor da Prestação do terceiro período pelo SAC.

$$P_3 = A + J_3$$

$$P_{SAC\ 3} = 20.000 + 2.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_{SAC\ 3} = 22.000}}$$

E com isso, calculamos o valor da terceira Prestação pelo SAM.

$$P_{misto\ 3} = \frac{P_{SAC\ 3} + P_{SF\ 3}}{2}$$

$$P_{misto\ 3} = \frac{22.000 + 21.324}{2}$$

$$P_{misto\ 3} = \frac{43.324}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_{misto\ 3} = 21.662}$$

Gabarito: Alternativa **D**

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO AMERICANO

Este Sistema **não é tão cobrado quanto o SAC e o SF** porém, devemos ter em mente suas **características** para não sermos surpreendidos na hora da prova.

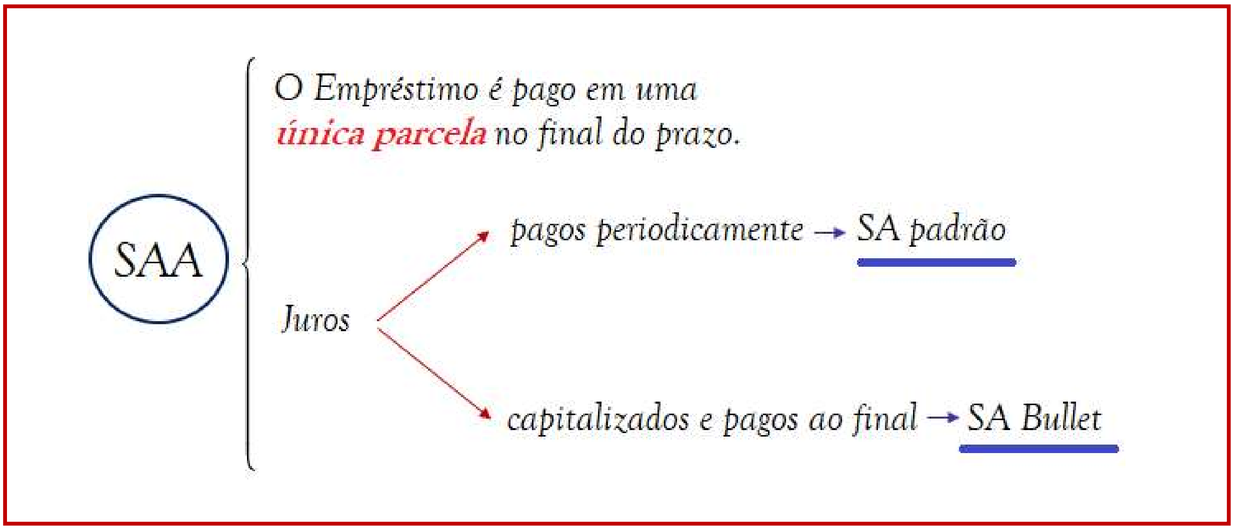
No Sistema de Amortização Americano, o Montante do Empréstimo é pago em uma **única parcela** ao final do prazo.

Neste sistema temos uma particularidade em relação aos Juros.

- No Sistema Americano Padrão, os Juros são pagos periodicamente, isto é, não há a Amortização do valor do Empréstimo ao longo do tempo. Há apenas, período a período, o pagamento dos Juros.

- Todavia, poderá haver pacto entre as partes na qual os Juros são capitalizados (não são pagos periodicamente) e pagos junto ao valor principal ao final do período. Ou seja, não ocorre pagamento da Amortização nem dos Juros no decorrer do período de Empréstimo. Este caso retrata o Sistema Americano *Bullet*.

ESQUEMATIZANDO



Iremos analisar essas 2 modalidades através dos exemplos numéricos abaixo.

EXEMPLIFICANDO

Exemplo 1: Empréstimo de R$ 40.000,00 a ser pago em uma única prestação após 4 meses pelo SA padrão a uma taxa de 10% ao mês.

Observe que estamos diante do SA padrão, ou seja, **haverá pagamento dos Juros período a período**. Iremos entender numericamente como este sistema funciona.

Vamos preencher a tabela de pagamento e tecer alguns comentários abaixo.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	40.000
1	40.000	-	$J_1 = 0{,}1 \times 40.000 = 4.000$	4.000	40.000
2	40.000	-	$J_2 = 0{,}1 \times 40.000 = 4.000$	4.000	40.000
3	40.000	-	$J_3 = 0{,}1 \times 40.000 = 4.000$	4.000	40.000
4	40.000	$\mathbf{40.000}$	$J_4 = 0{,}1 \times 40.000 = 4.000$	$\mathbf{44.000}$	$\mathbf{0}$

No Sistema de Amortização Americano, há a Amortização (no valor do total do Empréstimo) **apenas no final do prazo**.

A mecânica de cálculo se mantém em relação aos outros Sistemas.

- Os **Juros de cada período** são dados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período. Observe a coluna J. Ela é preenchida pela multiplicação da taxa de 10% ao mês pelo Saldo Devedor inicial do período.

- O **Saldo Devedor final de cada período** (que é dado pela diferença do Saldo Devedor inicial menos a Amortização) será o mesmo pois, pela característica do SAA que estudamos, **não há Amortização**.

- Como não há Amortização período a período, **a Prestação será composta apenas pela parcela dos Juros** (que deverá ser paga período a período, pois estamos diante do SA padrão).

Observe que no último período, haverá o **pagamento tanto da Amortização quanto dos Juros do último período**.

Exemplo 2: Resolvermos o mesmo problema do Exemplo 1. Porém, agora, iremos aplicar o SA Bullet na forma de pagamento.

Empréstimo de R$ 40.000,00 a ser pago em uma única prestação após 4 meses pelo SAA a uma taxa de 10% ao mês. **Os Juros serão pagos juntamente com o principal no final do período do Empréstimo**.

Perceba que os Juros serão pagos apenas ao final do período. Ou seja, não há pagamento dos Juros período a período. Eles são incorporados ao Montante e capitalizados.

Vamos montar a tabela de pagamento e, posteriormente, tecer alguns comentários para você entender a sistemática deste Sistema.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	40.000
1	40.000	-	$J_1 = 0{,}1 \times 40.000 = 4.000$	-	44.000
2	44.000	-	$J_2 = 0{,}1 \times 44.000 = 4.400$	-	48.400
3	48.400	-	$J_3 = 0{,}1 \times 48.400 = 4.840$	-	53.240
4	53.240	**40.000**	$J_4 = 0{,}1 \times 53.240 = 5.324$	**58.564**	0

$$\underline{\qquad\qquad}$$
$$\mathbf{18.564}$$

Observe, primeiramente, que somente há Amortização (no valor total do Empréstimo) no último período do prazo de pagamento.

- Os Juros continuam sendo calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período. E, o Saldo Devedor inicial de um período é igual ao Saldo Devedor final do período imediatamente anterior.

- Nesse ponto, há uma **particularidade**. Perceba que o Saldo Devedor final não é mais calculado pela diferença do Saldo Devedor inicial menos a Amortização. No SAA, **o Saldo Devedor final é obtido pela LÓGICA DO SISTEMA** e não pela fórmula.

- O **Saldo Devedor final** do período será igual ao **Saldo Devedor inicial do período somado aos Juros do período**, uma vez que estes não foram pagos.

Por fim, no **último período**, há o pagamento da Prestação que será constituída pela Amortização (no valor total do Empréstimo) mais a soma dos Juros.

$$P = A + \sum Juros$$

$$P = 40.000 + (4.000 + 4.400 + 4.840 + 5.324)$$

$$P = 40.000 + 18.564 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P = 58.564}$$

SA Padrão x SA Bullet

Para finalizar, vamos a uma constatação acerta dessas duas ramificações do Sistema Americano.

Perceba que, **no sistema americano padrão ocorre menos pagamento de juros que no sistema americano Bullet**, por conta da quitação dos juros em cada período, não sendo assim necessário sua incorporação no principal.

Última observação: Caso a questão não mencione qual Sistema Americano é usado no pagamento do principal, adote o SISTEMA AMERICANO PADRÃO.

Vejamos algumas **questões de provas de corcursos** sobre o SAA.

(Fomento PR - 2018) No mercado financeiro, há vários planos de amortização de empréstimos e financiamentos disponíveis às empresas e aos cidadãos. Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a definição do Sistema de Amortização Americano.

a) A amortização do saldo devedor é crescente.
b) As prestações são constantes, com amortizações nas parcelas.
c) As prestações decrescem de acordo com uma determinada progressão aritmética.
d) O saldo devedor é reembolsado em valores de amortização iguais.
e) O saldo devedor é constante, com amortização periódica dos juros.

Comentários:

Vamos analisar alternativa por alternativa e constatar de qual Sistema de Amortização a característica é pertinente.

a) A amortização do saldo devedor é crescente.

INCORRETA. A Amortização ser crescente é caracterísitica do SF. No SF, as Amortização são crescentes em PG de razão $q = (1 + i)$.

b) As prestações são constantes, com amortizações nas parcelas.

INCORRETA. Prestações constantes é característica do SF. Atenção. No SA padrão, as prestações NÃO SÃO constantes. Volte ao quadro do exercício do exemplo 1 e observe que a última prestação difere das demais, pois nesta há tanto o pagamento dos Juros quanto da Amortização.

c) As prestações decrescem de acordo com uma determinada progressão aritmética.

INCORRETA. Esta é uma característica do SAC. No SAC, as Prestações são decrescentes em Progressão Aritmética de razão $r = -i \times A$.

d) O saldo devedor é reembolsado em valores de amortização iguais.

INCORRETA. Ter Amortizações iguais é característica do SAC.

e) O saldo devedor é constante, com amortização periódica dos juros.

CORRETA. Observe nossa tabela de pagamento do exemplo 1. O Saldo Devedor final de cada período (que é dado pela diferença do Saldo Devedor inicial menos a Amortização) será o mesmo pois, pela característica do SAA que estudamos, **não há Amortização**.

Perceba que a questão não mencionou qual Sistema Americano está sendo tratado. Caso a questão não mencione qual Sistema Americano é usado no pagamento do principal, adote o SISTEMA AMERICANO PADRÃO.

Gabarito: Alternativa **E**

(SMTR RJ - 2016) A planilha, abaixo, descreve um empréstimo no valor de R$300.000, a uma taxa de juros contratada de 10% a.m. por 3 meses. A operação será reembolsada de acordo com o:

p	$SD_{inicial}$	$Juros$	$Prestação$
0	$R\$ 300.000$	-	-
1	$R\$ 300.000$	$R\$ 30.000$	$R\$ 30.000$
2	$R\$ 300.000$	$R\$ 30.000$	$R\$ 30.000$
3	-	$R\$ 30.000$	$R\$ 330.000$

a) Sistema de Amortização Americano
b) Sistema de Amortização Constate (SAC)
c) Sistema de Amortização Crescente (SACRE)
d) Sistema de Amortização Francês (Tabela Price)

Comentários:

Observe que o Saldo Devedor se mantém ao longo do período. Ou seja, **não há Amortização alguma da dívida**. O pagamento integral da Amortização ocorre somente no último período.

Perceba que a Prestação é composta apenas pelo valor dos Juros.

Então, de acordo com essas características, estamos diante do **Sistema Americano de Amortização**. E podemos ir além, já que há o pagamento dos Juros.

- No Sistema de Amortização Americano Padrão, os Juros são pagos periodicamente, isto é, não há a Amortização do valor do Empréstimo ao longo do tempo. Há apenas, período a período, o pagamento dos Juros.

Gabarito: Alternativa **A**

SINKING FUND

Estudamos que no **Sistema Americano de Amoritzação**, os Juros são pagos periodicamente, isto é, **não há a Amortização do valor do Empréstimo ao longo do tempo**. Há apenas, período a período, o pagamento dos Juros.

