mínimos
locais
mínimo
global
máximos
locais
máximo
global

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

$$x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7$$

$$x \ y \ a \ b$$

$$f(a) \ f(x_2) \ \ f(x_1)$$

A **derivada de uma função** f em relação a x é a **função** f' que representa a taxa de variação instantânea de f em x

O PIB de um país

As projeções são de que o produto interno bruto (PIB) de certo país entre os anos 2023 e 2027 seja de

$$P(t) = t^2 + 2t + 50, \quad (0 \leq t \leq 5)$$

bilhões de dólares, com $t = 0$ correspondendo ao início de 2023.

$P'(1) = 4 \quad \Rightarrow$

em 2024 a
taxa de variação
do PIB deste país
é de 4 bilhões por ano

em 2024 a taxa de variação
do PIB deste país é de
4 bilhões por ano

Regras de Derivação

- $f(x) = x^a \;\Rightarrow\; f'(x) = ax^{a-1}$
- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[af(x)]' = af'(x)$

Calculando a derivada no nosso exemplo
$P(t) = t^2 + 2t^1 + 50t^0$

$$
\begin{aligned}
P'(t) &= 2t^{2-1} + 2 \cdot 1t^{1-1} + 50 \cdot 0t^{0-1} && (1)\\
P'(t) &= 2t^1 + 2t^0 + 0 && (2)\\
P'(t) &= 2t + 2 && (3)
\end{aligned}
$$

Quanto o PIB deste país varia em 2025?
$P'(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$
O PIB deste país varia 8 bilhões
de dólares por ano em 2025

Índice de Preços ao Consumidor

O índice de preços ao consumidor (IPC) de uma economia é descrito pela função

$$I(t) = -0,2t^3 + 3t^2 + 100 \quad (0 \leq t \leq 10)$$

onde $t = 0$ corresponde a 1995.
Com que taxa o IPC estava variando em

- 2000
- 2002
- 2005

$I'(t) = -0.6t^2 + 6t$

$$\begin{aligned} 2000:&\ I'(5) = -0.6 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 = 15 \\ 2002:&\ I'(7) = -0.6 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 = 12.6 \\ 2005:&\ I'(10) = -0.6 \cdot 10^2 + t \cdot 10 = 0 \end{aligned}$$

O IPC variou

- 15 pontos/ano em 2000
- 12.5 pontos/ano em 2002
- 0 ponto/ano em 2005

Sua vez

Produção Industrial: Dados mostram que a variação anual da produção industrial dos Estados Unidos entre 1994 e 2000 é dada por

$$f(t) = 0,009417t^3 - 0,42571t^2 + 2,74894t + 5,54, \quad (0 \leq t \leq 6)$$

por cento, onde t é medido em anos, com $t = 0$ sendo o início de 1994.

Com que rapidez $f(t)$ estava variando no início de 1996 ($t = 2$)? E 1998 ($t = 4$)?

Resposta: 1.15% ao ano em 1996 e -0.21% ao ano em 1998

Determinando máximos e mínimos

Teorema

(a) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo (local) de f.

(b) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo (local) de f.

(c) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, então x_0 pode ser um ponto de máximo (local), um ponto de mínimo (local) ou nenhum dos dois.

$p(x) = -2 \cdot 10^{-6} x^3 + 6x - 400$

$p'(x) = -2 \cdot 10^{-6} \cdot 3x^2 + 6 = -6 \cdot 10^{-6} x^2 + 6$

$p'(x) = 0 \quad \Rightarrow -6 \cdot 10^{-6} x^2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = 10^6 \quad \Rightarrow x = \pm 10^3$

$p''(x) = -12 \cdot 10^{-6} x$

$p''(10^3) = -12 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 = -12 \cdot 10^{-3} < 0$

$$
\begin{aligned}
p(10^3) &= -2 \cdot 10^{-6} \cdot (10^3)^3 + 6 \cdot 10^3 - 400 && (4)\\
&= -2 \cdot 10^{-6} 10^9 + 6 \cdot 10^3 - 400 && (5)\\
&= 4 \cdot 10^3 - 400 && (6)\\
&= 3600 && (7)
\end{aligned}
$$

$$f'(t) = 0.253788t^3 - 5.859849t^2 + 29.265152t - 6.684707$$

$$f'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0.24, \;\; t_2 = 6.87, \;\; t_3 = 15.97$$

$$f''(t) = 0.761364t^2 - 11.72t + 29.265152$$

- $f''(0.24) = 26.5$
- $f''(6.87) = -15.3$
- $f''(15.97) = 410.6$

$t = 0.24$ e $t = 15.97$
são pontos de mínimos
$t = 6.87$ é ponto de máximo
$f(6.87) = 200.14$
> 0
< 0

Convexidade

Um conjunto **S é convexo** se, dados dois pontos distintos neste conjunto, o segmento que liga esses dois pontos pertence ao conjunto S.

Conjunto convexo

Conjunto não-convexo

Função convexa

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ diz-se **convexa** quando para $x, y \in A$ e $t \in [0, 1]$ quaisquer, tem-se

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

$(1-t)f(x) + tf(y), 0 \leq t \leq 1$

$t = 0 : (1-0)f(x) + 0f(y) = f(x)$

$t = 1 : (1-1)f(x) + 1f(y) = f(y)$

$f(x) f(y)$

segmento de reta
unindo os pontos
$f(x)$ e $f(y)$