

REPRESENTAÇÃO

• MATRIZ $m \times n$ = TABELA RETANGULAR FORMADA POR NÚMEROS REAIS DISTRIBUÍDOS EM

- m LINHAS
- n COLUNAS.

$$\begin{bmatrix} a & b & \dots & z \\ \vdots & & & \\ k & & & j \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a & b & \dots & z \\ \vdots & & & \\ k & & & j \end{bmatrix}} \right\} m$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$

• ELEMENTO = a_{ij} (LINHA i COLUNA j)

$$M = (a_{ij})_{m \times n}$$

MATRIZES ESPECIAIS

RETANGULAR

$$= m \neq n$$

QUADRADA

$= m = n \rightarrow$ MATRIZ QUADRADA DE ORDEM n

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

DIAGONAL SECUNDÁRIA

DIAGONAL PRINCIPAL

TRAÇO = SOMA DOS ELEMENTOS DA DIAGONAL PRINCIPAL

LINHA

$$m = 1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & \dots & z \end{bmatrix}}_n$$

COLUNA

$$m = 1$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ k \end{bmatrix}} \right\} m$$

MATRIZES

MATRIZES ESPECIAIS

DIAGONAL

= MATRIZ QUADRADA CUJOS ELEMENTOS QUE **NÃO** PERTENCEM À **DIAGONAL PRINCIPAL** SÃO **NULOS**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

IDENTIDADE

= MATRIZ **DIAGONAL** CUJOS ELEMENTOS DA **DIAGONAL PRINCIPAL** SÃO **1**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I_n = MATRIZ IDENTIDADE DE ORDEM n .

ESCALAR

= MATRIZ **DIAGONAL** CUJOS ELEMENTOS DA **DIAGONAL PRINCIPAL** SÃO **IGUAIS**.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

NULA

= **TODOS** SEUS ELEMENTOS SÃO **NULOS**:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZES ESPECIAIS (CONTINUAÇÃO)

MATRIZ SIMÉTRICA

= MATRIZ QUADRADA DE ORDEM n TAL QUE $a_{ij} = a_{ji}$, P/ TODO i E TODO j .

- A **DIAGONAL** PRINCIPAL ATUA COMO UM **EIXO DE SIMETRIA**.

(NÃO HÁ RESTRIÇÃO AOS ELEMENTOS DA DIAGONAL PRINCIPAL)

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA

= MATRIZ QUADRADA DE ORDEM n TAL QUE $a_{ij} = -a_{ji}$, P/ TODO i E TODO j .

- A **DIAGONAL** PRINCIPAL DEVE SER FORMADA POR **ZEROS**.

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ OPOSTA

= QUANDO A SOMA DAS DUAS MATRIZES RESULTA EM UMA **MATRIZ NULA**.

$$A + B = \text{MATRIZ NULA.}$$

$$a_{ij} = -b_{ij}$$

- A MATRIZ OPOSTA DE A É $-A$.

MATRIZES

TRIANGULAR SUPERIOR

= MATRIZ QUADRADA EM QUE TODOS OS ELEMENTOS **ABAIXO** DA DIAGONAL PRINCIPAL SÃO **NULOS**.
($a_{ij} = 0$, P/ $i > j$)

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRIANGULAR INFERIOR

= MATRIZ QUADRADA EM QUE TODOS OS ELEMENTOS **ACIMA** DA DIAGONAL PRINCIPAL SÃO **NULOS**.
($a_{ij} = 0$, P/ $i < j$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZES

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

- SÓ SE DÁ ENTRE MATRIZES DO **MESMO TIPO**.
(MESMO NÚMERO DE LINHAS E DE COLUNAS)
- O RESULTADO TAMBÉM É UMA MATRIZ DO **MESMO TIPO**.

$$C = A + B$$

FAZ-SE A OPERAÇÃO
TERMO A TERMO.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

PROPRIEDADES

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + B = B + A$$

- É O EQUIVALENTE P/ A **SUBTRAÇÃO**:

$$C = A - B$$

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

- EXEMPLO:

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 4 \\ 11 & 6 & 7 \\ 2 & 14 & 5 \end{bmatrix}$$

PRODUTO DE UM NÚMERO POR MATRIZ

- P/ **MULTIPlicAR** UM MATRIZ A POR UM NÚMERO REAL **k**, BASTA MULTIPlicAR **TODOS OS ELEMENTOS** DE A (a_{ij}) POR **k**.

- EXEMPLO:

$$k = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow k \cdot A =$$

$$= 3 \cdot \begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 24 & 0 \\ 24 & 12 & 21 \\ 0 & 21 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRIZES

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

- P/MULTIPlicAR DUAS MATRIZES A, B , É NECESSÁRIO QUE O NÚMERO DE COLUNAS DE A SEJA IGUAL AO DE LINHAS DE B .

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p}$$

AS DIMENSÕES DO MEIO DEVEM COINCIDIR

- CUIDADO: NEM SEMPRE É POSSÍVEL MULTIPLICAR DUAS MATRIZES!

DIMENSÕES DA MATRIZ RESULTANTE

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

AS DIMENSÕES DAS EXTREMIDADES VÃO P/A MATRIZ RESULTANTE

- EXEMPLO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} 15 & 28 & 39 \\ 1 & 21 & 28 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$= 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 4$
 $= 1 + 0 + (-6) + 20 = 15$

$$C_{ij} = \sum_{n=1}^m a_{in} \cdot b_{nj}$$

PROPRIEDADES

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ASSOCIATIVA)
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO À ADIÇÃO)
- $(kA) \cdot B = A \cdot (kB) = k(A \cdot B)$
- $I \cdot A = A \cdot I = A$ (SENDO A UMA MATRIZ QUADRADA)
- A MATRIZ IDENTIDADE É O ELEMENTO NEUTRO DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES QUADRADAS

POTENCIAÇÃO DE MATRIZES

$$\begin{aligned} \cdot A^n &= \underbrace{A \cdot A \cdot A \dots A}_{n \text{ FATORES}} & \cdot A^1 &= A \\ & & \cdot A^0 &= O \end{aligned}$$

MATRIZES

MATRIZ TRANSPOSTA

• SEJA $A = (a_{ij})_{m \times n}$, SUA TRANSPOSTA SERÁ $A^t_{n \times m}$ A MATRIZ QUE SE OBTÉM TROCANDO AS LINHAS PELAS COLUNAS.

• EXEMPLO:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}}_A \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}}_{A^t}$$

PROPRIEDADES

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$ (SENDO A E B MATRIZES DO MESMO TIPO)
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
- $(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$ (SENDO A E B MATRIZES QUE PODEM SER MULTIPLICADAS)
- MATRIZ SIMÉTRICA: $A^t = A$
- MATRIZ ANTISIMÉTRICA: $A^t = -A$

MATRIZES INVERSAS

• SEJA A UMA MATRIZ QUADRADA DE ORDEM n , E B SUA INVERSA:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

$$(B = A^{-1})$$

• SE A NÃO É INVERSÍVEL = MATRIZ SINGULAR.

PROPRIEDADES

(SENDO A E B MATRIZES QUADRADAS DE MESMA ORDEM E INVERSÍVEIS)

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

• MATRIZ ORTOGONAL → SE A INVERSA DA MATRIZ É IGUAL A SUA TRANSPOSTA.

$$(A^{-1} = A^t)$$