SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

A aula de hoje está intrinsicamente relacionada ao **pagamento de um crédito**, seja ele um empréstimo, um financiamento, etc.

Imagine que depois de aprovado e, para comemorar sua posse, você se dirija a um banco a fim de tomar um empréstimo para comprar um carro (um "auto" presente de aprovação). Quando você compactua o empréstimo com o banco, as características desse financiamento devem ser previamente estabelecidas.

O valor a ser tomado emprestado, a taxa de juros que será aplicada, o tempo que se levará para pagar este valor e também a modalidade do Sistema de Amortização a ser utilizado. Esta última estabelece a forma como o valor do saldo devedor será calculado.

ESCLARECENDO!

Sistema de Amortização é um plano de pagamento de um crédito que define a forma como o valor do saldo devedor será calculado.

Iremos estudar separadamente **4 Sistemas de Amortização**:

- Sistema de Amortização Constate (SAC)
- Sistema Francês de Amortização (Tabela Price)
- Sistema de Amortização Misto (SAM)
- Sistema Americano de Amortização (SAA)

Antes de iniciarmos o estudo de cada Sistema, vamos a algumas definições acerca de **conceitos iniciais** (de leitura obrigatória) que aplicaremos em qualquer uma das modalidades.

LEITURA OBRIGATÓRIA

Não se preocupe caso algum conceito soe abstrato em um primeiro momento. Quando exemplificarmos passo a passo os métodos de cálculo tudo ficará mais tangível de se compreender.

CONCEITOS INICIAIS

Saldo Devedor (SD)

Literalmente, é o ***quantum* ainda se deve pagar**.

O **Saldo Devedor** se divide em: Saldo Devedor inicial do período e Saldo Devedor final do período.

O Saldo Devedor final do período i será igual ao Saldo Devedor inicial do período i menos a Amortização do período i.

$$\boldsymbol{SD_{final\ i} = SD_{inicial\ i} - A_i}$$

Amortização (A)

É a parte da prestação a ser paga que está **"abatendo"** o valor inicial do empréstimo sem o cálculo dos Juros.

Juros (J)

É a remuneração do Capital emprestado. Importante ter em mente que a Taxa de Juros sempre incidirá no Saldo Devedor inicial do período.

Os **Juros de cada período $\boldsymbol{i}$** são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.

$$\boldsymbol{J_i = i \times SD_{inicial\ i}}$$

Prestação (P)

Como o próprio nome sugere, é a **Prestação** paga no período. É dado pela soma da Amortização mais os Juros do período.

$$\boldsymbol{P = A + J}$$

RESUMINDO

$$\text{Conceito Iniciais}\begin{cases}\text{Saldo Devedor (SD)}\\ \text{Amortização (A)}\\ \text{Juros (J)}\\ \text{Prestação (P)}\end{cases}$$

Vamos agora, estudar cada um dos Sistemas de Amortização. Iremos ver detalhadamente as características e a metodologia de cálculo e, ao final de cada método, resolveremos questões de concurso para melhor fixação do conteúdo.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

Conforme o próprio nome sugere, é o Sistema em que as **Amortizações são constates** e matematicamente iguais a:

$$\boxed{A = \frac{E}{n}}$$

Onde,

$A = Amortização$

$E = Empréstimo$

$n = número\ de\ parcelas\ ou\ prestações$

EXEMPLIFICANDO

Exemplo: Voltemos ao exemplo inicial da aula em que você, para comprar um carro, toma emprestado R$ 100.000,00 para pagamento em 5 prestações mensais a uma taxa de 10% ao mês que será amortizado pelo SAC.

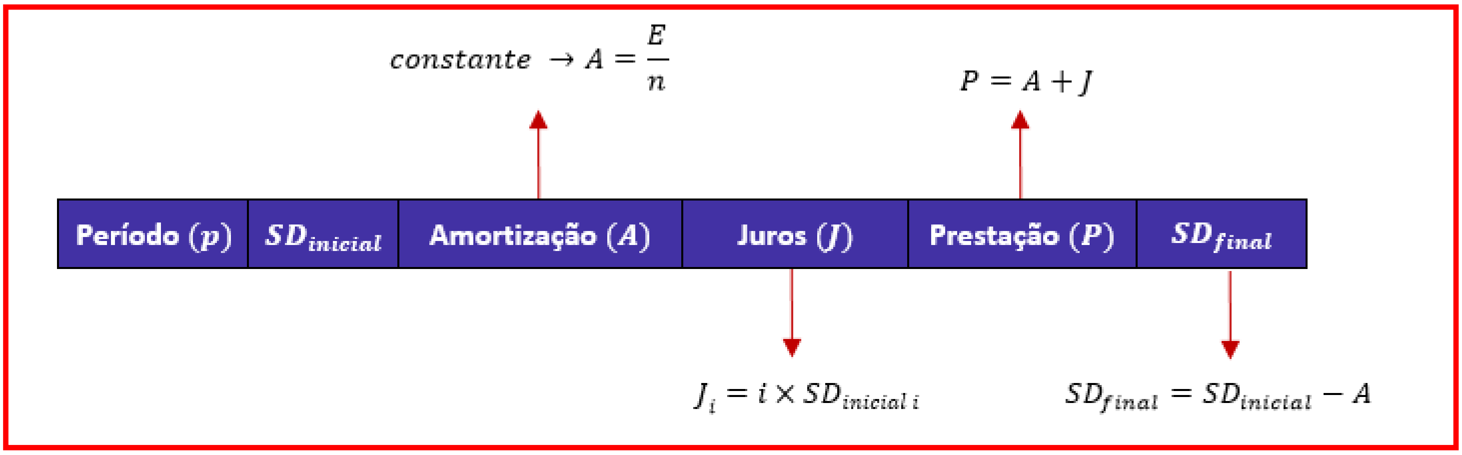
A partir de agora, começaremos a utilizar uma tabela (sempre que preciso) para nos ajuda nas contas. A tabela será a mesma a ser utilizada em qualquer Sistema de Amortização. Porém, **a forma de cálculo será individual para cada Sistema**.

Vejamos.

O primeiro passo é montar uma tabela com as seguintes colunas:

Período (p)	$SD_{inicial}$	Amortização (A)	Juros (J)	Prestação (P)	SD_{final}

O segundo passo é estabelecer a **equação de cálculo de cada coluna** desta tabela. No **SAC** teremos:



Esta tabela auxiliar nos ajudará nas contas de cada período.

"Certo professor. Mas ainda está tudo muito abstrato".

Está mesmo aluno. Porém, agora vamos **resolver numericamente** o exemplo e tudo se elucidará e você perceberá a valia desta tabela (confie em mim).

O Empréstimo de R$ 100.000,00 será pago em 5 prestações mensais a uma taxa de 10% ao mês que será amortizado pelo SAC.

O valor da **Amortização** que é constante será igual a:

$$A = \frac{E}{n}$$

Onde,

$A = Amortização = ?$

$E = Empréstimo = 100.000$

$n = número\ de\ parcelas = 5$

Iremos substituir os valores e calcular a Amortização:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{100.000}{5} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 20.000}}$$

Sendo assim, já podemos preencher nossa tabela da seguinte forma:

- **Primeiro Período**

Período (p)	$SD_{inicial}$	Amortização (A)	Juros (J)	Prestação (P)	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000			
2		20.000			
3		20.000			
4		20.000			
5		20.000			

Temos 3 **observações** a serem feitas a respeito desse preenchimento inicial. Vá acompanhando:

1. Perceba que o período zero é o período de obtenção do empréstimo, isto é, não há qualquer tipo de pagamento. Há apenas a tomada do valor emprestado.

2. O Saldo Devedor inicial do período 1 é igual ao Saldo Devedor final do período anterior (zero). E esta lógica se mantém. Essa coluna é fundamental para auxílio nos cálculos. Muitos professores apresentam a tabela com apenas uma coluna de Saldo Devedor e o aluno acaba se confundindo na hora dos cálculos.

O **Saldo Devedor inicial de um período** é igual ao Saldo Devedor final do período anterior.

3. Como se trata do SAC, a **Amortização é constante** e, logicamente, igual para todos os períodos.

Vamos Juntos, **passo a passo**, preencher toda esta tabela. Mais uma vez peço que **confie em mim**. Esta matéria aparenta ser difícil. Mas depois que se pega o jeito fica mais tranquila.

- Próximo passo é calcular o valor do Juros do primeiro período.

Importante ter em mente que a Taxa de Juros sempre incidirá no Saldo Devedor inicial do período. **Os Juros de cada período i são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.**

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

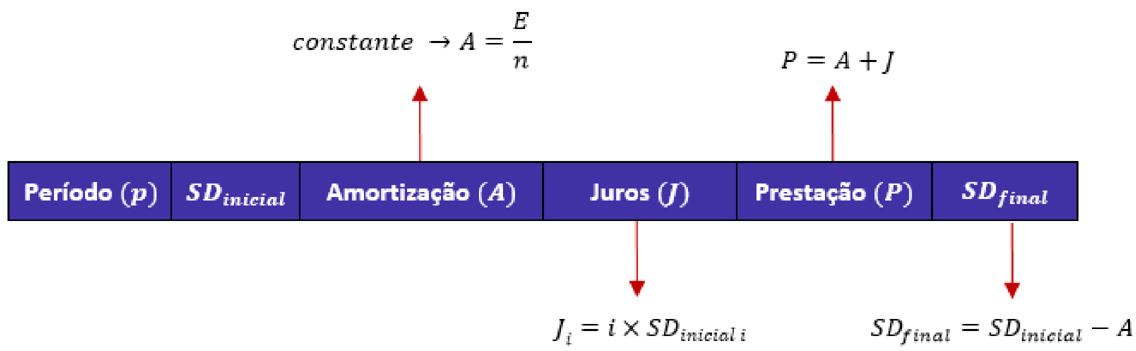
Logo, os Juros do primeiro período serão iguais a Taxa de Juros $(10\% = 0{,}1)$ vezes o Saldo Devedor inicial do primeiro período.

Vamos preencher a tabela:

p	$SD_{inicial}$	A	Juros (J)	Prestação (P)	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	$J_1 = 0{,}1 \times 100.000 = \mathbf{10.000}$		
2		20.000			
3		20.000			
4		20.000			
5		20.000			

Mais uma vez observe que o Juros do período será igual a Taxa de Juros multiplicada pelo Saldo Devedor inicial do período.

Perceba que como a tabela auxiliar já está começando a fazer sentido.



Já utilizamos esta tabela auxiliar para o cálculo da Amortização e dos Juros. Vamos, agora, utilizar para o cáclculo da Prestação.

- **A Prestação do período é dada pela soma da Amortização mais os Juros.**

$$P_i = A + J_i$$

$$P_1 = A + J_1$$

Então teremos:

p	$SD_{inicial}$	A	Juros (J)	Prestação (P)	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	10.000	$P_1 = 20.000 + 10.000 = \mathbf{30.000}$	
2		20.000			
3		20.000			
4		20.000			
5		20.000			

- Por fim, para finalizarmos o primeiro período, iremos calcular o **Saldo Devedor final** que será igual ao **Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização.**

$$SD_{final\ i} = SD_{inicial\ i} - A$$

$$SD_{final\ 1} = SD_{inicial\ 1} - A$$

Mais uma vez reitero a importância da tabela auxiliar vista acima já com todas as equações. Preenchendo o Saldo Devedor final:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	10.000	30.000	$SD_{final\ 1} = 100.000 - 20.000 = \mathbf{80.000}$
2		20.000			
3		20.000			
4		20.000			
5		20.000			

Pronto, **finalizamos o primeiro período**.

A princípio parece bastante complicado. Todavia, com a resolução de muitos exercícios, a resolução desse Sistema será bem mais rápida.

Vamos preencher o segundo período passo a passo mais uma vez para você entender.

- **Segundo Período**

- O Saldo Devedor inicial do período 2 é igual ao Saldo Devedor final do período 1.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	10.000	30.000	80.000
2	**80.000**	20.000			
3		20.000			
4		20.000			
5		20.000			

- O Juros do período 2 será igual a taxa de juros vezes o Saldo Devedor inicial deste período. Logo:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	10.000	30.000	80.000
2	80.000	20.000	$J_2 = 0{,}1 \times 80.000 = \mathbf{8.000}$		
3		20.000			
4		20.000			
5		20.000			

- Já a Prestação do segundo período será igual a soma da Amortização com os Juros.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	10.000	30.000	80.000
2	80.000	20.000	8.000	$P_2 = 20.000 + 8.000 = \mathbf{28.000}$	
3		20.000			
4		20.000			
5		20.000			

- E o Saldo Devedor final do segundo período será igual ao Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	10.000	30.000	80.000
2	80.000	20.000	8.000	28.000	$SD_{final\ 2} = 80.000 - 20.000 = \mathbf{60.000}$
3		20.000			
4		20.000			
5		20.000			

"Certo professor, agora eu estou começando a entender".

Isso mesmo, caro aluno. Vamos **passo a passo** que, em breve, como diz nosso querido professor Silvio Sande, você estará voando nessa matéria.

Vamos preencher o terceiro período. Tente preencher sozinho e compare com a tabela abaixo.

Observe que <u>eu irei preencher o período por completo</u> igual você fará na sua prova. E abaixo da tabela apresentarei as contas necessárias que você terá feito para o preenchimento da linha (período 3).

Então, aperte os cintos que iremos acelerar só um pouco.

- **Terceiro Período**

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	10.000	30.000	80.000
2	80.000	20.000	8.000	28.000	60.000
3	$\mathbf{60.000}$	$\mathbf{20.000}$	$\mathbf{6.000}$	$\mathbf{26.000}$	$\mathbf{40.000}$
4		20.000			
5		20.000			

E aí aluno, os resultados bateram?

Vejamos ao passo a passo do preenchimento.

1. O Saldo Devedor inicial do terceiro período é igual ao Saldo Devedor final do período anterior (segundo).

$$SD_{inicial\ 3} = SD_{final\ 2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{SD_{inicial\ 3} = 60.000}}$$

2. O Juros do período 3 será igual a Taxa de Juros vezes o Saldo Devedor inicial do terceiro período.

$$J_3 = i \times SD_{inicial\ 3}$$

$$J_3 = 0{,}1 \times 60.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_3 = 6.000}}$$

3. A Prestação do terceiro período será igual a soma da Amortização com os Juros.

$$P_3 = A + J_3$$

$$P_3 = 20.000 + 6.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_3 = 26.000}}$$

4. E, por fim, o Saldo Devedor final do terceiro período será igual ao Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização.

$$SD_{final\ 3} = SD_{inicial\ 3} - A$$

$$SD_{final\ 3} = 60.000 - 20.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{SD_{final\ 3} = 40.000}}$$

"Interessante professor. É tipo uma "escadinha". O resultado de uma coluna serve como base para o cálculo da coluna seguinte."

