Aula 04

IBGE (Técnico em Informações Geográficas e Estatísticas) Matemática - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

19 de Maio de 2023

Índice

MÚLTIPLOS E DIVISORES

Múltiplos e divisores

Múltiplos e divisores de um número

—Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito por B** × **k**, sendo **k** um número inteiro.
Exemplo: os números da forma **A** = **7**×**k** são múltiplos **de 7** (sendo **k** inteiro).

Se **B divide A** deixando resto zero, então:
• **B é divisor** de A;
• **A é divisível** por B.

— Se **B** é **divisor** de **A**, então **A** é um **múltiplo** de **B**.
— Se **A** é um **múltiplo** de **B**, então **B** é **divisor** de **A**.

Regras de divisibilidade

—**Divisibilidade por 2**: um número é divisível por 2 quando for par, isto é, quando terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.
—**Divisibilidade por 3**: um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos for divisível por 3.
—**Divisibilidade por 4**: um número é divisível por 4 quando os dois últimos algarismos do número forem divisíveis por 4. Essa regra inclui o caso em que o número termina em 00.
—**Divisibilidade por 5**: um número é divisível por 5 quando terminar em 0 ou 5.
—**Divisibilidade por 6**: um número é divisível por 6 quando for divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.
—**Divisibilidade por 8**: um número é divisível por 8 quando os três últimos algarismos do número forem divisíveis por 8. Essa regra inclui o caso em que o número termina em 000.
—**Divisibilidade por 9**: um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos for divisível por 9.
—**Divisibilidade por 10**: um número é divisível por 10 quando termina em 0.
—**Divisibilidade por 11**: um número é divisível por 11 se a soma dos algarismos de ordem par (p) menos a soma dos algarismos de ordem ímpar (i) é um número divisível por 11. Essa regra inclui o caso particular em que $p - i = 0$, pois 0 é divisível por 11.
—**Divisibilidade por 12**: um número é divisível por 12 quando for divisível por 3 e por 4 ao mesmo tempo.
—**Divisibilidade por 15**: um número é divisível por 15 quando for divisível por 3 e por 5 ao mesmo tempo.

Números primos

• **Números primos** são números naturais maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais: o número 1 e o próprio número primo.
• Os 15 primeiros números primos são: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.**
Para **determinar se um número N é primo**, devemos dividi-lo sucessivamente pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., e verificar se algum primo é divisor de **N**.
— Se **algum primo for divisor** de **N**, então **N não é primo**;
— Se, ao realizar a divisão sucessiva, **obtivermos um quociente menor do que o primo pelo qual estamos dividindo N**, então **N é primo**.

Para **decompor um número em fatores primos**, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

$$
\begin{array}{r|l}
500 & 2 \\
250 & 2 \\
125 & 5 \\
25 & 5 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
$$

$$500 = 2^2 \times 5^3$$

Obtenção dos divisores naturais de um número

- **O número 1 é sempre um divisor** de qualquer número e é por ele que devemos começar o método;
- Os divisores são obtidos pela **multiplicação de um fator primo por todos os divisores anteriores**;
- **Não se deve escrever mais de uma vez um divisor já obtido**, pois não é necessário.

$$
\begin{array}{r|c|l}
 & & \text{Divisores} \\
 & & 1 \\
500 & 2 & 2 \\
250 & 2 & 4 \\
125 & 5 & 5,\ 10,\ 20 \\
25 & 5 & 25,\ 50,\ 100 \\
5 & 5 & 125,\ 250,\ 500 \\
1 & &
\end{array}
$$

Quantidade de divisores naturais de um número

Para saber a **quantidade de divisores naturais** de um número qualquer, basta decompor o número em fatores primos e, em seguida:

- Obter todos os expoentes dos fatores primos;
- Somar 1 a cada um desses expoentes e realizar o produto dos números obtidos.

Se um número apresenta uma quantidade $\boldsymbol{p}$ de divisores naturais, com $\boldsymbol{p}$ primo, então esse número é da forma $\boldsymbol{q^{p-1}}$, sendo $\boldsymbol{q}$ também um número primo.

Divisores inteiros de um número

A quantidade de divisores inteiros é sempre o dobro do número de divisores naturais

Múltiplos e divisores de um número

Pessoal, nesse momento precisamos desenvolver alguns conceitos que por vezes geram dúvidas no concurseiro.

Múltiplos de um número

Considere o número 7. Os **múltiplos do número 7** são:

$$\mathbf{7} \times 0 = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{7} \times 1 = \mathbf{7}$$
$$\mathbf{7} \times 2 = \mathbf{14}$$
$$\mathbf{7} \times 3 = \mathbf{21}$$
$$\dots$$

Perceba que um número qualquer apresenta infinitos múltiplos. O número 462, por exemplo, é múltiplo de 7, pois:

$$\mathbf{7} \times 66 = 462$$

Note que todos os números da forma **A** = **7** **×** **k** são múltiplos **de 7** (sendo **k** um número inteiro).

TOME NOTA!

Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito pelo produto B** **×** **k**, sendo **k** um número inteiro.

(SSP AM/2022) Considere uma operação entre números inteiros maiores do que zero, representada pelo símbolo & e definida como:

$$a\&b = 3a + b, \text{ sendo } a \text{ e } b \text{ números inteiros positivos.}$$

Considere também o conjunto C cujos elementos são os números inteiros x, maiores do que zero, tais que $x\&2$ seja múltiplo de 4 e menor do que 40.

O número de elementos do conjunto C é igual a

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Comentários:

Conforme a definição do enunciado, temos:

$$x\&2 = 3x + 2$$

C é o conjunto dos **inteiros x** maiores do que zero tais que $3x + 2$ seja **múltiplo de 4** e **menor do que 40**.

Para verificar os números **inteiros x** maiores do que zero tais que $3x + 2$ seja **múltiplo de 4** e **menor do que 40**, vamos **igualar $3x + 2$ a todos os múltiplos de 4 maiores do que zero e menores do que 40**:

4, **8**, **12**, **16**, **20**, **24**, **28**, **32** e **36**.

Se nessa igualdade obtivermos um número x inteiro, então esse número pertence ao conjunto C.

$$\mathbf{3x + 2 = 4}$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

→ Não é inteiro → Não pertence ao conjunto C

$$\mathbf{3x + 2 = 8}$$

$$3x = 6$$

$$\mathbf{x = 3}$$

→ **É inteiro** → **Pertence ao conjunto C**

$$\mathbf{3x + 2 = 12}$$

$$3x = 10$$

$$x = \frac{10}{3}$$

→ Não é inteiro → Não pertence ao conjunto C

$$\mathbf{3x + 2 = 16}$$

$$3x = 14$$

$$x = \frac{14}{3}$$

→ Não é inteiro → Não pertence ao conjunto C

$$\mathbf{3x + 2 = 20}$$

$$3x = 18$$

$$\mathbf{x = 6}$$

→ **É inteiro** → **Pertence ao conjunto C**

$$\mathbf{3x + 2 = 24}$$
$$3x = 22$$
$$x = \frac{22}{3}$$
$\rightarrow$ Não é inteiro $\rightarrow$ Não pertence ao conjunto C

$$\mathbf{3x + 2 = 28}$$
$$3x = 26$$
$$x = \frac{26}{3}$$
$\rightarrow$ Não é inteiro $\rightarrow$ Não pertence ao conjunto C

$$\mathbf{3x + 2 = 32}$$
$$3x = 30$$
$$\boldsymbol{x = 10}$$
$\rightarrow$ **É inteiro** $\rightarrow$ **Pertence ao conjunto C**

$$\mathbf{3x + 2 = 36}$$
$$3x = 34$$
$$x = \frac{34}{3}$$
$\rightarrow$ Não é inteiro $\rightarrow$ Não pertence ao conjunto C

Portanto, o conjunto C apresenta **3 elementos**: **3**, **6** e **10**.

Gabarito: Letra C.

Divisores de um número

O que significa dizer que um número é divisor de outro?

TOME NOTA!

Um **número natural B é divisor de um número natural A** quando o **resultado da divisão de A por B deixar resto zero**.

Exemplos:

- **10 é divisor de** 50, pois o **resultado da divisão** de 50 **por 10** deixa **resto zero**;
- **33 é divisor de** 99, pois o **resultado da divisão** de 99 **por 33** deixa **resto zero**;
- **67 é divisor de** 469, pois o **resultado da divisão** de 469 **por 67** deixa **resto zero**.

Agora que entendemos o que significa dizer que um número é **divisor** de outro, devemos compreender a expressão "**divisível por**".

Basicamente, você deve saber que a expressão "**A é divisível por B**" é uma outra forma de dizer que "**B é divisor de A**". Exemplos:

- 50 é **divisível por** 10, pois 10 é **divisor de** 50;
- 99 é **divisível por** 33, pois 33 é **divisor de** 99;
- 469 é **divisível por** 67, pois 67 é **divisor de** 469;

> Se **B divide A** deixando resto zero, então:
>
> • **B é divisor** de A;
> • **A é divisível** por B.

Relação entre múltiplo e divisor

Os conceitos de divisores e múltiplos estão intimamente relacionados.

Observe que se **B** é **divisor** de **A**, então **A** é um **múltiplo** de **B**. Veja:

- 10 é divisor de 50 (a divisão deixa quociente 5 e resto 0).
  Logo, é verdade que 50 é múltiplo de 10 (de fato, pois $10 \times 5 = 50$).

- 33 é divisor de 99 (a divisão deixa quociente 3 e resto 0).
  Logo, é verdade que 99 é múltiplo de 33 (de fato, pois $33 \times 3 = 99$).

- 67 é divisor de 469 (a divisão deixa quociente 7 e resto 0).
  Logo, é verdade que 469 é múltiplo de 67 (de fato, pois $67 \times 7 = 469$).

Observe também que se **A** é **múltiplo** de **B**, então **B** é **divisor** de **A**. Veja:

- 70 é múltiplo de 7 (pois 7×10 = 70).
  Logo, é verdade que 7 é divisor de 70 (de fato, pois a divisão deixa quociente 10 e resto 0).

- 168 é múltiplo de 3 (pois 3×56 = 168).
  Logo, é verdade que 3 é divisor de 168 (de fato, pois a divisão deixa quociente 56 e resto 0).

- 480 é múltiplo de 5 (pois 5×96 = 480).
  Logo, é verdade que 5 é divisor de 480 (de fato, pois a divisão deixa quociente 96 e resto 0).

PRESTE MAIS
ATENÇÃO!

Se **B** é **divisor** de **A**, então **A** é um **múltiplo** de **B**.

Se **A** é um **múltiplo** de **B**, então **B** é **divisor** de **A**.

(TRT 15/2009) Certo dia, Eurídice falou a Josué:

− Hoje é uma data curiosa, pois é dia de nosso aniversário, sua idade se escreve ao contrário da minha e, além disso, a diferença entre as nossas idades é igual ao nosso tempo de serviço no Tribunal Regional do Trabalho: 18 anos.

Considerando que Josué tem mais de 20 anos, Eurídice tem menos de 70 anos e é mais velha do que Josué, então, com certeza, a soma de suas idades, em anos, é um número

a) maior que 100.

b) quadrado perfeito.

c) múltiplo de 11.

d) divisível por 9.

e) menor que 100.

Comentários:

Essa questão é bastante interessante por envolver conceitos do sistema de numeração decimal e o conceito de múltiplo.

Primeiramente, deve-se entender que qualquer número de 2 dígitos **XY** pode ser escrito pela soma **10X + Y**. **Exemplo**: o número **27** pode ser descrito por 10×**2** + **7**.

Voltando ao problema, veja que, se a idade de Eurídice for escrita como **AB**, onde **A** é o dígito das dezenas e **B** é o dígito das unidades, a idade de Josué deve ser escrita por **BA**.

A soma **S** das idades é dada por:

S = "**AB**" + "**BA**"

= (10A + B) + (10B + A)

= 11A + 11B

=11×(A+B)

Note que S = 11×(A+B), com (A+B) inteiro.

A soma, portanto, é um múltiplo de 11, pois S é descrito como o produto de 11 por um número inteiro.

Gabarito: Letra C.

Regras de divisibilidade

As regras de divisibilidade são "regras de bolso" que servem para ver se um determinado número é divisível por outro sem ser necessário realizar a divisão.

- **Divisibilidade por 2**: um número é divisível por 2 quando for par, isto é, quando terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

- **Divisibilidade por 3**: um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos for divisível por 3.

- **Divisibilidade por 4**: um número é divisível por 4 quando os dois últimos algarismos do número forem divisíveis por 4. Essa regra inclui o caso em que o número termina em 00.

- **Divisibilidade por 5**: um número é divisível por 5 quando terminar em 0 ou 5.

- **Divisibilidade por 6**: um número é divisível por 6 quando for divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.

- **Divisibilidade por 8**: um número é divisível por 8 quando os três últimos algarismos do número forem divisíveis por 8. Essa regra inclui o caso em que o número termina em 000.

- **Divisibilidade por 9**: um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos for divisível por 9.

- **Divisibilidade por 10**: um número é divisível por 10 quando termina em 0.

- **Divisibilidade por 11**: um número é divisível por 11 se a soma dos algarismos de ordem par (p) menos a soma dos algarismos de ordem ímpar (i) é um número divisível por 11. Essa regra inclui o caso particular em que $p - i = 0$, pois 0 é divisível por 11.

  Exemplo: o número 5016 é divisível por 11.
  Os algarismos de ordem par são, da direita para a esquerda, o segundo (1) e o quarto (5). A soma dos algarismos de ordem par é $p = 1 + 5 = 6$.
  Os algarismos de ordem ímpar são, da direita para a esquerda, o primeiro (6) e o terceiro (0). A soma dos algarismos de ordem ímpar é $i = 6 + 0 = 6$.
  Note que $p - i = 0$, que é divisível por 11. Logo, o número 5016 é divisível por 11.

- **Divisibilidade por 12**: um número é divisível por 12 quando for divisível por 3 e por 4 ao mesmo tempo.

- **Divisibilidade por 15**: um número é divisível por 15 quando for divisível por 3 e por 5 ao mesmo tempo.

(Pref. Osasco/2014) O maior número que é múltiplo de 3, é múltiplo de 4 e é menor que 200 é:

a) 190

b) 192

c) 194

d) 196

e) 198

Comentários:

A questão quer determinar o maior número menor do que 200 que é **múltiplo de 3 e de 4** simultaneamente. Em outras palavras, quer determinar o maior número menor do que 200 em que **3 e 4 são divisores** simultaneamente.

Podemos começar a testar os casos pelo maior número menor do que 200.

- **199** não é divisível por 3, pois 1 + 9 + 9 = 19 não é divisível por 3;

- **198** não é divisível por 4, pois 98 não é divisível por 4;

- **197** não é divisível por 3, pois 1 + 9 + 7 = 17 não é divisível por 3;

- **196** não é divisível por 3, pois 1 + 9 + 6 = 16 não é divisível por 3;

- **195** não é divisível por 4, pois 95 não é divisível por 4;

- **194** não é divisível por 3, pois 1+ 9 + 4 = 14 não é divisível por 3;

- **193** não é divisível por 3, pois 1+ 9 + 3 = 13 não é divisível por 3;

- **192** é divisível por 3, pois 1+ 9 + 2 = 12 é divisível por 3. Note também que 192 é divisível por 4, pois 92 é divisível por 4.

Logo, **192** é o maior número que é múltiplo de 3, é múltiplo de 4 e é menor que 200.

Gabarito: Letra B.

Números primos

Conceito de números primos

Os números primos são números **naturais** maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais:

- O número 1; e
- O próprio número primo.

Isso significa que, se um número natural X é primo, apenas o número 1 e o próprio número X podem dividir X deixando resto zero.

Existem infinitos números primos. É importante que você **DECORE** os 15 primeiros.

Os 15 primeiros números primos são:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Como determinar se um número é primo

Para determinar se um número **N** é primo, devemos dividi-lo sucessivamente pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... e verificar se algum primo é divisor de **N**:

- Se **algum primo for divisor** de **N**, então **N não é primo**;
- Se, ao realizar a divisão sucessiva, **obtivermos um quociente menor do que o primo pelo qual estamos dividindo N**, então **N é primo**.

Veja que não é nada prático dividir **N** por diversos primos até obtermos um quociente menor do que o primo pelo qual estamos dividindo **N**. É justamente por isso que esse método, nas questões de concurso público, é mais utilizado para verificar se um dado número **não é primo**. Para melhor compreensão do método, vejamos a questão a seguir:

(SEE PE/2016) O número de três algarismos: n = 68D é primo.

O algarismo D, das unidades, é

a) 1.

b) 3.

c) 5.

d) 7.

e) 9.

Comentários:

Note que, para **n** ser primo, **n** só pode ser divisível por 1 e por ele mesmo. Vamos testar as alternativas, **eliminando aquelas em que n não é primo**.

a) 681 é divisível por 3, pois a soma $6+8+1=15$ é divisível por 3. Logo, não é primo.

c) 685 é divisível por 5, pois termina em 5. Logo, não é primo.

d) 687 é divisível por 3, pois a soma $6+8+7=21$ é divisível por 3. Logo, não é primo.