O valor do Empréstimo será pago (amortizado) apenas no último período.

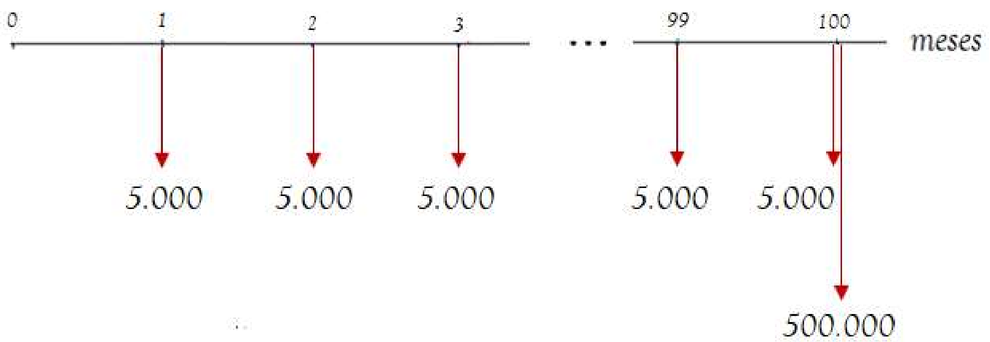
Então imagine que você obtenha um Empréstimo de $R\$\ 500.000{,}00$, a uma taxa de 1% ao mês, para ser pago em 100 meses pelo Sistema Americano de Amortização.

Mês a mês, você pagaria Juros iguais a:

$$J = \frac{1}{100} \times 500.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J = 5.000}}$$

Ou seja, todo mês você terá que pagar uma prestação de Juros de $R\$\ 5.000{,}00$, e, ao final dos 100 meses, isto é, ao final do financiamento, você pagará a Amortização no valor total do Empréstimo.

Graficamente (fora de escala) teremos:



Observe que, conforme comentamos, há o pagamento dos Juros mês a mês e, ao final do financiamento, há a Amortização no valor total do Empréstimo.

*"Certo, Professor. Até agora não tem nada de **Sinking Fund**. O que vi até agora é o Sistema Americano de Amortização."*

Verdade aluno. Agora entraremos na ideia deste Fundo. Comece, a partir deste momento, a pensar como um dono de banco.

Você emprestou $R\$\ 500.000{,}00$ a um cliente que terá que te pagar "apenas" 5 mil reais por mês e, somente ao final do período, irá lhe pagar os 500 mil restantes.

Qual a garantia que você, dono de um banco, terá para receber esses 500 mil depois de 100 meses?

"Realmente, Professor. O cliente pode "sumir" com meu dinheiro no final e eu ficarei no prejuízo desses 500 mil reais"

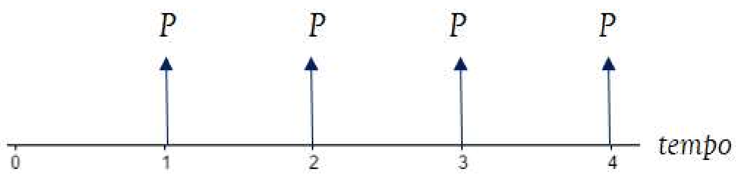
Então o que você irá estipular contratualmente com o cliente?

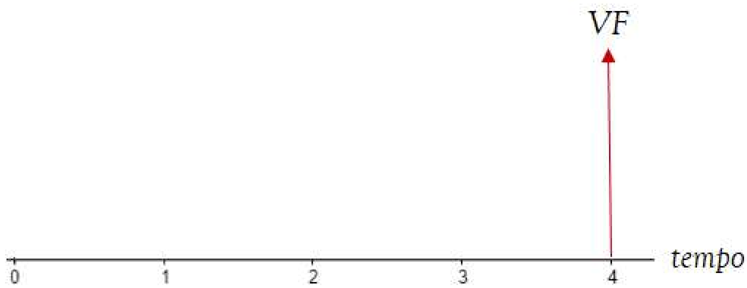
Que ele faça depósitos periódicos em uma conta, sendo que, a soma desses depósitos capitalizados a uma certa taxa de juros irá corresponder ao valor total do Empréstimo.

Vamos melhorar nosso entendimento relembrando o Valor Futuro de uma série de rendas certas.

O **Valor Futuro (VF)** de uma série de rendas certas é o valor no momento “n” que equivale a **soma de todas** as **n** rendas certas **P** capitalizadas pela mesma taxa de juros **i**.

Em outras palavras, VF é a soma de todos os pagamentos/recebimentos **na mesma data do último** pagamento/recebimento.



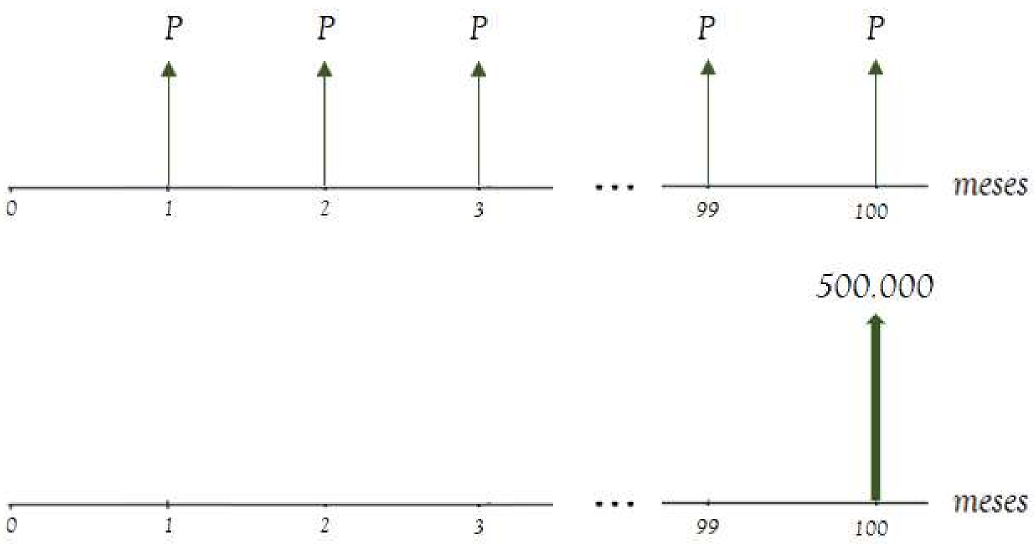


Em que:

$$\boldsymbol{VF = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]}$$

Então, retornando ao nosso exemplo em que você é o dono do banco, você iria "obrigar" contratualmente seu cliente a depositar um valor P mês a mês em um fundo por 100 meses, em que, ao final desses 100 meses, o Valor Futuro desses depósitos corresponda ao valor do Empréstimo.

Graficamente:



Imagine que a taxa de remuneração deste fundo seja de 0,8% ao mês e que $1{,}008^{100} \cong 2{,}2185$.

TOME NOTA!

Perceba que a taxa deste fundo **NÃO PRECISA** necessariamente ser igual a taxa dos juros do Sistema de Amortização. Por isso, **o sinking fund também é chamado de Sistema Americano a duas taxas**.

Uma taxa é relativa ao pagamento dos Juros equanto a outra taxa é relativa ao fundo que será constituído para a amortização final.

Vamos calcular o valor da Prestação mensal que o cliente deveria depositar neste fundo.

$$VF = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$500.000 = P \times \left[\frac{(1+0{,}008)^{100} - 1}{0{,}008}\right]$$

$$500.000 = P \times \left[\frac{1{,}008^{100} - 1}{0{,}008}\right]$$

$$500.000 = P \times \left[\frac{2{,}2185 - 1}{0{,}008}\right]$$

$$500.000 = P \times \left[\frac{1{,}2185}{0{,}008}\right]$$

$$P = \frac{500.000 \times 0{,}008}{1{,}2185} \rightarrow \boldsymbol{P \cong 3.283}$$

Ou seja, o cliente deveria depositar aproximadamente $R\$\ 3.283{,}00$ para que, ao final dos 100 meses, obtivesse a quantia necessária para quitar a Amoritzação total do Empréstimo que é de $R\$\ 500.000{,}00$.

FIQUE ATENTO!

Um detalhe importante: pode ser que sua questão de prova diga que o banco exige depósitos no fundo para garantir apenas 50% (ou outro percentual qualquer) do valor do Empréstimo (ao invés da totalidade). Fique atento para a "historinha" que o enunciado irá te contar.

Vejamos uma questão de concurso que elucida bem o tema que estamos abordando.

HORA DE PRATICAR!

(IF SUL - 2019 - Adaptada) Um empresário deseja ampliar a estrutura da área de produção de seu negócio. Para isto, obteve junto ao sistema financeiro o valor de R$ 1.000.000,00, a ser amortizado pelo sistema de amortização americano (SAA), num prazo de 5 anos, a juros efetivos de 6% ao ano. Obrigatoriamente, será necessário constituir um fundo de amortização durante o prazo do empréstimo para que, no final do período, tenha o montante do fundo igual ao valor da dívida obtida. A taxa de constituição do fundo é de 5% ao ano.

Qual é o valor do juro anual e da parcela anual do fundo de amortização, respectivamente?

a) R$ 50.000,00 e R$ 250.000,00
b) R$ 67.645,00 e R$ 195.570,52
c) R$ 60.000,00 e R$ 181.028,24
d) R$ 52.000,00 e R$ 200.000,00
e) R$ 60.000,00 e R$ 200.970,48

Comentários:

Observe inicialmente que <u>a taxa do pagamento dos juros é de 6% ao ano enquanto que a taxa de constituição do fundo é de 5% ao ano</u>. Por isso, às vezes, o sinking fund também é chamado de **Sistema Americano de Amortização a duas taxas**.

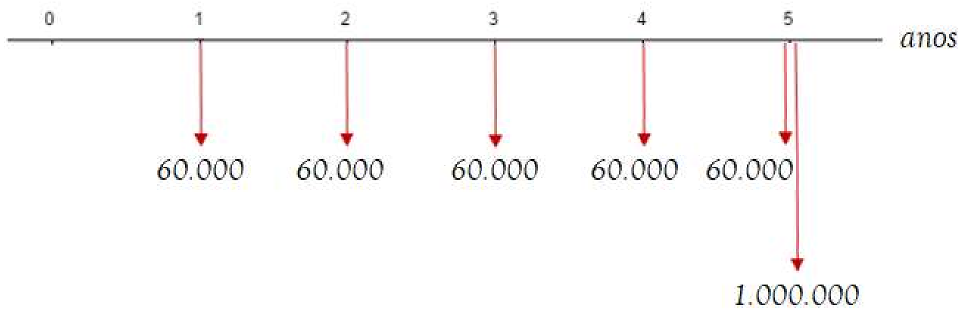
Um empresário obtém o valor de $R\$\ 1.000.000{,}00$, a ser amortizado pelo Sistema de Amortização Americano (SAA), num prazo de 5 anos, a juros efetivos de 6% ao ano.

Logo, **os Juros anuais** a serem pagos pelo empresário será de:

$$J = \frac{6}{100} \times 1.000.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J = 60.000}}$$

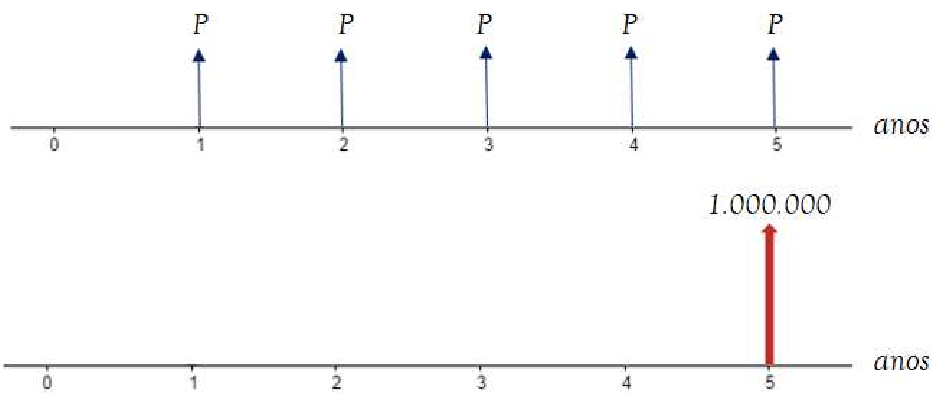
Só com o cálculo dos Juros, já **descartaríamos as Alternativas A, B e D**. Ficaríamos entre as **letras C e E**.