Justamente! Percebe como já estamos indo bem mais rápido?

Atente-se apenas para o fato da **Amortização ser constante pois estamos diante do SAC**, onde a Amortização de cada período é igual.

Essa sistemática de cálculo se mantém. No quarto período, vamos inverter a ordem. Iremos calcular os resultados e preencher a tabela.

- **Quarto Período**

1. O Saldo Devedor inicial do quarto período é igual ao Saldo Devedor final do período anterior (terceiro).

$$SD_{inicial\ 4} = SD_{final\ 3} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{SD_{inicial\ 4} = 40.000}}$$

2. O Juros do período 4 será igual a Taxa de Juros vezes o Saldo Devedor inicial do quarto período.

$$J_4 = i \times SD_{inicial\ 4}$$

$$J_4 = 0{,}1 \times 40.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_4 = 4.000}}$$

3. A Prestação do quarto período será igual a soma da Amortização com os Juros.

$$P_4 = A + J_4$$

$$P_4 = 20.000 + 4.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_4 = 24.000}}$$

4. E, por fim, o Saldo Devedor final do quarto período será igual ao Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização.

$$SD_{final\ 4} = SD_{inicial\ 4} - A$$

$$SD_{final\ 4} = 40.000 - 20.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{SD_{final\ 4} = 20.000}}$$

Preenchendo a tabela com seus respectivos valores:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	10.000	30.000	80.000
2	80.000	20.000	8.000	28.000	60.000
3	60.000	20.000	6.000	26.000	40.000
4	**40.000**	**20.000**	**4.000**	**24.000**	**20.000**
5		20.000			

Para finalizar, vamos calcular os dados do último período.

- **Quinto Período**

1. O Saldo Devedor inicial do quinto período é igual ao Saldo Devedor final do período anterior (quarto).

$$SD_{inicial\ 5} = SD_{final\ 4} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{SD_{inicial\ 5} = 20.000}}$$

2. O Juros do período 5 será igual a Taxa de Juros vezes o Saldo Devedor inicial do quinto período.

$$J_5 = i \times SD_{inicial\ 5}$$

$$J_5 = 0{,}1 \times 20.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_5 = 2.000}}$$

3. A Prestação do quinto período será igual a soma da Amortização com os Juros.

$$P_5 = A + J_5$$

$$P_5 = 20.000 + 2.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_5 = 22.000}}$$

4. E, por fim, o Saldo Devedor final do quinto período será igual ao Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização.

$$SD_{final\,5} = SD_{inicial\,5} - A$$

$$SD_{final\,5} = 20.000 - 20.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{SD_{final\,5} = 0}}$$

Preenchendo a tabela com seus respectivos valores:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	10.000	30.000	80.000
2	80.000	20.000	8.000	28.000	60.000
3	60.000	20.000	6.000	26.000	40.000
4	40.000	20.000	4.000	24.000	20.000
5	**20.000**	**20.000**	**2.000**	**22.000**	**0**

Perceba que o **Saldo Devedor final do último período**, logicamente, há de ser **zero**. Se, porventura você calcular e não zerar (ou não se aproximar de zero uma vez que em algumas questões iremos arredondar os números) é porque houve algum erro de cálculo na resolução.

PRESTE MAIS ATENÇÃO!

"Perfeito professor. Entendi o passo a passo de como se monta a tabela do SAC e de como se faz os cálculos. Porém, acho que irei demorar muito na prova para fazer questões de Sistemas de Amortização. Há algum modo mais fácil de preencher esta tabela?"

Há sim! E iremos ver agora as **características do Sistema de Amortização Constante** e, ao final, iremos voltar neste mesmo exemplo e calcular com base nas características apresentadas.

CARACTERÍSTICAS DO SAC

Amortizações Constantes

Conforme estudamos, as <u>Amortizações do SAC são constantes</u> e iguais a:

$$\boxed{\boldsymbol{A = \frac{E}{n}}}$$

Juros Decrescentes

Observe em nossa tabela que **os Juros do SAC são decrescentes**.

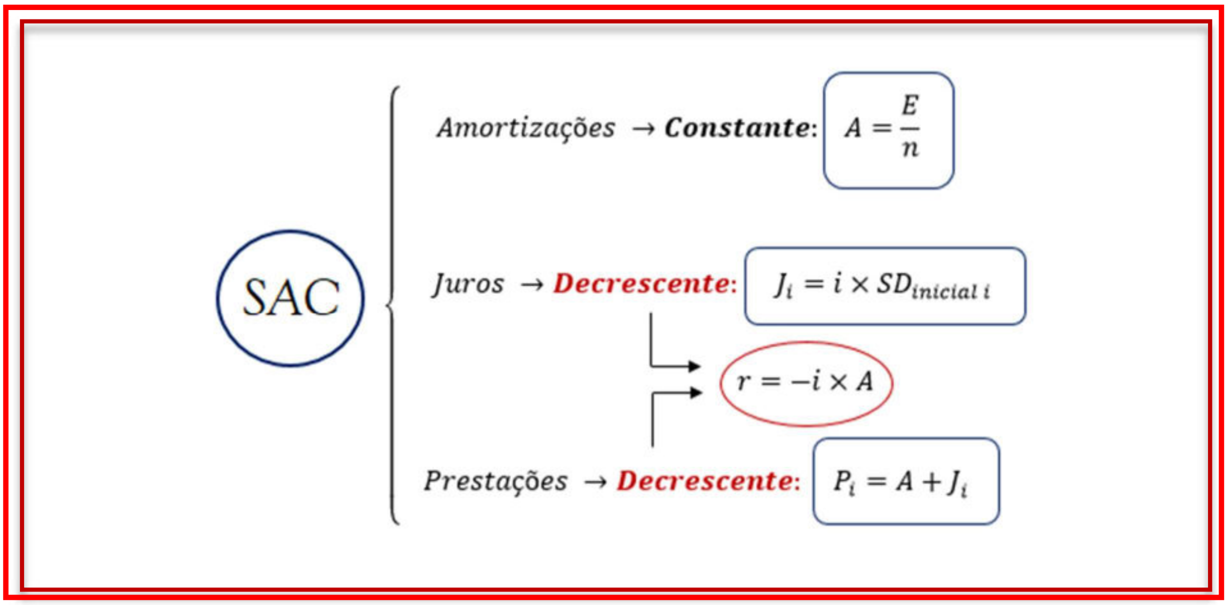
E mais, são **decrescentes em PA** (progressão aritmética) de **razão** igual a:

$$\boxed{\boldsymbol{r = -i \times A}}$$

Prestações Decrescentes

Assim como os Juros, **as Prestações no SAC são decrescentes** (na mesma razão dos Juros).

ESQUEMATIZANDO



Vamos, agora, **voltar ao exemplo e preencher a tabela** com base nas características que acabamos de estudar.

Exemplo: Voltemos ao exemplo inicial da aula em que você, para comprar um carro, toma emprestado R$ 100.000,00 para pagamento em 5 prestações mensais a uma taxa de 10% ao mês que será amortizado pelo SAC.

Primeiro passo é calcular a Amortização e preencher a tabela com os respectivos valores da Amortização:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{100.000}{5} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 20.000}}$$

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	**20.000**			
2		**20.000**			
3		**20.000**			
4		**20.000**			
5		**20.000**			

Você sabe que o <u>Saldo Devedor final de um período será igual ao Saldo Devedor inicial deste período menos a Amortização</u> (que no SAC é constante). Então já podemos **preencher toda a coluna do SD final** (coluna SD inicial menos coluna A). Observe:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	**100.000**	20.000			**80.000**
2	**80.000**	20.000			**60.000**
3	**60.000**	20.000			**40.000**
4	**40.000**	20.000			**20.000**
5	**20.000**	20.000			**0**

Próximo passo é calcular os Juros do primeiro período e a razão da PA de decréscimo dos Juros.

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}1 \times 100.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 10.000}}$$

E a razão de decréscimo será igual a:

$$r = -i \times A$$

$$r = -0{,}1 \times 20.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r = -2.000}}$$

Sendo assim, já podemos preencher toda a **coluna dos Juros**. Acompanhe:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	$\mathbf{10.000}$		80.000
2	80.000	20.000	$10.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{8.000}$		60.000
3	60.000	20.000	$8.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{6.000}$		40.000
4	40.000	20.000	$6.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{4.000}$		20.000
5	20.000	20.000	$4.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{2.000}$		$\mathbf{0}$

E, por fim, para preencher a coluna da Prestação, basta **somar a coluna da Amortização com a coluna dos Juros**. Ou, podemos também, calcular a primeira prestação e utilizar a mesma razão calculada acima para o decréscimo da prestação.

Como vimos, a Prestação no SAC (assim como os Juros) é decrescente em PA com razão $r = -i \times A$.

A primeira prestação é igual a:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 20.000 + 10.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_1 = 30.000}}$$

Preenchendo a tabela final teremos:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	20.000	10.000	$\mathbf{30.000}$	80.000
2	80.000	20.000	8.000	$30.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{28.000}$	60.000
3	60.000	20.000	6.000	$28.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{26.000}$	40.000
4	40.000	20.000	4.000	$26.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{24.000}$	20.000
5	20.000	20.000	2.000	$24.000 - \mathbf{2.000} = \mathbf{22.000}$	$\mathbf{0}$

"Professor, é muito mais rápido mesmo. Porque você não começou a aula ensinando este macete?"

Porque, caro aluno, eu tenho certeza que você **não iria entender a sistemática de cálculo** e a ideia de um Sistema de Amortização. Você iria apenas decorar como se faz. Mas agora, você pode, além de decorar, entender a mecânica de cálculo.

Antes de partirmos para as questões de concurso sobre o SAC quero apenas dar uma dica.

Algumas questões de concurso pedem para você calcular a **última cota dos Juros no SAC**, isto é, qual será o Juros no último período.

A banca quer que você se acabe nas contas e com isso aumente sua chance de errar. Então, atente-se ao fato de que **os Juros no último período é igual ao módulo da razão da PA de decréscimo dos Juros**.

Observe na tabela acima o valor dos Juros do quinto período. R$ 2.000,00 correto? Perceba, agora, o valor da razão de decréscimo.

$$r = -i \times A$$

$$r = -0{,}1 \times 20.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = -2.000}$$

Ou seja, os valores são **iguais em módulo**.

Os Juros no **último período** do SAC é igual ao módulo da razão da PA de decréscimo dos Juros.

Vejamos algumas questões de concurso que versam sobre o SAC.

(CGE RN - 2019) João comprou um imóvel cujo valor à vista é de R$ 150.000,00 da seguinte forma: 30% de entrada e o restante em 60 parcelas no sistema SAC com taxa anual de 6%. Nessas condições, o valor de cada parcela de amortização será igual a:

a) 1.500,00
b) 1.750,00
c) 2.500,00

d) 1.230,00

Comentários:

João comprou um imóvel cujo valor à vista é de R$ 150.000,00 dando 30% de entrada e financiando o restante pelo SAC, isto é, João financiou os 70% restantes.

Primeiro passo é **calcular o valor E do financiamento** que corresponde a 70% de R$ 150.000.

$$E = \frac{70}{100} \times 150.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E = 105.000}}$$

De posse do valor do Empréstimo (financiamento), calculamos o valor da Amortização.

No SAC, conforme o próprio nome sugere, é o Sistema em que **as Amortizações são constantes** e matematicamente iguais a:

$$A = \frac{E}{n}$$

Onde,

$A = Amortização = ?$

$E = Empréstimo = 105.000$

$n = número\ prestações = 60$

Vamos substituir os valores e calcular o valor de cada parcela de amortização:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{105.000}{60} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 1.750}$$

Gabarito: Alternativa **B**

(Liquigás - 2018) Pelo sistema de amortização constante, a primeira prestação mensal (parcela), sem carência, de um financiamento de R$ 10.000,00 a uma taxa de juros de 10% a.m, pelo prazo de 5 meses, será de, aproximadamente,

a) R$ 3.000,00
b) R$ 2.638,00
c) R$ 2.000,00
d) R$ 1.638,00
e) R$ 1.000,00

Comentários:

A primeira prestação será calculada pela **soma da Amortização mais os Juros** do primeiro período, pois como estudamos, a prestação de um período é dada pela seguinte soma:

$$P_i = A + J_i$$

$$P_1 = A + J_1$$

Vamos calcular separadamente cada parcela.

- **Amortização**

No SAC a <u>Amortização é constante</u> e calculada pela divisão do valor do Empréstimo pela quantidade de prestações. Logo:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{10.000}{5} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 2.000}}$$

- **Juros do Primeiro período**

Os Juros de cada período i são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}1 \times 10.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 1.000}}$$

Observe que o Saldo Devedor inicial do primeiro período é o próprio valor do Empréstimo, uma vez que nada ainda foi pagado.

Então, a **primeira Prestação** mensal será igual a:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 2.000 + 1.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_1 = 3.000}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(CM Araraquara - 2018) A empresa NTN contratou um empréstimo no seu banco de relacionamento no valor de $ 800.000,00, com juros pré-fixados de 10% ao ano. O pagamento do citado empréstimo será em

4 parcelas anuais e consecutivas, calculadas pelo Sistema de Amortização Constante – Tabela SAC. Assinale a alternativa que aponta o valor da prestação que deverá ser paga ao banco no segundo ano.

a) $ 200.000
b) $ 220.000
c) $ 240.000
d) $ 260.000
e) $ 280.000

Comentários:

A ideia dessa questão é similar da anterior. Porém, estamos aumentando a dificuldade.

A segunda prestação será calculada pela soma da Amortização mais os Juros do segundo período, pois como estudamos, a prestação de um período é dada pela seguinte soma:

$$P_i = A + J_i$$

$$P_2 = A + J_2$$

Vamos calcular separadamente cada parcela.

- **Amortização**

No SAC a amortização é constante e calculada pela divisão do valor do Empréstimo pela quantidade de parcelas. Logo:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{800.000}{4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 200.000}}$$

- **Juros do segundo período**

Para calcular os Juros, podemos seguir por diversos caminhos. Podemos utilizar a tabela até a segunda linha (segundo período) para nos auxiliar. Outro caminho é calcular os Juros do primeiro período e a razão de decréscimo e assim calcular os juros do segundo período. Ou então, podemos simplesmente fazer as contas sem o auxílio da tabela.

Iremos fazer pelo auxílio da tabela para melhor entendimento.

Nossa tabela até então será esta:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	800.000
1	800.000	200.000			
2		200.000			

Não precisamos da tabela por completo uma vez que a banca nos questiona o valor da segunda prestação.

Vamos preencher a tabela (nos campos que nos interessam) com os seguintes valores:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	800.000
1	800.000	200.000			600.000
2	600.000	200.000			

Perceba que não precisamos calcular os Juros do primeiro período nem a primeira prestação. Até poderíamos calcular., mas já estamos começando a **poupar tempo de prova**.