Restaram as alternativas B e E. Vamos testar a alternativa E.

Para verificar se 689 **não é primo**, vamos tentar dividir o número **pelos primos na ordem 2, 3, 5, 7, 11, 13 ...**.

- 689 não é divisível por **2**, pois não é par;
- 689 não é divisível por **3**, pois a soma dos algarismos não é divisível por 3;
- 689 não é divisível por **5**, pois não termina em 0 ou 5;
- Ao tentar dividir 689 por **7**, encontramos resto 3;
- 689 não é divisível por **11**, pois $(8)-(9+6)=-5$ não é divisível por 11 ;
- Ao tentar dividir 689 por **13**, encontramos resto 0. Logo, 689 não é primo, pois é divisível por 13.

Por exclusão, a **alternativa B é a correta**, ou seja **683 é primo**.

Para obter diretamente que o número 683 é primo, temos que dividir esse número **pelos primos na ordem 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc.**, e verificar que nenhum desses primos é divisor de 683 **até obter um quociente menor do que o primo pelo qual estamos dividindo 683**.

Ao dividir o número 683 por **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e 23**, nota-se que nenhum desses primos é divisor de 683 (**a divisão sempre deixa resto**). Nessas divisões, o quociente obtido é sempre maior do que o primo pelo qual estamos dividindo 683.

Ao dividir 683 pelo **primo 29**, obtém-se **quociente 23** e resto 6. Como o quociente obtido é menor do que o primo testado, conclui-se que **683 é primo**.

Gabarito: Letra B.

Decomposição em fatores primos

Decompor um número qualquer em fatores primos significa **escrevê-lo como um produto de números primos**. Por exemplo, a decomposição em fatores primos do número 60 é:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Para decompor um número em fatores primos, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

Para realizar a decomposição em fatores primos, é muito importante conhecermos as regras de divisibilidade para não perdermos tempo tentando dividir um número que não é divisível pelo primo selecionado.

Vejamos alguns exemplos:

Decomponha o número 500 em fatores primos

- Ao dividir 500 por 2, obtemos 250.

- Ao dividir 250 por 2, obtemos 125.

- Note que 125 não é mais divisível por 2 (não é par). **Passemos ao 3**.

- Note que 125 não é divisível por 3 (1+2+5 não é divisível por 3). **Passemos ao 5**.

- Ao dividir 125 por 5, obtemos 25.

- Ao dividir 25 por 5, obtemos 5.

- Ao dividir 5 por 5, **obtemos 1**. **Nesse momento, devemos parar as divisões sucessivas.**

$$\begin{array}{r|l} 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 500 em fatores primos é:

$$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$500 = 2^2 \times 5^3$$

Decomponha o número 282 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 282 & 2 \\ 141 & 3 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$$

A decomposição de 282 em fatores primos é:

$$282 = 2 \times 3 \times 47$$

Decomponha o número 3960 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

A decomposição de 3960 em fatores primos é:

$$3960 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$$

$$3960 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

Decomponha o número 10098 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 10098 & 2 \\ 5049 & 3 \\ 1683 & 3 \\ 561 & 3 \\ 187 & 11 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

A decomposição de 10098 em fatores primos é:

$$10098 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 11 \times 17$$

$$10098 = 2 \times 3^3 \times 11 \times 17$$

Existe uma **forma não metodológica** de se obter a decomposição em fatores primos. Essa forma **costuma ser mais rápida** especialmente para números mais simples. Por exemplo, vamos decompor o número 500. Acompanhe o raciocínio:

$$500 = 5 \times 100$$

$$= 5 \ \times 10 \times 10$$

$$= 5 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$$

$$= 2^2 \times 5^3$$

Note que usamos o fato de 500 ser facilmente descrito por 5×100 para decompormos o número de uma forma não metodológica.

Veja a questão a seguir, que apresenta uma aplicação interessante da decomposição em fatores primos.

(MPE RJ/2016) Sejam x e y números inteiros positivos tais que $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$.

O número de pares ordenados diferentes (x, y) que podem ser formados é:

a) 16;

b) 14;

c) 12;

d) 10;

e) 8.

Comentários:

Esta questão apresenta um nível de dificuldade bastante elevado, especialmente para aqueles que nunca viram uma questão desse tipo.

Veja que a igualdade apresentada corresponde a $\boldsymbol{xy = 3 \times 16}$.

Podemos **decompor o produto xy em fatores primos**:

$$xy = 3 \times (16)$$
$$xy = 3 \times (2^4)$$
$$xy = 2^4 \times 3$$

Como x e y são números naturais que multiplicados resultam em $2^4 \times 3$, **x e y só podem ter em sua composição o primo 2 ou o primo 3**.

Note, portanto, que **o número x pode ser descrito na forma $x = 2^a \times 3^b$**, sendo que a pode ser 0, 1, 2, 3 ou 4 e b pode ser 0 ou 1.

Toda vez que determinarmos a e b, teremos o x determinado e o y determinado, uma vez que x será dado por $2^a \times 3^b$ e y será dado por $2^{4-a} \times 3^{1-b}$. Veja:

$$xy = 2^4 \times 3$$
$$(2^a \times 3^b) \times y = 2^4 \times 3$$

$$y = \frac{2^4}{2^a} \times \frac{3^1}{3^b}$$

$$y = 2^{4-a} \times 3^{1-b}$$

Logo, **toda vez que determinarmos a e b, teremos o par (x, y) determinado.**

Como existem 5 possibilidades para a e 2 possibilidades para b, o total de possibilidades para se determinar x é $5 \times 2 = 10$. Esse é justamente o número de possibilidades para o par ordenado (x, y). O **gabarito** é **Letra D**.

Para fins didáticos, vamos mostrar todas as possibilidades para o par ordenado (x, y):

a	b	$x = 2^a . 3^b$	$y = 2^{4-a} . 3^{1-b}$	Par (x,y)	xy
0	0	1	48	(1,48)	48
1	0	2	24	(2,24)	48
2	0	4	12	(4,12)	48
3	0	8	6	(8,6)	48
4	0	16	3	(16,3)	48
0	1	3	16	(3,16)	48
1	1	6	8	(6,8)	48
2	1	12	4	(12,4)	48
3	1	24	2	(24,2)	48
4	1	48	1	(48,1)	48

Gabarito: Letra D.

Obtenção dos divisores naturais de um número

Para obter todos os divisores **naturais** de um determinado número, realizaremos um exemplo completo para melhor entendimento.

Saiba de antemão que, para obter os divisores **naturais**, é necessário seguir 3 princípios básicos:

- **O número 1 é sempre um divisor** de qualquer número e é por ele que devemos começar o método;
- Os divisores são obtidos pela **multiplicação de um fator primo por todos os divisores anteriores**;
- **Não se deve escrever mais de uma vez um divisor já obtido**, pois não é necessário.

Obtenha todos os divisores naturais de 500

Primeiramente, devemos decompor 500 em fatores primos pelo método tradicional:

$$\begin{array}{r|l} 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Em seguida, delimitamos a área dos divisores e já escrevemos o divisor 1, pois o número 1 sempre divide qualquer número sem deixar resto.

$$\begin{array}{r|l|l} & & \text{Divisores} \\ & & 1 \\ 500 & 2 & \\ 250 & 2 & \\ 125 & 5 & \\ 25 & 5 & \\ 5 & 5 & \\ 1 & & \end{array}$$

Agora, para cada fator primo, devemos multiplicá-lo por todos os divisores

Começaremos pelo primeiro fator primo 2. Esse fator primo pode ser multiplicado pelo divisor 1. Nesse caso, obtemos o divisor 2.

$$\begin{array}{r|l|l} & & \text{Divisores} \\ & & 1 \\ 500 & 2 & 2 \\ 250 & 2 & \\ 125 & 5 & \\ 25 & 5 & \\ 5 & 5 & \\ 1 & & \end{array}$$

Agora vamos para o segundo fator primo 2. Esse fator primo pode ser multiplicado por todos os divisores já obtidos: 1 e 2. Observe que **não há necessidade de registrar novamente o divisor 2 proveniente do produto 2×1**. Logo, vamos registrar somente o divisor 4 (2×2)

		Divisores
		1
500	2	2
250	2	4
125	5	
25	5	
5	5	
1		

Agora vamos para o primeiro fator primo 5. Esse fator primo pode ser multiplicado por todos os divisores já obtidos: 1, 2 e 4. Nesse caso, obtemos 1×5 = **5**; 2×5 = **10** e 4×5 = **20**.

		Divisores
		1
500	2	2
250	2	4
125	5	5, 10, 20
25	5	
5	5	
1		

Agora vamos para o segundo fator primo 5. Esse fator primo pode ser multiplicado por todos os divisores já obtidos: 1, 2, 4, 5, 10 e 20. Observe, porém, que não há necessidade de multiplicar o segundo fator 5 por 1, 2 e 4, pois nesses casos obteríamos divisores que já temos. Logo, vamos multiplicar o segundo fator 5 somente por 5, 10 e 20.

		Divisores
		1
500	2	2
250	2	4
125	5	5, 10, 20
25	5	25, 50, 100
5	5	
1		

Por fim, vamos ao terceiro fator primo 5. Esse fator primo pode ser multiplicado por todos os divisores já obtidos. Observe, porém, que só há necessidade de multiplicar esse fator 5 pelos divisores 25, 50 e 100, pois a multiplicação pelos outros divisores (1, 2, 4, 5, 10, 20) nos retornaria divisores já obtidos.

		Divisores
		1
500	2	2
250	2	4
125	5	5, 10, 20
25	5	25, 50, 100
5	5	125, 250, 500
1		

Logo, temos os seguintes divisores de 500:

$$1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250 \text{ e } 500$$

Agora que desenvolvemos o método completo, vamos praticar a obtenção dos divisores. **Tente fazer sozinho antes de consultar a resolução**.

Obtenha todos os divisores naturais de 282

		Divisores
		1
282	2	2
141	3	3, 6
47	47	47, 94, 141, 282
1		

Logo, temos os seguintes divisores de 282:

$$1, 2, 3, 6, 47, 94, 141, 282$$

Obtenha todos os divisores naturais de 2900

		Divisores
		1
2900	2	2
1450	2	4
725	5	5, 10, 20
145	5	25, 50, 100
29	29	29, 58, 116, 145, 290, 580, 725, 1450, 2900
1		

Logo, temos os seguintes divisores de 2900:

$$1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 29, 50, 58, 100, 116, 145, 290, 580, 725, 1450, 2900$$

Quantidade de divisores naturais de um número

Para saber a quantidade de divisores naturais de um número qualquer, não é necessário obter todos os divisores. Basta decompor o número em fatores primos e, em seguida:

- Obter todos os expoentes dos fatores primos;
- Somar 1 a cada um desses expoentes e realizar o produto dos números obtidos.

Obtenha a quantidade de divisores naturais de 500

A decomposição em fatores primos de 500 corresponde a $2^{\mathbf{2}} \times 5^{\mathbf{3}}$.

Os expoentes são **2** e **3**.

A quantidade de divisores de 500 é $(\mathbf{2}+1)\times(\mathbf{3}+1) = 3\times 4 = 12$.

Obtenha a quantidade de divisores naturais de 2900

A decomposição em fatores primos de 2900 corresponde a $2^{\mathbf{2}} \times 5^{\mathbf{2}} \times 29^{\mathbf{1}}$.

Os expoentes são **2**, **2** e **1**.

A quantidade de divisores de 2900 é $(\mathbf{2}+1)\times(\mathbf{2}+1)\times(\mathbf{1}+1) = 3\times 3\times 2 = 18$.

Veja como isso pode ser cobrado.

(Pref. Recife/2019) O número de divisores inteiros positivos de 600 é

a) 25.

b) 23.

c) 22.

d) 21.

e) 24.

Comentários:

Perceba que não precisamos saber todos os divisores de 600 para determinar a quantidade de divisores.

Vamos fatorar 600.

$$600 = 6\times 100$$
$$= (2\times 3)\times(10\times 10)$$
$$= 2\times 3\times 2\times 5\times 2\times 5$$
$$= 2^{\mathbf{3}}\times 3^{\mathbf{1}}\times 5^{\mathbf{2}}$$

Os expoentes são **3**, **1** e **2**.

A quantidade de divisores de 600 é $(\mathbf{3}+1)\times(\mathbf{1}+1)\times(\mathbf{2}+1) = 4\times 2\times 3 = 24$.

Gabarito: Letra E.

Algumas bancas costumam "pegar pesado" em problemas que envolvem quantidade de divisores. Para você não ficar despreparado para estas questões difíceis, os elaboramos um bizu fortíssimo.

Se um número apresenta uma quantidade $\boldsymbol{p}$ de divisores naturais, com $\boldsymbol{p}$ primo, então esse número é da forma $\boldsymbol{q^{p-1}}$, sendo $\boldsymbol{q}$ também um número primo.

Vamos mostrar como chegamos nesse resultado.

Considere um número **N** que tenha uma quantidade **p** de divisores, com **p** primo.

Ao decompormos **N** em fatores primos, vamos supor que tenhamos obtido a seguinte fatoração, com $q_1, q_2, \ldots q_n$ os primos obtidos e $e_1, e_2, \ldots, e_n$ seus expoentes, que devem ser maiores ou iguais a 1.

$$N = q_1^{e_1} \times q_2^{e_2} \times \ldots \times q_n^{e_n}$$

Obtida essa fatoração genérica, o número de divisores, que deve ser igual a p, é representado por:

$$(e_1 + 1) \times (e_2 + 1) \times \ldots \times (e_n + 1) = p$$

Note que na esquerda da equação temos o produto de números naturais da forma $(e_i + 1)$, que devem ser maiores ou iguais a 2, e na direita temos um número primo p. Veja que **não podemos decompor esse número primo p em um produto de números inteiros maiores do que 2**. Isso significa que necessariamente temos apenas um fator $(e_i + 1)$. Nossa igualdade fica:

$$(e_1 + 1) = p$$

Note que, como temos apenas um fator $(e_i + 1)$, a decomposição do nosso número X apresenta apenas um número primo q_1 com seu expoente e_1. Além disso, e_1 é dado por:

$$(e_1 + 1) = p$$

$$e_1 = p - 1$$

Assim, nosso número com p divisores pode ser descrito como $N = q^{p-1}$.

Veja como isso pode ser cobrado em questões de concurso público.

(SABESP/2018) Dois números naturais menores que 10 tem três e apenas três divisores. Dentre os números naturais maiores que 10 e menores que 30 há outro número com três e apenas três divisores e mais um com cinco e apenas cinco divisores. A soma desses quatro números naturais é

a) 35

b) 48

c) 69

d) 42

e) 54

Comentários:

Esta era para ser muito difícil. Com o bizu que acabamos de apresentar, fica um pouco mais tranquila.

—"*Dois números naturais menores que 10 tem três e apenas três divisores*".

Veja que esses dois números naturais apresentam um **número primo de divisores**, **dado por 3**. Logo, eles podem ser escritos da forma $q^{3-1} = q^2$, com q primo. Para serem menores do que dez, eles devem ser $2^2 = \mathbf{4}$ e $3^2 = \mathbf{9}$.

— "*Dentre os números naturais maiores que 10 e menores que 30 há outro número com três e apenas três divisores e mais um com cinco e apenas cinco divisores*."

Um número apresenta **3 divisores**. Como já vimos, esse número pode ser escrito como q^2. Para esse número ficar entre 10 e 30, devemos ter $5^2 = \mathbf{25}$. Perceba que o quadrado do próximo primo, 7^2, ultrapassa 30.

O outro número apresenta **5 divisores**. Como 5 é primo, esse número pode ser escrito como $q^{5-1} = q^4$, com q primo. Para esse número ficar entre 10 e 30, devemos ter $2^4 = \mathbf{16}$. Perceba que o próximo primo elevado ao expoente 4, 3^4, ultrapassa 30.

Os quatro números obtidos são **4**, **9**, **25** e **16**. A soma é dada por:

$$4 + 9 + 25 + 16 = 54$$

Gabarito: Letra E.

Divisores inteiros de um número

Até agora, tratamos dos divisores **naturais** de um número. O que aconteceria se quiséssemos os divisores **inteiros** do número?

Os divisores **inteiros** do número são os divisores inteiros **positivos e negativos**. Já sabemos como obter os divisores inteiros positivos: são os divisores naturais. Os divisores inteiros negativos são os positivos com sinal trocado.

Vejamos um exemplo:

Obtenha os divisores inteiros de 282

		Divisores
		1
282	2	2
141	3	3, 6
47	47	47, 94, 141, 282
1		

Os divisores **inteiros positivos** (**naturais**) são $1, 2, 3, 6, 47, 94, 141, 282$.

Logo, os **divisores inteiros** (**positivos** e **negativos**) são:

$$-1, -2, -3, -6, -47, -94, -141, -282, 1, 2, 3, 6, 47, 94, 141, 282.$$

Note que o número de divisores **inteiros** é sempre o dobro do número de divisores **naturais**.

(SEDUC AM/2014) Sendo $y = \frac{48}{x+5}$, o número de valores inteiros de x, para os quais o valor de y também é inteiro, é:

a) 12.

b) 15.

c) 16.

d) 20.

e) 24.