Vamos representar graficamente como será o pagamento deste empréstimo (fora de escala).



Perceba que há o pagamento dos Juros de $R\$ \ 60.000,00$ ano a ano e, ao final do financiamento, há a Amortização no valor total do Empréstimo.

Obrigatoriamente, será necessário constituir um fundo de amortização a uma taxa de 5% ao ano para que, no final do período, tenha o montante do fundo igual ao valor da dívida obtida (que é de $R\$ \ 1.000.000,00$).



Então, o Valor Futuro desses depósitos periódicos será igual a $R\$ \ 1.000.000,00$. Vamos calcular o valor da Prestação P a ser depositada nesse fundo:

$$VF = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$1.000.000 = P \times \left[\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05}\right]$$

$$1.000.000 = P \times \left[\frac{1{,}05^5 - 1}{0{,}05}\right]$$

$$1.000.000 = P \times \left[\frac{1{,}2762 - 1}{0{,}05}\right]$$

$$1.000.000 = P \times \left[\frac{0{,}2762}{0{,}05}\right]$$

$$P = \frac{1.000.000 \times 0{,}05}{0{,}2762} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P = 181.028,24}$$

Fique Atento. Você **não precisaria fazer a divisão até as casas decimais**.

Conforme falamos, estamos entre as Alternativas C e E. Assim que você for fazer a divisão, perceberia que o quociente seria $18 \ldots$, ou seja, não teria como marcar a Letra E cujo resultado é superior a 200.000. Logo, a única alternativa condizente seria a Letra C.

Finalizando teremos:

- Valor do juro anual: $\boldsymbol{R\$\ 60.000,00}$
- Parcela anual do fundo de amortização: $\boldsymbol{R\$\ 181.028,24}$

Gabarito: Alternativa **C**

Encerramos nossa aula (e também nosso curso), caro Aluno.

Foi uma **honra** te acompanhar em toda essa trajetória e te passar um pouco do conhecimento que adquiri nesses anos árduos de estudos.

Sonhe, nunca desista, tenha fé. **A trajetória não é fácil**. Mas será **extremamente recompensadora**. Tudo terá valido a pena.

Conte comigo para o que precisar. Mais uma vez, repito, foi uma **HONRA** ter estado ao seu lado.

Vinícius Veleda

BOA PROVA!

RESUMO DA AULA

Conceitos Iniciais

$$\text{Conceito Iniciais}\begin{cases}\text{Saldo Devedor (SD)}\\ \text{Amortização (A)}\\ \text{Juros (J)}\\ \text{Prestação (P)}\end{cases}$$

Sistema de Amortização Constante (SAC)

No SAC, conforme o próprio nome sugere, <u>as Amortizações são constantes</u>.

$$\text{SAC}\begin{cases}\text{Amortizações} \rightarrow \textbf{Constante}: \boxed{A = \dfrac{E}{n}}\\[2ex] \text{Juros} \rightarrow \textbf{Decrescente}: \boxed{J_i = i \times SD_{inicial\ i}}\\[1ex] \qquad r = -i \times A\\[1ex] \text{Prestações} \rightarrow \textbf{Decrescente}: \boxed{P_i = A + J_i}\end{cases}$$

ATENÇÃO
DECORE!

Os Juros no **último período** do SAC é igual ao módulo da razão da PA de decréscimo dos Juros.

Sistema Francês de Amortização (SF)

No SF, as Prestações são constantes.

SF

$$E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad ou \quad E = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

$Prestações \rightarrow \textbf{Constante}$

$Juros \rightarrow \textbf{Decrescente}: \boxed{J_i = i \times SD_{inicial\ i}}$

$Amortizações \rightarrow \textbf{Crescente} \quad \boxed{P = A_i + J_i}$

$q = (1+i)$

O valor da **última Amortização** de um empréstimo pelo SF.

$$A_{última} = \frac{P}{1+i}$$

Sistema (Tabela) Price

O **Sistema Price** é um caso específico do Sistema Francês de Amortização. Para fins de prova, em resoluções numéricas, você irá adotá-las como **expressões sinônimas**.

A **única diferença** reside na Taxa de Juros do Empréstimo.

- Na Tabela Price, a Taxa de Juros fornecida é a Nominal. E, então, para resolver, você precisa inicialmente converter a Taxa Nominal em Taxa Efetiva.
- Já o Sistema Francês, fornece a Taxa Efetiva diretamente.

Sistema de Amortização Misto (SAM)

Neste sistema, a prestação do período (assim como os Juros e a Amortização) será calculada pela **média aritmética** dos outros dois Sistemas já estudados, isto é, será a média do valor da Prestação do SAC e do valor da Prestação do SF.

FIQUE ATENTO!

No SAM as Prestações são iguais à **Média Aritmética** das prestações calculadas pelo SAC e pelo SF

No Sistema de Amortização Misto (SAM) a **Prestação de cada período** será igual a:

$$P_{misto\ i} = \frac{P_{SAC\ i} + P_{SF\ i}}{2}$$

Relação Teórica

Para um **mesmo valor de empréstimo com prazo de operação e taxa de juros idênticos**, as Prestações são ordenadas, em termos de valor, na seguinte ordem:

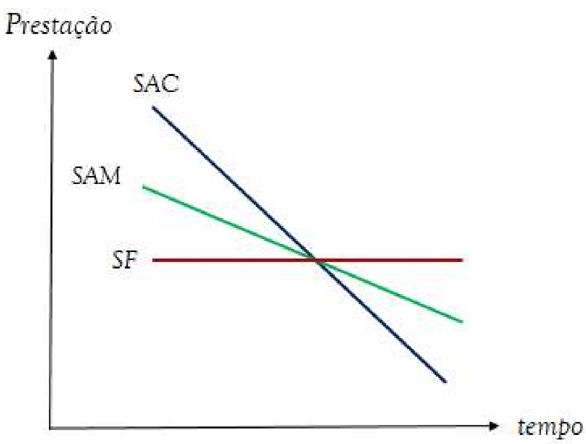
- **Primeira Prestação**

$$1°\ Prestação:\ \ SAC > SAM > SF$$

- **Última Prestação**

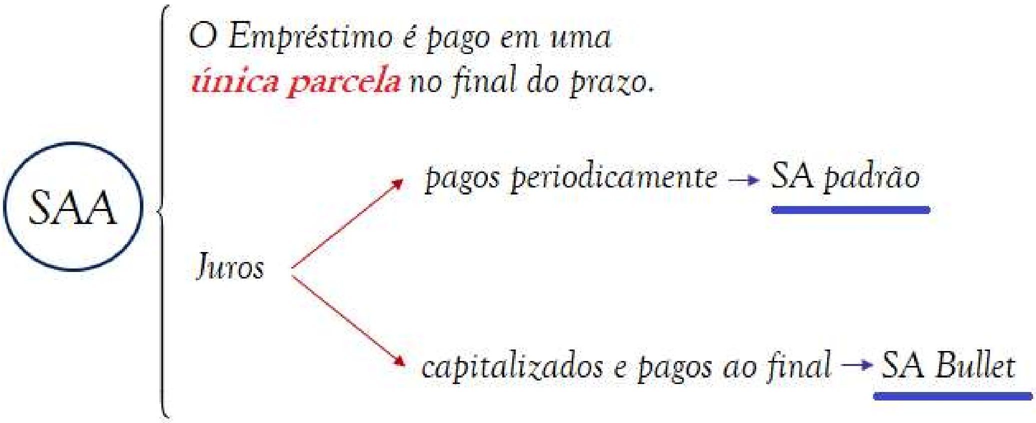
$$Última\ Prestação:\ \ SF > SAM > SAC$$

Graficamente, podemos representar da seguinte maneira:



Sistema Americano de Amortização (SAA)

No Sistema de Amortização Americano, o Montante do Empréstimo é pago em uma **única parcela** ao final do prazo.



▪

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Sistema de Amortização Constante (SAC)

1. **(CESGRANRIO / BB - 2021) Um banco ofereceu a um cliente um financiamento de $R\$\ 120.000,00$, pelo sistema SAC, a uma taxa de juros de 10% a.m., para ser pago em 4 prestações mensais ao final de cada mês, sendo a primeira prestação no valor de $R\$\ 42.000,00$. A Tabela abaixo poderá ser usada para seus cálculos.**

Período	Saldo Inicial	Juros	Amortização	Prestação	Saldo Final
0					120.000,00
1	120.000,00			42.000,00	
2					
3					
4					

Quais os valores aproximados que serão pagos, pelo cliente, a título de juros e prestação, respectivamente, ao final do terceiro mês?

a) R$ 12.000,00; R$ 42.000,00
b) R$ 3.000,00; R$ 39.000,00
c) R$ 12.000,00; R$ 30.000,00
d) R$ 6.000,00; R$ 36.000,00
e) R$ 9.000,00; R$ 33.000,00

Comentários:

Vamos calcular o valor da Amortização e preencher a tabela para melhor nos auxiliar na visualiação.

No SAC, as Amortizaçções são constantes e iguai a:

$$A=\frac{E}{n}$$

$$A=\frac{120.000}{4}\quad\rightarrow\quad\boxed{\boldsymbol{A=30.000}}$$

p	$SD_{inicial}$	J	A	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	120.000
1	120.000		30.000	42.000	90.000
2	90.000		30.000		60.000
3	60.000	J_3	30.000	P_3	

Observe que as Amortizações são constantes e que o Saldo Devedor final do período é igual ao Saldo Devedor inicial menos a Amortização.

Os juros do terceiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período.

$$J_3 = i \times SD_{inicial\ 3}$$

$$J_3 = 0{,}1 \times 60.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_3 = 6.000}}$$

Já a Prestação do terceiro período será igual a Amortização mais os Juros do terceiro período:

$$P_3 = A + J_3$$

$$P_3 = 30.000 + 6.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_3 = 36.000}$$

Gabarito: Alternativa **D**

2. **(CESGRANRIO / BB - 2021) Uma pessoa faz um financiamento no valor de $R\$\ 10.000,00$ em 10 vezes, a uma taxa de juros de $4,9\%$ ao mês, sendo que o financiamento usa o sistema de amortização constante.**

Qual é o valor, em reais, a ser pago na 7ª prestação desse financiamento?

a) 1.490
b) 1.334
c) 1.292
d) 1.196
e) 1.100

Comentários:

Vamos calcular o valor da Amortização e preencher a tabela para melhor nos auxiliar na visualiação.

No SAC, as Amortizaçções são constantes e iguai a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{10.000}{10} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 1.000}}$$

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	10.000
1	10.000	1.000			9.000
2	9.000	1.000			8.000
3	8.000	1.000			7.000
4	7.000	1.000			6.000
5	6.000	1.000			5.000
6	5.000	1.000			4.000
7	4.000	1.000	J_7	P_7	

Observe que as Amortizações são constantes e que o Saldo Devedor final do período é igual ao Saldo Devedor inicial menos a Amortização.

Ao invés de montar a tabela, você poderia calcular **o Saldo Devedor do período 7 sendo igual ao valor do Empréstimo menos 6 Amortizações**. Foi o que fizemos na prática na tabela. Eu apenas utilizo a tabela como forma didática de ensinamento.