Observe também que o Saldo Devedor final do primeiro período de R$ 600.000 é dado pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período (R$ 800.000) menos a Amortização (que é constante e iguais em todos os períodos) de R$ 200.000.

De posse desses valores, calculamos o **valor dos Juros do segundo período**.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_2 = i \times SD_{inicial\ 2}$$

$$J_2 = 0{,}1 \times 600.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_2 = 60.000}}$$

Então, a **segunda Prestação** será igual a:

$$P_2 = A + J_2$$

$$P_1 = 200.000 + 60.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_2 = 260.000}$$

Vamos preencher a tabela só para finalizar a questão.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	800.000
1	800.000	200.000			600.000
2	600.000	200.000	60.000	**260.000**	400.000

Gabarito: Alternativa **D**

(ISS Criciúma - 2017) Um empréstimo de R$ 4.000,00 será pago em 8 prestações mensais, sendo a primeira delas paga 30 dias após o empréstimo, com juros de 2,5% ao mês sobre o saldo devedor, pelo Sistema de Amortização Constante (SAC.)

O valor, em reais, da sexta prestação será:

a) Maior que R$ 550,00.
b) Maior que R$ 540,00 e menor que R$ 550,00.
c) Maior que R$ 530,00 e menor que R$ 540,00.
d) Maior que R$ 520,00 e menor que R$ 530,00.
e) Menor que R$ 520,00.

Comentários:

"Professor, acho que fazer a tabela até a sexta linha será uma má ideia e não terei tempo nem paciência na hora da prova para isso".

É verdade aluno. Perceba que estamos aumentando, pouco a pouco, o **grau de dificuldade** das questões. E iremos ver agora alguns **"bizus"** que te ajudarão na hora da prova.

Sabemos que a sexta prestação será igual a:

$$P_i = A + J_i$$

$$P_6 = A + J_6$$

Iremos calcular separadamente cada parcela.

- **Amortização**

No SAC a amortização é constante e calculada pela divisão do valor do Empréstimo pela quantidade de parcelas. Logo:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{4.000}{8} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 500}}$$

Juros do sexto período

Preste atenção a essa dica. Sabemos que os Juros do sexto período serão iguais a:

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_6 = i \times SD_{inicial\ 6}$$

Precisamos então calcular o Saldo Devedor inicial do sexto período. Perceba, agora, o preenchimento de alguns campos da tabela até a linha 6.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	4.000
1	4.000	500			3.500
2	3.500	500			3.000
3	3.000	500			2.500
4	2.500	500			2.000
5	2.000	500			1.500
6	1.500	500			

Observe que preenchemos os campos do Saldo Devedor. **O Saldo Devedor final de um período é igual ao Saldo Devedor inicial menos a Amortização.**

E assim, calculamos os Juros do sexto período:

$$J_6 = i \times SD_{inicial\ 6}$$

$$J_6 = 0{,}025 \times 1.500 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{J_6 = 37,5}}$$

Logo, a sexta prestação será igual a:

$$P_6 = A + J_6$$

$$P_6 = 500 + 37{,}5 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{P_6 = 537,5}}$$

"Interessante professor. A tabela realmente auxilia e estou percebendo que nem sempre precisarei preenchê-la por completo. Mas, se a questão pedir, digamos, a sexagésima prestação de um financiamento de 100 parcelas?"

Ótima pergunta, caro aluno. Vamos resolver a próxima questão e responder esse seu questionamento.

Gabarito: Alternativa **C**

(ITAIPU - 2014) Qual será o valor da 60ª prestação de um financiamento no valor de R$ 700.000,00, com prazo de 100 meses para amortizar, utilizando a taxa efetiva de 10% ao mês, pelo sistema de amortização constante (SAC)?

a) R$ 7.000,00
b) R$ 7.700,00
c) R$ 35.000,00
d) R$ 35.700,00
e) R$ 70.000,00

Comentários:

Essa questão é bem interessante e muitos alunos se desesperam ao resolvê-la, justamente pelo fato da banca pedir uma prestação intermediária de um financiamento muito grande (em termos de tempo).

Observe o quadro da questão anterior. Perceba que há uma <u>recorrência para o valor do Saldo Devedor final do período</u>.

O Saldo Devedor final do período é igual ao valor do Empréstimo menos x vezes o valor da Amortização.

$$\boxed{\boldsymbol{SD_{final\,i} = E - x \times A}}$$

Onde x é a quantidade de Amortizações já ocorridas.

Antes de continuarmos o exercício, vamos calcular o Saldo Devedor final do quinto período (do exercício anterior).

$$SD_{final\,5} = 4.000 - 5 \times 500$$

$$SD_{final\,5} = 4.000 - 2.500 \quad \rightarrow \quad SD_{final\,5} = 1.500$$

Interessante, não é?

Voltemos ao nosso exercício.

Sabemos que a 60ª prestação será igual a:

$$P_i = A + J_i$$

$$P_{60} = A + J_{60}$$

Iremos calcular separadamente cada parcela.

- **Amortização**

No SAC a amortização é constante e calculada pela divisão do valor do Empréstimo pela quantidade de parcelas. Logo:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{700.000}{100} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 7.000}}$$

- **Juros da 60ª prestação**

Os Juros do 60º período serão iguais a:

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_{60} = i \times SD_{inicial\ 60}$$

Estudamos que o Saldo Devedor inicial de um período é igual ao Saldo Devedor final do período imediatamente anterior.

Então,

$$SD_{inicial\ 60} = SD_{final\ 59}$$

Vamos calcular o valor do Saldo Devedor final no período 59 utilizando a fórmula da dica acima.

$$SD_{final\ i} = E - x \times A$$

$$SD_{final\ 59} = 700.000 - 59 \times 7.000$$

$$SD_{final\ 59} = 700.000 - 413.000 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{SD_{final\ 59} = 287.000}}$$

E assim,

$$SD_{inicial\ 60} = SD_{final\ 59} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{SD_{inicial\ 60} = 287.000}}$$

De posse do Saldo Devedor inicial do período, calculamos os Juros.

$$J_{60} = i \times SD_{inicial\ 60}$$

$$J_{60} = 0{,}1 \times 287.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_{60} = 28.700}}$$

Logo, a **60ª prestação será igual a**:

$$P_{60} = A + J_{60}$$

$$P_{60} = 7.000 + 28.700 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_{60} = 35.700}$$

Este é nosso Gabarito. Porém, iremos além. Podemos também, **resolver de uma outra forma**.

Vamos juntos apresentá-la.

Vimos que a 60ª prestação será igual a:

$$P_{60} = A + J_{60}$$

A amortização calculamos no valor de $\boldsymbol{A = 7.000}$**.**

Precisamos, então, calcular o valor dos Juros do período 60.

Primeiro passo é calcular o valor dos **Juros do primeiro período**.

Os Juros de cada período i são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}1 \times 700.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 70.000}}$$

Observe que o Saldo Devedor inicial do primeiro período é o próprio valor do Empréstimo, uma vez que ainda nada foi pagado.

Logo, a primeira prestação será igual a:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 7.000 + 70.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_1 = 77.000}}$$

Estudamos na teoria, que **as prestações são decrescentes em PA** de razão:

$$r = -i \times A$$

$$r = -0{,}1 \times 7.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r = -700}}$$

Então, usaremos a **fórmula do termo geral da PA** para calcular o valor dos Juros na 60ª prestação. Vamos relembrar rapidamente.

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

Onde,

$a_n = termo\ geral\ da\ PA$

$a_1 = primeiro\ termo$

$n = quantidade\ de\ termos$

$r = razão$

Iremos usar a analogia para as Prestações. Vejamos:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$P_n = P_1 + (n-1) \times r$$

Então, **a 60ª prestação será igual a**:

$$P_n = P_1 + (n-1) \times r$$

$$P_{60} = 77.000 + (60-1) \times (-700)$$

$$P_{60} = 77.000 + 59 \times (-700)$$

$$P_{60} = 77.000 - 41.300 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_{60} = 35.700}$$

Concluindo: Esse problema é <u>bem completo</u> e com a análise dele podemos constatar diferentes meios de solucionar uma questão de SAC em que se pede uma parcela intermediária.

Gabarito: Alternativa **D**

(ISS Florianópolis - 2014) Uma pessoa financiou 100% de um imóvel no valor de R$ 216.000,00 em 9 anos. O pagamento será em prestações mensais e o sistema de amortização é o sistema de amortização constante (SAC).

Sabendo que o valor da terceira prestação é de R$2.848,00, a taxa de juros mensal cobrada é de:

a) 0,2%
b) 0,4%
c) 0,5%
d) 0,6%
e) 0,8%

Comentários:

Vamos, primeiramente, calcular o valor da Amortização.

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{216.000}{9 \times 12} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 2.000}}$$

Observe que as parcelas são mensais e o tempo, no enunciado, é fornecido em anos. 9 anos são iguais a 9×12 meses.

Com isso, já podemos preencher alguns campos da nossa tabela auxiliar.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	216.000
1	216.000	2.000			214.000
2	214.000	2.000			212.000
3	212.000	2.000	J_3	2.848	

Perceba que o Saldo Devedor final de um período será sempre igual ao Saldo Devedor inicial menos a Amortização.

Sabemos que a Prestação é igual a soma dos Juros com a Amortização. Sendo assim, os Juros do terceiro período serão iguais a:

$$P_3 = A + J_3$$

$$2.848 = 2.000 + J_3$$

$$J_3 = 2.848 - 2.000 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{J_3 = 848}}$$

Os Juros de cada período i são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_3 = i \times SD_{inicial\ 3}$$

$$848 = i \times 212.000$$

$$i = \frac{848}{212.000} \rightarrow \boldsymbol{i = 0,004 \ ou \ 0,4\% \ ao \ mês}$$

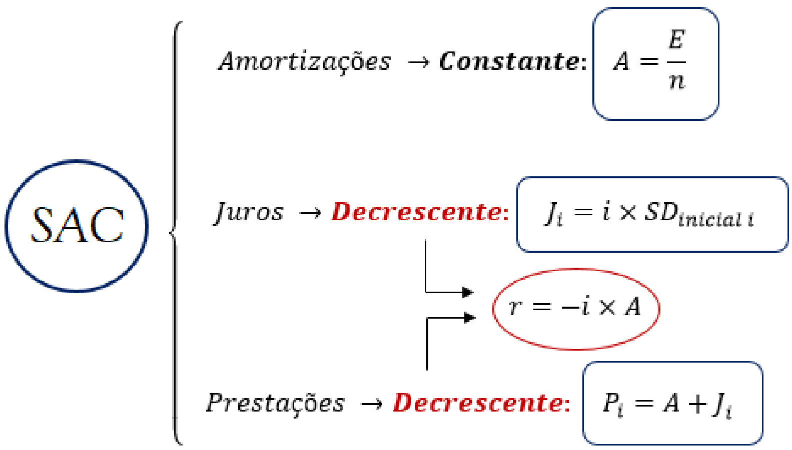
Gabarito: Alternativa **B**

(EPE - 2010) Se uma pessoa pagasse uma dívida em prestações mensais usando o Sistema de Amortização Constante (SAC), pagaria prestações sucessivas

a) Iguais
b) Crescentes
c) Com parcelas de amortização crescentes
d) Com parcelas de juros decrescentes
e) Com juros apenas na última

Comentários:

Uma <u>questão teórica</u> sobre o SAC. Vamos relembrar nossa **esquematização**:



Vejamos as alternativas uma a uma.

a) Iguais

INCORRETO. As prestações são **DECRESCENTES**. Prestações iguais é característica do Sistema Francês de Amortização (nosso próximo tópico).

b) Crescentes

INCORRETO. As prestações são **DECRESCENTES**.

c) *Com parcelas de amortização crescentes*

INCORRETO. As amortizações são **CONSTANTES**.

d) *Com parcelas de juros decrescentes*

CORRETO. Os Juros (assim como as prestações) são **DECRESCENTES**.

e) *Com juros apenas na última*

INCORRETO. Há incidência de Juros em todas as prestações.

Gabarito: Alternativa **D**

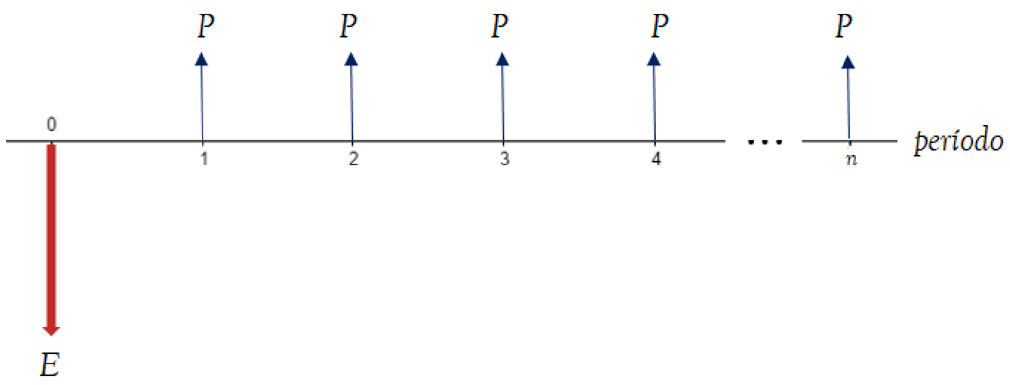
Terminamos o SAC. Sistema com **elavado grau de cobrança** na prova. Certifique-se que entendeu a mecânica de pagamento do Sistema e a forma de cálculo.

Faça uma pausa. Levante-se. Tome um **café** e vamos começar mais um Sistema bastante cobrado: O Sistema Francês de Amortização.

INTERVALO

Sistema Francês de Amortização (SF)

Neste Sistema de Amortização, as **Prestações são constantes** e iguais em todos os períodos. Graficamente seria algo, genericamente, igual a:



Perceba que é o mesmo gráfico que estudamos em Série de rendas Certas (rendas Uniformes). Ou seja, para calcular o Valor da Prestação no SF iremos tomar como base a fórmula do Valor Atual de uma Série de Rendas Certas Postecipadas (com os devidos ajustes nas incógnitas).

Lembrando que o **Valor Atual** (no nosso caso o valor E tomado Emprestado) de uma série de rendas certas **Postecipadas** é o valor no momento "0", também chamado de Valor Presente (VP), que **equivale a soma** de todas as **n** rendas certas **P** descontadas pela mesma taxa de juros **i**.