Comentários:

Primeiramente, observe que para $\frac{48}{x+5}$ ser inteiro, $x + 5$ deve ser divisor inteiro de 48.

Vamos obter **quantos** divisores **inteiros** de 48 temos. Para tanto, vamos fatorar 48.

$$
\begin{array}{r|l}
48 & 2 \\
24 & 2 \\
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
$$

Logo, $48 = 2^{\mathbf{4}} \times 3^{\mathbf{1}}$.

Temos um total de $(\mathbf{4} + 1) \times (\mathbf{1} + 1) = \mathbf{10}$ **divisores naturais**. Como o número de divisores inteiros é sempre o dobro do número de divisores naturais, **temos 20 divisores inteiros**.

Uma vez que temos 20 divisores inteiros para o número 48, temos 20 valores inteiros para $x + 5$ que farão com que a divisão $\frac{48}{x+5}$ seja inteira.

Isso significa que temos 20 valores para x que, somados com 5, farão com que a divisão $\frac{48}{x+5}$ seja inteira.

Gabarito: Letra D.

MMC E MDC

MMC e MDC
Mínimo múltiplo comum (MMC)
Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo: • Decompor todos os números em fatores primos; • Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto. Existe um método prático para determinar o **MMC** entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**. Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado. • Quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que a **é múltiplo** de b, podemos eliminar b do cálculo do MMC. • Se tivermos **N** números e um deles é **múltiplo de todos os outros**, esse número é o **MMC**.
Máximo divisor comum (MDC)
Para obter o **MDC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo: • Decompor todos os números em fatores primos; • Selecionar os números primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto. • Quando temos que realizar um **MDC** de **N** números e no meio desses números temos que a **é divisor** de b, podemos eliminar b do cálculo do MDC. • Se tivermos **N** números e um deles é **divisor de todos os outros**, esse número é o **MDC**.
MMC ou MDC: qual usar?
• Se o resultado procurado deve ser **maior** do que os **dados do problema**, use o **MMC**; • Se o resultado deve ser **menor** do que os **dados**, use o **MDC**. **A relação é inversa**: • **Resultado MAIOR**, **use o MÍNIMO Múltiplo Comum**; • **Resultado MENOR**, **use o MÁXIMO Divisor Comum**. O melhor caminho para acertar as questões é sempre tentar responder à seguinte pergunta: *Preciso encontrar o **menor múltiplo** dos **números em questão** ou o **maior divisor** desses números?*

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

O **Mínimo** **Múltiplo** **Comum** (**MMC**) entre **N** números é o **menor** dos **múltiplos** que é comum a todos os números.

Representaremos o **MMC** entre os números $\boldsymbol{a}$**,** $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ por $\text{MMC}\ (a; b; c)$.

Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

- Decompor todos os números em fatores primos; e
- Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Vamos a alguns exemplos:

Calcule o MMC entre 380, 520 e 550

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

$$380 = 38 \times 10$$
$$= (2 \times 19) \times (2 \times 5)$$
$$\mathbf{= 2^2 \times 5 \times 19}$$

$$520 = 52 \times 10$$
$$= (2 \times 26) \times (2 \times 5)$$
$$= 2 \times 2 \times 13 \times 2 \times 5$$
$$\mathbf{= 2^3 \times 5 \times 13}$$

$$550 = 55 \times 10$$
$$= (11 \times 5) \times (2 \times 5)$$
$$\mathbf{= 2 \times 5^2 \times 11}$$

Devemos selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$380 = 2^2 \times 5 \times 19$

$520 = 2^3 \times 5 \times 13$

$550 = 2 \times 5^2 \times 11$

Logo, $\text{MMC}\ (380; 520; 550) = 2^3 \times 5^2 \times 11 \times 13 \times 19 = 543.400$.

Calcule o MMC entre 3960 10098.

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10098 & 2 \\ 5049 & 3 \\ 1683 & 3 \\ 561 & 3 \\ 187 & 11 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

Devemos selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$3960 = \ 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$

$10098 = \ 2 \ \times 3^3 \qquad \times 11 \ \times 17$

Logo, MMC $(3960; 10098) = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 11 \times 17 = 201.960$.

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50.

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

$$5 = 5$$

$$10 = 2 \times 5$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$\begin{aligned} 20 &= 2 \times 10 \\ &= 2^2 \times 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50 &= 5 \times 10 \\ &= 2 \times 5^2 \end{aligned}$$

Devemos selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$5 = \qquad\qquad 5$

$10 = 2 \times \qquad 5$

$15 = \qquad 3 \times 5$

$20 = 2^2 \qquad \times 5$

$50 = 2 \qquad \times 5^2$

Logo, MMC $(5; 10; 15; 20; 50) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$.

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50

Vamos decompor os 3 números em fatores primos, selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$21 = 3 \times 7$

$45 = 3^2 \times 5$

$50 = 2 \times 5^2$

Logo, $\text{MMC }(21; 45; 50) = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 3150.$

Existe um método prático para determinar o **MMC** entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**.

Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado.

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

- Ao dividir os números **5**, **10**, **15**, **20** e **50** **por 2**, obtemos **5**, **5**, **15**, **10** e **25**.

- Ao dividir os números **5**, **5**, **15**, **10** e **25** **por 2**, obtemos **5**, **5**, **15**, **5** e **25**.

- Note que nenhum dos números dentre **5**, **5**, **15**, **5** e **25** é divisível por 2. **Passemos ao 3**.

- Ao dividir os números **5**, **5**, **15**, **5** e **25** **por 3**, obtemos **5**, **5**, **5**, **5** e **25**.

- Note que nenhum dos números dentre **5**, **5**, **5**, **5** e **25** é divisível por 3. **Passemos ao 5**.

- Ao dividir os números **5**, **5**, **5**, **5** e **25** **por 5**, obtemos **1**, **1**, **1**, **1** e **5**.

- Ao dividir os números **1**, **1**, **1**, **1** e **5** **por 5**, obtemos **1**, **1**, **1**, **1** e **1**. **Nesse momento, devemos parar a divisão simultânea.**

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{ccccc|c}
5, & 10, & 15, & 20, & 50 & 2 \\
5, & 5, & 15, & 10, & 25 & 2 \\
5, & 5, & 15, & 5, & 25 & 3 \\
5, & 5, & 5, & 5, & 25 & 5 \\
1, & 1, & 1, & 1, & 5 & 5 \\
1, & 1, & 1, & 1, & 1 &
\end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) é o seguinte produto:

$$\begin{aligned}\text{MMC }(5; 10; 15; 20; 50) &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \\ &= 2^2 \times 3 \times 5^2 \\ &= 300\end{aligned}$$

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{r|l} 21,\ 45,\ 50 & 2 \\ 21,\ 45,\ 25 & 3 \\ 7,\ 15,\ 25 & 3 \\ 7,\ 5,\ 25 & 5 \\ 7,\ 1,\ 5 & 5 \\ 7,\ 1,\ 1 & 7 \\ 1,\ 1,\ 1 & \end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) é o seguinte produto:

$$\text{MMC}\ (21; 45; 50) = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$$
$$= 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$
$$= 3150$$

Uma dica importante que pode economizar um certo tempo em prova é a seguinte: quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que $\boldsymbol{a}$ **é múltiplo** de $\boldsymbol{b}$**,** podemos eliminar $\boldsymbol{b}$ do cálculo do MMC.

Vejamos dois exemplos:

Calcule o MMC de 40, 30 e 15

Ao calcular o $\text{MMC}(40; 30; 15)$, perceba que **30** é **múltiplo de 15.** Logo:

$$\text{MMC}(40; \mathbf{30}; \mathbf{15}) = \text{MMC}\ (40; \mathbf{30})$$

Calcular o MMC de 40 e 30 é mais rápido, não é mesmo?

Calcule o MMC de 390, 130 e 75

Ao calcular o $\text{MMC}(390; 130; 75)$, perceba que **390** é **múltiplo de 130**. Logo:

$$\text{MMC}(\mathbf{390}; \mathbf{130}; 75) = \text{MMC}\ (\mathbf{390}; 75)$$

Calcular o MMC de 390 e 75 é mais rápido, não é mesmo?

Perceba que se tivermos **N** números e **um deles é múltiplo de todos os outros**, **esse número é o MMC**.

Calcule o MMC de 3, 6 e 12

Note que 12 é múltiplo de 3 e de 6. Logo:

$$\text{MMC}\ (3; 6; 12) = 12$$

Calcule o MMC de 120, 60 e 15

Note que 120 é múltiplo de 60 e de 15. Logo:

$$\text{MMC}\ (120; 60; 15) = 120$$

Vamos ver como o MMC pode ser cobrado em problemas.

(AVAREPREV/2020) Dois relógios foram programados para despertar em intervalos de tempo constantes: um deles desperta 3 vezes ao dia, e o outro, 4 vezes ao dia. Suponha que em determinado horário x, de um dia qualquer, ambos os relógios despertaram, ao mesmo tempo, e funcionaram corretamente, durante as 50 horas seguintes. Nessas condições, iniciando-se a contagem nesse horário x, e encerrando-a 50 horas após, o número total de vezes em que esses dois relógios teriam despertado, em um mesmo horário, será igual a

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

e) 7.

Comentários:

O relógio que desperta 3 vezes ao dia desperta a cada $\frac{24h}{3} = 8$ horas, e o relógio que desperta 4 vezes ao dia desperta a cada $\frac{24h}{4} = 6$ horas.

A questão pede o número total de vezes em que esses dois relógios teriam despertado, em um mesmo horário, em um intervalo de 50 horas. Para isso, precisamos saber a cada quantas horas os dois relógios despertam juntos. Trata-se do **MMC** entre 8h e 6h.

Vamos decompor 8 e 6 em fatores primos, selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto

$8 = 2^3$

$6 = 2 \times 3$

Logo, $\text{MMC}(8; 6) = 2^3 \times 3 = 24.$

Como os relógios despertam simultaneamente a cada 24h, em um intervalo de 50h eles despertam juntos 3 vezes: no início das 50h, após 24h e após 48h.

Gabarito: Letra A.

(AFAP/2019) João e Maria correm todos os dias no circuito de 1.500 m de um parque. João faz o percurso em 8 minutos e Maria em 10 minutos. Se eles partem juntos do ponto inicial do percurso, a diferença entre o número de metros percorridos por João e o número de metros percorridos por Maria, quando se encontrarem novamente no ponto de partida, supondo que mantenham o mesmo ritmo durante todo o exercício, é

a) 7.500.

b) 5.500.

c) 3.000.

d) 2.500.

e) 1.500.

Comentários:

Note que, para João e Maria se encontrarem novamente no ponto de partida, é necessário que tenha decorrido um tempo determinado que seja múltiplo tanto de 8 minutos quanto de 10 minutos.

Como a questão pede o próximo encontro, devemos encontrar o menor múltiplo comum entre 8 e 10. Trata-se do $\text{MMC}\ (8; 10)$.

Vamos decompor os 2 números em fatores primos, selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$8 = \ 2^3$

$10 = 2 \times 5$

Logo, $\text{MMC}(8; 10) = 2^3 \times 5 = 40$. Portanto, o novo encontro ocorrerá em 40 minutos.

Nesse tempo, João terá dado $\frac{40}{8} = 5$ voltas e Maria terá dado $\frac{40}{10} = 4$ voltas. A diferença de número de metros percorridos entre João e Maria corresponde a $5 - 4 = 1$ volta, ou seja, 1.500m.

Gabarito: Letra E.

(SEFAZ AM/2022) Um pote contém entre 150 e 200 balas. Miguel reparou que separando essas balas em grupos de 5 sobravam 2 balas, e que, separando em grupos de 7, sobravam também 2 balas.

Se Miguel separasse as balas em grupos de 9 balas, sobrariam

a) 0.

b) 2.

c) 4.

d) 6.

e) 8.

Comentários:

Considere que o número de balas é x. Sabemos que **x está entre 150 e 200**.

Além disso, perceba que ao dividir x por 5 ou por 7, sempre temos **resto 2**. Isso significa que, ao dividir **(x−2)** por 5 ou por 7, sempre temos **resto zero**. Em outras palavras, **(x−2) é múltiplo comum a 5 e 7**.

Note que o **mínimo múltiplo comum a 5 e 7** é o produto 5×7 = **35**, pois 5 e 7 são primos.

Logo, os candidatos para **(x−2) são os múltiplos de 35**, pois **os múltiplos de 35 são os múltiplos comuns a 5 e 7**, sendo **35** o menor múltiplo comum a 5 e 7.

Como x está entre 150 e 200, **(x−2)**, que é múltiplo de 35, **está entre 148 e 198**. Vamos testar alguns múltiplos de 35:

$$35 \times 4 = 140$$

$$35 \times 5 = 175$$

$$35 \times 6 = 210$$

Veja que **o único múltiplo de 35 que está entre 148 e 198** é **175**. Logo:

$$x - 2 = 175$$

$$x = 177$$

Assim, o número de balas é 177. Ao dividir 177 por 9, obtemos **quociente 19** e **resto 6**. Portanto, se Miguel separasse as 177 balas em **grupos de 9 balas**, **sobrariam 6 balas**.

Gabarito: Letra D.

Máximo Divisor Comum (MDC)

O **Máximo** **Divisor** **Comum** (**MDC**) entre **N** números é o **maior** dos **divisores** que é comum a todos os números.

Representaremos o **MDC** entre os números $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ por MDC (a; b; c).

Para obter o MDC entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

- Decompor todos os números em fatores primos;
- Selecionar os números primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes.**

Máximo Divisor Comum (MDC)

Selecionar os números primos **comuns** com os **menores expoentes**

Vamos a alguns exemplos:

Calcule o MDC entre 20, 50 e 65

Vamos decompor os números em fatores primos:

$$20 = 2 \times 10$$
$$= 2 \times 2 \times 5$$
$$\boldsymbol{= 2^2 \times 5}$$

$$50 = 5 \times 10$$
$$= 5 \times 2 \times 5$$
$$\boldsymbol{= 2 \times 5^2}$$

$$65 = 5 \times 13$$

Devemos selecionar os números primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$20 = 2^2 \times 5$

$50 = 2 \ \times 5^2$

$65 = \qquad 5 \ \times 13$

Veja que o único primo comum é o 5 e o seu expoente é 1.

Logo, $\text{MDC}(20; 50; 65) = 5$.

Calcule o MDC entre 3960 10098.

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10098 & 2 \\ 5049 & 3 \\ 1683 & 3 \\ 561 & 3 \\ 187 & 11 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

Devemos selecionar os números primos comuns com os menores expoentes e realizar o produto.

$3960 = \quad 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$

$10098 = 2 \ \times 3^3 \qquad \times 11 \ \times 17$

Logo, $\text{MDC}(3960; 10098) = 2 \times 3^2 \times 11 = 198$.

Uma dica importante que pode economizar um certo tempo em prova é a seguinte: quando temos que realizar um **MDC** de **N** números e no meio desses números temos que $\boldsymbol{a}$ é divisor de $\boldsymbol{b}$**,** podemos eliminar **b** do cálculo do MDC.

Calcule o MDC de 60, 45 e 30

Ao calcular o $\text{MDC}(60; 45; 15)$, perceba que **30** é **divisor de 60**. Logo:

$$\text{MDC}(\mathbf{60}; 45; \mathbf{30}) = \text{MDC}(45; \mathbf{30})$$

Calcular o MDC de 45 e 30 é mais rápido, não é mesmo?

Calcule o MDC de 580, 290 e 85

Ao calcular o $\text{MDC}(580; 290; 85)$, perceba que **290** é **divisor de 580**. Logo:

$$\text{MDC}(\mathbf{580}; \mathbf{290}; 85) = \text{MDC}(\mathbf{290}; 85)$$

Calcular o MDC de 290 e 85 é mais rápido, não é mesmo?

Perceba que se tivermos **N** números e **um deles é divisor de todos os outros**, **esse número é o MDC**.

Calcule o MDC de 90, 30 e 10

Perceba que 10 é divisor de 90 e 30. Logo:

$$\text{MDC}(90; 30; 10) = 10$$

Calcule o MDC de 110, 88 e 22

Perceba que 22 é divisor de 110 e 88. Logo:

$$\text{MDC}(110; 88; 22) = 22$$

Vamos praticar com alguns problemas de MDC.

(Pref. Morro Agudo/2020) Tem-se 144 cm de fita na cor vermelha e 168 cm de fita na cor verde. Pretende-se cortar essas fitas em pedaços, todos com o mesmo comprimento, sendo este o maior possível, de modo a utilizar totalmente essas fitas, sem desperdiçá-las. Nesse caso, o número total de pedaços de fitas que será possível obter é

a) 12.

b) 13.

c) 16.

d) 24.

e) 26.

Comentários:

Veja que, para obter o maior pedaço possível, esse pedaço deve ter um comprimento tal que, ao dividir 144 e 168, nos deixa resto zero. Logo, estamos diante da necessidade de <u>encontrar um divisor comum a 144 e 168 que seja o maior possível</u>. Trata-se do $\text{MDC}(144; 168)$.

Vamos fatorar 144.

$$144 = 12 \times 12$$
$$= (3 \times 4) \times (3 \times 4)$$
$$= 2^4 \times 3^2$$

Vamos fatorar 168.