Os juros do sétimo período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período.

$$J_7 = i \times SD_{inicial\ 7}$$

$$J_7 = 0{,}049 \times 4.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_7 = 196}}$$

Por fim, calculamos a Prestação do sétimo período que será igual a soma da Amortização mais os Juros do sétimo período:

$$P_7 = A + J_7$$

$$P_7 = 1.000 + 196 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_7 = 1.196}$$

Gabarito: Alternativa **D**

3. (CESGRANRIO / CEF - 2021) Um banco oferece a um cliente um empréstimo de financiamento imobiliário pelo sistema SAC, no valor de $R\$\ 120.000,00$, pelo prazo de 12 meses, com taxa de juros de 1% ao mês.

Qual é o valor da segunda prestação, em reais, a ser paga pelo cliente?

a) 10.000,00
b) 10.500,00
c) 10.900,00
d) 11.100,00
e) 11.200,00

Comentários:

Vamos calcular o valor da Amortização e preencher a tabela para melhor nos auxiliar na visualiação. No SAC, as Amortizaçções são constantes e iguai a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{120.000}{12} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 10.000}}$$

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	120.000
1	120.000	10.000			110.000
2	110.000	10.000	J_2	P_2	

Observe que as Amortizações são constantes e que o Saldo Devedor final do período é igual ao Saldo Devedor inicial menos a Amortização.

A **prestação do segundo período** será igual a Amortização mais os Juros do segundo período.

$$P_2 = A + J_2$$

Os Juros do segundo período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período.

$$J_2 = i \times SD_{inicial\,2}$$

$$J_2 = 0{,}01 \times 120.000 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{J_2 = 1.200}}$$

Sendo assim, a Prestação do segundo período será igual a:

$$P_2 = A + J_2$$

$$P_2 = 10.000 + 1.200 \quad \rightarrow \boldsymbol{P_2 = 11.200}$$

Gabarito: Alternativa **E**

4. **(CESGRANRIO / CEF - 2021) Um empréstimo deve ser pago pelo sistema SAC em 5 parcelas mensais com juros de 3% ao mês. Se a terceira parcela paga no financiamento do empréstimo for igual a $\boldsymbol{R\$\ 26.160,00}$, o valor total do empréstimo, em reais, será de**

a) 120.000,00
b) 124.000,00
c) 128.500,00
d) 132.800,00
e) 135.600,00

Comentários:

Sabemos que a **terceira parcela** é dada pelo somatório da Amortização mais os Juros do terceiro período:

$$P_3 = A + J_3$$

Observe que não dispomos dos valores da Amortização nem dos Juros. Vamos "brincar" com as incógnitas.

Sabemos que no SAC, as Amortizaçções são constantes e iguai a:

$$\boldsymbol{A = \frac{E}{n}}$$

E, sabemos também, que os Juros do terceiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período.

$$\boldsymbol{J_3 = i \times SD_{inicial\ 3}}$$

Vamos substituir essas duas igualdades na primeira fórmula:

$$P_3 = A + J_3$$

$$P_3 = \frac{E}{n} + i \times SD_{inicial\ 3}$$

O **Saldo devedor inicial do terceiro período** é igual ao valor do Empréstimo menos 2 Amortizações.

$$SD_{inicial\ 3} = E - 2A$$

Substituindo na equação acima:

$$P_3 = \frac{E}{n} + i \times SD_{inicial\ 3}$$

$$\boldsymbol{P_3 = \frac{E}{n} + i \times (E - 2A)}$$

A Amortização conforme visto acima é igual a $A = E/n$.

$$P_3 = \frac{E}{n} + i \times (E - 2A)$$

$$\boxed{\boldsymbol{P_3 = \frac{E}{n} + i \times \left(E - 2\frac{E}{n}\right)}}$$

Perceba que agora temos **uma fórmula do valor da Prestação em função do valor total do Empréstimo e da quantidade de parcelas.**

Você pode decorar esta fórmula ou apenas ir substituindo igual fizemos. Vamos substituir os valores fornecidos e calcular o valor do Empréstimo:

$$P_3 = \frac{E}{n} + i \times \left(E - 2\frac{E}{n}\right)$$

$$26.160 = \frac{E}{5} + 0{,}03 \times \left(E - 2\frac{E}{5}\right)$$

$$26.160 = 0{,}2E + 0{,}03 \times (E - 0{,}4E)$$

$$26.160 = 0{,}2E + 0{,}03 \times 0{,}6E$$

$$26.160 = 0{,}2E + 0{,}018E$$

$$26.160 = 0{,}218E$$

$$E = \frac{26.160}{0{,}218} \rightarrow \boldsymbol{E = 120.000}$$

Gabarito: Alternativa **A**

5. **(CESGRANRIO / LIQUIGÁS - 2018) Pelo sistema de amortização constante, a primeira prestação mensal (parcela), sem carência, de um financiamento de R$ 10.000,00 a uma taxa de juros de 10% a.m, pelo prazo de 5 meses, será de, aproximadamente,**

a) R$ 3.000,00
b) R$ 2.638,00
c) R$ 2.000,00
d) R$ 1.638,00
e) R$ 1.000,00

Comentários:

A primeira prestação será igual a soma da Amortização mais os Juros do primeiro período.

$$P_1 = A + J_1$$

Vamos calcular cada parcela separadamente.

- **Amortização**

No SAC, a Amortização é constante e igual a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{10.000}{5} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 2.000}}$$

- **Juros do primeiro período**

Os Juros do primeiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período.

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}1 \times 10.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 1.000}}$$

Observe que o Saldo Devedor inicial do primeiro período é o próprio valor do financiamento, uma vez que ainda **não houve nenhum pagamento**.

Logo, a **primeira prestação** será:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 2.000 + 1.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_1 = 3.000}$$

Gabarito: Alternativa **A**

6. **(CESGRANRIO / BB - 2015) Arthur contraiu um financiamento para a compra de um apartamento, cujo valor à vista é de 200 mil reais, no Sistema de Amortização Constante (SAC), a uma taxa de juros de 1% ao mês, com um prazo de 20 anos. Para reduzir o valor a ser financiado, ele dará uma entrada no valor de 50 mil reais na data da assinatura do contrato. As prestações começam um mês após a assinatura do contrato e são compostas de amortização, juros sobre o saldo devedor do mês anterior, seguro especial no valor de 75 reais mensais fixos no primeiro ano e despesa administrativa mensal fixa no valor de 25 reais.**

A partir dessas informações, o valor, em reais, da segunda prestação prevista na planilha de amortização desse financiamento, desconsiderando qualquer outro tipo de reajuste no saldo devedor que não seja a taxa de juros do financiamento, é igual a

a) 2.087,25
b) 2.218,75
c) 2.175,25
d) 2.125,00
e) 2.225,00

Comentários:

Observe inicialmente que há uma entrada de 50 mil reais, ou seja, **o valor a ser financiado é de 150 mil**.

No SAC, as Amortizações são constantes e iguais a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{150.000}{240} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 625}}$$

Perceba acima que as **Prestações** são mensais e o prazo fornecido pela banca é em "anos". Logo, devemos transformar n de anos para meses. 20 anos equivalem a 240 meses.

$$n = 20 \times 12 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{n = 240\ meses}}$$

De posse da Amortização preenchemos a tabela nos campos que nos interessam.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	150.000
1	150.000	625			149.375
2	149.375	625			

Observe que as Amortizações são constantes e o Saldo Devedor final do período é igual ao Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização.

Os Juros da segunda prestação serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período.

$$J_2 = i \times SD_{inicial\ 2}$$

$$J_2 = 0{,}01 \times 149.375 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{J_2 = 1.493,75}}$$

De posse dos Juros e da Amortização, calculamos a Prestação, uma vez que esta é igual a soma dos Juros mais a Amortização.

$$P_2 = A + J_2$$

$$P_2 = 625 + 1.493{,}75 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{P_2 = 2.118,75}}$$

PRESTE MAIS ATENÇÃO!

Observe que o enunciado nos informa que há também (além da Amortização e dos Juros) um seguro especial no valor de 75 reais mensais fixos no primeiro ano e despesa administrativa mensal fixa no valor de 25 reais.

Logo, **o total da segunda prestação** será:

$$P_2 = 2.118,75 + 75 + 25 \quad \rightarrow \boldsymbol{P_2 = 2.218,75}$$

Gabarito: Alternativa **B**

7. **(CESGRANRIO / BB - 2011) Considere um financiamento de R$ 100.000,00, sem entrada, a ser pago em 100 prestações mensais, pelo Sistema de Amortização Constante (SAC). Sabendo-se que a taxa de juros, no regime de juros compostos, é de 1% ao mês, a prestação inicial, se o prazo de pagamento for duplicado, será reduzida em**

a) 100%
b) 50%
▪ c) 25%
d) 10%
e) 5%

Comentários:

Vamos calcular o valor da prestação para os dois cenários propostos e, posteriormente, calcular a variação percentual da prestação inicial (primeira prestação).

- **1° caso:** Financiamento de R$ 100.000,00, sem entrada, a ser pago em 100 prestações mensais, pelo SAC a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês.

A primeira prestação será igual a soma da Amortização mais os Juros do primeiro período.

$$P_1 = A + J_1$$

No SAC, a Amortização é constante e igual a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{100.000}{100} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 1.000}}$$

Os Juros do primeiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período.

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}01 \times 100.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 1.000}}$$

Observe que o Saldo Devedor inicial do primeiro período é o próprio valor do financiamento, uma vez que ainda não houve nenhum pagamento.

Logo, a primeira prestação será:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 1.000 + 1.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_1 = 2.000}$$

- **2° caso:** Financiamento de R$ 100.000,00, sem entrada, a ser pago em 200 prestações mensais (o enunciado nos questiona quando o prazo for duplicado), pelo SAC a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês.

No SAC, como vimos, a Amortização é constante e igual a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{100.000}{200} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 500}}$$

Perceba que, conforme comentamos, o prazo de pagamento foi duplicado, ou seja, é de 200 meses neste segundo cenário.

Os Juros do primeiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período.

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}01 \times 100.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 1.000}}$$

Observe que o Saldo Devedor inicial do primeiro período é o próprio valor do financiamento, uma vez que ainda não houve nenhum pagamento. Observe também que não muda o valor dos Juros para o primeiro período de cada caso.

Logo, a primeira prestação neste segundo cenário será:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 500 + 1.000 \rightarrow \boldsymbol{P_1 = 1.500}$$

Por fim, vamos calcular a **variação percentual** da Prestação. Relembrando a fórmula da variação percentual:

$$\Delta = \frac{v_{final} - v_{inicial}}{v_{inicial}} \times 100$$

O valor inicial da prestação era de R$ 2.000,00 e no segundo caso, de R$ 1.500,00. Iremos substituir os valores e calcular a redução percentual.

$$\Delta = \frac{v_{final} - v_{inicial}}{v_{inicial}} \times 100$$

$$\Delta = \frac{1.500 - 2.000}{2.000} \times 100$$

$$\Delta = \frac{-5\cancel{00}}{2.\cancel{000}} \times 10\cancel{0}$$

$$\Delta = \frac{-50}{2} \rightarrow \Delta = \boldsymbol{-25}\%$$

Caso você não se recordasse da fórmula, poderia aplicar uma <u>regra de três simples</u>. O valor inicial de R$ 2.000 equivale a 100%. O novo valor de R$ 1.500 equivale a x.

$$2.000 \quad - \quad 100\%$$

$$1.500 \quad - \quad x\%$$

Mutiplicando cruzado:

$$2.000 \times x = 1.500 \times 100$$

$$x = \frac{1.500 \times 100}{2.000} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 75}\%}$$

Atenção. O enunciado nos questiona a redução. R$ 1.500,00 equivale a 75%. Logo, **a redução foi de 25%.** Neste caso não confundimos porque a banca não colocou a alternativa com a resposta "75%". Se ela colocasse, muitos candidatos marcariam.