Sendo assim, a fórmula de cálculo da Prestação será:

$$\boldsymbol{E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad ou \quad E = P \times \left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i \times (1+i)^{n}}\right]}$$

Onde,

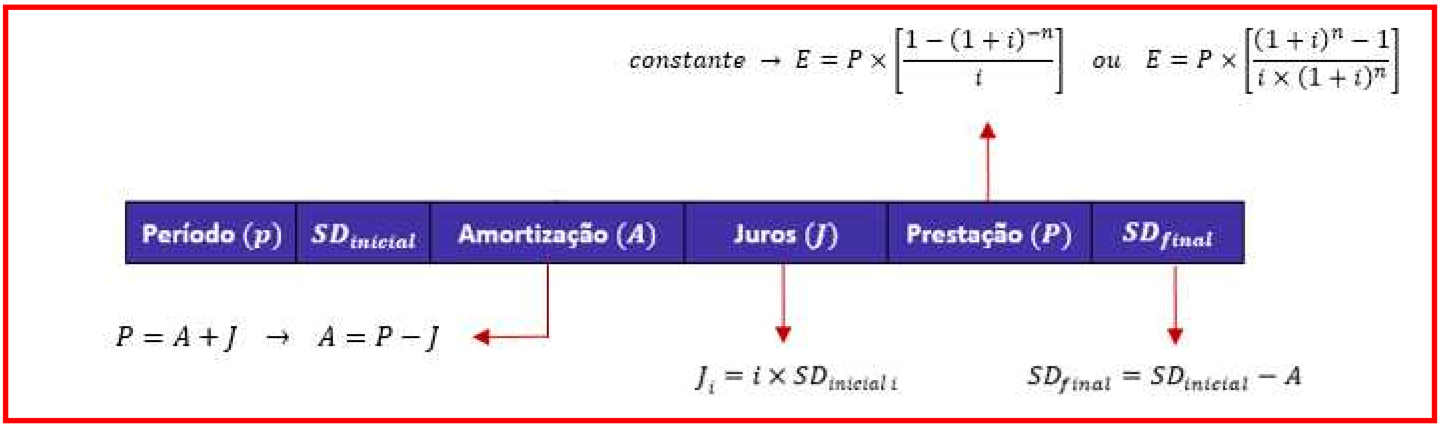
$E = Valor\ do\ Empréstimo$

$P = Valor\ das\ Prestações\ iguais$

$n = número\ de\ prestações$

$i = Taxa\ de\ Juros$

No SF também iremos utilizar uma tabela auxiliar para montar a tabela completa do pagamento do Empréstimo. Todavia, **algumas alterações serão feitas**. Observe:



4 observações devem ser feitas:

1. A forma de **cálculo dos Juros** será a mesma **independentemente** do Sistema de Amortização. Será sempre igual a **Taxa de Juros vezes o Saldo Devedor inicial** do Período.

2. O **Saldo Devedor final do período** também não muda de cálculo. Será sempre o **Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização**.

3. No SF, a Prestação é constante e será calculada pelas fórmulas apresentadas.

4. **Atenção a este quarto ponto**. Diferentemente do SAC onde as amortizações eram constantes, no SF as Amortizações variam e não há uma fórmula de cálculo direto para elas. Devemos primeiro calcular a Prestação, depois os Juros, e a Amortização será a diferença entre esses fatores.

Antes de partirmos para o exemplo numérico sobre o SF, iremos esclarecer ainda mais este **quarto ponto**. Atente-se para a diferença entre o SAC e o SF.

- **Sistema de Amortização Constante (SAC)**

No **SAC**, conforme estudado, primeiramente, calculamos o valor da **Amortização** que é constante e dada pela seguinte fórmula:

$$A = \frac{E}{n}$$

Posteriormente, calculamos os **Juros do período**. Os Juros são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros vezes o Saldo Devedor inicial do período.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

E, de posse da Amortização e dos Juros, encontramos a **Prestação do período**.

$$P_i = A + J_i$$

Perceba que, na fórmula acima, **a Amortização não tem o índice "$\boldsymbol{i}$"**, pois esta é constante e iguais em todos os períodos no SAC.

- **Sistema Francês de Amortização (SF)**

Já no SF, <u>primeiramente</u>, devemos calcular a **Prestação** de acordo com a seguinte fórmula:

$$\boxed{E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad ou \quad E = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]}$$

<u>Posteriormente</u> calculamos os **Juros do período**. Os Juros são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros vezes o Saldo Devedor inicial do período.

$$\boxed{J_i = i \times SD_{inicial\ i}}$$

E, por fim, encontramos a **Amortização do período**.

$$\boxed{P = A_i + J_i \rightarrow \quad A_i = P - J_i}$$

Percebeu a diferença? No SF, a Prestação que não tem o índice, justamente por ela ser constante em todos os períodos.

Aquela nossa "escadinha" de cálculo, agora, no SF, irá **mudar de ordem para adaptação** às características deste Sistema.

- **No SAC:** Amortização → Juros do Período → Prestação do Período

- **No SF:** Prestação → Juros do Período → Amortização do Período

Vamos <u>treinar em números</u> o SF montando uma tabela?

Exemplo: João pegou um Empréstimo no valor de R$ 710.000,00 para ser pago em 4 prestações anuais e iguais com juros de 5% ao ano. A primeira prestação é paga 1 ano após a tomada do Empréstimo. Monte a tabela completa dos pagamentos feitos por João.

Dado: $(1 - 1{,}05^{-4})/0{,}05 = 3{,}55$

Perceba que o enunciado não cita qual é o Sistema de Amortização que será tomado como base para o cálculo. Porém, a banca já deixa explícito que as parcelas são iguais. Sendo assim, estamos diante do Sistema Francês de Amortização.

Primeiro passo é calcular o valor da **Prestação**.

$$E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Onde,

$E = Valor\ do\ Empréstimo = 710.000$

$P = Valor\ das\ Prestações\ iguais = ?$

$n = número\ de\ prestacoes = 4$

$i = Taxa\ de\ Juros = 5\%\ ao\ ano = 0{,}05$

Iremos substituir os valores e calcular a prestação:

$$E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$710.000 = P \times \left[\frac{1-(1+0{,}05)^{-4}}{0{,}05}\right]$$

$$710.000 = P \times \left[\frac{1-1{,}05^{-4}}{0{,}05}\right]$$

O enunciado nos informa que $(1 - 1{,}05^{-4})/0{,}05 = 3{,}55$. Logo:

$$710.000 = P \times 3{,}55$$

$$P = \frac{710.000}{3{,}55} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P = 200.000}$$

Assim, já podemos preencher uma parte da tabela.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	710.000
1	710.000			**200.000**	
2				**200.000**	
3				**200.000**	
4				**200.000**	

Observe que a Prestação é constante e iguais para todos os períodos.

Primeiro Período

Vamos, primeiramente, calcular os **Juros do primeiro período**.

Os Juros de cada período i são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_1 = 0{,}05 \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}05 \times 710.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J_1 = 35.500}$$

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	710.000
1	710.000		**35.500**	200.000	
2				200.000	
3				200.000	
4				200.000	

E a **Amortização do primeiro período** será dada, como vimos na tabela auxiliar, pela diferença da Prestação menos os Juros do período.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	710.000
1	710.000	$200.000 - 35.000 = \mathbf{164.500}$	35.500	200.000	
2				200.000	
3				200.000	
4				200.000	

Por fim, calculamos o **Saldo Devedor final** do primeiro período que será igual a o Saldo Devedor inicial menos a Amortização.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	710.000
1	710.000	164.500	35.500	200.000	$710.000 - 164.500 = \mathbf{545.500}$
2	**545.500**			200.000	
3				200.000	
4				200.000	

"Professor, estou entendendo. A "escadinha" continua. O resultado de uma coluna serve como parâmetro para outra e eu estou fazendo as devidas adaptações de acordo com as características do SF que estudamos".

Perfeito, caro aluno. A ideia é essa mesma.

Vamos calcular a segunda linha por completo e, posteriormente, preencher a tabela com todos os valores (da linha) já calculados.

- **Segundo Período**

1. Calculamos os **Juros do segundo período**.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_2 = i \times SD_{inicial\ 2}$$

$$J_2 = 0{,}05 \times 545.500 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{J_2 = 27.275}}$$

2. Calculamos a **Amortização do segundo período**.

$$P = A_2 + J_2$$

$$A_2 = P - J_2$$

$$A_2 = 200.000 - 27.275 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_2 = 172.725}}$$

3. Cálculo do **Saldo Devedor final do segundo período.**

$$SD_{final\ i} = SD_{inicial\ i} - A_i$$

$$SD_{final\ 2} = SD_{inicial\ 2} - A_2$$

$$SD_{final\ 2} = 545.500 - 172.725 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{SD_{final\ 2} = 372.775}}$$

Preenchendo a segunda linha da tabela.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	710.000
1	710.000	164.500	35.500	200.000	545.500
2	545.500	172.725	27.275	200.000	372.775
3	372.775			200.000	
4				200.000	

E seguimos com essa sistemática de contas em todos os períodos.

TOME NOTA!

Eu já irei deixar a tabela abaixo totalmente preenchida e, como dever de casa, você preenchê-la por completo e confira com o resultado abaixo. Pode arredondar os números e não há necessidade de trabalhar com casas decimais.

Certifique-se apenas que **entendeu por completo a mecânica de cálculo** dos fatores no Sistema Francês de Amortização.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	710.000
1	710.000	164.500	35.500	200.000	545.500
2	545.500	172.725	27.275	200.000	372.775
3	372.775	181.361,25	18.638,75	200.000	191.413,75
4	191.413,75	190.429,31	9.570,69	200.000	**984,44**

ESCLARECENDO!

Observe que o valor não zerou (e deveria). Mas, recorde-se de que no início da aula, eu relatei que em algumas vezes, pelo arredondamento dos valores, o resultado poderia não zerar. Todavia, perceba que o resultado do Saldo Devedor final é irrisório comparado ao valor do Empréstimo.

O resultado final não zerou pois $(1 - 1{,}05^{-4})/0{,}05 = 3{,}54595$ e não $3{,}55$ conforme arredondei. Apenas forneci esse valor arredondado para melhor compreensão e entendimento da sistemática de cálculo do SF.

CARACTERÍSTICAS DO SF

Prestações Constantes

Conforme estudamos, no SF as **Prestações são iguais** e calculadas pela seguinte fórmula:

$$E = P \times \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right] \quad ou \quad E = P \times \left[\frac{(1 + i)^{n} - 1}{i \times (1 + i)^{n}}\right]$$

Juros Decrescentes

No SF **os Juros são decrescentes**. Mas, diferentemente do SAC, aqui **não há decréscimo constante**. Não há uma relação de recorrência entre os Juros de um período e os Juros do período seguinte.

Amortizações Crescentes

No SF, **as Amortizações são CRESCENTES**. E mais, são crescentes em **Progressão Geométrica (PG) de razão $\boldsymbol{q = (1 + i)}$.**

Perceba em nosso exemplo que, para calcular a Amortização do período seguinte, bastava multiplicarmos a Amortização do período anterior por $(1 + i)$. Vejamos:

$$A_2 = A_1 \times (1 + i)$$

$$A_2 = 164.500 \times (1 + 0{,}05)$$

$$A_2 = 164.500 \times 1{,}05 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_2 = 172.725}}$$

Sendo assim, podemos usar a **fórmula do termo geral da PG para o cálculo da Amortização** no período n desejado.

Vamos <u>relembrar</u> a fórmula do termo geral da PG.

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

Iremos adaptar esta fórmula para o termo geral da Amortização.

Lembrando que a razão q de crescimento da Amortização é igual a $(1 + i)$.

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

$$A_n = A_1 \times (1 + i)^{n-1}$$

ESQUEMATIZANDO

SF

- Prestações $\rightarrow$ **Constante**

  $$E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad ou \quad E = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

- Juros $\rightarrow$ **Decrescente**: $J_i = i \times SD_{inicial\ i}$
- Amortizações $\rightarrow$ **Crescente** $P = A_i + J_i$

  $q = (1+i)$

Antes de iniciarmos a resolução dos exercícios, vamos a uma **dica valiosa** para sua prova e uma observação final.

#DicaDoProf

Algumas questões de provas cobram o valor da última Amortização do Empréstimo. Imagine então, que a banca forneça o pagamento de um Empréstimo em 25 prestações e questione o valor da vigésima quinta Amortização.

Imagine como seria, na prova, calcular a última Amortização com o auxílio da tabela. Ou então, calcular a primeira Amortização e encontrar a última pela fórmula do termo geral da PG. Seria bastante trabalhoso certo?

Então, temos uma fórmula para o valor da **última Amortização** de um empréstimo pelo SF.

$$\boxed{A_{última} = \frac{P}{1+i}}$$

Já a observação final refere-se ao Sistema Price.

Sistema (Tabela) Price

O **Sistema Price** é um caso específico do Sistema Francês de Amortização. Para fins de prova, em resoluções numéricas, você irá adotá-las como **expressões sinônimas**.

A **única diferença** reside na Taxa de Juros do Empréstimo.

- Na Tabela Price, a Taxa de Juros fornecida é a Nominal. E, então, para resolver, você precisa inicialmente converter a Taxa Nominal em Taxa Efetiva.

- Já o Sistema Francês, fornece a Taxa Efetiva diretamente.

Dito isto, vamos aos **exercícios de concursos** sobre SF.

(ISS Novo Hamburgo - 2020) Considere um empréstimo bancário realizado no valor de R$ 100.000,00 para ser liquidado em 100 prestações mensais, iguais e consecutivas, vencendo a primeira ao final do 1º mês. Sabe-se que o empréstimo foi realizado pelo regime do Sistema Francês (Tabela Price) de Amortização, à taxa de juros compostos de 2% ao mês, obtendo-se o valor de R$ 2.800,00 para cada prestação.

Com base nos dados apresentados, o saldo devedor do empréstimo, após o pagamento da 2ª prestação, será de

a) R$ 99.380,00.
b) R$ 99.200,00.
c) R$ 98.384,00.
d) R$ 98.551,68.
e) R$ 98.702,71.

Comentários:

Vamos resolver essa questão com o auxílio da tabela para melhor compreensão.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000			2.800	
2				2.800	

Começaremos calculando os **Juros do primeiro período**.

Os Juros de cada período i são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}02 \times 100.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 2.000}}$$

De posse do valor da Prestação e dos Juros do primeiro período, calculamos o valor da **Amortização do primeiro período**.

$$P = A_1 + J_1$$

$$2.800 = A_1 + 2.000$$

$$A_1 = 2.800 - 2.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_1 = 800}}$$

E, para finalizar o primeiro período, calculamos o **Saldo Devedor final**.

$$SD_{final\ i} = SD_{inicial\ i} - A_i$$

$$SD_{final\ 1} = SD_{inicial\ 1} - A_1$$

$$SD_{final\ 1} = 100.000 - 800 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{SD_{final\ 1} = 99.200}}$$

Preenchendo a tabela:

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	800	2.000	2.800	99.200
2	99.200			2.800	

Iremos, agora, repetir os cálculos acima para o segundo período.