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Devemos selecionar os números primos **<u>comuns</u>** com os **<u>menores expoentes</u>** e realizar o produto.

$144 = 2^4 \times 3^2$

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$

Logo, $\text{MDC}(144; 168) = 2^3 \times 3 = 24$.

Sabemos agora que o pedaço deve ter 24cm.

O número de pedaços vermelhos é $\frac{144cm}{24cm} = 6$ e o número de pedaços verdes é $\frac{168cm}{24cm} = 7$. Logo, temos um total de $6 + 7 = 13$ pedaços.

Gabarito: Letra B.

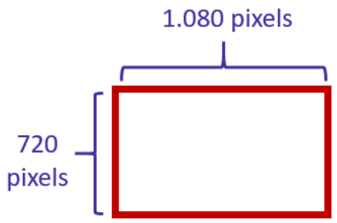
(SEDF/2017) Julgue o item a seguir, relativo a números naturais, números racionais e regra de três.

Situação hipotética: Na veiculação de determinado anúncio publicitário em aparelhos de TV digital de resolução igual a 1.080 pixels × 720 pixels, a tela aparece dividida em quadrados, todos de mesma área.

Assertiva: Nesse caso, a menor quantidade de quadrados possível é igual a 6.

Comentários:

A tela apresenta 1.080 pixels de comprimento e 720 pixels de largura.



Se o quadrado apresentar um comprimento e uma largura de **L** pixels, esse valor **L** deve ser um divisor tanto do comprimento de 1.080 pixels quanto da largura 720 pixels.

Note que, para obtermos a menor quantidade de quadrados, devemos ter o maior tamanho para **L**, pois quanto maior o tamanho do quadrado, menos quadrados precisaremos para preencher a tela.

Como **L** deve ser um divisor comum de 1.080 e 720 e deve ser o maior possível, $L = MDC\ (1.080;\ 720)$.

Primeiramente, devemos decompor os números em fatores primos.

$$1080 = 10 \times 108$$
$$= 10 \times 9 \times 12$$
$$= (2 \times 5) \times 3^2 \times (3 \times 2^2)$$
$$= 2^3 \times 3^3 \times 5$$

$$720 = 72 \times 10$$
$$= (9 \times 8) \times (2 \times 5)$$
$$= 3^2 \times 2^3 \times 2 \times 5$$

$$= 2^4 \times 3^2 \times 5$$

Agora devemos selecionar os números primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

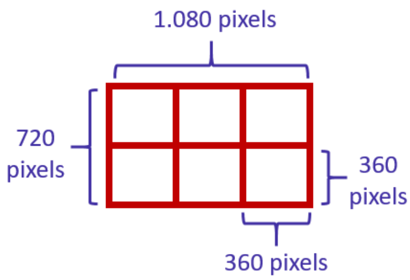
$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

Logo, $\text{MDC}(1080; 720) = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$.

Portanto, lado **L** do quadrado tem 360 pixels.

Nesse caso, o comprimento da tela apresenta $\frac{1080}{360} = 3$ quadrados e a largura da tela apresenta $\frac{720}{360} = 2$ quadrados.



Gabarito: CERTO.

MMC ou MDC: qual usar?

Muitos alunos apresentam certa dificuldade em identificar, em um dado problema, se deve ser utilizado o **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) ou o **Máximo Divisor Comum** (**MDC**) para os **números apresentados no enunciado**.

Primeiramente, deve-se entender que o **MMC** é um **múltiplo** dos **números em questão**. Logo, o **MMC** é necessariamente **maior** **do que todos os números**.

Por outro lado, o **MDC** é um **divisor** dos números em questão. Portanto, o **MDC** é necessariamente **menor** **do que todos os números**.

Em resumo:

$$\mathbf{MMC} > \text{todos os números em questão} > \mathbf{MDC}$$

Assim, se você estiver em um problema sem saber se deve usar o **MMC** ou o **MDC**, utilize a seguinte dica:

- Se o resultado procurado deve ser **maior** do que os **dados do problema**, use o **MMC**.
- Se o resultado deve ser **menor** do que os **dados**, use o **MDC**.

Note que a relação em questão é inversa!

- **Resultado MAIOR**, **use o MÍNIMO Múltiplo Comum**;
- **Resultado MENOR**, **use o MÁXIMO Divisor Comum**.

Vejamos dois exemplos.

Exemplo 1: Um segurança faz sua ronda a cada 30 minutos, e outro segurança faz sua ronda a cada 40 minutos. Os dois seguranças iniciaram suas rondas agora. Daqui a quanto tempo eles farão a próxima ronda juntos?

Note que o tempo procurado será **maior** **do que os intervalos do enunciado**. Logo, deve-se usar o **MMC**.

Exemplo 2: Em uma sala com 40 homens e 24 mulheres, é necessário montar grupos contendo a mesma quantidade de pessoas e que tenham apenas homens ou apenas mulheres, de modo que tenhamos o número máximo de pessoas em cada grupo. Qual é o número de pessoas de cada grupo formado?

Note que a quantidade procurada de pessoas em cada grupo será **menor** **do que os dados do enunciado**. Logo, deve-se usar o **MDC**.

Apresentada a dica, ressalto que o melhor caminho para acertar as questões é sempre tentar responder à seguinte pergunta:

*Preciso encontrar o **menor múltiplo** **dos números em questão** ou o **maior divisor** **desses números**?*

Veja que, para responder a pergunta, é necessário ter muito claro os conceitos de **múltiplo** e de **divisor** aprendidos na presente aula.

Naturalmente, se você está atrás do **menor múltiplo** **dos números em questão**, você deve calcular o **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)**. Caso contrário, se você está atrás do **maior divisor** **desses números**, você deve calcular o **Máximo Divisor Comum (MDC)**.

Vamos verificar novamente os dois exemplos vistos com base nesse entendimento.

Exemplo 1: Um segurança faz sua ronda a cada 30 minutos, e outro segurança faz sua ronda a cada 40 minutos. Os dois seguranças iniciaram suas rondas agora. Daqui a quanto tempo eles farão a próxima ronda juntos?

Note que o tempo procurado será **múltiplo** **de 30 e de 40**. Como se quer a próxima ronda, esse múltiplo procurado deve ser o **menor possível**. Logo, deve-se usar o **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)**.

Exemplo 2: Em uma sala com 40 homens e 24 mulheres, é necessário montar grupos contendo a mesma quantidade de pessoas e que tenham apenas homens ou apenas mulheres, de modo que tenhamos o número máximo de pessoas em cada grupo. Qual é o número de pessoas de cada grupo formado?

Note que a quantidade procurada de pessoas em cada grupo será **divisor** **dos números 40 e 24**. Além disso, esse divisor deve ser o **maior possível**, pois quer-se o número máximo de pessoas em cada grupo. Logo, deve-se usar o **Máximo Divisor Comum (MDC)**.

QUESTÕES COMENTADAS - MULTIBANCAS

Múltiplos e Divisores

FGV

1.(FGV/TRT-PB/2022) A soma de 2 números naturais é 22253. Um dos números é divisível por 10 e se retirarmos o algarismo das unidades desse número obtém-se o outro número.

A diferença entre o maior e o menor número é

a) 13222.

b) 14644.

c) 15876.

d) 17732.

e) 18207.

Comentários:

Considere que o número natural divisível por 10 é x. Sabemos que **um número é divisível por 10 quando o último algarismo é zero**.

Note que **retirar o último algarismo de x corresponde a uma divisão por dez**. Logo, **o outro número procurado é $\frac{x}{10}$**.

Sabemos que a soma dos dois números é 22253. Logo:

$$x + \frac{x}{10} = 22253$$

$$\frac{10x + x}{10} = 22253$$

$$\frac{11x}{10} = 22253$$

$$x = 22253 \times \frac{10}{11}$$

$$x = 20230$$

Logo, a diferença entre o maior e o menor número é:

$$x - \frac{x}{10} = 20230 - \frac{20230}{10}$$

$$= 20230 - 2023$$

$$= 18207$$

Gabarito: Letra E.

2.(FGV/PM SP/2022) Um número inteiro positivo N, de 2 algarismos, é tal que exatamente 3 das 4 afirmações a seguir são verdadeiras:

• N é um número par;

• N é um número primo;

• N é múltiplo de 3;

• um dos algarismos de N é 5.

O algarismo das unidades de N é

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 8.

Comentários:

Como exatamente 3 das 4 afirmações são verdadeiras, temos que **somente uma afirmação é falsa**. Vamos procurar a afirmação falsa.

Sabemos que um número primo é um número **natural** maior do que 1 que possui somente dois divisores naturais:

- O número 1; e
- O próprio número primo.

Note que **o número procurado N apresenta dois algarismos**.

Nesse caso, observe que "**N é um número primo**" deve ser a única afirmação falsa. Caso essa afirmação não fosse falsa, teríamos um número de dois algarismos que, além de ser primo, deveria ter como verdadeiro ao menos uma das seguintes afirmações (**pois apenas uma pode ser falsa**):

• N é um número par (isto é, N é divisível por 2);

• N é múltiplo de 3 (isto é, N é divisível por 3);

Veja que isso é inadmissível, pois, sendo um primo de dois dígitos, esse primo não pode ser divisível nem por 2 e nem por 3.

Logo, **não sendo um número primo**, **o nosso número N obedece somente a essas três afirmações**:

• N é um número par;

• N é múltiplo de 3;

• um dos algarismos de N é 5.

Como N é um número de 2 dígitos e como N é par, é necessário que o algarismo 5 seja o algarismo das dezenas. Temos as seguintes possibilidades:

$$50, 52, 54, 56, 58$$

Para que N seja múltiplo de 3, o único valor possível para N é 54, pois 54 é o único número dentre os possíveis que é divisível por 3.

Logo, **N = 54**. Portanto, **o algarismo das unidades de N é 4**.

Gabarito: Letra C.

3.(FGV/Senado Federal/2022) Maria foi desafiada a calcular quantos números naturais que sejam múltiplos de 3 ou de 7 existem entre 1000 e 2000. Maria refletiu um pouco e respondeu corretamente:

a) 47

b) 284

c) 369

d) 428

e) 512

Comentários:

Para o número de múltiplos de 3 ou de 7 entre 1000 e 2000, devemos:

- **Obter** o número de **múltiplos de 3** entre 1000 e 2000;
- **Somar** com o número de **múltiplos de 7** entre 1000 e 2000; e
- **Subtrair** o número de **múltiplos de 21** entre 1000 e 2000.

Veja que devemos subtrair os múltiplos de 21 porque, ao somar o número de múltiplos de 3 ao número de múltiplos de 7, estamos contabilizando duas vezes os múltiplos de 3×7 = 21, pois todo múltiplo de 21 é múltiplo de 3 e de 7.

—

Para encontrar o **número de múltiplos de 3** entre **1000** e **2000**, vamos realizar a seguinte operação:

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 3 imediatamente} \\ \text{inferior a 2000}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 3 imediatamente} \\ \text{superior a 1000}\end{pmatrix}}{3} + \mathbf{1}$$

Observe que **é necessário somar uma unidade** na expressão para não deixar de fora um dos extremos.

Exemplo: **quantos múltiplos de 3 existem entre 3 e 9**? Ora, claramente existem três: o próprio 3, o 6 e o próprio 9. Ocorre que, ao realizar $\frac{9-3}{3}$, obteríamos 2 como resultado. Logo, é necessário somar uma unidade na expressão:

$$\frac{9-3}{3} + 1$$

$$= 2 + 1$$

$$= 3$$

Voltando ao problema, vamos agora obter o **múltiplo de 3 imediatamente inferior a 2000.** Note que **2000** dividido por 3 nos deixa **quociente 666** e resto 2. Logo, o **múltiplo de 3 imediatamente inferior a 2000** é:

$$666 \times 3 = 1998$$

Agora vamos obter o **múltiplo de 3 imediatamente superior a 1000**. Note que 1000 dividido por 3 nos deixa **quociente 333** e resto 1. Logo, o **múltiplo de 3 imediatamente superior a 1000** é:

$$333 \times 3 + 3$$

$$= 999 + 3$$

$$= 1002$$

Logo, o **número de múltiplos de 3** entre **1000** e **2000** é:

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 3 imediatamente} \\ \text{inferior a 2000}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 3 imediatamente} \\ \text{superior a 1000}\end{pmatrix}}{3} + \mathbf{1}$$

$$\frac{1998 - 1002}{3} + 1$$

$$= 332 + 1$$

$$= \mathbf{333}$$

$-$

Para encontrar o **número de múltiplos de 7** entre **1000** e **2000**, vamos realizar a seguinte operação:

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 7 imediatamente} \\ \text{inferior a 2000}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 7 imediatamente} \\ \text{superior a 1000}\end{pmatrix}}{7} + \mathbf{1}$$

Vamos agora obter o **múltiplo de 7 imediatamente inferior a 2000.** Note que **2000** dividido por 7 nos deixa **quociente 285** e resto 5. Logo, o **múltiplo de 7 imediatamente inferior a 2000** é:

$$285 \times 7 = 1995$$

Agora vamos obter o **múltiplo de 7 imediatamente superior a 1000**. Note que 1000 dividido por 7 nos deixa **quociente 142** e resto 6. Logo, o **múltiplo de 7 imediatamente superior a 1000** é:

$$142 \times 7 + 7$$

$$= 994 + 7$$

$$= 1001$$

Logo, o **número de múltiplos de 7** entre **1000** e **2000** é:

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 7 imediatamente} \\ \text{inferior a 2000}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 7 imediatamente} \\ \text{superior a 1000}\end{pmatrix}}{7} + \mathbf{1}$$

$$= \frac{1995 - 1001}{7} + 1$$

$$= \frac{994}{7} + 1$$

$$= 142 + 1$$

$$= \mathbf{143}$$

–

Para encontrar o **número de múltiplos de 21** entre **1000** e **2000**, vamos realizar a seguinte operação:

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 21 imediatamente} \\ \text{inferior a 2000}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 21 imediatamente} \\ \text{superior a 1000}\end{pmatrix}}{21} + \mathbf{1}$$

Vamos agora obter o **múltiplo de 21 imediatamente inferior a 2000.** Note que **2000** dividido por 21 nos deixa **quociente 95** e resto 5. Logo, o **múltiplo de 21 imediatamente inferior a 2000** é:

$$95 \times 21 = 1995$$

Agora vamos obter o **múltiplo de 21 imediatamente superior a 1000**. Note que 1000 dividido por 21 nos deixa **quociente 47** e resto 13. Logo, o **múltiplo de 21 imediatamente superior a 1000** é:

$$47 \times 21 + 21$$

$$= 987 + 21$$

$$= 1008$$

Logo, o **número de múltiplos de 21** entre **1000** e **2000** é:

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 21 imediatamente} \\ \text{inferior a 2000}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 21 imediatamente} \\ \text{superior a 1000}\end{pmatrix}}{21} + \mathbf{1}$$

$$= \frac{1995 - 1008}{21} + 1$$

$$= \frac{987}{21} + 1$$

$$= 47 + 1$$

$$= \mathbf{48}$$

$$-$$

Portanto, o número de múltiplos de 3 ou de 7 entre 1000 e 2000:

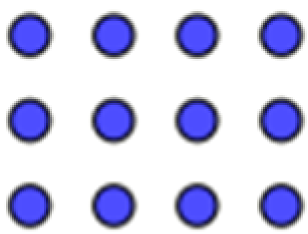
$$\text{Múltiplos de 3} + \text{Múltiplos de 7} - \text{Múltiplos de 21}$$

$$= \mathbf{333} + \mathbf{143} - \mathbf{48}$$

$$= \mathbf{428}$$

Gabarito: Letra D.

4.(FGV/CBM-RJ/2022) Em um pátio, 240 soldados deverão ser dispostos em formação retangular de linhas e colunas. Por exemplo, a figura abaixo mostra 12 soldados em uma formação retangular de 3 linhas e 4 colunas.



Para os 240 soldados, a formação deve ter ao menos, 4 linhas e ao menos 4 colunas.

Assinale a opção que indica o número de maneiras diferentes de realizar essa formação.

a) 7.

b) 8.

c) 12.

d) 14.

e) 18.

Comentários:

Suponha que na formação dos 240 soldados teremos x **linhas** e y **colunas**. Observe que x **e** y **devem ser números naturais**, pois representam linhas e colunas.

O número de soldados, dado por **240**, é o **produto** do **número linhas x** pelo **número de colunas y**:

$$x \times y = 240$$

Veja que $\frac{240}{x}$ deve resultar em um número natural, pois corresponde ao número de colunas y:

$$x \times y = 240$$

$$y = \frac{240}{x}$$

Assim, **o número de linhas x deve ser um divisor natural de 240**. Nesse momento, vamos obter os divisores de 240 para obter os possíveis valores de x.

		Divisores
		1
240	2	2
120	2	4
60	2	8
30	2	16
15	3	3, 6, 12, 24, 48
5	5	5, 10, 20, 40, 80, 15, 30, 60, 120, 240
1		

Note que, a princípio, **teríamos 20 possibilidades para o número de linhas x**. Observe, porém, que o enunciado nos diz que a formação deve ter **ao menos $x = 4$ linhas**. Logo, os **divisores 1, 2 e 3 não podem corresponder ao número de linhas x da formação**.