Gabarito: Alternativa **C**

8. **(CESGRANRIO / LIQUIGÁS - 2018) Entre os sistemas de amortização de financiamentos disponíveis, há um em que, na sistemática de pagamentos, as prestações (parcelas) são decrescentes, e o valor financeiro dos juros cobrados na parcela é menor em relação ao cobrado na parcela anterior.**

Tais características são do seguinte sistema de amortização:

a) Americano
b) Constante
c) Descontado
d) Francês
e) Tabela price

Comentários:

Vamos rever, por meio de uma tabela, as diferenças entre as características do Sistema de Amortização Constante e do Sistema Francês (Tabela Price) e, posteriormente, assinalar a resposta correta.

	SAC	SF
Amortização	**Constante**	**Crescente** em PG
Juros	**Decrescente** em PA	**Decrescente**
Prestação	**Decrescente** em PA	**Constante**

Ou seja, no **SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE** as **prestações (parcelas) são decrescentes**, e o valor financeiro dos juros cobrados na parcela é **menor** em relação ao cobrado na parcela anterior (isto é, também decrescente).

Gabarito: Alternativa **B**

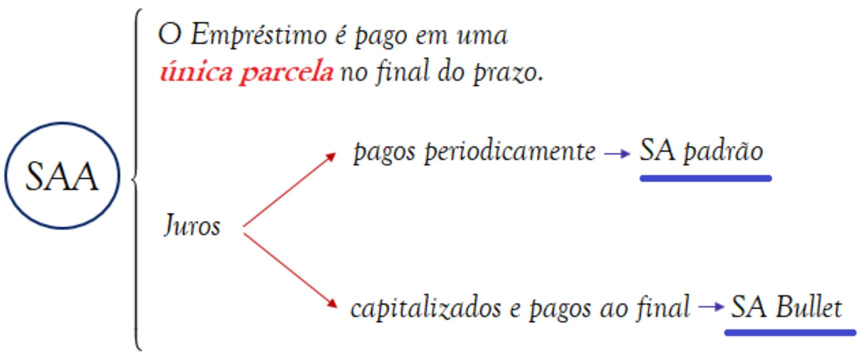
Obs: No Sistema de Amortização Americano, o Montante do Empréstimo é pago em uma **única parcela** ao final do prazo.

Neste sistema temos uma particularidade em relação aos Juros.

- No <u>Sistema Americano Padrão</u>, os Juros são pagos periodicamente, isto é, não há a Amortização do valor do Empréstimo ao longo do tempo. Há apenas, período a período, o pagamento dos Juros.

- Todavia, poderá haver pacto entre as partes na qual os Juros são capitalizados (não são pagos periodicamente) e pagos junto ao valor principal ao final do período. Ou seja, não ocorre pagamento da Amortização nem dos Juros no decorrer do período de Empréstimo. Este caso retrata o <u>Sistema Americano *Bullet*</u>.

ESQUEMATIZANDO



9. **(CESGRANRIO / LIQUIGÁS - 2018) Um financiamento de 1.000 unidades monetárias (u.m.) deverá ser quitado em dez meses, em dez prestações mensais e sucessivas, a primeira começando um mês após a obtenção do financiamento. O cálculo das prestações será feito pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), usando a taxa de juros de 1% ao mês.**

A primeira e a segunda prestações devidas terão os valores respectivos, em u.m., de

a) 90 e 100
b) 100 e 110
c) 110 e 100
d) 110 e 109
e) 100 e 100

Comentários:

No SAC, a Amortização é constante e igual a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{1.000}{10} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 100}}$$

Vamos calcular separadamente a primeira e a segunda prestação.

- **Primeira Prestação**

A primeira prestação será igual a soma da Amortização mais os Juros do primeiro período.

$$P_1 = A + J_1$$

Os Juros do primeiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período.

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}01 \times 1.000 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{J_1 = 10}}$$

Observe que o Saldo Devedor inicial do primeiro período é o próprio valor do financiamento, uma vez que ainda não houve nenhum pagamento.

Logo, a primeira Prestação será igual a:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 100 + 10 \quad \rightarrow \boldsymbol{P_1 = 110}$$

Antes de calcular a segunda prestação, vamos representar a tabela para melhor visualização.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	1.000
1	1.000	100	10	110	900
2	900	100			

Observe que as Amortizações são constantes (100 para todos os períodos) e o Saldo Devedor final do período é igual ao Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização.

Segunda Prestação

Os Juros da segunda prestação serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do segundo período.

$$J_2 = i \times SD_{inicial\ 2}$$

$$J_2 = 0{,}01 \times 900 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{J_2 = 9}}$$

De posse dos Juros e da Amortização, calculamos a Prestação, uma vez que esta é igual a soma dos Juros mais a Amortização.

$$P_2 = A + J_2$$

$$P_2 = 100 + 9 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_2 = 109}$$

Gabarito: Alternativa **D**

10. (CESGRANRIO / LIQUIGÁS - 2018) Um imóvel no valor de R$ 6.000.000,00 de reais foi adquirido em dezembro de 2018 por meio de um financiamento baseado em um sistema de amortização constante (SAC), em 120 parcelas mensais e decrescentes. A taxa de juro cobrada foi de 1,0% ao mês, com a primeira prestação para janeiro de 2019 e a última para dezembro de 2028. Considere que o comprador deu uma entrada no ato da compra, financiando apenas 80% do valor do imóvel.

Assim, o valor da prestação previsto para fevereiro de 2019, em reais, é igual a

a) 88.000,00
b) 87.600,00
c) 78.600,00
d) 68.000,00
e) 48.600,00

Comentários:

A banca nos questiona o **valor da prestação previsto para fevereiro de 2019**, ou seja, da segunda prestação (já que a primeira é para janeiro de 2019).

Antes de começar a resolução, propriamente dita, **observe que o financiamento é relativo apenas a 80% do valor do imóvel.**

$$E = \frac{80}{100} \times 6.000.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E = 4.800.000}}$$

Então, o valor do Empréstimo foi de R$ 4.800.000,00.

No SAC, as Amortizações são constantes e iguais a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{4.800.000}{120} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 40.000}}$$

De posse da Amortização preenchemos a tabela nos campos que nos interessam.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	4.800.000
1	4.800.000	40.000			4.760.000
2	4.760.000	40.000			

Observe que as Amortizações são constantes e o Saldo Devedor final do período é igual ao Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização.

Os Juros da segunda prestação serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período.

$$J_2 = i \times SD_{inicial\ 2}$$

$$J_2 = 0{,}01 \times 4.760.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_2 = 47.600}}$$

De posse dos Juros e da Amortização, calculamos a Prestação, uma vez que esta é igual a soma dos Juros mais a Amortização.

$$P_2 = A + J_2$$

$$P_2 = 40.000 + 47.600 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_2 = 87.600}$$

Gabarito: Alternativa **B**

11. (CESGRANRIO / LIQUIGÁS - 2014) Considere a amortização de uma dívida, em 300 meses, com juros de 1% ao mês, pelo Sistema de Amortização Constante.

Mantida a taxa mensal de juros de 1%, de quanto aumentará a prestação inicial se o prazo for reduzido pela metade?

a) 25%
b) 50%
c) 75%
d) 100%
e) 200%

Comentários:

Vamos calcular o valor da prestação para os dois cenários propostos e, posteriormente, calcular a variação percentual da prestação inicial (primeira prestação).

Como a banca não nos informa o valor da dívida, vamos arbirtar um valor para esta. Iremos supor que a dívida inicial é de R$ 300,00.

- **1° caso:** Considere a amortização da dívida de R$ 300,00, em 300 meses, com juros de 1% ao mês, pelo SAC.

A primeira prestação será igual a soma da Amortização mais os Juros do primeiro período.

$$P_1 = A + J_1$$

No SAC, a Amortização é constante e igual a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{300}{300} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 1}$$

Entendeu, na passagem acima, o porquê de arbitrarmos o valor da dívida de R$ 300? Justamente para facilitar nossos cálculos.

Os Juros do primeiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período.

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}01 \times 300 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J_1 = 3}$$

Logo, a primeira prestação será:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 1 + 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_1 = 4}}$$

- 2° caso: Considere a amortização da dívida de R$ 300,00, em 150 meses (prazo reduzido pela metade), com juros de 1% ao mês, pelo SAC.

No SAC, como vimos, a Amortização é constante e igual a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{300}{150} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 2}$$

Perceba que, conforme comentamos, o prazo de pagamento foi reduzido pela metade, ou seja, é de 150 meses neste segundo cenário.

Os Juros do primeiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período.

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}01 \times 300 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J_1 = 3}$$

Logo, a primeira prestação neste segundo cenário será:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 2 + 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_1 = 5}}$$

Por fim, vamos calcular a variação percentual da Prestação. Relembrando **a fórmula da variação percentual**:

$$\Delta = \frac{v_{final} - v_{inicial}}{v_{inicial}} \times 100$$

O valor inicial da prestação era de R$ 4 e no segundo caso, de R$ 5. Iremos substituir os valores e calcular a redução percentual.

$$\Delta = \frac{v_{final} - v_{inicial}}{v_{inicial}} \times 100$$

$$\Delta = \frac{5 - 4}{4} \times 100$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \times 100$$

$$\Delta = \frac{100}{4} \quad \rightarrow \quad \Delta = \mathbf{25\%}$$

Gabarito: Alternativa **A**

12. (CESGRANRIO / EPE - 2012) Se uma pessoa pagasse uma dívida em prestações mensais usando o Sistema de Amortização Constante (SAC), pagaria prestações sucessivas

a) iguais.
b) crescentes.
c) com parcelas de amortização crescentes.
d) com parcelas de juros decrescentes.
e) com juros apenas na última.

Comentários:

Vamos revisar as características do SAC:

$$\text{SAC} \begin{cases} \textit{Amortizações} \rightarrow \textbf{Constante}: \boxed{A = \dfrac{E}{n}} \\ \textit{Juros} \rightarrow \textbf{Decrescente}: \boxed{J_i = i \times SD_{inicial\ i}} \\ \qquad r = -i \times A \\ \textit{Prestações} \rightarrow \textbf{Decrescente}: \boxed{P_i = A + J_i} \end{cases}$$

Ou seja, as Prestações no SAC são sucessivas com Amortização constante e Juros **DECRESCENTES**.

Gabarito: Alternativa **D**

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Sistema Francês de Amortização (SF)

1. **(CESGRANRIO / BB - 2021) Devido à pandemia, um microempreendedor precisou tomar um empréstimo no valor de $R\$ \ 20.000,00$, em dez/2020, a ser pago em 24 prestações mensais iguais e postecipadas no sistema PRICE, de modo que a primeira fosse paga em jan/21, e a última, em dez/22. Considere que o Banco cobre $R\$ \ 660,00$ de taxas, que serão financiadas juntamente com o valor do empréstimo, por escolha do cliente, e que a taxa de juros cobrada, devido ao risco da operação, seja de 3% ao mês.**

Desconsiderando-se o IOF na operação e supondo-se que a primeira prestação foi paga na data de vencimento, o valor da segunda prestação, em sua respectiva data de vencimento será de, aproximadamente,

Dados: $1{,}03^{24} = 2{,}033$.

a) $R\$ \ 1.120{,}00$
b) $R\$ \ 1.220{,}00$
c) $R\$ \ 1.320{,}00$
d) $R\$ \ 1.420{,}00$
e) $R\$ \ 1.520{,}00$

Comentários:

No SF, as <u>prestações são constantes e calculadas</u> pela seguinte equação:

$$E = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

Observe que há $R\$ \ 660{,}00$ de taxas, que serão financiadas juntamente com o valor do empréstimo. Ou seja, o valor total do Empréstimo será igual ao valor que o microempreendedor precisou tomar mais as taxas que devem ser pagas.

$$E = 20.000 + 660 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E = 20.660}}$$

Substituindo os valores na equação acima teremos:

$$E = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

$$20.660 = P \times \left[\frac{(1+0{,}03)^{24} - 1}{0{,}03 \times (1+0{,}03)^{24}}\right]$$

$$20.660 = P \times \left[\frac{1{,}03^{24} - 1}{0{,}03 \times 1{,}03^{24}}\right]$$

$$20.660 = P \times \left[\frac{2{,}033 - 1}{0{,}03 \times 2{,}033}\right]$$

$$20.660 = P \times \left[\frac{1{,}033}{0{,}03 \times 2{,}033}\right]$$

$$P = \frac{20.660 \times 0{,}03 \times 2{,}033}{1{,}033} \rightarrow \boldsymbol{P = 1.219{,}8}$$

O valor da segunda prestação (assim como de todas as outras), em sua respectiva data de vencimento será de, aproximadamente, $R\$\ 1.220{,}00$.