Os Juros do segundo período serão iguais a:

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_2 = i \times SD_{inicial\ 2}$$

$$J_2 = 0{,}02 \times 99.200 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{J_2 = 1.984}}$$

E a Amortização será igual a:

$$P = A_2 + J_2$$

$$2.800 = A_2 + 1.984$$

$$A_2 = 2.800 - 1.984 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A_2 = 816}}$$

Por fim, calculamos o valor solicitado pelo enunciado, isto é, o Saldo Devedor final do segundo período.

$$SD_{final\ i} = SD_{inicial\ i} - A_i$$

$$SD_{final\ 2} = SD_{inicial\ 2} - A_2$$

$$SD_{final\ 2} = 99.200 - 816 \quad \rightarrow \boldsymbol{SD_{final\ 2} = 98.384}$$

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	100.000
1	100.000	800	2.000	2.800	99.200
2	99.200	816	1.984	2.800	**98.384**

Antes de passarmos para o próximo exercício, há uma <u>outra maneira de se calcular a Amortização</u> do segundo período.

De posse da Amortização do primeiro período, poderíamos multiplicar por $(1 + i)$, pois como vimos, **a Amortização no SF é crescente em PG de razão $\boldsymbol{q = (1 + i)}$**.

Então, ficaríamos com:

$$A_2 = A_1 \times (1 + i)$$

$$A_2 = 800 \times (1 + 0{,}02) \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A_2 = 816}}$$

E a continuação da resolução seria igual à da forma acima.

Perceba que há mais de 1 maneira de se chegar ao resultado. Estou te apresentando os diversos caminhos para que você opte por um e se sinta **confortável** para resolver. Eu, particularmente, gosto muito de trabalhar com o auxílio da tabela em questões que pedem até o terceiro período. Mais que isso temos que realmente trabalhar apenas com fórmulas.

Gabarito: Alternativa **C**

(IDAN - 2019) Uma prefeitura do interior do estado adquiriu um equipamento de terraplanagem no valor de $ 300.000,00. Impossibilitada de efetuar o pagamento à vista, a citada prefeitura solicitou ao banco de seu relacionamento um financiamento para a compra do equipamento. O banco aceitou a operação, financiando o valor total do equipamento em 10 parcelas iguais e consecutivas no valor de $ 33.398,00 cada uma. Os juros pactuados foram de 2% ao mês. A primeira parcela vence 30 dias a partir da assinatura do contrato e pagamento pelo banco ao fornecedor, e o sistema de amortização é o PRICE. Com base nos dados acima descritos, assinale a alternativa correta que indica respectivamente o valor aproximado dos juros e da amortização do capital, relativos à segunda prestação do financiamento.

a) $ 6.000,00 e $ 27.398,00
b) $ 6.000,00 e $ 27.946,00
c) $ 5.452,00 e $ 27.946,00
d) $ 4.893,00 e $ 28.505,00

Comentários:

Vamos resolver essa questão **sem auxílio da tabela** e de uma maneira mais rápida (tal como você fará na sua prova).

Primeiro passo é calcular os Juros do primeiro período.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}02 \times 300.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 6.000}}$$

De posse dos Juros e da Prestação, calculamos a Amortização do período.

$$P = A_1 + J_1$$

$$33.398 = A_1 + 6.000$$

$$A_1 = 33.398 - 6.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_1 = 27.398}}$$

Sabemos que no SF, as Amortizações são crescentes em PG de razão $q = (1 + i)$.

Então, a Amortização do segundo período será igual a:

$$A_2 = A_1 \times (1 + i)$$

$$A_2 = 27.938 \times (1 + 0{,}02)$$

$$A_2 = 27.938 \times 1{,}02 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_2 = 27.945{,}96}}$$

E, de posse da Amortização do segundo período e da Prestação, calculamos os **Juros do segundo período**.

$$P = A_2 + J_2$$

$$33.398 = 27.945{,}96 + J_2$$

$$J_2 = 33.398 - 27.945{,}96 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J_2 = 5.452{,}04}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(MP TCE SC - 2014) Quanto aos sistemas de amortização constante (SAC) e Price sem indexação monetária, é correto afirmar:

a) No sistema Price a participação das amortizações na prestação diminui ao longo do tempo.
b) No sistema Price o valor das prestações diminui ao longo do tempo.
c) No sistema Price as prestações se constituem numa progressão aritmética crescente.
d) Tanto no sistema SAC quanto no Price a parcela dos juros na prestação diminui ao longo do tempo.
e) Tanto no sistema SAC quanto no Price as prestações se constituem numa progressão aritmética crescente.

Comentários:

Ótima questão para **revisarmos conceitualmente** os 2 Sistemas de Amortização estudados. Vamos repetir os esquemas de ambos e analisar as alternativas separadamente.

- **Sistema de Amortização Constante**

SAC

- *Amortizações* → ***Constante***: $\boxed{A = \frac{E}{n}}$
- *Juros* → ***Decrescente***: $\boxed{J_i = i \times SD_{inicial\ i}}$
  - $r = -i \times A$
- *Prestações* → ***Decrescente***: $\boxed{P_i = A + J_i}$

Sistema Francês de Amortização

SF

- $\boxed{E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad ou \quad E = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]}$
- *Prestações* → ***Constante***
- *Juros* → ***Decrescente***: $\boxed{J_i = i \times SD_{inicial\ i}}$
- *Amortizações* → ***Crescente*** $\boxed{P = A_i + J_i}$
  - $q = (1+i)$

a) No sistema Price a participação das amortizações na prestação diminui ao longo do tempo.

INCORRETO. No Sistema Price, as Amortizações são **CRESCENTES** ao longo do tempo.

b) No sistema Price o valor das prestações diminui ao longo do tempo.

INCORRETO. No Sistema Price, as Prestações são **CONSTANTES** ao longo do tempo.

c) No sistema Price as prestações se constituem numa progressão aritmética crescente.

INCORRETO. No Sistema Price, as Prestações são **CONSTANTES**.

d) Tanto no sistema SAC quanto no Price a parcela dos juros na prestação diminui ao longo do tempo.

CORRETO. Nos dois Sistemas de Amortizações a cota dos Juros é **DECRESCENTE** ao longo do tempo.

Os juros de cada período são obtidos pela multiplicação da taxa de juros vezes o Saldo Devedor inicial do período. Se o Saldo Devedor inicial diminui ao longo do tempo, os Juros também irão diminuir.

Atente-se que, apenas no SAC os Juros são decrescentes em PA. No SF, os Juros são decrescentes, mas não há uma equação de recorrência para esse decréscimo.

e) *Tanto no sistema SAC quanto no Price as prestações se constituem numa progressão aritmética crescente.*

INCORRETO. A assertiva está incorreta para ambos os Sistemas. No SAC as prestações são **DECRESCENTES** em PA e no SF as prestações são **CONSTANTES**.

Gabarito: Alternativa **D**

(Liquigás - 2014) Considere a amortização de uma dívida, em 5 prestações mensais de R$ 2.060,40 cada, com juros compostos de 1% ao mês.

A última amortização, em reais, será de, aproximadamente,

a) 1.960,40
b) 1.980,00
c) 2.040,00
d) 2.060,40
e) 2.080,40

Comentários:

Imagine como seria na prova calcular a última Amortização com o auxílio da tabela. Ou então, calcular a primeira Amortização e encontrar a última pela fórmula do termo geral da PG. Seria bastante trabalhoso certo?

Por isso, é importante ter em mente a dica fornecida na parte teórica em relação ao valor da primeira e da última Amortização.

Vamos utilizar a <u>fórmula do valor da última Amortização</u>.

$$A_{\text{última}} = \frac{P}{1+i}$$

$$A_{\text{última}} = \frac{2.060{,}40}{1+0{,}01}$$

$$A_{\text{última}} = \frac{2.060{,}40}{1{,}01} \rightarrow \boldsymbol{A_{\text{última}} = 2.040}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(ANEEL - 2010) Tendo como referência os conceitos e as aplicações da matemática financeira, julgue o item a seguir.

A chamada tabela Price é um caso particular do sistema de amortização francês, que se caracteriza por amortizações decrescentes, juros fixos e prestações variáveis, cujo período é maior que aquele a que se refere a taxa.

Comentários:

A Tabela Price "carrega" as mesmas características do SF.

A **única diferença** reside na Taxa de Juros. Na tabela Price, a Taxa de Juros é Nominal, equanto que no SF, a Taxa de Juros é a Taxa Efetiva.

Ou seja, se a tabela Price mantém as características do SF, suas Amortizações são CRESCENTES, os Juros são DECRESCENTES e as Prestações são CONTANTES.

Logo, a assertiva está errada.

Gabarito: **ERRADO**

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO (SAM)

Não é propriamente um novo sistema a ser estudado. Neste sistema, a prestação do período (assim como os Juros e a Amortização) será calculada pela **média aritmética** dos outros dois Sistemas já estudados, isto é, será a média do valor da Prestação do SAC e do valor da Prestação do SF.

No SAM as Prestações são iguais à **Média Aritmética** das prestações calculadas pelo SAC e pelo SF

No Sistema de Amortização Misto (SAM) a **Prestação de cada período** será igual a:

$$P_{misto\ i} = \frac{P_{SAC\ i} + P_{SF\ i}}{2}$$

Onde,

$P_{misto\ i} = Prestação\ do\ SAM\ no\ período\ i$

$P_{SAC\ i} = Prestação\ do\ SAC\ no\ período\ i$

$P_{SF\ i} = Prestação\ no\ SF\ no\ período\ i$

Vejamos em exercícios de concursos este tópico.

(Auditor TCE ES - 2012 Adaptada) Uma empresa, com o objetivo de captar recursos financeiros para ampliação de seu mercado de atuação, apresentou projeto ao Banco Alfa, que, após análise, liberou R$ 1.000.000,00 de empréstimo, que deverá ser quitado em 12 parcelas mensais, a juros nominais de 18% ao ano, capitalizados mensalmente.

Considerando essa situação, julgue o item a seguir.

Considere que, pelo sistema de amortização constante, a primeira parcela de quitação do empréstimo seja igual a R$ 90.000,00 e, pelo sistema Price, igual a R$ 83.000,00. Então, pelo sistema misto, a primeira parcela de quitação do empréstimo será inferior a R$ 82.000,00.

Comentários:

A primeira parcela, pelo Sistema Misto, será igual a média aritmética da parcela pelo SAC e da parcela pelo SF.

$$P_{misto} = \frac{P_{SAC} + P_{SF}}{2}$$

$$P_{misto} = \frac{90.000 + 83.000}{2}$$

$$P_{misto} = \frac{173.000}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_{misto} = 86.500}$$

Então, pelo sistema misto, a primeira parcela de quitação do empréstimo será **SUPERIOR** a R$ 82.000,00.

Gabarito: **ERRADO**

(TCE PR - 2016 Adaptada) Um empréstimo de R$ 240.000 deverá ser quitado, no sistema Price, em 12 parcelas mensais iguais, com a primeira parcela programada para vencer um mês após a contratação do empréstimo. A taxa de juros nominal contratada foi de 12% ao ano capitailizados mensalmente e, com isso, cada prestação ficou em R$ 21.324.

Nessa situação, se a pessoa que contratou o empréstimo tivesse optado pelo sistema de amortização misto, com a mesma taxa de juros, a terceira prestação seria igual a

a) R$ 21.133.
b) R$ 22.000.
c) R$ 21.815.
d) R$ 21.662.
e) R$ 21.410.

Comentários:

A terceira prestação, pelo Sistema Misto, será igual a média aritmética da terceira prestação do SAC e da terceira prestação do SF.

$$P_{misto\ 3} = \frac{P_{SAC\ 3} + P_{SF\ 3}}{2}$$

Vamos calcular <u>separadamente</u> cada termo.

- **Sistema Francês (SF)**

O enunciado já nos fornece o valor da prestação no SF. Lembrando que **no SF as prestações são constantes** ao longo do tempo. Então,

$$\boxed{\boldsymbol{P_{SF\,3} = 21.324}}$$

- **Sistema de Amortização Constante (SAC)**

Primeiro passo é calcular o valor da Amortização. O valor da Amortização que é constante será igual a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{240.000}{12} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 20.000}}$$

De posse da Amortização, já podemos preencher algumas células da nossa tabela. Observe.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	240.000
1	240.000	20.000			220.000
2	220.000	20.000			200.000
3	200.000	20.000			

Perceba que com o valor da Amortização, já conseguimos preencher toda a coluna do Saldo Devedor final do período, uma vez que o Saldo Devedor final é igual ao Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização.

Iremos, agora, calcular os Juros do terceiro período.

Os Juros de cada período i são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período i.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_3 = i \times SD_{inicial\ 3}$$

$$J_3 = 0{,}01 \times 200.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_3 = 2.000}}$$

Atente-se para a conversão do Taxa de Juros anual para mensal. Você não deixou passar esse detalhe certo?

A Taxa de Juros foi fornecida em ano e os pagamentos do empréstimo são mensais. Devemos transformar a taxa nominal anual em taxa efetiva mensal (treinamos essa conversão exaustivamente na aula de Juros Compostos).

Primeiro, tenha em mente que "**QUEM MANDA É O PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO**". Sendo assim, devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização

"E como passamos da unidade de tempo do período da taxa para a unidade de tempo do período de capitalização?"

Basta fazermos uma **simples divisão/multiplicação**.

$$i_{mensal} = \frac{i_{anual}}{12}$$

$$i_{mensal} = \frac{0{,}12}{12} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_{mensal} = 0{,}01}}$$

Voltando à questão. De posse da Amortização e dos Juros do terceiro período, calculamos o valor da Prestação do terceiro período pelo SAC.

$$P_3 = A + J_3$$

$$P_{SAC\ 3} = 20.000 + 2.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_{SAC\ 3} = 22.000}}$$

E com isso, calculamos o valor da terceira Prestação pelo SAM.

$$P_{misto\ 3} = \frac{P_{SAC\ 3} + P_{SF\ 3}}{2}$$

$$P_{misto\ 3} = \frac{22.000 + 21.324}{2}$$

$$P_{misto\ 3} = \frac{43.324}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_{misto\ 3} = 21.662}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(Auditor TCE ES - 2012 Adaptada) Considerando que um veículo no valor de R$ 57.000,00 tenha sido financiado em 20 prestações mensais e consecutivas, à taxa de juros de 4% ao mês, e que 2,2 seja valor aproximado para $1{,}04^{20}$, julgue o item seguinte.

O valor da primeira prestação será superior a R$ 4.830,00 se o veículo tiver sido financiado pelo Sistema de Amortização Misto.

Comentários:

O valor da primeira prestação será a média aritmética da primeira prestação calculada pelos SAC e pelo SF.

$$P_{misto\ 1} = \frac{P_{SAC\ 1} + P_{SF\ 1}}{2}$$

Vamos calcular cada parcela separadamente.