Sabemos, ainda, que uma vez que temos um número de linhas x para a formação, o número de colunas y é necessariamente:

$$y = \frac{240}{x}$$

Como o enunciado nos diz que devemos ter também **ao menos $y = 4$ colunas**, os **divisores 80, 120 e 240 não podem corresponder ao número de linhas x da formação**, pois nesse caso teríamos:

$$y = \frac{240}{80} = 3 \text{ colunas}$$

$$y = \frac{240}{120} = 2 \text{ colunas}$$

$$y = \frac{240}{240} = 1 \text{ coluna}$$

Portanto, **dentre as 20 possibilidades para o número de linhas x**, é necessário descartar os divisores **1**, **2**, **3**, **80**, **120** e **240.** Ficamos com **16 possibilidades para o número de linhas x**.

Consequentemente, como para cada número de linhas x obtemos um único número de colunas y, temos **16 maneiras diferentes de realizar essa formação**.

Gabarito: Letra D.

5.(FGV/SEAD-AP/2022) O maior fator primo do número 65536 é 2, pois $65536 = 2^{16}$.

A soma dos algarismos do maior fator primo de 65535 é

a) 3.

b) 5.

c) 8.

d) 11.

e) 14.

Comentários:

Vamos fatorar o número 65535.

Perceba que o número 65535 é divisível pelo primo 3, pois a soma dos algarismos é divisível por 3. Ao dividir 65535 por 3, obtemos **quociente 21845** e resto zero. Logo:

$$65535 = 3 \times \mathbf{21845}$$

Já o número 21845 não é divisível pelo primo 3, porém é divisível pelo primo 5, pois esse número termina em 5. Ao dividir 21845 por 5, obtemos **quociente 4369** e resto zero. Logo:

$$65535 = 3 \times \underbrace{5 \times \mathbf{4369}}_{21845}$$

4369 não é divisível por 5, pois não termina em 0 ou 5. Ao tentar dividir 4369 pelos próximos números primos, perceba que esse número não é divisível por 7, nem por 11 e nem por 13. Porém, número 4369 é divisível pelo primo 17.

Ao dividir 4369 por 17, obtemos **quociente 257** e resto zero. Logo:

$$65535 = 3 \times 5 \times \underbrace{17 \times \mathbf{257}}_{4369}$$

Vamos agora tentar decompor o número 257. Já sabemos que ele não é divisível pelos primos, 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Ao tentar dividir por 17, obtemos **quociente 15** e resto 2.

Como o **quociente obtido** (**15**) **é menor do que o primo testado** (**17**), **devemos parar a fatoração**, **pois nesse caso o número que está sendo testado** (**257**) **é primo**. Portanto, a fatoração final é:

$$\mathbf{65535 = 3 \times 5 \times 17 \times 257}$$

Logo, o maior fator primo de 65535 é 257.

Graficamente, acabamos de realizar a seguinte fatoração:

$$\begin{array}{r|l} 65535 & 3 \\ 21845 & 5 \\ 4369 & 17 \\ 257 & 257 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a soma dos algarismos do maior fator primo de 65535 é:

$$2 + 5 + 7 = 14$$

Gabarito: Letra E.

6.(FGV/TRT-PB/2022) Carlos considera que um número é agradável quando a soma dos seus algarismos é 7 ou múltiplo de 7. Por exemplo, o ano de 2005 foi agradável pois 2 + 0 + 0 + 5 = 7, e o de 2039 será também, pois 2 + 0 + 3 + 9 = 14.

Por esse critério, o número de anos agradáveis do século XX foi igual a

a) 7.

b) 10.

c) 11.

d) 13.

e) 14.

Comentários:

O século XX começa no ano 1901 e termina no ano 2000.

Note que **o ano 2000 não é um número agradável**, pois **2+0+0+0 = 2** não é múltiplo de 7.

Os **outros anos do século 20** sempre **começam pelos algarismos 1 e 9**. Temos os seguintes formatos de ano, sendo A e B dígitos de 0 a 9:

$$\mathbf{19A\ B}$$

Note que a soma dos dígitos de **19AB** deve ser no mínimo 10, pois **1+9 = 10**.

Os múltiplos de 7 maiores do que 10 são:

$$2 \times 7 = \mathbf{14}$$
$$3 \times 7 = \mathbf{21}$$
$$4 \times 7 = \mathbf{28}$$
$$5 \times 7 = 35$$
$$\dots$$

Veja que a soma dos números de um ano do século XX não pode ser maior nem igual a 35, pois a soma máxima ocorre para o ano **1999**: **1+9+9+9 = 28**.

Logo, para que um ano do século XX tenha como soma dos dígitos um múltiplo de 7, a soma dos dígitos de **19AB** deve ser igual a **14**, **21** ou **28**.

$$1 + 9 + A + B = \mathbf{14} \rightarrow \boldsymbol{A + B = 4}$$

$$1 + 9 + A + B = \mathbf{21} \rightarrow \boldsymbol{A + B = 11}$$

$$1 + 9 + A + B = \mathbf{28} \rightarrow \boldsymbol{A + B = 18}$$

Note, portanto, que a soma dos dígitos A e B pode ser **4**, **11** ou **18**. Temos as seguintes possibilidades para (**A**, **B**):

- **Soma 4**: (4,0), (3,1), (2,2), (1,3), (0,4).
- **Soma 11**: (9,2), (8,3), (7,4), (6,5), (5,6), (4,7), (3,8), (2,9).
- **Soma 18**: (9,9).

Logo, temos um total de **14 anos** agradáveis no século XX.

Gabarito: Letra E.

7.(FGV/SEFAZ AM/2022) Considere uma operação entre números inteiros positivos a e b, representada pelo símbolo # e definida por:

$$a\#b = 2a + b$$

Considere, agora, o conjunto M dos números inteiros x tais que $x \# 3$ seja múltiplo de 5.

É correto afirmar que, dos números a seguir, o único que pertence ao conjunto M é

a) 2.

b) 5.

c) 13.

d) 15.

e) 21.

Comentários:

Conforme a definição do enunciado, temos:

$$x\#3 = 2x + 3$$

Logo, devemos determinar dentre as alternativas um possível valor para x de modo que $2x + 3$ **seja múltiplo de 5**. Em outras palavras, devemos determinar um possível valor para x de modo que $2x + 3$ **seja divisível por 5**.

a) 2. ERRADO.

$$2x + 3$$

$$= 2 \times 2 + 3$$

$$= 7$$

Note que 7 **não** é **divisível por** 5, pois não termina em 0 ou 5. Logo, 7 **não** é **múltiplo de 5**.

b) 5. ERRADO.

$$2x + 3$$

$$= 2 \times 5 + 3$$

$$= 13$$

Note que 13 **não** é **divisível por 5**, pois não termina em 0 ou 5. Logo, 13 **não** é **múltiplo de 5**.

c) 13. ERRADO.

$$2x + 3$$

$$= 2 \times 13 + 3$$

$$= 29$$

Note que 29 **não** é **divisível por 5**, pois não termina em 0 ou 5. Logo, 29 **não** é **múltiplo de 5**.

d) 15. ERRADO.

$$2x + 3$$

$$= 2 \times 15 + 3$$

$$= 33$$

Note que 33 **não** é **divisível por 5**, pois não termina em 0 ou 5. Logo, 33 **não** é **múltiplo de 5**.

e) 21. CERTO. Esse é o gabarito.

$$2x + 3$$

$$= 2 \times 21 + 3$$

$$= 45$$

Note que **45 é divisível por 5**, pois termina em 5. Logo, **45 é múltiplo de 5**.

Gabarito: Letra E.

8. (FGV/SEMSA Manaus/2022) N é o maior número inteiro menor do que 100 que, quando dividido por 2 ou por 3, deixa resto igual a 1.

A soma dos algarismos de N é igual a

a) 18.

b) 17.

c) 16.

d) 15.

e) 14.

Comentários:

Como **N** deixa resto 1 quando dividido por 2 ou por 3, o número **(N-1) deixa resto zero** quando dividido por 2 ou por 3. Isso significa que **(N-1) é divisível por 2 e por 3**.

Sendo **N** o maior número inteiro menor do que 100, **(N-1)** é o maior número inteiro menor do que 99. **Vamos testar os possíveis valores para (N-1)**:

- **99** → **não é divisível por 2**, pois não é par;
- **98** → **não é divisível por 3**, pois a soma dos algarismos (9+8 = 17) não é divisível por 3;
- **97** → **não é divisível por 2**, pois não é par;
- **96** → **é divisível por 2**, por ser par, e também **é divisível por 3**, pois a soma dos algarismos (9+6 = 15) é divisível por 3.

Logo, **o maior número inteiro menor do que 99 que é divisível por 2 e por 3 é 96**. Assim:

$$N - 1 = 96$$

$$N = 97$$

A soma dos algarismos de **N** é:

$$9 + 7 = 16$$

Gabarito: Letra C.

9. (FGV/SEMSA Manaus/2022) Considere um número N, inteiro e positivo, tal que 36 e 54 são ambos divisíveis por N.

A soma dos possíveis valores de N é

a) 27.

b) 32.

c) 36.

d) 39.

e) 54.

Comentários:

Vamos decompor os números **36** e **54** em fatores primos.

$$36 = 6 \times 6$$
$$= (2 \times 3) \times (2 \times 3)$$
$$= 2^2 \times 3^2$$

$$54 = 2 \times 27$$

$$= 2^1 \times 3^3$$

Note que, para que o número **N** seja divisor de **36** e de **54**:

- **N** deve apresentar em sua composição somente os fatores primos 2 e 3;
- O **expoente do fator 2 não pode ser maior do que 1**, pois nesse caso **N** não seria divisor de 54; e
- O **expoente do fator 3 não pode ser maior do que 2**, pois nesse caso **N** não seria divisor de 36.

Portanto, **N** é da forma $2^a \times 2^b$, em que $\boldsymbol{a}$ **pode ser 0 ou 1** e $\boldsymbol{b}$ **pode ser** $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ **ou** $\mathbf{2}$. Vamos elencar todas as possibilidades:

a	b	$N = 2^a \times 3^b$
0	0	$2^0 \times 3^0 = 1$
0	1	$2^0 \times 3^1 = 3$
0	2	$2^0 \times 3^2 = 9$
1	0	$2^1 \times 3^0 = 2$
1	1	$2^1 \times 3^1 = 6$
1	2	$2^1 \times 3^2 = 18$

Portanto, a soma dos possíveis valores de **N** é:

$$1 + 3 + 9 + 2 + 6 + 18$$

$$= 39$$

Gabarito: Letra D.

10.(FGV/PM SP/2021) 180 soldados serão posicionados no pátio do quartel, arrumados em linhas e colunas, de maneira a formar um retângulo perfeito. Sabe se que tanto o número de linhas quanto o número de colunas do retângulo não podem ser menores que 5.

O maior número de arrumações possíveis para esse retângulo de soldados é

a) 4.

b) 5.

c) 7.

d) 10.

e) 12.

Comentários:

Temos que o **número de soldados** presentes nesse retângulo é o produto do número de linhas pelo número de colunas. Logo:

$$(\text{Linhas}) \times (\text{Colunas}) = 180$$

Como o número de linhas e o número de colunas devem ser **inteiros positivos**, tanto o número de linhas quanto o número de colunas devem ser **divisores de 180**.

Os **divisores de 180** são **1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90** e **180**.

		Divisores
		1
180	2	2
90	2	4
45	3	3, 6, 12
15	3	9, 18, 36
5	5	5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90,180
1		

Uma vez que se determina um possível valor para a <u>linha</u> dentre os divisores de 180, **o número de <u>colunas</u> é dado por**:

$$(\text{Colunas}) = \frac{180}{(\text{Linhas})}$$

Para que se respeite o fato de que **tanto o número de <u>linhas</u> quanto o número de <u>colunas</u> do retângulo <u>não podem ser menores que 5</u>**, os possíveis números de linhas são: **5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30** e **36**. Esses valores para as linhas geram, respectivamente, os seguintes números de colunas: **36, 30, 20, 18, 15, 12 ,10, 9, 6** e **5**.

Logo, temos um total de **10 arrumações** para os soldados. O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Veja que, **se selecionássemos um número de <u>linhas</u> maior do que 36**, **teríamos um número de <u>colunas</u> inferior a 5**, violando o comando da questão. Por exemplo, se tivéssemos 45 linhas, o número de colunas seria:

$$(\text{Colunas}) = \frac{180}{45} = 4$$

Gabarito: Letra D.

Cebraspe

11.(CESPE/SERPRO/2021) Suponha que sejam gerados 5 números válidos de CPF para serem atribuídos a 5 indivíduos distintos. Com base nessas informações, julgue o item a seguir.

Suponha que a seja o último dígito de um dos CPFs gerados, que b seja o último dígito de outro desses CPFs e que a e b sejam números ímpares consecutivos. Nessa situação, a + b é múltiplo de 4.

Comentários:

Para resolver o problema, devemos saber que todo **número ímpar** pode ser escrito da forma $2\boldsymbol{k}+1$, sendo $\boldsymbol{k}$ um número inteiro. Por exemplo:

- O número 5 pode ser escrito como $2 \times \mathbf{2} + 1$;
- O número 7 pode ser escrito como $2 \times \mathbf{3} + 1$;
- O número 9 pode ser escrito como $2 \times \mathbf{4} + 1$;
- Etc.

E o que é um **ímpar consecutivo** de um número? É o próximo número ímpar maior do que esse determinado número. Por exemplo, o ímpar consecutivo do número 11 é o 13.

Voltando ao problema, note que, como a é um **número ímpar**, ele pode ser escrito da forma $2k+1$, sendo k um número inteiro.

Além disso, b é um **ímpar consecutivo** de a. Logo, ele pode ser escrito como $a+2$.

Devemos verificar se $a+b$ é múltiplo de 4. Temos que:

$$a+b$$

$$= a + (a+2)$$

$$= 2a + 2$$

$$= 2 \times (2k+1) + 2$$

$$= 4k + 2 + 2$$

$$= 4k + 4$$

$$= 4 \times (k+1)$$

Note que $a+b$ é igual a $4 \times \mathbf{(k+1)}$, sendo $\mathbf{(k+1)}$ um **número inteiro**.

A soma $a+b$, portanto, é um múltiplo de 4, pois $a+b$ é descrita como o produto do número 4 por um número inteiro.

Gabarito: CERTO.

12. (CESPE/PC DF/2021) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada.

Um foragido da justiça, que gostava de se exibir perante seus comparsas e conhecia um pouco de matemática, ligou para a polícia e passou as seguintes informações: "em 30 minutos, eu estarei na rua Alfa, em uma casa, do lado direito da rua, cujo número tem as seguintes características: é inferior a 1.000, o algarismo das centenas é igual ao número de diagonais de um retângulo e, além disso, a parte do número formada só pelos algarismos das dezenas e das unidades é múltiplo de 7". Uma viatura foi deslocada para

o intervalo de casas da rua Alfa correspondente ao algarismo das centenas revelado. Lá chegando, os policiais verificaram que, nesse trecho da rua Alfa, os números das casas tinham as seguintes características: os algarismos das dezenas e das unidades começavam de 01 e de uma casa para a próxima eram acrescentadas 8 unidades. Nessa situação, o número da casa informado pelo foragido é inferior a 250.

Comentários:

Observe que o número deve ser menor do que 1000 e o algarismo das centenas é igual ao número de diagonais do retângulo. Como o retângulo tem duas diagonais, o número é da seguinte forma:

$$2\,\_\,\_$$

A parte do número formada só pelos algarismos das dezenas e das unidades é múltiplo de 7:

$$2\ \underbrace{\_\,\_}_{\substack{\text{Múltiplo}\\ \text{de 7}}}$$

Note que o número das casas começava em 201 e a casas subsequentes apresentavam a numeração anterior acrescida de 8 unidades. Temos, portanto, as seguintes numerações:

$$201, 209, 2017, 255, 233, 241, \mathbf{249}, 257, \ldots$$

Observe, portanto, que **249 é o número procurado**, pois **49 é múltiplo de 7**. Logo, o número da casa informado pelo foragido é inferior a 250.

Gabarito: CERTO.

13. (CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Julgue o item a seguir, relativo a sequências numéricas.

A quantidade de números inteiros múltiplos de 19 que estão entre 1.234 e 4.321 é inferior a 160.

Comentários:

Para encontrar o **número de múltiplos de 19** entre **1.234** e **4.321**, vamos realizar a seguinte operação:

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 19 imediatamente}\\ \text{inferior a 4.321}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 19 imediatamente}\\ \text{superior a 1.234}\end{pmatrix}}{19} + \mathbf{1}$$

Observe que **é necessário somar uma unidade** na expressão para não deixar de fora um dos extremos.