Gabarito: Alternativa **B**

2. **(CESGRANRIO / BB - 2021) Ao verificar o saldo devido de seu financiamento de $R\$\ 8.000,00$, um cliente percebeu que, após pagar a primeira prestação de $R\$\ 1.726,93$, ele havia amortizado apenas $R\$\ 1.518,93$. Consultando seu gerente, ele soube que nesse financiamento foi usado o sistema Price.**

Qual é a taxa mensal de juros cobrada nesse financiamento?

a) 1,0%
b) 1,3%
c) 1,6%
d) 2,3%
e) 2,6%

Comentários:

Sabemos que no Sistema Price (Francês), as **Prestações são constantes** e dada pela soma dos Juros do período mais a Amortização do período.

Então para o primeiro período temos:

$$P = A_1 + J_1$$

$$1.726{,}93 = 1.518{,}93 + J_1$$

$$J_1 = 1.726{,}93 - 1.518{,}93 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{J_1 = 208}}$$

De posse dos Juros do primeiro período, calculamos a taxa de juros. Os Juros do primeiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período (que nada mais é que o valor total do financiamento).

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$208 = i \times 8.000$$

$$i = \frac{208}{8.000} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 0,026\ ou\ 2,6\%\ a.m.}$$

Gabarito: Alternativa **E**

3. **(CESGRANRIO / CEF - 2021) Um cliente de um banco está tentando simular o valor de financiamento imobiliário que pode conseguir para adquirir uma casa. Fazendo seu orçamento, estabeleceu que poderia pagar uma prestação inicial (1º mês) de $R\$\ 2.669,33$. Sabendo-se que o banco utiliza o sistema Price em seus financiamentos, uma taxa de juros de 1% a.m., um prazo de 60 meses e uma amortização inicial (1º mês) de $R\$\ 1.469,33$, qual o valor máximo aproximado, em reais, que ele pode receber?**

a) 120.000,00
b) 146.933,00
c) 160.159,80
d) 266.933,00
e) 413.866,00

Comentários:

O enunciado, resumidamente, quer saber qual é o valor do Empréstimo, isto é, quanto o cliente pode pegar de financiamento.

A primeira Prestação é de $R\$\,2.669{,}33$ enquanto que a primeira Amortização é igual a $R\$\,1.469{,}33$. Estudamos que no Sistema Price (Francês), **a Prestação é dada pela soma da Amortização do período mais os Juros do período.**

Então para o primeiro período temos:

$$P = A_1 + J_1$$

$$2.669{,}33 = 1.469{,}33 + J_1$$

$$J_1 = 2.669{,}33 - 1.469{,}33 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 1.200}}$$

De posse dos Juros do primeiro período, calculamos o valor do Empréstimo. Os Juros do primeiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período (que nada mais é que o valor total do financiamento).

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = i \times E$$

$$1.200 = 0{,}01 \times E$$

$$E = \frac{1.200}{0{,}01} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E = 120.000}$$

Ou seja, o valor máximo aproximado, em reais, que ele pode receber é de $R\$\,120.000{,}00$.

Gabarito: Alternativa **A**

4. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2018) Uma empresa deseja comprar um equipamento, cujo preço à vista foi cotado em 15 milhões de reais. Para isso, pretende pagar uma entrada (ato da compra) e financiar o valor restante em 12 parcelas mensais e iguais, a uma taxa de juro (composto) de 1% ao mês, com a primeira parcela sendo paga um mês após a compra. O departamento financeiro determinou que o valor da parcela seja de, no máximo, 1 milhão de reais.**

Dado: $1{,}01^{12} = 1{,}127$

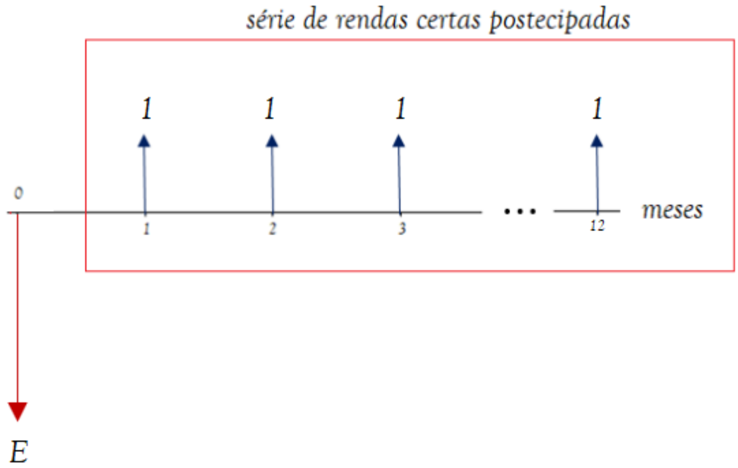
Nessas condições, o valor mínimo, em milhões de reais, que a empresa precisará pagar de entrada nessa compra pertence ao intervalo

a) 3,00 a 3,19
b) 3,20 a 3,39
c) 3,40 a 3,59
d) 3,60 a 3,79
e) 3,80 a 4,00

Comentários:

Essa é uma boa questão para vermos o "link" do Sistema Francês com as séries de rendas certas.

Neste Sistema de Amortização, as **Prestações são constantes** e iguais em todos os períodos. Graficamente, em milhões, temos:



Perceba que é o mesmo gráfico que estudamos em Série de rendas Certas (rendas Uniformes). Ou seja, para calcular o Valor da Prestação no SF iremos tomar como base a fórmula do Valor Atual de uma Série de Rendas Certas Postecipadas (com os devidos ajustes nas incógnitas).

Lembrando que o **Valor Atual** (no nosso caso o valor E tomado Emprestado) de uma série de rendas certas **Postecipadas** é o valor no momento "0", também chamado de Valor Presente (VP), que **equivale a soma** de todas as **n** rendas certas **P** descontadas pela mesma taxa de juros **i**.

Sendo assim, a fórmula de cálculo da Prestação será:

$$E = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

Substituindo os valores e calculando o valor do Empréstimo:

$$E = 1 \times \left[\frac{(1+0{,}01)^{12} - 1}{0{,}01 \times (1+0{,}01)^{12}}\right]$$

$$E = 1 \times \left[\frac{1{,}01^{12} - 1}{0{,}01 \times 1{,}01^{12}}\right]$$

O enunciado nos informa que: $1{,}01^{12} = 1{,}127$.

$$E = 1 \times \left[\frac{1{,}127 - 1}{0{,}01 \times 1{,}127}\right]$$

$$E = 1 \times \left[\frac{0{,}127}{0{,}01127}\right]$$

$$E \cong 1 \times 11{,}27 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E \cong 11,27\ milh\tilde{o}es}}$$

Ou seja, a empresa parcelou 11,27 milhões dos 15 milhões do preço à vista. Sendo assim, ela precisará dar de **entrada a diferença deste valor.**

$$e = 15 - 11{,}27 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{e = 3,73}$$

Nessas condições, o valor mínimo, em milhões de reais, que a empresa precisará pagar de entrada nessa compra pertence ao intervalo 3,60 a 3,79.

Gabarito: Alternativa **D**

5. **(CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2016) Uma empresa faz um empréstimo no valor de R$ 200.000,00, a uma taxa de 15% ao ano, para ser pago em 5 prestações anuais e iguais, de acordo com o sistema francês de amortização, vencendo a primeira prestação 1 ano após a data do empréstimo. A Tabela abaixo é parte da planilha de amortização apresentada pelo credor.**

Tempo	Prestação	Amortização	Juros	Saldo devedor
0				R$ 200.000,00
1	R$ 59.663,11	R$ 29.663,11	R$ 30.000,00	R$ 170.336,89
2	R$ 59.663,11	R$ 34.112,58	R$ 25.550,53	R$ 136.224,31

Para avaliar o total de juros que serão pagos nesse financiamento, um auditor completa a planilha até o final, de modo que o saldo devedor seja zero.

O total de juros, em milhares de reais, que serão pagos pela empresa, se todas as prestações forem quitadas de acordo com o planejado, pertence ao intervalo:

a) 50,1 a 65,0
b) 65,1 a 80,0
c) 80,1 a 95,0
d) 95,1 a 110,0
e) 110,1 a 125,0

Comentários:

A banca fornece a tabela para **tentar confundir o candidato** e fazer com que ele preencha as 5 linhas relativas aos períodos de pagamento.

No Sistema Francês as Prestações são constantes. Então, nos 5 anos as Prestações somam:

$$P_{Total} = 5 \times P$$

$$P_{Total} = 5 \times 59.663{,}11 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_{Total} = 289.315{,}55}}$$

Ou seja, de um Empréstimo de R$ 200.000,00 foi pago um total de R$ 289.315,55. Ou seja, a diferença deste valor corresponde ao total dos Juros pagos no decorrer do tempo.

$$J_{Total} = P_{Total} - 200.000$$

$$J_{Total} = 289.315{,}55 - 200.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J_{Total} = 89.315{,}55}$$

O total de juros, em milhares de reais, que serão pagos pela empresa, se todas as prestações forem quitadas de acordo com o planejado, pertence ao intervalo 80,1 a 95,0.

Gabarito: Alternativa **D**

6. **(CESGRANRIO / BASA - 2015) Um banco empresta R$ 10.000,00, com taxa de juros de 2% ao mês, para serem pagos em 5 pagamentos mensais consecutivos, vencendo a primeira prestação um mês após o empréstimo. O valor de cada prestação é de R$ 2.121,58.**

O saldo devedor, após o segundo pagamento, é, em reais, de, aproximadamente:

a) 5.696,00
b) 6.118,00

c) 5.653,00
d) 5.565,00
e) 5.897,00

Comentários:

Vamos preenchendo a tabela passo a passo para visualizarmos a sistemática de pagamento. Com as informações iniciais temos que:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	10.000
1	10.000			2.121,58	
2					

Primeiro período

Os Juros do primeiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período.

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}02 \times 10.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 200}}$$

De posse dos Juros e da Prestação, calculamos a Amortização do primeiro período, uma vez que a Prestação é dada pela soma da Amortização do período mais os Juros do período.

$$P = A_1 + J_1$$

$$2.121{,}58 = A_1 + 200$$

$$A_1 = 2.121{,}58 - 200 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_1 = 1.921{,}58}}$$

Para completar a linha relativa ao primeiro período, calculamos o Saldo Devedor final que é igual ao Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização do período.

$$SD_{final\ 1} = SD_{inicial\ 1} - A_1$$

$$SD_{final\ 1} = 10.000 - 1.921{,}58 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{SD_{final\ 1} = 8.078{,}42}}$$

Preenchendo a tabela:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	10.000
1	10.000	1.921,58	200	2.121,58	8.078,42
2	8.078,42				

- **Segundo Período**

Poderíamos fazer os mesmos passos do primeiro período, isto é, calcular os Juros, depois a Amortização e, por fim, o Saldo Devedor final do período.