- **SAC**

A primeira Prestação no SAC será igual a:

$$P_i = A + J_i$$

$$P_{SAC\ 1} = A + J_1$$

Primeiro calculamos a Amortização:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{57.000}{20} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 2.850}}$$

Posteriormente, os Juros do primeiro período.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}04 \times 57.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_3 = 2.280}}$$

Sendo assim, a primeira Prestação pelo SAC será igual a:

$$P_{SAC\ 1} = A + J_1$$

$$P_{SAC\ 1} = 2.850 + 2.280 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_{SAC\ 1} = 5.130}}$$

- **SF**

No SF, as Prestações são constantes e calculadas pela seguinte fórmula:

$$E = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

$$57.000 = P \times \left[\frac{(1+0{,}04)^{20} - 1}{0{,}04 \times (1+0{,}04)^{20}}\right]$$

$$57.000 = P \times \left[\frac{1{,}04^{20} - 1}{0{,}04 \times (1{,}04)^{20}}\right]$$

Observe que o enunciado nos fornece o valor $1{,}04^{20} = 2{,}2$.

$$57.000 = P \times \left[\frac{2,2 - 1}{0,04 \times 2,2}\right]$$

$$57.000 = P \times \left[\frac{1,2}{0,04 \times 2,2}\right]$$

$$P = \frac{57.000 \times 0,04 \times 2,2}{1,2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P = 4.180}$$

Logo, a primeira Prestação no SAM será igual a:

$$P_{misto\ 1} = \frac{P_{SAC\ 1} + P_{SF\ 1}}{2}$$

$$P_{misto\ 1} = \frac{5.130 + 4.180}{2}$$

$$P_{misto\ 1} = \frac{9.310}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_{misto\ 1} = 4.655}$$

Ou seja, o valor da primeira prestação será **INFERIOR** a R$ 4.830,00 se o veículo tiver sido financiado pelo Sistema de Amortização Misto.

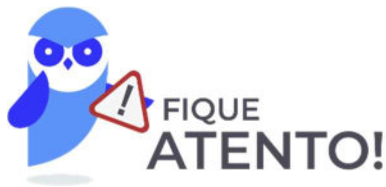
Gabarito: **ERRADO**

Relação Teórica

Algumas questões de provas cobram uma **relação teórica entre as Prestações** nos 3 Sistemas que estudamos, quais sejam, Sistema de Amortização Constante, Sistema Francês e Sistema de Amortização Misto.

Imagine que uma questão forneça um valor de Empréstimo de R$ 535.427,18 a ser pago a uma taxa de 3,78% ao mês em 93 prestações mensais e nos questione por qual dos 3 Sistemas de Amortização citados acima a primeira Prestação paga seria maior.

É claro que você poderia calcular o valor da primeira Prestação para os 3 métodos. Daria muito trabalho e certamente não seria a intenção da banca te fazer realizar todas essas contas. Então, vamos a uma dica muito valiosa sobre a relação do valor das Prestações para esses Sistemas.



Para um **mesmo valor de empréstimo com prazo de operação e taxa de juros idênticos**, as Prestações são ordenadas, em termos de valor, na seguinte ordem:

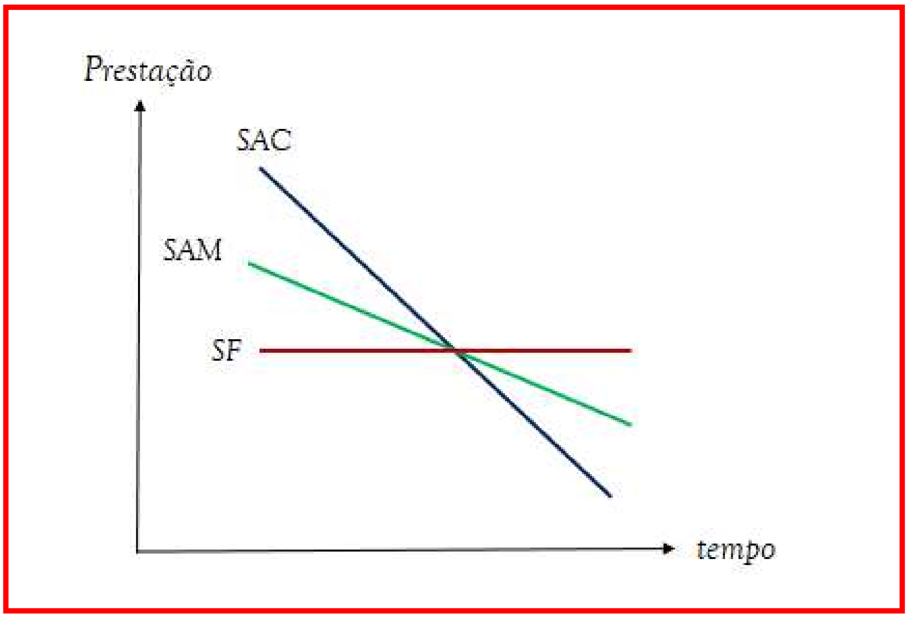
- **Primeira Prestação**

$$1° \ Prestação: \ \ SAC > SAM > SF$$

- **Última Prestação**

$$Última \ Prestação: \ \ SF > SAM > SAC$$

Graficamente, podemos representar da seguinte maneira:



Observe que, para um mesmo Empréstimo com prazo de operação e taxa de juros idênticos, as Prestações iniciais no SAC serão maiores que no SF (que é constante e representada por uma reta horizontal).

Pelo fato de as Prestações serem a média aritmética, obviamente, as Prestações do SAM sempre estarão na posição intermediária, exceto pelo período de tempo em que a prestação do SAC poderia ser igual à Prestação do SF e, então, nesse caso, a Prestação do SAM também seria igual a estas duas.

ATENÇÃO DECORE!

Para um mesmo valor de Empréstimo com prazo de operação e taxa de juros idênticos:

Primeira Prestação $\longrightarrow$ $SAC > SAM > SF$

HORA DE PRATICAR!

(FUNPRESP JUD - 2016) O primeiro pagamento de um empréstimo de R$ 100.000,00 a ser quitado em 20 pagamentos anuais, com juros de 5% ao ano, deverá ocorrer um ano após a liberação do capital.

A partir dessas informações, julgue o próximo item a respeito das diversas possibilidades de amortização desse empréstimo.

Pelo sistema de amortização misto, a prestação inicial terá valor superior à calculada pelo sistema francês.

Comentários:

Vamos relembrar a relação de ordenação de valores da primeira Prestação.

$$\underline{\textit{Primeira Prestação}} \longrightarrow SAC > \boxed{SAM > SF}$$

Observe, porém, que a questão compara apenas o SAM com o SF (retângulo vermelho acima). E, **comparando apenas esses 2 Sistemas**, a prestação inicial no SAM terá valor **SUPERIOR** à calculada pelo SF.

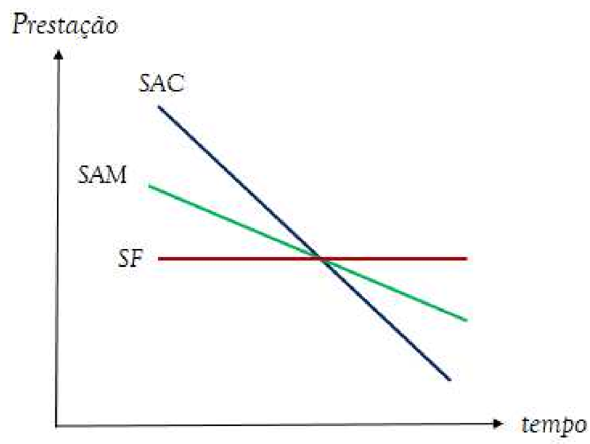
Gabarito: **CERTO**

(PGE PE - 2019) Com relação a sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos, julgue o item a seguir.

Comparando-se os sistemas de amortização constante, o de amortização francês e o de amortização misto, para um mesmo valor de empréstimo com prazo de operação e taxa de juros idênticos, o sistema de amortização misto sempre terá prestações superiores ao de amortização constante.

Comentários:

Vejamos o gráfico de comparação entre as Prestações desses Sistemas e o tempo decorrido.



Perceba que, no início do tempo, as Prestações no SAC são **SUPERIORES** às do Sistema Misto.

Logo, a assertiva está **errada**, uma vez que, **NEM SEMPRE,** o sistema de amortização misto terá prestações superiores ao de amortização constante.

Gabarito: **ERRADO**

(ABDI - 2013) Um empréstimo de R$ 100.000,00, com prestações mensais e prazo de 5 meses, tem taxa de 1,0% a.m. e a primeira prestação será paga um mês após o crédito. Qual dos sistemas de amortização a seguir produziria a primeira prestação mais alta?

a) Sistema de Amortização Misto (SAM).
b) Sistema de Amortização Constante (SAC).
c) Sistema Price.
d) Sistema de Amortização Francês (SAF).

Comentários:

Outra questão teórica que abordava a relação de ordenação dos valores das Prestações. Imagina calcular a primeira Prestação "no braço" pelo SF e pelo SAC. Muito trabalhoso certamente.

Vamos, então, relembrar a relação de ordenação de valores da primeira Prestação para um Empréstimo de mesmo valor submetido a uma mesma taxa de juros e mesmo tempo.

$$\underline{\text{Primeira Prestação}} \longrightarrow SAC > SAM > SF$$

Ou seja, constatamos que <u>o SAC produziria a primeira prestação mais alta</u>.

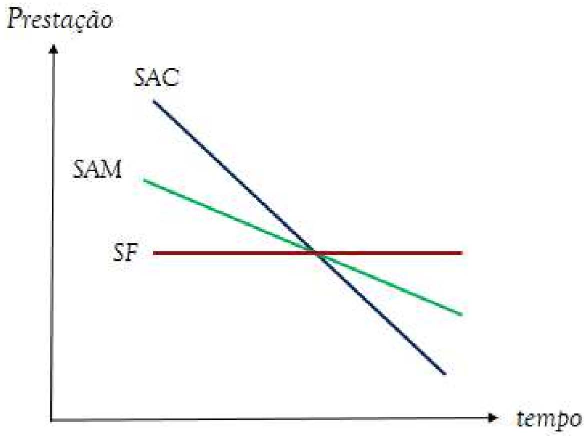
Gabarito: Alternativa **B**

(BANESTES - 2012 Adaptada) Considere as características de cada um dos sistemas de amortização – Sistema de Amortização Francês (Tabela Price), Sistema de Amortização Constante (SAC) e Sistema de Amortização Misto (SAM).

É correto afirmar que colocando em ordem crescente de valores, as prestações iniciais dos 3 sistemas de amortização considerados, para uma mesma situação de financiamento, têm-se: prestação pelo SAC, prestação pelo SAM e prestação pela Tabela Price.

Comentários:

Vejamos novamente a ordenação através do gráfico.



Observe que, se fossêmos colocar em ordem **CRESCENTE** (do menor para o maior) as prestações iniciais, teríamos:

Prestação do SF (tabela Price) < Prestação pelo SAM < prestação pelo SAC.

A assertiva trouxe a ordenação decrescente. Logo, está **errada**.

Gabarito: **ERRADO**

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO AMERICANO

Este Sistema **não é tão cobrado quanto o SAC e o SF** porém, devemos ter em mente suas **características** para não sermos surpreendidos na hora da prova.

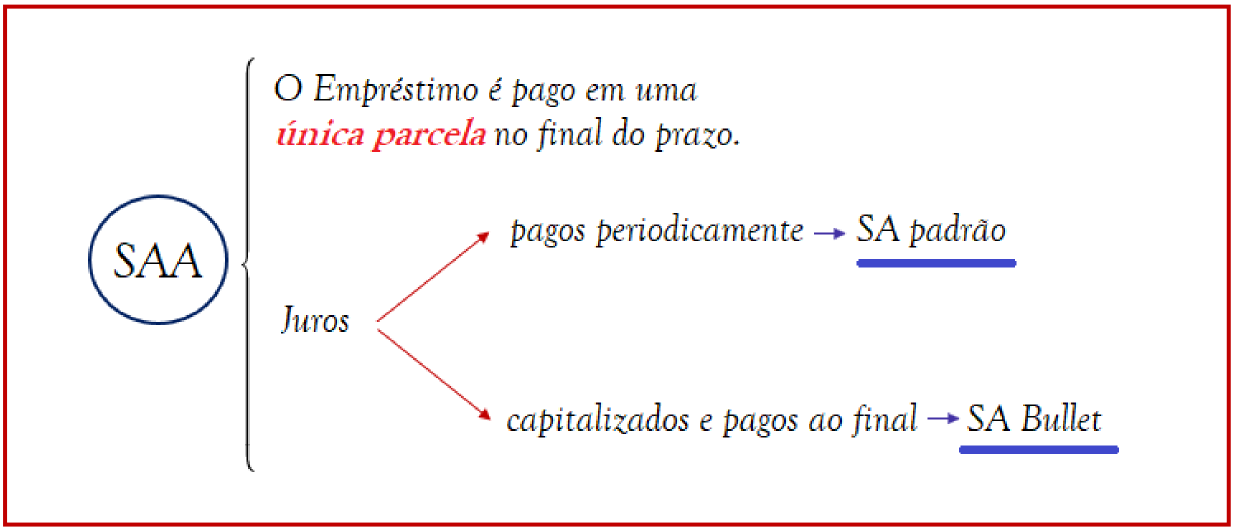
No Sistema de Amortização Americano, o Montante do Empréstimo é pago em uma **única parcela** ao final do prazo.

Neste sistema temos uma particularidade em relação aos Juros.

- No Sistema Americano Padrão, os Juros são pagos periodicamente, isto é, não há a Amortização do valor do Empréstimo ao longo do tempo. Há apenas, período a período, o pagamento dos Juros.

- Todavia, poderá haver pacto entre as partes na qual os Juros são capitalizados (não são pagos periodicamente) e pagos junto ao valor principal ao final do período. Ou seja, não ocorre pagamento da Amortização nem dos Juros no decorrer do período de Empréstimo. Este caso retrata o Sistema Americano *Bullet*.

ESQUEMATIZANDO



Iremos analisar essas 2 modalidades através dos exemplos numéricos abaixo.

EXEMPLIFICANDO

Exemplo 1: Empréstimo de R$ 40.000,00 a ser pago em uma única prestação após 4 meses pelo SA padrão a uma taxa de 10% ao mês.

Observe que estamos diante do SA padrão, ou seja, **haverá pagamento dos Juros período a período**. Iremos entender numericamente como este sistema funciona.

Vamos preencher a tabela de pagamento e tecer alguns comentários abaixo.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	40.000
1	40.000	-	$J_1 = 0{,}1 \times 40.000 = 4.000$	4.000	40.000
2	40.000	-	$J_2 = 0{,}1 \times 40.000 = 4.000$	4.000	40.000
3	40.000	-	$J_3 = 0{,}1 \times 40.000 = 4.000$	4.000	40.000
4	40.000	**40.000**	$J_4 = 0{,}1 \times 40.000 = 4.000$	**44.000**	**0**

No Sistema de Amortização Americano, há a Amortização (no valor do total do Empréstimo) **apenas no final do prazo**.