Exemplo: **quantos múltiplos de 19 existem entre 19 e 38**? Ora, claramente existem dois: o próprio 19 e o próprio 38. Ocorre que, ao realizar $\frac{38-19}{19}$, obteríamos 1 como resultado. Logo, é necessário somar uma unidade na expressão:

$$\frac{38-19}{19}+1=2$$

Voltando ao problema, vamos agora obter o **múltiplo de 19 imediatamente inferior a 4.321.** Note que **4.321** dividido por 19 nos deixa **quociente 227** e resto 8. Logo, o **múltiplo de 19 imediatamente inferior a 4.321** é:

$$227 \times 19 = 4.313$$

Vamos agora obter o **múltiplo de 19 imediatamente superior a 1.234**. Note que **1.234** dividido por 19 nos traz quociente 64 e **resto 18**. Logo, para não deixar resto na divisão, devemos somar uma unidade ao número. Portanto, o **múltiplo de 19 imediatamente superior a 1.234** é:

$$1.234 + 1 = 1.235$$

Portanto, o **número de múltiplos de 19** entre **1.234** e **4.321** é:

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 19 imediatamente} \\ \text{inferior a 4.321}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 19 imediatamente} \\ \text{superior a 1.234}\end{pmatrix}}{19} + \mathbf{1}$$

$$\frac{4.313-1.235}{19}+1$$

$$162+1$$

$$=163$$

Logo, quantidade de números inteiros múltiplos de 19 que estão entre 1.234 e 4.321 é **superior a 160**. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Gabarito: ERRADO.

14. (CESPE/SEFAZ RS/2018) Uma assistente administrativa rasgou em n pedaços uma folha de papel que continha informação considerada sigilosa. Como ainda era possível ler alguma informação em um desses pedaços, ela rasgou-o também em n pedaços. Receosa de que a informação sigilosa pudesse ser recuperada de um desses últimos pedaços, rasgou-o também em n pedaços.

Assinale a opção que indica uma quantidade possível de pedaços em que a folha foi rasgada.

a) 15

b) 26

c) 28

d) 30

e) 36

Comentários:

Vamos entender passo a passo cada linha do problema.

"Uma assistente administrativa rasgou em n pedaços uma folha de papel que continha informação considerada sigilosa"

Observe que o valor de $\boldsymbol{n}$ **é inteiro**, pois a assistente administrativa não pode ter rasgado a folha de papel em "5,5 pedaços" ou "10,8 pedaços", por exemplo.

"Como ainda era possível ler alguma informação em um desses pedaços, ela rasgou-o também em n pedaços."

Note que, anteriormente, tínhamos n pedaços. **Um único** desses n pedaços foi rasgado novamente, e outros $n-1$ pedaços permaneceram como estavam. Logo, ficamos com:

- $n-1$ pedaços que permaneceram como estavam;
- n pedaços provenientes desse único pedaço original que foi rasgado em n partes.

Observe que, **nesse momento**, o **total de pedaços** é

$$(n-1)+n=\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}$$

"Receosa de que a informação sigilosa pudesse ser recuperada de um desses últimos pedaços, rasgou-o também em n pedaços."

Note que, no passo anterior, **tínhamos** $(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1})$ pedaços. **Um único** desses $(2n-1)$ pedaços foi rasgado novamente. Os outros $(2n-1)-1$ pedaços permaneceram como estavam. Logo, ficamos com:

- $(2n-1)-1$ pedaços que permaneceram como estavam;
- n pedaços provenientes desse único pedaço que, nesse novo passo, foi rasgado em n partes.

Observe que, nesse momento, o **total de pedaços** é

$$(2n-1)-1+n$$

$$= \mathbf{3n - 2}$$

A questão pergunta por **uma quantidade possível de pedaços em que a folha foi rasgada**, isto é, uma quantidade que possa ser escrita como $\mathbf{3n-2}$, **sendo n um número inteiro**. Suponha que essa quantidade seja x. Nesse caso:

$$x = 3n - 2$$

$$x + 2 = 3n$$

$$\mathbf{n = \frac{x+2}{3}}$$

Observe, portanto, que **se a quantidade x é o número de pedaços em que a folha foi rasgada, $x+2$ deve ser múltiplo de 3 para que $n = \frac{x+2}{3}$ seja um número inteiro**.

Logo, **devemos assinalar a alternativa em que, ao somar 2, obtemos um múltiplo de 3.**

a) 15. **ERRADO.**

$$x + 2 = 15 + 2 = 17$$

→ **$x + 2$ não é múltiplo de 3.**

b) 26. **ERRADO.**

$$x + 2 = 26 + 2 = 28$$

→ **$x + 2$ não é múltiplo de 3.**

c) 28. **CERTO.**

$$x + 2 = 28 + 2 = 30$$

→ **$x + 2$ é múltiplo de 3.**

Logo, $x = 28$ é uma quantidade possível de pedaços em que a folha foi rasgada

d) 30. **ERRADO.**

$$x + 2 = 30 + 2 = 32$$

→ **$x + 2$ não é múltiplo de 3.**

e) 36. **ERRADO.**

$$x + 2 = 36 + 2 = 28$$

→ **$x + 2$ não é múltiplo de 3.**

Gabarito: Letra C.

15. (CESPE/FUB/2018) Paulo, Maria e João, servidores lotados em uma biblioteca pública, trabalham na catalogação dos livros recém-adquiridos. Independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, Paulo cataloga 1/4, Maria cataloga 1/3 e João, 5/12.

A respeito da catalogação de livros por esses servidores, julgue o item a seguir.

Sempre que trabalharem de segunda-feira a sexta-feira, os três servidores catalogarão uma quantidade de livros que será um número múltiplo de 12.

Comentários:

Note que, **todos os dias**, independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, **João cataloga 5/12 dos livros**.

Suponha que **em um dia qualquer temos l livros para serem catalogados**. Isso significa que **João cataloga**:

$$\frac{5}{12} \textbf{ dos } (\text{livros do dia})$$

$$= \frac{5}{12} \times l$$

$$= \frac{\mathbf{5 \times l}}{\mathbf{12}}$$

Observe, portanto, que se nesse dia qualquer foram catalogados l livros, **l deve ser múltiplo de 12** para que o número de livros catalogados por João seja um número inteiro.

Isso significa que, **todos os dias**, **o número de livros catalogados pelos servidores será múltiplo de 12**.

Como em todos os dias deve ser catalogada uma quantidade múltipla de 12, **o total de livros catalogados pelos três servidores de segunda-feira a sexta-feira será também múltiplo de 12**.

O **gabarito**, portanto, é **CERTO**.

*Mas professor, a gente sabe que **todos os dias** é catalogada uma quantidade múltipla de 12. Por que a soma dos livros catalogados nos 5 dias da semana também será múltipla de 12?*

Excelente pergunta, caro aluno!

Perceba que, se de segunda a sexta foram catalogadas, todos os dias, quantidades múltiplas de 12, então podemos dizer que:

- Na segunda-feira, foram catalogados $\mathbf{12 \times k_1}$ livros, sendo $\mathbf{k_1}$ **inteiro**;
- Na terça-feira, foram catalogados $\mathbf{12 \times k_2}$ livros, sendo $\mathbf{k_2}$ **inteiro**;
- Na quarta-feira, foram catalogados $\mathbf{12 \times k_3}$ livros, sendo $\mathbf{k_3}$ **inteiro**;
- Na quinta-feira, foram catalogados $\mathbf{12 \times k_4}$ livros, sendo $\mathbf{k_4}$ **inteiro**; e
- Na sexta-feira, foram catalogados $\mathbf{12 \times k_5}$ livros, sendo $\mathbf{k_5}$ **inteiro**.

Logo, no período de segunda-feira a sexta-feira, foram catalogados:

$$12k_1 + 12k_2 + 12k_3 + 12k_4 + 12k_5$$

$$= 12 \times \underbrace{(\mathbf{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5})}_{\textbf{Inteiro}}$$

Observe, portanto, que o **total de livros catalogados de segunda-feira a sexta-feira é múltiplo de 12**, pois esse total pode ser escrito da forma "12 vezes um número inteiro".

Gabarito: CERTO.

16. (CESPE/Pref. SL/2017) A quantidade N de pacotes de arroz distribuídos no primeiro trimestre para as 6 escolas de determinado município é um número de três algarismos que pode ser escrito na forma N = X3Y, em que X e Y são dois algarismos entre 0 e 9. Sabe-se que cada escola recebeu a mesma quantidade de pacotes das demais e o número N é o maior possível que atende às condições descritas.

Nessa situação, a quantidade de pacotes de arroz distribuídos no primeiro trimestre para as 6 escolas do município foi

a) superior a 800 e inferior a 900.

b) superior a 900.

c) inferior a 600.

d) superior a 600 e inferior a 700.

e) superior a 700 e inferior a 800.

Comentários:

Note que a quantidade **N** de pacotes foi distribuída igualmente para 6 escolas. Isso significa que **N é divisível por 6.**

Lembre-se de que um número é divisível por 6 quando ele é **divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo**. Como **N** é escrito como **X3Y**, em que **X** e **Y** são algarismos, temos que:

- **N** é divisível por 2 → **N** é par → O último algarismo de **N**, dado por **Y**, é par.
  Logo, **Y pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.**

- **N** é divisível por 3 → A soma dos algarismos de **N** é divisível por 3. Logo:

X + 3 + Y é divisível por 3

Consequentemente, temos que:

X + Y é divisível por 3

Observe, ainda, que **N é o maior possível que atende às condições descritas**.

O maior valor para **X**, que é o algarismo das centenas, é 9. Fazendo $X = 9$, devemos ter que:

- **Y pode ser igual a 0, 2, 4, 6 ou 8;**
- **X + Y é divisível por 3.**

Como **X + Y = 9 + Y**, devemos ter que **Y deve ser divisível por 3**, pois, nesse caso, **9 + Y** automaticamente será divisível por 3. Portanto:

- **Y pode ser igual a 0, 2, 4, 6 ou 8;**
- **Y é divisível por 3.**

Veja que, para maximizarmos o valor de **N = 93Y** respeitando as duas condições anteriores, teremos **Y = 6**. Portanto, o número procurado é **936**, valor este superior a 900.

Gabarito: Letra B.

17. (CESPE/SECTI DF/2014) Acerca das propriedades dos conjuntos numéricos, julgue o item a seguir.

Existem exatamente quatro números inteiros r para os quais a fração $\frac{14}{2r+1}$ é um número inteiro.

Comentários:

Primeiramente, observe que para $\frac{14}{2r+1}$ ser inteiro, $2r + 1$ deve ser divisor inteiro de 14.

Vamos obter os divisores <u>inteiros</u> de 14.

$$\begin{array}{r|c|l} & & \text{Divisores} \\ & & 1 \\ 14 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & 7 \quad 14 \\ 1 & & \end{array}$$

Note que os divisores **naturais** (**positivos**) de 14 são **1**; **2**; **7** e **14**.

Logo, os divisores <u>inteiros</u> de 14 são **−14**; **−7**; **−2**; **−1**; **1**; **2**; **7** e **14**.

Sabemos que $2r + 1$ deve ser divisor de 14. Portanto, as possibilidades para r são:

- $2r + 1 = \mathbf{-14} \rightarrow 2r = -15 \rightarrow r = -7{,}5$
- $2r + 1 = \mathbf{-7} \rightarrow 2r = -8 \rightarrow \boldsymbol{r = -4}$
- $2r + 1 = \mathbf{-2} \rightarrow 2r = -3 \rightarrow r = -1{,}5$
- $2r + 1 = \mathbf{-1} \rightarrow 2r = -2 \rightarrow \boldsymbol{r = -1}$
- $2r + 1 = \mathbf{1} \rightarrow 2r = 0 \rightarrow \boldsymbol{r = 0}$
- $2r + 1 = \mathbf{2} \rightarrow 2r = 1 \rightarrow r = -0{,}5$
- $2r + 1 = \mathbf{7} \rightarrow 2r = 6 \rightarrow \boldsymbol{r = 3}$
- $2r + 1 = \mathbf{14} \rightarrow 2r = 13 \rightarrow r = 6{,}5$

Dentre as 8 possibilidades para r que fazem com que $\frac{14}{2r+1}$ seja inteiro, apenas 4 são números inteiros:

$$\mathbf{-4};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{3}$$

Portanto, **existem exatamente quatro números inteiros r para os quais a fração $\frac{14}{2r+1}$ é um número inteiro.**

Gabarito: CERTO.

18. (CESPE/PC DF/2013) Considerando que 300 pessoas tenham sido selecionadas para trabalhar em locais de apoio na próxima copa do mundo e que 175 dessas pessoas sejam do sexo masculino, julgue o seguinte item.

É impossível dividir as 300 pessoas em grupos de modo que todos os grupos tenham a mesma quantidade de mulheres e a mesma quantidade de homens.

Comentários:

Note que, em um grupo com **300 pessoas**, uma vez que **175 são homens**, temos **300–175 =** **125 mulheres**.

Considere que x grupos foram formados. Nesse caso, cada um desses x grupos terão $\frac{175}{x}$ **homens** e $\frac{125}{x}$ **mulheres**.

É importante perceber que **a questão não diz que deve haver uma quantidade igual de homens e mulheres em cada grupo**. É necessário que todos os grupos tenham a mesma quantidade de homens $\left(\frac{175}{x}\right)$ e que todos os grupos tenham a mesma quantidade de mulheres $\left(\frac{125}{x}\right)$.

Observe, portanto, que **é possível** dividir as 300 pessoas em grupos de modo que todos os grupos tenham a mesma quantidade de mulheres e a mesma quantidade de homens. Para tanto, **basta que a quantidade de grupos formados (x) seja divisor tanto de 175 quanto de 125**.

Por exemplo, se forem formados $x = 5$ grupos, esses grupos podem ter sempre:

- $\frac{175}{5} = 35 \text{ homens; e}$
- $\frac{125}{5} = 25 \text{ mulheres}$

Por outro lado, se forem formados $x = 25$ grupos, esses grupos podem ter sempre:

- $\frac{175}{25} = 7 \text{ homens; e}$
- $\frac{125}{25} = 5 \text{ mulheres.}$

Como **é possível** dividir as 300 pessoas em grupos de modo que todos os grupos tenham a mesma quantidade de mulheres e a mesma quantidade de homens, o **gabarito** é **ERRADO**.

Gabarito: ERRADO.

FCC

19.(FCC/TRT 19/2022) O número inteiro x, quando dividido por 6, tem resto 3. O resto da divisão de 4x por 6 é:

a) 4

b) 0

c) 2

d) 1

e) 3

Comentários:

Sabemos que o número inteiro **x**, quando dividido por 6, tem resto 3.

Note, portanto, que o número **(x−3)**, quando dividido por 6, tem resto zero. Isso significa que **(x−3)** **é divisível por** **6**. Em outras palavras, **(x−3)** **é múltiplo de** **6**. Logo, sendo **k** um número inteiro, podemos escrever **(x−3)** da seguinte forma:

$$(x - 3) = 6 \times k$$

Consequentemente, **x** pode ser escrito da seguinte forma:

$$x = 6k + 3$$

A questão pergunta pelo resto da divisão de **4x** por **6**. Note que **4x** pode ser escrito da seguinte forma:

$$4x = 4 \times (6k + 3)$$

$$4x = 24k + 12$$

Ao dividir **4x** por **6**, obtemos:

$$\frac{(4x)}{6} = \frac{24k + 12}{6}$$

$$\frac{(4x)}{6} = \frac{24k}{6} + \frac{12}{6}$$

$$\frac{(4x)}{6} = 4k + 2$$

Veja que a divisão de **4x** por **6** resulta em um número inteiro, pois, sendo **k** inteiro, **4k+2** também é. Logo, **o resto da divisão de 4x por 6 é zero**.

Gabarito: Letra B.

20.(FCC/TRT 19/2022) Maria quer cortar uma corda em 6 pedaços de mesmo tamanho e marca os pontos onde deverá efetuar os cortes. José quer cortar a mesma corda em 8 pedaços de mesmo tamanho e também marca os pontos onde a corda deve ser cortada. Carlos corta a corda em todos os pontos marcados por Maria e José. O número de pedaços de corda resultante é:

a) 11

b) 13

c) 10

d) 12

e) 9

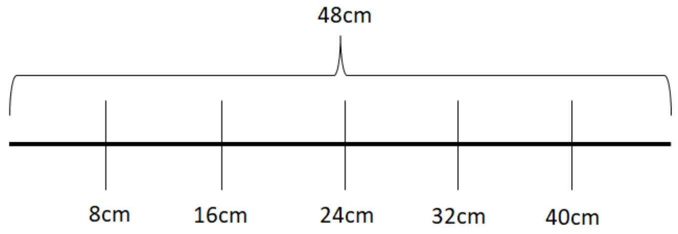
Comentários:

A questão apresenta uma corda que é dividida em 6 e em 8 pedaços.

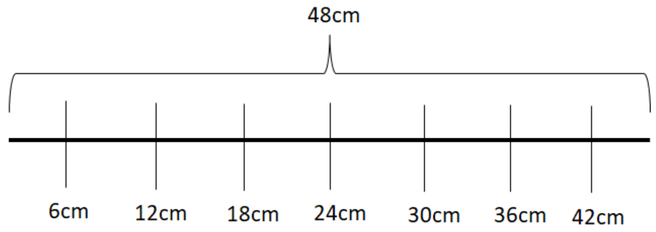
Para resolver o problema de maneira mais didática, é interessante definirmos um comprimento para a corda em questão que seja divisível tanto por 6 quanto por 8. Em outras palavras, vamos definir um comprimento que é múltiplo de 6 e de 8.