Ou, de posse da Amortização do primeiro período já podemos calcular a Amortização do segundo período, já que, conforme estudamos, no Sistema Francês as Amortizações são crescentes em Progressão Geométrica (PG) de razão $q = (1 + i)$.

$$A_2 = A_1 \times q$$

$$A_2 = A_1 \times (1 + i)$$

$$A_2 = 1.921{,}58 \times (1 + 0{,}02)$$

$$A_2 = 1.921{,}58 \times 1{,}02 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A_2 = 1.960}}$$

De posse da Amortização do segundo período, calculamos o Saldo Devedor final do segundo período:

$$SD_{final\ 2} = SD_{inicial\ 2} - A_2$$

$$SD_{final\ 2} = 8.078{,}42 - 1.960 \quad \rightarrow \boldsymbol{SD_{final\ 2} = 6.118{,}42}$$

Gabarito: Alternativa **B**

7. **(CESGRANRIO / LIQUIGAS - 2014) Considere a amortização de uma dívida, em 5 prestações mensais de R$ 2.060,40 cada, com juros compostos de 1% ao mês.**

A última amortização, em reais, será de, aproximadamente,

a) 1.960,40

b) 1.980,00
c) 2.040,00
d) 2.060,40
e) 2.080,40

Comentários:

Imagine como seria na prova calcular a última Amortização com o auxílio da tabela. Ou então, calcular a primeira Amortização e encontrar a última pela fórmula do termo geral da PG. Seria bastante trabalhoso certo?

Por isso, é importante ter em mente a dica fornecida na parte teórica em relação ao valor da primeira e da última Amortização.

Vamos utilizar a <u>fórmula do valor da última Amortização</u> no Sistema Francês.

$$A_{\text{última}} = \frac{P}{1+i}$$

$$A_{\text{última}} = \frac{2.060{,}40}{1+0{,}01}$$

$$A_{\text{última}} = \frac{2.060{,}40}{1{,}01} \rightarrow \boldsymbol{A_{\text{última}} = 2.040}$$

Gabarito: Alternativa **C**

8. **(CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2012) Existem diferentes sistemas de amortização, passíveis de serem utilizados na contratação de empréstimos junto a instituições financeiras.**

Nesse sentido, uma das características do sistema de amortização Price consiste em

a) quitação de amortizações constantes ao longo do período do empréstimo
b) amortização de 100% do valor do principal na data de vencimento
c) pagamento de prestações iguais durante o período do financiamento
d) pagamento de juros constantes durante o período do financiamento

e) pagamento de prestações decrescentes ao longo do período do empréstimo

Comentários:

Iremos rever as <u>características do Sistema Francês</u> e, posteriormente, analisar alternativa uma a uma buscando o erro.

SF

$$E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad ou \quad E = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

Prestações → ***Constante***

Juros → ***Decrescente***: $J_i = i \times SD_{inicial\ i}$

Amortizações → ***Crescente*** $P = A_i + J_i$

$q = (1+i)$

a) *quitação de amortizações ~~constantes~~ ao longo do período do empréstimo*

INCORRETO. As Amortizações são **CRESCENTES** no Sistema Francês. Amortizações Constantes é característica do SAC.

b) *amortização de 100% do valor do principal na ~~data de vencimento~~*

INCORRETO. Amortização de 100% do valor do principal na data de vencimento é característica do Sistema Americano (este não está explícito no seu edital).

c) *pagamento de prestações iguais durante o período do financiamento*

CORRETO.

d) *pagamento de juros ~~constantes~~ durante o período do financiamento*

INCORRETO. No Sistema Francês, os Juros são **DECRESCENTES**.

e) *pagamento de prestações ~~decrescentes~~ ao longo do período do empréstimo*

INCORRETO. No Sistema Francês, as Prestações são **IGUAIS**.

Gabarito: Alternativa **C**

9. **(CESGRANRIO / BNDES - 2011) Certa pessoa solicitou um empréstimo no valor de R$ 200.000,00, a ser pago em 24 meses, em prestações mensais, considerada a taxa de 6% a.s. com capitalização mensal.**

Considerando o sistema de amortização francês, utilize a tabela de amortização (com o valor da 1a prestação já calculado), a seguir, como memória de cálculo.

Em reais

Período	Saldo Devedor	Juros	Amortização	Prestação
0	200.000,00			
1				9.414,69
2				
3				
4				
5				

Qual o valor aproximado da amortização inserida na 3a prestação?

a) R$ 7.414,69
b) R$ 7.488,84
c) R$ 7.563,73
d) R$ 9.414,69
e) R$ 9.563,73

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 6\%\ ao\ semestre\ capitalizada\ mensalmente$$

Em 1 semestre há 6 meses. Então, a Taxa Efetiva mensal igual a:

$$i_{Efetiva\ mensal} = \frac{6\%}{6} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\ mensal} = 1\%\ a.m.}}$$

- ✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Vamos calcular os Juros do primeiro período. Os Juros do primeiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período.

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}01 \times 200.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 2.000}}$$

De posse dos Juros e da Prestação (fornecida na tabela), calculamos a Amortização do primeiro período, uma vez que a Prestação é dada pela soma da Amortização do período mais os Juros do período.

$$P = A_1 + J_1$$

$$9.414{,}69 = A_1 + 2.000$$

$$A_1 = 9.414{,}69 - 2.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_1 = 7.414{,}69}$$

De posse da Amortização do primeiro período já podemos calcular a Amortização do segundo período, já que, conforme estudamos, no Sistema Francês as Amortizações são crescentes em Progressão Geométrica (PG) de razão $q = (1 + i)$.

A CESGRANRIO adora cobrar a propriedade do termo geral da PG dentro das questões de Amortização pelo Sistema Francês.

Sendo assim, podemos usar a **fórmula do termo geral da PG para o cálculo da Amortização** no terceiro período.

Vamos relembrar a fórmula do termo geral da PG.

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

Iremos adaptar esta fórmula para o termo geral da Amortização.

Lembrando que a razão q de crescimento da Amortização é igual a $(1+i)$.

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$A_n = A_1 \times (1+i)^{n-1}$$

Retornando à resolução. Vamos calcular a terceira Amortização:

$$A_3 = A_1 \times (1+i)^{3-1}$$

$$A_3 = A_1 \times (1+i)^2$$

$$A_3 = 7.414{,}69 \times (1+0{,}01)^2$$

$$A_3 = 7.414{,}69 \times 1{,}01^2$$

$$A_3 = 7.414{,}69 \times 1{,}0201 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_3 = 7.563{,}73}$$

Gabarito: Alternativa **C**

10. (CESGRANRIO / FINEP - 2011) Uma empresa de táxi adquiriu um automóvel no valor de R$ 30.107,51, utilizando o Sistema Price de Amortização – Tabela Price. O financiamento foi em 36 meses, a taxa de juros do empréstimo foi de 1% ao mês, e o valor da prestação mensal, R$ 1.000,00. Depois de ser paga a 18ª prestação, a dívida era de R$ 16.398,27. Os sócios combinaram que pagariam mais uma prestação e, em seguida, iriam zerar a dívida.

O valor da dívida, depois de paga a 19ª prestação, em reais, é

a) 16.234,29
b) 16.226,01
c) 15.570,53
d) 15.562,25
e) 15.398,27

Comentários:

Vejamos a tabela após o pagamento da 18ª prestação:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18					16.398,27
19	16.398,27			1.000	

Vamos calcular os Juros do décimo nono período. Os Juros do décimo nono período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do décimo nono período.

$$J_{19} = i \times SD_{inicial\ 19}$$

$$J_{19} = 0{,}01 \times 16.398{,}27 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_{19} = 163{,}98}}$$

De posse dos Juros e da Prestação, calculamos a Amortização do décimo nono período, uma vez que a Prestação é dada pela soma da Amortização do período mais os Juros do período.

$$P = A_{19} + J_{19}$$

$$1.000 = A_{19} + 163{,}98$$

$$A_{19} = 1.000 - 163{,}98 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_{19} = 836{,}02}}$$

Para completar a linha relativa ao décimo nono período, calculamos o <u>Saldo Devedor final que é igual ao Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização do período</u>.

$$SD_{final\ 19} = SD_{inicial\ 19} - A_{19}$$

$$SD_{final\ 19} = 16.398{,}27 - 836{,}02 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{SD_{final\ 19} = 15.562{,}25}$$

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18					16.398,27
19	16.398,27	836,02	163,98	1.000	**15.562,25**

Gabarito: Alternativa **D**

11. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2011) Consiste em um plano de amortização de uma dívida em prestações periódicas iguais e sucessivas, dentro do conceito de termos vencidos, em que o valor de cada prestação, ou pagamento é composto por duas parcelas distintas: uma de juros e outra de capital (chamada amortização).

VIEIRA SOBRINHO J.P. Matemática Financeira. São Paulo: Atlas, 2007, p. 220.

Essa definição se refere ao sistema de amortização conhecido como

a) Misto
b) Constante
c) Radial
d) Alemão
e) Francês

Comentários:

O enunciado nos afirma que o plano de amortização é caracterizado por prestações periódicas iguais e sucessivas. Esta característica é a característica principal do **SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO**.

Vamos ver abaixo um quadro **MUITO** cobrado em prova relativo à diferença das características do Sistema Francês e do Sistema de Amortização Constante.

	SAC	SF
Amortização	**Constante**	**Crescente** em PG
Juros	**Decrescente** em PA	**Decrescente**
Prestação	**Decrescente** em PA	**Constante**

Gabarito: Alternativa **E**

Lista de Questões – CESGRANRIO

Sistema de Amortização Constante (SAC)

1. **(CESGRANRIO / BB - 2021) Um banco ofereceu a um cliente um financiamento de $R\$\ 120.000,00$, pelo sistema SAC, a uma taxa de juros de 10% a.m., para ser pago em 4 prestações mensais ao final de cada mês, sendo a primeira prestação no valor de $R\$\ 42.000,00$. A Tabela abaixo poderá ser usada para seus cálculos.**

Período	Saldo Inicial	Juros	Amortização	Prestação	Saldo Final
0					120.000,00
1	120.000,00			42.000,00	
2					
3					
4					

Quais os valores aproximados que serão pagos, pelo cliente, a título de juros e prestação, respectivamente, ao final do terceiro mês?

a) R$ 12.000,00; R$ 42.000,00
b) R$ 3.000,00; R$ 39.000,00
c) R$ 12.000,00; R$ 30.000,00
d) R$ 6.000,00; R$ 36.000,00
e) R$ 9.000,00; R$ 33.000,00

2. **(CESGRANRIO / BB - 2021) Uma pessoa faz um financiamento no valor de $R\$\ 10.000,00$ em 10 vezes, a uma taxa de juros de $4,9\%$ ao mês, sendo que o financiamento usa o sistema de amortização constante.**

Qual é o valor, em reais, a ser pago na 7ª prestação desse financiamento?

a) 1.490
b) 1.334
c) 1.292
d) 1.196
e) 1.100

3. **(CESGRANRIO / CEF - 2021) Um banco oferece a um cliente um empréstimo de financiamento imobiliário pelo sistema SAC, no valor de $R\$\ 120.000,00$, pelo prazo de 12 meses, com taxa de juros de 1% ao mês.**

Qual é o valor da segunda prestação, em reais, a ser paga pelo cliente?

a) 10.000,00
b) 10.500,00
c) 10.900,00
d) 11.100,00
e) 11.200,00

4. **(CESGRANRIO / CEF - 2021) Um empréstimo deve ser pago pelo sistema SAC em 5 parcelas mensais com juros de 3% ao mês. Se a terceira parcela paga no financiamento do empréstimo for igual a $R\$\ 26.160,00$, o valor total do empréstimo, em reais, será de**

a) 120.000,00
b) 124.000,00
c) 128.500,00
d) 132.800,00
e) 135.600,00

5. **(CESGRANRIO / LIQUIGÁS - 2018) Pelo sistema de amortização constante, a primeira prestação mensal (parcela), sem carência, de um financiamento de R$ 10.000,00 a uma taxa de juros de 10% a.m, pelo prazo de 5 meses, será de, aproximadamente,**

a) R$ 3.000,00
b) R$ 2.638,00
c) R$ 2.000,00
d) R$ 1.638,00
e) R$ 1.000,00

6. **(CESGRANRIO / BB - 2015) Arthur contraiu um financiamento para a compra de um apartamento, cujo valor à vista é de 200 mil reais, no Sistema de Amortização Constante (SAC), a uma taxa de juros de 1% ao mês, com um prazo de 20 anos. Para reduzir o valor a ser financiado, ele dará uma entrada no valor de 50 mil reais na data da assinatura do contrato. As prestações começam um mês após a assinatura do contrato e são compostas de amortização,**

juros sobre o saldo devedor do mês anterior, seguro especial no valor de 75 reais mensais fixos no primeiro ano e despesa administrativa mensal fixa no valor de 25 reais.