A mecânica de cálculo se mantém em relação aos outros Sistemas.

- Os **Juros de cada período** são dados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período. Observe a coluna J. Ela é preenchida pela multiplicação da taxa de 10% ao mês pelo Saldo Devedor inicial do período.

- O **Saldo Devedor final de cada período** (que é dado pela diferença do Saldo Devedor inicial menos a Amortização) será o mesmo pois, pela característica do SAA que estudamos, **não há Amortização**.

- Como não há Amortização período a período, **a Prestação será composta apenas pela parcela dos Juros** (que deverá ser paga período a período, pois estamos diante do SA padrão).

Observe que no último período, haverá o **pagamento tanto da Amortização quanto dos Juros do último período**.

Exemplo 2: Resolvermos o mesmo problema do Exemplo 1. Porém, agora, iremos aplicar o SA Bullet na forma de pagamento.

Empréstimo de R$ 40.000,00 a ser pago em uma única prestação após 4 meses pelo SAA a uma taxa de 10% ao mês. **Os Juros serão pagos juntamente com o principal no final do período do Empréstimo**.

Perceba que os Juros serão pagos apenas ao final do período. Ou seja, não há pagamento dos Juros período a período. Eles são incorporados ao Montante e capitalizados.

Vamos montar a tabela de pagamento e, posteriormente, tecer alguns comentários para você entender a sistemática deste Sistema.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	40.000
1	40.000	-	$J_1 = 0{,}1 \times 40.000 = 4.000$	-	44.000
2	44.000	-	$J_2 = 0{,}1 \times 44.000 = 4.400$	-	48.400
3	48.400	-	$J_3 = 0{,}1 \times 48.400 = 4.840$	-	53.240
4	53.240	**40.000**	$J_4 = 0{,}1 \times 53.240 = 5.324$	**58.564**	0

18.564

Observe, primeiramente, que somente há Amortização (no valor total do Empréstimo) no último período do prazo de pagamento.

- Os Juros continuam sendo calculados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período. E, o Saldo Devedor inicial de um período é igual ao Saldo Devedor final do período imediatamente anterior.

- Nesse ponto, há uma **particularidade**. Perceba que o Saldo Devedor final não é mais calculado pela diferença do Saldo Devedor inicial menos a Amortização. No SAA, **o Saldo Devedor final é obtido pela LÓGICA DO SISTEMA** e não pela fórmula.

- O **Saldo Devedor final** do período será igual ao **Saldo Devedor inicial do período somado aos Juros do período**, uma vez que estes não foram pagos.

Por fim, no **último período**, há o pagamento da Prestação que será constituída pela Amortização (no valor total do Empréstimo) mais a soma dos Juros.

$$P = A + \sum Juros$$

$$P = 40.000 + (4.000 + 4.400 + 4.840 + 5.324)$$

$$P = 40.000 + 18.564 \quad \rightarrow \quad \mathbf{P = 58.564}$$

SA Padrão x SA Bullet

Para finalizar, vamos a uma constatação acerta dessas duas ramificações do Sistema Americano.

Perceba que, **no sistema americano padrão ocorre menos pagamento de juros que no sistema americano Bullet**, por conta da quitação dos juros em cada período, não sendo assim necessário sua incorporação no principal.

Última observação: Caso a questão não mencione qual Sistema Americano é usado no pagamento do principal, adote o SISTEMA AMERICANO PADRÃO.

Vejamos algumas **questões de provas de corcursos** sobre o SAA.

(Fomento PR - 2018) No mercado financeiro, há vários planos de amortização de empréstimos e financiamentos disponíveis às empresas e aos cidadãos. Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a definição do Sistema de Amortização Americano.

a) A amortização do saldo devedor é crescente.
b) As prestações são constantes, com amortizações nas parcelas.
c) As prestações decrescem de acordo com uma determinada progressão aritmética.
d) O saldo devedor é reembolsado em valores de amortização iguais.
e) O saldo devedor é constante, com amortização periódica dos juros.

Comentários:

Vamos analisar alternativa por alternativa e constatar de qual Sistema de Amortização a característica é pertinente.

a) *A amortização do saldo devedor é crescente.*

INCORRETA. A Amortização ser crescente é caracterísitica do SF. No SF, as Amortização são crescentes em PG de razão $q = (1 + i)$.

b) *As prestações são constantes, com amortizações nas parcelas.*

INCORRETA. Prestações constantes é característica do SF. Atenção. No SA padrão, as prestações NÃO SÃO constantes. Volte ao quadro do exercício do exemplo 1 e observe que a última prestação difere das demais, pois nesta há tanto o pagamento dos Juros quanto da Amortização.

c) *As prestações decrescem de acordo com uma determinada progressão aritmética.*

INCORRETA. Esta é uma característica do SAC. No SAC, as Prestações são decrescentes em Progressão Aritmética de razão $r = -i \times A$.

d) *O saldo devedor é reembolsado em valores de amortização iguais.*

INCORRETA. Ter Amortizações iguais é característica do SAC.

e) *O saldo devedor é constante, com amortização periódica dos juros.*

CORRETA. Observe nossa tabela de pagamento do exemplo 1. O Saldo Devedor final de cada período (que é dado pela diferença do Saldo Devedor inicial menos a Amortização) será o mesmo pois, pela característica do SAA que estudamos, **não há Amortização**.

Perceba que a questão não mencionou qual Sistema Americano está sendo tratado. Caso a questão não mencione qual Sistema Americano é usado no pagamento do principal, adote o SISTEMA AMERICANO PADRÃO.

Gabarito: Alternativa **E**

(SMTR RJ - 2016) A planilha, abaixo, descreve um empréstimo no valor de R$300.000, a uma taxa de juros contratada de 10% a.m. por 3 meses. A operação será reembolsada de acordo com o:

p	$SD_{inicial}$	$Juros$	$Prestação$
0	$R\$ 300.000$	-	-
1	$R\$ 300.000$	$R\$ 30.000$	$R\$ 30.000$
2	$R\$ 300.000$	$R\$ 30.000$	$R\$ 30.000$
3	-	$R\$ 30.000$	$R\$ 330.000$

a) Sistema de Amortização Americano
b) Sistema de Amortização Constate (SAC)
c) Sistema de Amortização Crescente (SACRE)
d) Sistema de Amortização Francês (Tabela Price)

Comentários:

Observe que o Saldo Devedor se mantém ao longo do período. Ou seja, **não há Amortização alguma da dívida**. O pagamento integral da Amortização ocorre somente no último período.

Perceba que a Prestação é composta apenas pelo valor dos Juros.

Então, de acordo com essas características, estamos diante do **Sistema Americano de Amortização**. E podemos ir além, já que há o pagamento dos Juros.

- No Sistema de Amortização Americano Padrão, os Juros são pagos periodicamente, isto é, não há a Amortização do valor do Empréstimo ao longo do tempo. Há apenas, período a período, o pagamento dos Juros.

Gabarito: Alternativa **A**

(CRC MG - 2015 Adaptada) Acerca de Matemática Financeira, julgue o item abaixo.

O pagamento do principal é feito de uma só vez, no final do período do empréstimo. Periodicamente os juros são pagos, mas podem ser capitalizados eventualmente e pagos de uma só vez, junto com o principal. Acerca desse tema, é correto afirmar que a definição apresentada indica o sistema de amortização americano.

Comentários:

Definição completa acerca do Sistema de Amortização Americano. Vejamos:

"O pagamento do principal é feito de uma só vez, no final do período do empréstimo."

Trecho **correto**! Estudamos que no Sistema de Amortização Americano, o Montante do Empréstimo é pago em uma **única parcela** ao final do prazo.

"Periodicamente os juros são pagos".

Trecho **correto**! Neste caso, estamos diante do Sistema Americano Padrão. No Sistema Americano Padrão, os Juros são pagos periodicamente, isto é, não há a Amortização do valor do Empréstimo ao longo do tempo. Há apenas, período a período, o pagamento dos Juros.

"mas podem ser capitalizados eventualmente e pagos de uma só vez, junto com o principal."

Trecho **Correto**. Vimos que poderá haver pacto entre as partes na qual os Juros são capitalizados (não são pagos periodicamente) e pagos junto ao valor principal ao final do período. Ou seja, não ocorre pagamento da Amortização nem dos Juros no decorrer do período de Empréstimo. Este caso retrata o Sistema Americano *Bullet*.

Gabarito: **CERTO**

(SEFAZ RJ - 2010 Adaptada) Com relação aos diferentes sistemas de amortização, analise a afirmativa a seguir

No Sistema Americano de Amortização, para um empréstimo de R$ 50.000,00, a ser amortizado em 25 vezes a uma taxa de juros de 5% ao mês, o valor acumulado das três primeiras prestações é de R$ 10.500,00.

Comentários:

Observe que o enunciado não nos informa qual SAA é adotado. Neste caso, iremos adotar o **SAA Padrão**. Neste, há o pagamento dos Juros período a período.

Vamos montar nossa tabela auxiliar até o terceiro período.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	50.000
1	50.000	-	$J_1 = 0{,}05 \times 50.000 = 2.500$	2.500	50.000
2	50.000	-	$J_2 = 0{,}05 \times 50.000 = 2.500$	2.500	50.000
3	50.000	-	$J_3 = 0{,}05 \times 50.000 = 2.500$	2.500	50.000

No Sistema de Amortização Americano, há a Amortização (no valor do total do Empréstimo) **apenas no final do prazo**. Como não há Amortização período a período, **a Prestação será composta apenas pela parcela dos Juros** (que deverá ser paga período a período, pois estamos diante do SA padrão).

Os Juros de cada período são dados pela multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do período e o Saldo Devedor final de cada período (que é dado pela diferença do Saldo Devedor inicial menos a Amortização) será o mesmo pois, pela característica do SAA que estudamos, **não há Amortização**.

Logo, o valor acumulado das três primeiras prestações é:

$$valor = 2.500 + 2.500 + 2.500 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{valor = 7.500}$$

Ou, se você se recordasse de que no SAA padrão, as prestações são todas iguais (com execeção da última) e que todas são dadas pelo valor dos Juros (pois no período há apenas o pagamento dos Juros), você poderia apenas calcular a primeira prestação e multiplicar por 3 (quantidade de períodos). Desenvoli o passo a passo para você entender a mecânica da tabela e do Sistema.

Gabarito: **ERRADO**

SINKING FUND

Estudamos que no **Sistema Americano de Amortização**, os Juros são pagos periodicamente, isto é, **não há a Amortização do valor do Empréstimo ao longo do tempo**. Há apenas, período a período, o pagamento dos Juros.

O valor do Empréstimo será pago (amortizado) apenas no último período.

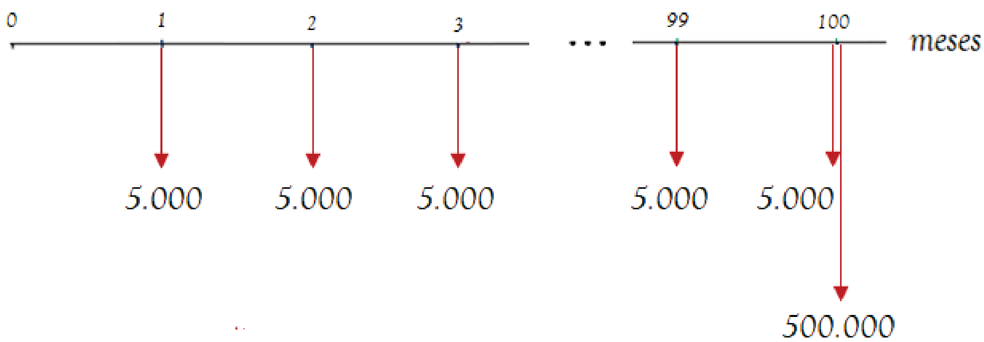
Então imagine que você obtenha um Empréstimo de $R\$ \ 500.000,00$, a uma taxa de 1% ao mês, para ser pago em 100 meses pelo Sistema Americano de Amortização.

Mês a mês, você pagaria Juros iguais a:

$$J = \frac{1}{100} \times 500.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J = 5.000}}$$

Ou seja, todo mês você terá que pagar uma prestação de Juros de $R\$ \ 5.000,00$, e, ao final dos 100 meses, isto é, ao final do financiamento, você pagará a Amortização no valor total do Empréstimo.

Graficamente (fora de escala) teremos:



Observe que, conforme comentamos, há o pagamento dos Juros mês a mês e, ao final do financiamento, há a Amortização no valor total do Empréstimo.

*"Certo, Professor. Até agora não tem nada de **Sinking Fund**. O que vi até agora é o Sistema Americano de Amortização."*

Verdade aluno. Agora entraremos na ideia deste Fundo. Comece, a partir deste momento, a pensar como um dono de banco.

Você emprestou $R\$ \ 500.000,00$ a um cliente que terá que te pagar "apenas" 5 mil reais por mês e, somente ao final do período, irá lhe pagar os 500 mil restantes.

Qual a garantia que você, dono de um banco, terá para receber esses 500 mil depois de 100 meses?

"Realmente, Professor. O cliente pode "sumir" com meu dinheiro no final e eu ficarei no prejuízo desses 500 mil reais"

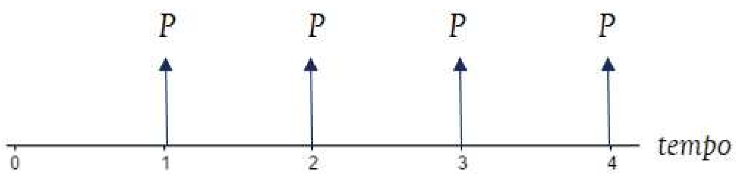
Então o que você irá estipular contratualmente com o cliente?

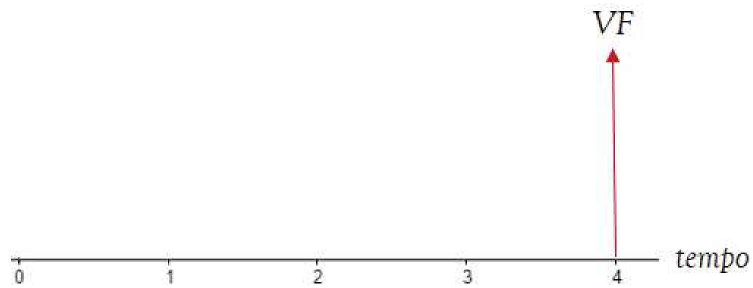
Que ele faça depósitos periódicos em uma conta, sendo que, a soma desses depósitos capitalizados a uma certa taxa de juros irá corresponder ao valor total do Empréstimo.