Vamos supor, por exemplo, que a corda em questão apresenta um comprimento de 6×8 = **48 centímetros**.

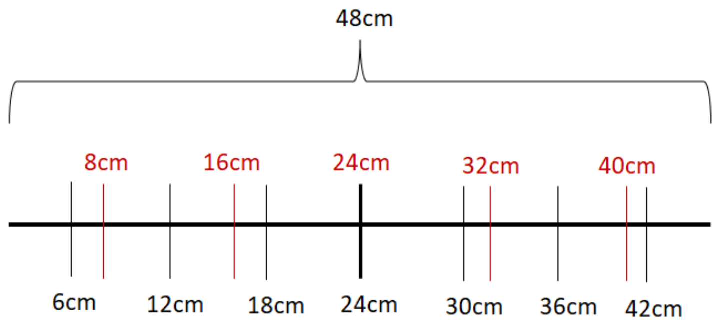
Nesse caso, como Maria quer dividir a corda em 6 pedaços iguais, ela fez 6−1 = **5 marcações**: **8cm**, **16cm**, **24cm**, **32cm** e **40cm**.



Além disso, como José quer dividir a corda em 8 pedaços iguais, ele fez 8−1= **7 marcações**: **6cm**, **12cm**, **18cm**, **24cm**, **30cm**, **36cm** e **42cm**.



Note que temos uma marcação em comum: **24cm.** Portanto, removendo a marcação em comum, temos um total de **5+7−1 = 11 marcações**. Essas 11 marcações correspondem a **11+1 = 12 pedaços**. O **gabarito**, portanto, é **letra D**.



Gabarito: Letra D.

21.(FCC/TRT 22/2022) O número 150 foi multiplicado por 2 ou por 3. Em seguida, ao resultado do produto, foi somado 1 ou 2. Por fim, o número obtido foi dividido por 3 ou 4. Sabendo-se que a divisão teve resto zero, o quociente da divisão foi

a) 112.

b) 114.

c) 113.

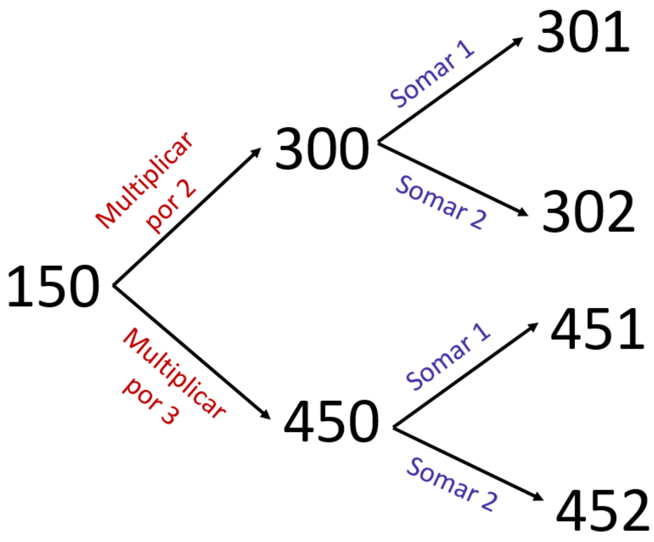
d) 111.

e) 110.

Comentários:

Para que o resto da divisão de um número **D** (dividendo) por um número **d** (divisor) seja zero, **D** deve ser divisível por **d**.

Para resolver o problema, devemos avaliar a divisibilidade por 3 e por 4 de quatro números: **301**, **302**, **451** e **452**.



Para que um número seja divisível por 3, a soma dos dígitos deve ser divisível por 3. Note que, dentre os quatro números apresentados, nenhum é divisível por 3:

- **301** → 3+0+1 = 4 → 4 não é divisível por 3;
- **302** → 3+0+2 = 5 → 5 não é divisível por 3;
- **451** → 4+5+1 = 10 → 10 não é divisível por 3;
- **452** → 4+5+2 = 11 → 11 não é divisível por 3.

Vamos agora avaliar a divisibilidade por 4.

Para que um número seja divisível por 4, **os dois últimos dígitos do número devem formar um número divisível por 4**.

Note que **01**, **02** e **51** não são divisíveis por 4. Porém, veja que **52** é divisível por 4. Logo, **somente o número 452 é divisível por 4**.

Portanto, **o número procurado é 452 e esse número foi dividido por 4**, obtendo-se resto zero. **O quociente da divisão foi**:

$$452 \div 4 = \mathbf{113}$$

Gabarito: Letra C.

22.(FCC/TRT 9/2022) Em uma loja há entre 30 e 50 troféus em miniatura. A funcionária da loja agrupou-os de 5 a 5 e sobrou-lhe um troféu. Depois, agrupou-os de 3 a 3 e não sobrou nenhum troféu.

O número exato de troféus na loja é:

a) 41.

b) 39.

c) 36.

d) 48.

e) 42.

Comentários:

Os múltiplos de 5 entre 30 e 50 são: **30**, **35**, **40**, **45** e **50**.

Ao agrupar os troféus de 5 em 5, resta 1 troféu. Isso significa que o número de troféus procurado é uma unidade superior a um múltiplo de 5. Como o número de troféus está entre 30 e 50, ficamos com as seguintes possibilidades: **31**, **36**, **41** e **46**.

Além disso, sabe-se que **ao agrupar os troféus de 3 em 3, não resta nenhum troféu**. Isso significa que o número de troféus procurado é **divisível por 3** (ou seja, é múltiplo de 3).

Dentre os possíveis candidatos, apenas o número **36** é divisível por 3. Portanto, **o número exato de troféus na loja é 36**.

Gabarito: Letra C.

23.(FCC/SABESP/2018) O total de 168 lanches foram servidos para x pessoas, sendo que todas receberam o mesmo número de lanches e não sobraram lanches sem serem distribuídos entre essas pessoas. Não sendo possível servir frações de lanche para as pessoas e sendo x um número entre 5 e 30, o total de possibilidades diferentes para x é igual a

a) 6

b) 9

c) 8

d) 5

e) 7

Comentários:

Como **168 lanches** foram divididos entre x **pessoas** sem sobrar lanches, **x deve ser divisor de 168**. Isso porque o total de lanches que cada pessoa recebeu, que deve ser um número inteiro, é dado por:

$$\frac{168}{x}$$

Os **divisores de 168** são **1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28, 42, 56, 84** e **168.**

		Divisores
		1
168	2	2
84	2	4
42	2	8
21	3	3, 6, 12, 24
7	7	7, 14, 28, 56, 21, 42, 84, 168
1		

Pelos dados do problema, além de ser divisor de 168, **x é um número entre 5 e 30**. Logo, as possibilidades para x são:

$$\mathbf{6, 7, 8, 12, 14, 21, 24} \text{ e } \mathbf{28}$$

Temos, portanto, **oito possibilidades para x.**

Gabarito: Letra C.

24.(FCC/METRO SP/2015) A área de um retângulo é 144 m². Sabe-se que as medidas do comprimento e da largura desse retângulo, em metros, são número inteiros positivos, e que o comprimento é maior do que a largura. Apenas com os dados fornecidos, o total de possibilidades numéricas diferentes para o comprimento desse retângulo é igual a

a) cinco.

b) seis.

c) nove.

d) sete.

e) oito.

Comentários:

Temos que a área de um retângulo é dada pelo produto do comprimento pela largura. Logo:

$$(\text{Comprimento}) \times (\text{Largura}) = 144$$

Como o comprimento e a largura devem ser **inteiros positivos**, tanto o comprimento quanto a largura devem ser **divisores de 144**.

Os **divisores de 144** são **1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72** e **144**.

		Divisores
		1
144	2	2
72	2	4
36	2	8
18	2	16
9	3	3, 6, 12, 24, 48
3	3	9, 18, 36, 72, 144
1		

Note que, caso **escolhêssemos o divisor 12 como comprimento**, obteríamos a seguinte largura:

$$12 \times (\text{Largura}) = 144$$

$$(\text{Largura}) = \frac{144}{12} = 12$$

Nesse caso, **não teríamos o comprimento maior do que a largura**, pois eles seriam iguais.

Além disso, **qualquer número menor do que 12 para o comprimento dos daria uma largura maior do que o comprimento**. Por exemplo, caso escolhêssemos o divisor 3 como comprimento, obteríamos a seguinte largura:

$$3 \times (\text{Largura}) = 144$$

$$(\text{Largura}) = \frac{144}{3} = 48$$

Perceba que, para que o comprimento seja maior do que a largura, devemos selecionar os divisores de 144 maiores do que 12. Logo, **7 possibilidades para o comprimento do retângulo**:

$$\mathbf{16, 18, 24, 36, 48, 72 \text{ e } 144}$$

O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Gabarito: Letra D.

25.(FCC/SABESP/2018) De modo geral, um ano bissexto é todo aquele que é múltiplo de 4. Porém, essa regra tem uma exceção: mesmo que o ano seja múltiplo de 4, se ele também for múltiplo de 100, ele deixa de ser bissexto.

Essa última regra tem outra exceção: se o ano for múltiplo de 100, mas também for múltiplo de 400, ele volta a ser bissexto.

Considerando essas informações, é correto afirmar que existem anos que são

a) múltiplos de 400 e não são bissextos.

b) múltiplos de 100 e são bissextos.

c) bissextos e não são múltiplos de 4.

d) ímpares e são bissextos.

e) bissextos e não são múltiplos de 2.

Comentários:

Note que:

- **Em regra**, **o ano é bissexto** quando é **múltiplo de 4**;
- **Exceção à esta regra** ocorre quando o **ano é múltiplo de 100**: nesse caso, mesmo sendo múltiplo de 4, o ano **não é bissexto**;
- **Exceção à esta exceção** ocorre quando **o ano é múltiplo de 400**: nesse caso, mesmo que o ano seja múltiplo de 4 e múltiplo de 100, o **ano é bissexto**.

Vamos analisar as alternativas.

a) Existem anos que são múltiplos de 400 e não são bissextos. ERRADO.

Quando o ano é **múltiplo de 400** ele é **bissexto**, mesmo sendo múltiplo de 100.

b) Existem anos que são múltiplos de 100 e são bissextos. CERTO.

Observe que os anos **múltiplos de 400** são múltiplos de 100 e são bissextos. Logo, **existem anos que são múltiplos de 100 e são bissextos**.

c) Existem anos que são bissextos e não são múltiplos de 4. ERRADO.

Para um ano ser bissexto, **necessariamente deve ser múltiplo de 4**. Existe uma exceção que faz com que um múltiplo de 4 não seja bissexto, porém **todo o ano bissexto é múltiplo de 4**.

d) Existem anos que são ímpares e são bissextos. ERRADO.

Para um ano ser **bissexto**, necessariamente **deve ser múltiplo de 4**. **Todo múltiplo de 4 é par** e, portanto, não existem anos que são ímpares e são bissextos.

e) Existem anos que são bissextos e não são múltiplos de 2. ERRADO.

Para um ano ser **bissexto**, necessariamente deve ser **múltiplo de 4**. **Todo múltiplo de 4 é múltiplo de 2** e, portanto, não existem anos que são bissextos e não são múltiplos de 2.

Gabarito: Letra B.

26.(FCC/TRT 6/2018) O número natural x possui ao todo três divisores positivos distintos. O número natural y possui ao todo três divisores positivos distintos. O produto x . y é um número natural maior que 30 e menor que 40. A soma x + y é igual a

a) 12.

b) 14.

c) 13.

d) 16.

e) 19.

Comentários:

Lembre-se que se um número apresenta uma quantidade $\boldsymbol{p}$ de divisores naturais, com $\boldsymbol{p}$ primo, então esse número é da forma $\boldsymbol{q^{p-1}}$, sendo $\boldsymbol{q}$ também um número primo.

Como x e y, que apresentam 3 divisores positivos, então x e y são da forma $\boldsymbol{q^{3-1}} = \boldsymbol{q^2}$, com $\boldsymbol{q}$ primo.

Observe que <u>x e y devem ser distintos</u>, pois apresentam divisores positivos distintos.

Se x e y forem $\mathbf{2^2}$ e $\mathbf{3^2}$, então $xy = 36$, que está entre 30 e 40. Para esse caso, $x + y = 4 + 9 = 13$. Chagamos ao gabarito, alternativa C.

Observe que, se x e y fossem números mais elevados, obteríamos um produto sempre maior do que 40. Exemplo: $\mathbf{3^2}$ e $\mathbf{5^2}$ tem como produto 225.

Gabarito: Letra C.

Vunesp

27.(VUNESP/EsFCEx/2020) Se o número inteiro $2^a.3^b.11^c$ (sendo $a, b, c \in$ N) divide o número 1056, então o número de divisores positivos e negativos de 1056 é igual a

a) 36.

b) 24.

c) 44.

d) 12.

e) 48.

Comentários:

Vimos na teoria que para saber a quantidade de **divisores naturais** de um número qualquer, devemos:

- Obter todos os expoentes dos fatores primos;
- Somar 1 a cada um desses expoentes e realizar o produto dos números obtidos.

Portanto, o número de **divisores naturais** será:

$$(a+1) \times (b+1) \times (c+1)$$

A questão pede o número de **divisores inteiros** (**positivos** e **negativos**). Trata-se do **dobro do valor anterior**, pois os divisores negativos são os divisores positivos (naturais) com sinal trocado. A resposta da questão será, portanto:

$$2 \times (a+1) \times (b+1) \times (c+1)$$

Para obter os valores de a, b e c, devemos fatorar 1056.

1056	2
528	2
264	2
132	2
66	2
33	3
11	11
1	

Logo:

$$1056 = 2^5 \times 3^1 \times 11^1$$

Isso significa que $a = 5$, $b = 1$ e $c = 1$. Logo, o número de **divisores inteiros** (**positivos** e **negativos**) é:

$$2 \times (5+1) \times (1+1) \times (1+1)$$

$$= 2 \times 6 \times 2 \times 2$$

$$= 48$$

Gabarito: Letra E.

28. (VUNESP/ISS Osasco/2019) As tarefas numeradas de 1 a 50 devem ser realizadas no prazo dos cinco dias úteis de uma semana. A pessoa que vai realizar as tarefas decidiu fazer aquelas que estão numeradas com um múltiplo de 3 na segunda-feira. Das que sobrarem, ela fará as numeradas por múltiplo de 4 na terça-feira. Das que sobrarem, ela fará as numeradas por múltiplo de 5 na quarta-feira. Seguindo o mesmo padrão, das que sobrarem, ela fará as numeradas por múltiplo de 6 na quinta-feira e, por fim, fará as que restarem na sexta-feira. Sendo assim, essa pessoa terá que realizar na sexta-feira um total de tarefas igual a

a) 17.

b) 18.

c) 19.

d) 20.

e) 21.

Comentários:

Na **segunda-feira**, a pessoa fez as tarefas numeradas com um **múltiplo de 3**. Logo, ela fez as seguintes tarefas:

$$\mathbf{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48}$$

Total: 16 tarefas

Na **terça-feira**, **das tarefas que sobraram**, ela fez as numeradas com um múltiplo de 4. Em outras palavras, ela fez as tarefas numeradas com um **múltiplo de 4** **que não é múltiplo de 3**. Logo, ela fez as seguintes tarefas:

$$\mathbf{4, 8, \cancel{12}, 16, 20, \cancel{24}, 28, 32, \cancel{36}, 40, 44, \cancel{48}}$$

Total: 8 tarefas

Na **quarta-feira**, **das tarefas que sobraram**, ela fez as numeradas com um múltiplo de 5. Em outras palavras, ela fez as tarefas numeradas com um **múltiplo de 5** **que não é múltiplo de 3 nem de 4**. Logo, ela fez as seguintes tarefas:

$$\mathbf{5, 10, \cancel{15}, \cancel{20}, 25, \cancel{30}, 35, \cancel{40}, \cancel{45}, 50}$$

Total: 5 tarefas

Na **quinta-feira**, **das tarefas que sobraram**, a pessoa teria feito tarefas numeradas com um múltiplo de 6. Ocorre que **todo o múltiplo de 6 é múltiplo de 3**, de modo que, na **quinta-feira**, a pessoa não fez nenhuma tarefa.

Observe, portanto, que o total de tarefas feiras até **quinta-feira** é:

$$16 + 8 + 5 = 29$$

Como na **sexta-feira** a pessoa fez as tarefas restantes, o total feito nesse dia é:

$$50 - 29 = 21$$

Gabarito: Letra E.

29. (VUNESP/CM Poá/2016) Seja X um número inteiro, positivo e menor do que 100. O resto da divisão de X por 5 é igual a 1, e o resto da divisão de X por 11 é igual a 7. A soma dos algarismos de X é igual a

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

e) 10.

Comentários:

Precisamos determinar um número X menor do que 100.