A partir dessas informações, o valor, em reais, da segunda prestação prevista na planilha de amortização desse financiamento, desconsiderando qualquer outro tipo de reajuste no saldo devedor que não seja a taxa de juros do financiamento, é igual a

a) 2.087,25
b) 2.218,75
c) 2.175,25
d) 2.125,00
e) 2.225,00

7. **(CESGRANRIO / BB - 2011) Considere um financiamento de R$ 100.000,00, sem entrada, a ser pago em 100 prestações mensais, pelo Sistema de Amortização Constante (SAC). Sabendo-se que a taxa de juros, no regime de juros compostos, é de 1% ao mês, a prestação inicial, se o prazo de pagamento for duplicado, será reduzida em**

a) 100%
b) 50%
c) 25%
d) 10%
e) 5%

8. **(CESGRANRIO / LIQUIGÁS - 2018) Entre os sistemas de amortização de financiamentos disponíveis, há um em que, na sistemática de pagamentos, as prestações (parcelas) são decrescentes, e o valor financeiro dos juros cobrados na parcela é menor em relação ao cobrado na parcela anterior.**

Tais características são do seguinte sistema de amortização:

a) Americano
b) Constante
c) Descontado
d) Francês
e) Tabela price

9. **(CESGRANRIO / LIQUIGÁS - 2018) Um financiamento de 1.000 unidades monetárias (u.m.) deverá ser quitado em dez meses, em dez prestações mensais e sucessivas, a primeira começando um mês após a obtenção do financiamento. O cálculo das prestações será feito pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), usando a taxa de juros de 1% ao mês.**

A primeira e a segunda prestações devidas terão os valores respectivos, em u.m., de

a) 90 e 100
b) 100 e 110
c) 110 e 100
d) 110 e 109
e) 100 e 100

10. **(CESGRANRIO / LIQUIGÁS - 2018) Um imóvel no valor de R$ 6.000.000,00 de reais foi adquirido em dezembro de 2018 por meio de um financiamento baseado em um sistema de amortização constante (SAC), em 120 parcelas mensais e decrescentes. A taxa de juro cobrada foi de 1,0% ao mês, com a primeira prestação para janeiro de 2019 e a última para dezembro de 2028. Considere que o comprador deu uma entrada no ato da compra, financiando apenas 80% do valor do imóvel.**

Assim, o valor da prestação previsto para fevereiro de 2019, em reais, é igual a

a) 88.000,00
b) 87.600,00
c) 78.600,00
d) 68.000,00
e) 48.600,00

11. **(CESGRANRIO / LIQUIGÁS - 2014) Considere a amortização de uma dívida, em 300 meses, com juros de 1% ao mês, pelo Sistema de Amortização Constante.**

Mantida a taxa mensal de juros de 1%, de quanto aumentará a prestação inicial se o prazo for reduzido pela metade?

a) 25%
b) 50%
c) 75%
d) 100%
e) 200%

12. (CESGRANRIO / EPE - 2012) Se uma pessoa pagasse uma dívida em prestações mensais usando o Sistema de Amortização Constante (SAC), pagaria prestações sucessivas

a) iguais.
b) crescentes.
c) com parcelas de amortização crescentes.
d) com parcelas de juros decrescentes.
e) com juros apenas na última.

Gabarito

1. D
2. D
3. E
4. A
5. A
6. B
7. C
8. B
9. D
10. B
11. A
12. D

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Sistema Francês de Amortização (SF)

1. **(CESGRANRIO / BB - 2021) Devido à pandemia, um microempreendedor precisou tomar um empréstimo no valor de $R\$\ 20.000,00$, em dez/2020, a ser pago em 24 prestações mensais iguais e postecipadas no sistema PRICE, de modo que a primeira fosse paga em jan/21, e a última, em dez/22. Considere que o Banco cobre $R\$\ 660,00$ de taxas, que serão financiadas juntamente com o valor do empréstimo, por escolha do cliente, e que a taxa de juros cobrada, devido ao risco da operação, seja de 3% ao mês.**

Desconsiderando-se o IOF na operação e supondo-se que a primeira prestação foi paga na data de vencimento, o valor da segunda prestação, em sua respectiva data de vencimento será de, aproximadamente,

Dados: $1{,}03^{24} = 2{,}033$.

a) $R\$$ 1.120,00
b) $R\$$ 1.220,00
c) $R\$$ 1.320,00
d) $R\$$ 1.420,00
e) $R\$$ 1.520,00

2. **(CESGRANRIO / BB - 2021) Ao verificar o saldo devido de seu financiamento de $R\$\ 8.000,00$, um cliente percebeu que, após pagar a primeira prestação de $R\$\ 1.726,93$, ele havia amortizado apenas $R\$\ 1.518,93$. Consultando seu gerente, ele soube que nesse financiamento foi usado o sistema Price.**

Qual é a taxa mensal de juros cobrada nesse financiamento?

a) 1,0%
b) 1,3%
c) 1,6%
d) 2,3%
e) 2,6%

3. **(CESGRANRIO / CEF - 2021) Um cliente de um banco está tentando simular o valor de financiamento imobiliário que pode conseguir para adquirir uma casa. Fazendo seu orçamento, estabeleceu que poderia pagar uma prestação inicial (1º mês) de $R\$\ 2.669,33$. Sabendo-se**

que o banco utiliza o sistema Price em seus financiamentos, uma taxa de juros de 1% a.m., um prazo de 60 meses e uma amortização inicial (1º mês) de $R\$\ 1.469,33$, qual o valor máximo aproximado, em reais, que ele pode receber?

a) 120.000,00
b) 146.933,00
c) 160.159,80
d) 266.933,00
e) 413.866,00

4. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2018) Uma empresa deseja comprar um equipamento, cujo preço à vista foi cotado em 15 milhões de reais. Para isso, pretende pagar uma entrada (ato da compra) e financiar o valor restante em 12 parcelas mensais e iguais, a uma taxa de juro (composto) de 1% ao mês, com a primeira parcela sendo paga um mês após a compra. O departamento financeiro determinou que o valor da parcela seja de, no máximo, 1 milhão de reais.

Dado: $1{,}01^{12} = 1{,}127$

Nessas condições, o valor mínimo, em milhões de reais, que a empresa precisará pagar de entrada nessa compra pertence ao intervalo

a) 3,00 a 3,19
b) 3,20 a 3,39
c) 3,40 a 3,59
d) 3,60 a 3,79
e) 3,80 a 4,00

5. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2016) Uma empresa faz um empréstimo no valor de R$ 200.000,00, a uma taxa de 15% ao ano, para ser pago em 5 prestações anuais e iguais, de acordo com o sistema francês de amortização, vencendo a primeira prestação 1 ano após a data do empréstimo. A Tabela abaixo é parte da planilha de amortização apresentada pelo credor.

Tempo	Prestação	Amortização	Juros	Saldo devedor
0				R$ 200.000,00
1	R$ 59.663,11	R$ 29.663,11	R$ 30.000,00	R$ 170.336,89
2	R$ 59.663,11	R$ 34.112,58	R$ 25.550,53	R$ 136.224,31

Para avaliar o total de juros que serão pagos nesse financiamento, um auditor completa a planilha até o final, de modo que o saldo devedor seja zero.

O total de juros, em milhares de reais, que serão pagos pela empresa, se todas as prestações forem quitadas de acordo com o planejado, pertence ao intervalo:

a) 50,1 a 65,0
b) 65,1 a 80,0
c) 80,1 a 95,0
d) 95,1 a 110,0
e) 110,1 a 125,0

6. (CESGRANRIO / BASA - 2015) Um banco empresta R$ 10.000,00, com taxa de juros de 2% ao mês, para serem pagos em 5 pagamentos mensais consecutivos, vencendo a primeira prestação um mês após o empréstimo. O valor de cada prestação é de R$ 2.121,58.

O saldo devedor, após o segundo pagamento, é, em reais, de, aproximadamente:

a) 5.696,00
b) 6.118,00
c) 5.653,00
d) 5.565,00
e) 5.897,00

7. (CESGRANRIO / LIQUIGAS - 2014) Considere a amortização de uma dívida, em 5 prestações mensais de R$ 2.060,40 cada, com juros compostos de 1% ao mês.

A última amortização, em reais, será de, aproximadamente,

a) 1.960,40
b) 1.980,00
c) 2.040,00
d) 2.060,40
e) 2.080,40

8. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2012) Existem diferentes sistemas de amortização, passíveis de serem utilizados na contratação de empréstimos junto a instituições financeiras.

Nesse sentido, uma das características do sistema de amortização Price consiste em

a) quitação de amortizações constantes ao longo do período do empréstimo
b) amortização de 100% do valor do principal na data de vencimento
c) pagamento de prestações iguais durante o período do financiamento
d) pagamento de juros constantes durante o período do financiamento
e) pagamento de prestações decrescentes ao longo do período do empréstimo

9. (CESGRANRIO / BNDES - 2011) Certa pessoa solicitou um empréstimo no valor de R$ 200.000,00, a ser pago em 24 meses, em prestações mensais, considerada a taxa de 6% a.s. com capitalização mensal.

Considerando o sistema de amortização francês, utilize a tabela de amortização (com o valor da 1a prestação já calculado), a seguir, como memória de cálculo.

Em reais

Período	Saldo Devedor	Juros	Amortização	Prestação
0	200.000,00			
1				9.414,69
2				
3				
4				
5				

Qual o valor aproximado da amortização inserida na 3a prestação?

a) R$ 7.414,69
b) R$ 7.488,84
c) R$ 7.563,73
d) R$ 9.414,69
e) R$ 9.563,73

10. (CESGRANRIO / FINEP - 2011) Uma empresa de táxi adquiriu um automóvel no valor de R$ 30.107,51, utilizando o Sistema Price de Amortização – Tabela Price. O financiamento foi em 36 meses, a taxa de juros do empréstimo foi de 1% ao mês, e o valor da prestação mensal, R$ 1.000,00. Depois de ser paga a 18ª prestação, a dívida era de R$ 16.398,27. Os sócios combinaram que pagariam mais uma prestação e, em seguida, iriam zerar a dívida.

O valor da dívida, depois de paga a 19ª prestação, em reais, é

a) 16.234,29
b) 16.226,01
c) 15.570,53
d) 15.562,25
e) 15.398,27

11. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2011) Consiste em um plano de amortização de uma dívida em prestações periódicas iguais e sucessivas, dentro do conceito de termos vencidos, em que o valor de cada prestação, ou pagamento é composto por duas parcelas distintas: uma de juros e outra de capital (chamada amortização).

VIEIRA SOBRINHO J.P. Matemática Financeira. São Paulo: Atlas, 2007, p. 220.

Essa definição se refere ao sistema de amortização conhecido como

a) Misto
b) Constante
c) Radial
d) Alemão
e) Francês

Gabarito

1. B
2. E
3. A
4. D
5. D
6. B
7. C
8. C
9. C
10. D
11. E

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.