Vamos melhorar nosso entendimento relembrando o Valor Futuro de uma série de rendas certas.

O **Valor Futuro (VF)** de uma série de rendas certas é o valor no momento “n” que equivale a **soma de todas as n** rendas certas **P** capitalizadas pela mesma taxa de juros **i**.

Em outras palavras, VF é a soma de todos os pagamentos/recebimentos **na mesma data do último** pagamento/recebimento.



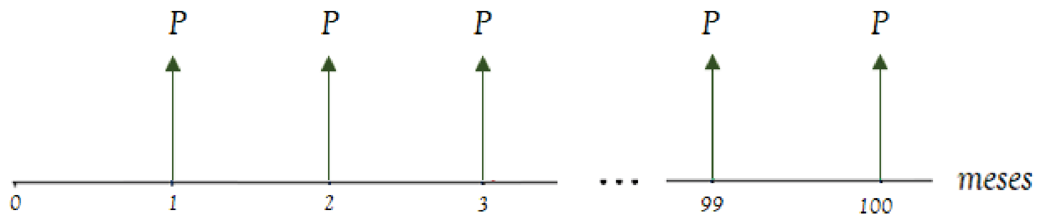


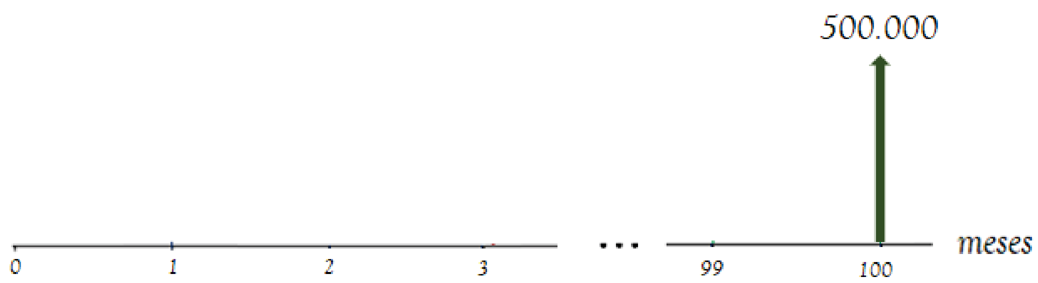
Em que:

$$\boldsymbol{VF = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]}$$

Então, retornando ao nosso exemplo em que você é o dono do banco, você iria "obrigar" contratualmente seu cliente a depositar um valor P mês a mês em um fundo por 100 meses, em que, ao final desses 100 meses, o Valor Futuro desses depósitos corresponda ao valor do Empréstimo.

Graficamente:





Imagine que a taxa de remuneração deste fundo seja de 0,8% ao mês e que $1{,}008^{100} \cong 2{,}2185$.

TOME NOTA!

Perceba que a taxa deste fundo **NÃO PRECISA** necessariamente ser igual a taxa dos juros do Sistema de Amortização. Por isso, **o sinking fund também é chamado de Sistema Americano a duas taxas**.

Uma taxa é relativa ao pagamento dos Juros equanto a outra taxa é relativa ao fundo que será constituído para a amortização final.

Vamos calcular o valor da Prestação mensal que o cliente deveria depositar neste fundo.

$$VF = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$500.000 = P \times \left[\frac{(1+0{,}008)^{100} - 1}{0{,}008}\right]$$

$$500.000 = P \times \left[\frac{1{,}008^{100} - 1}{0{,}008}\right]$$

$$500.000 = P \times \left[\frac{2{,}2185 - 1}{0{,}008}\right]$$

$$500.000 = P \times \left[\frac{1{,}2185}{0{,}008}\right]$$

$$P = \frac{500.000 \times 0{,}008}{1{,}2185} \rightarrow \boldsymbol{P \cong 3.283}$$

Ou seja, o cliente deveria depositar aproximadamente $R\$\ 3.283{,}00$ para que, ao final dos 100 meses, obtivesse a quantia necessária para quitar a Amoritzação total do Empréstimo que é de $R\$\ 500.000{,}00$.

FIQUE ATENTO!

Um detalhe importante: pode ser que sua questão de prova diga que o banco exige depósitos no fundo para garantir apenas 50% (ou outro percentual qualquer) do valor do Empréstimo (ao invés da totalidade). Fique atento para a "historinha" que o enunciado irá te contar.

Vejamos uma questão de concurso que elucida bem o tema que estamos abordando.

HORA DE PRATICAR!

(IF SUL - 2019 - Adaptada) Um empresário deseja ampliar a estrutura da área de produção de seu negócio. Para isto, obteve junto ao sistema financeiro o valor de R$ 1.000.000,00, a ser amortizado pelo sistema de amortização americano (SAA), num prazo de 5 anos, a juros efetivos de 6% ao ano. Obrigatoriamente, será necessário constituir um fundo de amortização durante o prazo do empréstimo para que, no final do período, tenha o montante do fundo igual ao valor da dívida obtida. A taxa de constituição do fundo é de 5% ao ano.

Qual é o valor do juro anual e da parcela anual do fundo de amortização, respectivamente?

a) R$ 50.000,00 e R$ 250.000,00
b) R$ 67.645,00 e R$ 195.570,52
c) R$ 60.000,00 e R$ 181.028,24
d) R$ 52.000,00 e R$ 200.000,00
e) R$ 60.000,00 e R$ 200.970,48

Comentários:

Observe inicialmente que a taxa do pagamento dos juros é de 6% ao ano enquanto que a taxa de constituição do fundo é de 5% ao ano. Por isso, às vezes, o sinking fund também é chamado de **Sistema Americano de Amortização a duas taxas**.

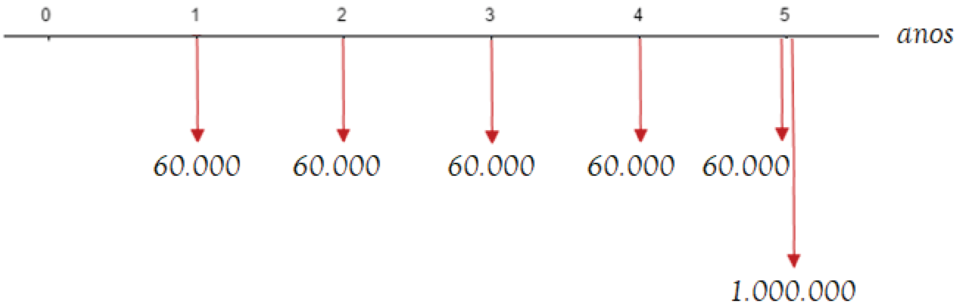
Um empresário obtém o valor de $R\$\ 1.000.000{,}00$, a ser amortizado pelo Sistema de Amortização Americano (SAA), num prazo de 5 anos, a juros efetivos de 6% ao ano.

Logo, **os Juros anuais** a serem pagos pelo empresário será de:

$$J = \frac{6}{100} \times 1.000.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J = 60.000}}$$

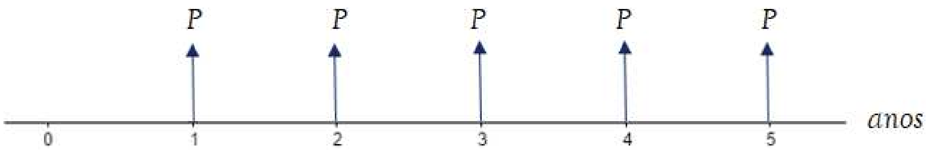
Só com o cálculo dos Juros, já **descartaríamos as Alternativas A, B e D**. Ficaríamos entre as **letras C e E**.

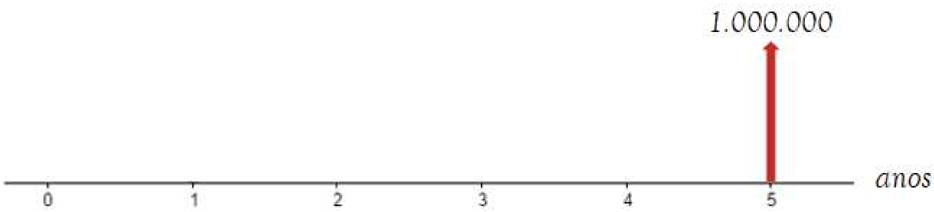
Vamos representar graficamente como será o pagamento deste empréstimo (fora de escala).



Perceba que há o pagamento dos Juros de $R\$\,60.000{,}00$ ano a ano e, ao final do financiamento, há a Amortização no valor total do Empréstimo.

Obrigatoriamente, será necessário constituir um fundo de amortização a uma taxa de 5% ao ano para que, no final do período, tenha o montante do fundo igual ao valor da dívida obtida (que é de $R\$\ 1.000.000{,}00$).





Então, o Valor Futuro desses depósitos periódicos será igual a $R\$\ 1.000.000{,}00$. Vamos calcular o valor da Prestação P a ser depositada nesse fundo:

$$VF = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$1.000.000 = P \times \left[\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05}\right]$$

$$1.000.000 = P \times \left[\frac{1{,}05^5 - 1}{0{,}05}\right]$$

$$1.000.000 = P \times \left[\frac{1{,}2762 - 1}{0{,}05}\right]$$

$$1.000.000 = P \times \left[\frac{0{,}2762}{0{,}05}\right]$$

$$P = \frac{1.000.000 \times 0{,}05}{0{,}2762} \rightarrow \boldsymbol{P = 181.028{,}24}$$

Fique Atento. Você **não precisaria fazer a divisão até as casas decimais**.

Conforme falamos, estamos entre as Alternativas C e E. Assim que você for fazer a divisão, perceberia que o quociente seria 18 ... , ou seja, não teria como marcar a Letra E cujo resultado é superior a 200.000. Logo, a única alternativa condizente seria a Letra C.

Finalizando teremos:

- Valor do juro anual: $\boldsymbol{R\$\ 60.000{,}00}$
- Parcela anual do fundo de amortização: $\boldsymbol{R\$\ 181.028{,}24}$

Gabarito: Alternativa **C**

Encerramos nossa aula (e também nosso curso), caro Aluno.

Foi uma **honra** te acompanhar em toda essa trajetória e te passar um pouco do conhecimento que adquiri nesses anos árduos de estudos.

Sonhe, nunca desista, tenha fé. **A trajetória não é fácil**. Mas será **extremamente recompensadora**. Tudo terá valido a pena.

Conte comigo para o que precisar.

Mais uma vez, repito, foi uma **HONRA** ter estado ao seu lado.

Vinícius Veleda

Resumo da Aula

Conceitos Iniciais

$$\text{Conceito Iniciais}\begin{cases} \text{Saldo Devedor } (SD) \\ \text{Amortização } (A) \\ \text{Juros } (J) \\ \text{Prestação } (P) \end{cases}$$

Sistema de Amortização Constante (SAC)

No SAC, conforme o próprio nome sugere, as Amortizações são constantes.

$$\text{SAC}\begin{cases} \textit{Amortizações} \rightarrow \textbf{Constante}: \boxed{A = \dfrac{E}{n}} \\ \textit{Juros} \rightarrow \textbf{Decrescente}: \boxed{J_i = i \times SD_{inicial\ i}} \\ \qquad\qquad r = -i \times A \\ \textit{Prestações} \rightarrow \textbf{Decrescente}: \boxed{P_i = A + J_i} \end{cases}$$

ATENÇÃO DECORE!

Os Juros no **último período** do SAC é igual ao módulo da razão da PA de decréscimo dos Juros.

Sistema Francês de Amortização (SF)

No SF, as Prestações são constantes.

SF

- $E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$ ou $E = P \times \left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i \times (1+i)^{n}}\right]$
- *Prestações* → ***Constante***
- *Juros* → ***Decrescente***: $J_i = i \times SD_{inicial\ i}$
- *Amortizações* → ***Crescente*** $P = A_i + J_i$
  - $q = (1+i)$

O valor da **última Amortização** de um empréstimo pelo SF.

$$A_{última} = \frac{P}{1+i}$$

Sistema (Tabela) Price

O **Sistema Price** é um caso específico do Sistema Francês de Amortização. Para fins de prova, em resoluções numéricas, você irá adotá-las como **expressões sinônimas**.

A **única diferença** reside na Taxa de Juros do Empréstimo.

- Na Tabela Price, a Taxa de Juros fornecida é a Nominal. E, então, para resolver, você precisa inicialmente converter a Taxa Nominal em Taxa Efetiva.

- Já o Sistema Francês, fornece a Taxa Efetiva diretamente.

Sistema de Amortização Misto (SAM)

Neste sistema, a prestação do período (assim como os Juros e a Amortização) será calculada pela **média aritmética** dos outros dois Sistemas já estudados, isto é, será a média do valor da Prestação do SAC e do valor da Prestação do SF.

FIQUE ATENTO!

No SAM as Prestações são iguais à **Média Aritmética** das prestações calculadas pelo SAC e pelo SF

No Sistema de Amortização Misto (SAM) a **Prestação de cada período** será igual a:

$$P_{misto\ i} = \frac{P_{SAC\ i} + P_{SF\ i}}{2}$$

Relação Teórica

Para um **mesmo valor de empréstimo com prazo de operação e taxa de juros idênticos**, as Prestações são ordenadas, em termos de valor, na seguinte ordem:

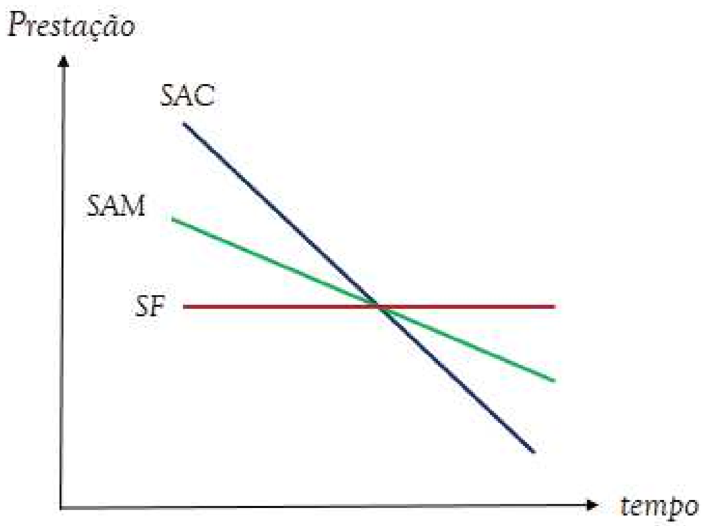
- **Primeira Prestação**

$$1°\ Prestação{:}\ \ SAC > SAM > SF$$

- **Última Prestação**

$$Última\ Prestação{:}\ \ SF > SAM > SAC$$

Graficamente, podemos representar da seguinte maneira:



Sistema Americano de Amortização (SAA)

No Sistema de Amortização Americano, o Montante do Empréstimo é pago em uma **única parcela** ao final do prazo.