O resto da divisão de X por 5 é igual a 1. Logo, **$X - 1$ é múltiplo de 5**. Isso significa que os múltiplos de 5 menores que 100 são **valores possíveis para $X - 1$**:

$$0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95$$

Ao somar uma unidade nesses números, **temos possíveis valores para X**:

$$\mathbf{1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, 86, 91, 96}$$

O resto da divisão de X por 11 é igual a 7. Logo, **$X - 7$ é múltiplo de 11**. Isso significa que os múltiplos de 11 menores que 100 são **valores possíveis para $X - 7$**:

$$0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$$

Ao somar 7 nesses números, **temos possíveis valores para X**:

$$\mathbf{7, 18, 29, 40, 51, 62, 73, 84, 95}, \cancel{106}$$

Comparando as duas listas de possibilidades para X, que devem ser simultaneamente atendidas, temos que a única possibilidade é $X = 51$.

Portanto, a soma dos algarismos de X é $5 + 1 = 6$.

Gabarito: Letra A.

30.(VUNESP/Pref. Araçatuba/2019) Ariel, Gabriel e Rafael frequentam a mesma academia. Ariel vai à academia a cada 2 dias, Gabriel, a cada 3 dias, e Rafael, a cada 4 dias. Incluindo o dia primeiro de março, quando os 3 estiveram na academia, até o dia 15 de março, o número de dias em que pelo menos dois desses garotos estiveram na academia, no mesmo dia, foi

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

Comentários:

Pessoal, o intervalo que deve ser considerado é de apenas 15 dias, do dia primeiro de março ao dia 15 de março. Nesse caso, devemos resolver o problema de modo mais "manual".

Os dias de março em que Ariel foi à academia foram:

$$\mathbf{1}, 3, \mathbf{5}, 7, 9, 11, 13, 15$$

Os dias de março em que Gabriel foi à academia foram:

$$\mathbf{1}, 4, 7, 10, 13$$

Por fim, os dias de março em que Rafael foi à academia foram:

$$\mathbf{1}, \mathbf{5}, 9, \mathbf{13}$$

Observe que a questão pergunta o número de dias em que **pelo menos dois** desses garotos estiveram na academia. Logo, devemos contabilizar os dias em que dois garotos quaisquer estiveram juntos bem como os dias em que os três estavam juntos. Esses dias são:

$$\mathbf{1}, \mathbf{5}, 7, 9, \mathbf{13}$$

Portanto, **o número de dias em que pelo menos dois desses garotos estiveram na academia**, **no mesmo dia, foi 5**.

Gabarito: Letra D.

QUESTÕES COMENTADAS - MULTIBANCAS

MMC e MDC

FGV

1.(FGV/TRT-PB/2022) Laura coleciona figurinhas. Ontem ela arrumou suas figurinhas em montinhos de 6 figurinhas cada e não faltou nem sobrou figurinha alguma. Hoje ela fez uma nova arrumação com as mesmas figurinhas, dessa vez em montinhos de 10 figurinhas cada um e também não faltou nem sobrou figurinha alguma.

O número mínimo de figurinhas que Laura pode ter é M.

A soma dos algarismos de M é

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

Comentários:

Segundo o enunciado, ao arrumar as figurinhas em montinhos de 6 ou de 10 figurinhas, não resta nenhuma figurinha. Isso significa que o **total de figurinhas é divisível por 6 e por 10.** Em outras palavras, **o total de figurinhas é múltiplo de 6 e de 10**.

Para resolver o problema, devemos determinar o **número mínimo de figurinhas M** que Laura pode ter. Logo, **M é o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre 6 e 10**.

Primeiramente, vamos decompor 6 e 10 em fatores primos:

$$6 = 2^1 \times 3^1$$

$$10 = 2^1 \times 5^1$$

Devemos selecionar todos os fatores primos obtidos com os maiores expoentes e realizar o produto.

$6 \ \ = 2^1 \times 3^1$

$10 = 2^1 \qquad \times 5^1$

Logo, $M = \text{MMC}(6; 10) = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 = 30.$

Portanto, como **M = 30**, a **soma dos algarismos de M** é 3 + 0 = **3**.

Gabarito: Letra B.

2.(FGV/CBM-RJ/2022) Max e Rubens estão andando de bicicleta em uma pista circular. Eles andam em sentidos opostos. Max dá uma volta na pista a cada 6 minutos e Rubens dá uma volta na pista a cada 10 minutos. Em um determinado momento eles se cruzam em um ponto P da pista.

Eles voltarão a se cruzar pela primeira vez nesse mesmo ponto P após

a) 6 minutos.

b) 10 minutos.

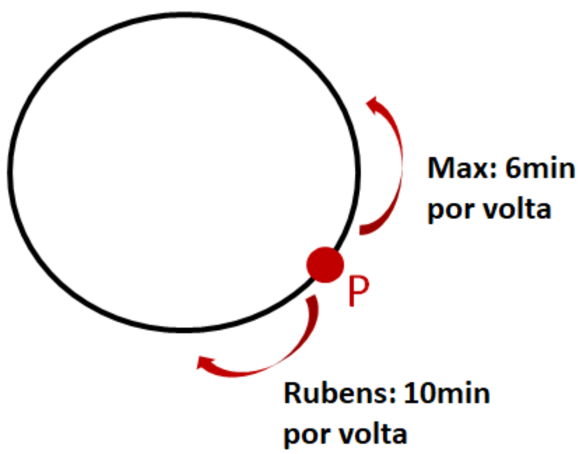
c) 24 minutos.

d) 30 minutos.

e) 60 minutos.

Comentários:

Considere que Max e Rubens se encontraram no seguinte ponto P da pista circular:



Como Max dá uma volta na pista a cada 6 minutos, temos que, **a partir do primeiro encontro em P**, **Max estará no ponto P a cada 6 minutos**.

Em outras palavras, **Max estará no ponto P sempre que o tempo transcorrido**, **a partir do primeiro encontro em P**, **for múltiplo de 6 minutos**.

Além disso, como Rubens dá uma volta na pista a cada 10 minutos, temos que, **a partir do primeiro encontro em P**, **Rubens estará no ponto P a cada 10 minutos**.

Em outras palavras, **Rubens estará no ponto P sempre que o tempo transcorrido**, **a partir do primeiro encontro em P**, **for múltiplo de 10 minutos**.

Note que, sempre que o tempo transcorrido for **múltiplo**, **ao mesmo tempo**, de **6min** e **10min**, Max e Rubens se encontrarão no ponto P.

Como queremos o momento em que eles **voltarão a se cruzar pela primeira vez** nesse mesmo ponto P, devemos obter o **mínimo múltiplo comum a 6min e 10min**.

Primeiramente, vamos decompor 6 e 10 em fatores primos:

$$6 = 2^1 \times 3^1$$

$$10 = 2^1 \times 5^1$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$6 \quad = 2^1 \times 3^1$

$10 = 2^1 \qquad \times 5^1$

Logo, $\text{MMC}(6; 10) = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 = 30.$

Portanto, Max e Rubens voltarão a se cruzar pela primeira vez no ponto P após **30 minutos**.

Gabarito: Letra D.

3.(FGV/PM SP/2022) Seja M o menor número inteiro, maior do que 2, que, dividido por 3, por 5, ou por 7, deixa sempre resto 2.

A soma dos algarismos de M é

a) 8.

b) 9.

c) 10.

d) 12.

e) 15.

Comentários:

Como **M** deixa resto 2 quando dividido por 3, por 5, ou por 7, o número **(M-2) deixa resto zero** quando dividido por 3, por 5, ou por 7.

Isso significa que **(M-2) é divisível por 3, por 5 e por 7**. Em outras palavras, **(M-2) é múltiplo de 3, de 5 e de 7.** Como estamos procurando o **menor número para M**, **M-2 é o mínimo múltiplo comum a 3, 5 e 7.**

Como 3, 5 e 7 são primos, o MMC entre esses números é 3×5×7 = 105. Portanto:

$$M - 2 = 105$$

$$M = 107$$

A soma dos algarismos de M é:

$$1 + 0 + 7$$

$$= 8$$

Gabarito: Letra A.

4.(FGV/SEAD-AP/2022) O mínimo múltiplo comum entre A e B é 24 e o mínimo múltiplo comum entre B e C é 75.

O menor valor que o mínimo múltiplo comum entre A e C pode ter é

a) 100.

b) 120.

c) 150.

d) 180.

e) 200.

Comentários:

Para resolver o problema, vamos concentrar nossos esforços em determinar o número B, pois ele aparece nos dois mínimos múltiplos comuns (MMCs).

Primeiramente, vamos observar o MMC entre A e B

Fatorando o número 24, temos:

$$24 = 2 \times 12$$

$$= 2 \times 3 \times 4$$

$$= 2 \times 3 \times 2^2$$

$$= 2^3 \times 3$$

Logo:

$$MMC(A, B) = 2^3 \times 3$$

Lembre-se de que, para se obter o **MMC** dos números A e B, obteve-se **todos** fatores primos de **maior expoente**. Portanto, observando-se somente $MMC(A, B)$, podemos tirar as seguintes conclusões sobre o número B:

- **B não pode apresentar fatores primos diferentes de 2 e de 3;**
- Se o número 2 for um fator primo de B, o maior expoente que esse fator pode apresentar em B é 3;
- Se o número 3 for um fator primo de B, o maior expoente que esse fator pode apresentar em B é 1.

Agora, vamos observar o MMC entre B e C

Fatorando o número 75, temos:

$$75 = 3 \times 25$$
$$= 3 \times 5^2$$

Logo:

$$MMC(B, C) = 3 \times 5^2$$

Lembre-se de que, para se obter o **MMC** dos números B e C, obteve-se **todos** fatores primos de **maior expoente**. Portanto, observando-se somente $MMC(B, C)$, podemos tirar as seguintes conclusões sobre o número B:

- **B não pode apresentar fatores primos diferentes de 3 e de 5;**
- Se o número 3 for um fator primo de B, o maior expoente que esse fator pode apresentar em B é 1;
- Se o número 5 for um fator primo de B, o maior expoente que esse fator pode apresentar em B é 2.

Comparando as conclusões obtidas

Comparando-se as conclusões obtidas com os dois MMCs, podemos observar que **B só pode apresentar o fator primo 3**. Além disso, como o expoente associado a esse fator primo pode ser no máximo 1, bem como considerando que se o expoente não for 1 o número B não apresentaria o fator primo 3, temos que:

$$B = 3^1$$

Logo, sabendo-se que $\boldsymbol{B = 3}$, podemos verificar possíveis valores de A e de C.

Possíveis valores para A

Lembre-se de que, para se obter o **MMC** dos números A e $B = 3$, obteve-se **todos** fatores primos de **maior expoente**. Sabemos que:

$$MMC(A, 3) = 2^3 \times 3.$$

Note, portanto, que o número A deve apresentar o fator 2^3 e pode ou não apresentar o fator 3. Logo, os possíveis valores para A são:

$$\boldsymbol{A_1 = 2^3 = 8}$$

$$A_2 = 2^3 \times 3 = 24$$

Possíveis valores para C

Lembre-se de que, para se obter o **MMC** dos números $B = 3$ e C, obteve-se **todos** fatores primos de **maior expoente**. Sabemos que:

$$MMC(3, C) = 3 \times 5^2.$$

Note, portanto, que o número C deve apresentar o fator 5^2 e pode ou não apresentar o fator 3. Logo, os possíveis valores para B são:

$$\boldsymbol{C_1 = 5^2 = 25}$$
$$C_2 = 3 \times 5^2 = 75$$

Cálculo do menor valor para o MMC entre A e C

O MMC entre A e C será o mínimo para o caso em que A e C são os menores números possíveis:

$$\boldsymbol{A = 2^3 = 8}$$

$$\boldsymbol{C = 5^2 = 25}$$

Lembre-se de que, para se obter o **MMC** dos números A e C, deve-se tomar **todos** fatores primos de **maior expoente**. No caso em questão, como não temos fatores primos em comum, basta multiplicarmos os números. Logo:

$$MMC(A, C) = 2^3 \times 5^2$$

$$= 8 \times 25$$

$$= 200$$

Gabarito: Letra E.

5.(FGV/SEFAZ AM/2022) Um pote contém entre 150 e 200 balas. Miguel reparou que separando essas balas em grupos de 5 sobravam 2 balas, e que, separando em grupos de 7, sobravam também 2 balas.

Se Miguel separasse as balas em grupos de 9 balas, sobrariam

a) 0.

b) 2.

c) 4.

d) 6.

e) 8.

Comentários:

Considere que o número de balas é x. Sabemos que x **está entre 150 e 200**.

Além disso, perceba que ao dividir x por 5 ou por 7, sempre temos **resto 2**. Isso significa que, ao dividir **(x−2)** por 5 ou por 7, sempre temos **resto zero**. Em outras palavras, **(x−2) é múltiplo comum a 5 e 7**.

Note que o **mínimo múltiplo comum a 5 e 7** é o produto 5×7 = **35**, pois 5 e 7 são primos.

Logo, os candidatos para **(x−2) são os múltiplos de 35**, pois **os múltiplos de 35 são os múltiplos comuns a 5 e 7**, sendo **35** o menor múltiplo comum a 5 e 7.

Como x está entre 150 e 200, **(x−2)**, que é múltiplo de 35, **está entre 148 e 198**. Vamos testar alguns múltiplos de 35:

$$35 \times 4 = 140$$

$$35 \times 5 = 175$$

$$35 \times 6 = 210$$

Veja que **o único múltiplo de 35 que está entre 148 e 198** é **175**. Logo:

$$x - 2 = 175$$

$$x = 177$$

Assim, o número de balas é 177. Ao dividir 177 por 9, obtemos **quociente 19** e **resto 6**. Portanto, se Miguel separasse as 177 balas em **grupos de 9 balas**, **sobrariam 6 balas**.

Gabarito: Letra D.

6. (FGV/IBGE/2017) João recebeu 32 relatórios verdes e 40 relatórios vermelhos. Ele deve colocar esses relatórios em envelopes da seguinte forma:

• Todos os envelopes devem conter a mesma quantidade de relatórios.

• Nenhum envelope pode misturar relatórios de cores diferentes.

Cumprindo essas exigências, o menor número de envelopes que ele precisará utilizar é:

a) 8;

b) 9;

c) 12;

d) 16;

e) 18.

Comentários:

Considere que a **quantidade de relatórios em cada envelope é x**.

Como **nenhum envelope pode misturar relatórios de cores diferentes**, temos que **x deve ser divisor de 32**, que é a quantidade de relatórios verdes, bem como **x deve ser divisor de 40**, que é a quantidade de relatórios vermelhos. Isso porque a quantidade de envelopes com relatórios verdes será $\frac{32}{x}$, e a quantidade de envelopes com relatórios vermelhos será $\frac{40}{x}$.

Portanto, x é um **divisor** que é **comum** a **32** e **40**. Como se quer o menor número de envelopes, devemos **maximizar a quantidade de relatórios em cada envelope (x).** Logo, x é o **máximo divisor comum** de **32** e **40**.

Primeiramente, devemos decompor 32 e 40 em fatores primos.

$$32 = 2 \times 16$$
$$= 2 \times 4 \times 4$$
$$2 \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$$
$$= 2^5$$

$$40 = 4 \times 10$$
$$= (2 \times 2) \times (2 \times 5)$$
$$= 2^3 \times 5$$

Devemos selecionar os fatores primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$32 = 2^5$

$40 = 2^3 \times 5$

Logo, $\text{MDC}(32; 40) = 2^3 = 8$. Portanto, **quantidade de relatórios em cada envelope é $x = 8$**.

Note que a questão pergunta pelo **menor número de envelopes que João precisará utilizar**:

$$(\text{Envelopes com relatórios verdes}) + (\text{Envelopes com relatórios vermelhos})$$

$$= \frac{32}{8} + \frac{40}{8}$$

$$= 4 + 5$$

$$= 9$$

Gabarito: Letra B.

7. (FGV/TCE-BA/2014) Em uma serraria há dez varas de madeira: cinco de 1,40m de comprimento, três de 1,80m e duas de 2,40m. Essas varas devem ser cortadas em pedaços iguais, com o maior comprimento possível e aproveitando toda a madeira.

A quantidade de pedaços que será obtida é

a) 30.

b) 43.

c) 86.

d) 172.

e) 344.

Comentários:

Para evitar trabalhar com números fracionários, vamos utilizar o **centímetro** como medida de comprimento. Considere que o tamanho dos pedaços seja x **centímetros**.

Observe que as varas de **140cm**, **180cm** e de **240cm** devem ser cortadas em pedaços de x centímetros **aproveitando toda a madeira**. Logo, x deve ser **divisor**, **ao mesmo tempo**, de **140**, **180** e **240**.

Além disso, os pedaços devem apresentar o **maior comprimento possível**. Portanto, x é o **máximo divisor comum** (**MDC**) de **140**, **180** e **240**.

Vamos decompor 140, 180 e 240 em fatores primos:

$$140 = 14 \times 10$$

$$= (2 \times 7) \times (2 \times 5)$$

$$= 2^2 \times 5 \times 7$$

$$180 = 18 \times 10$$

$$= (2 \times 9) \times (2 \times 5)$$

$$= (2 \times 3 \times 3) \times (2 \times 5)$$

$$= 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$240 = 24 \times 10$$

$$= (2 \times 12) \times (2 \times 5)$$

$$= (2 \times 3 \times 4) \times (2 \times 5)$$

$$= (2 \times 3 \times 2 \times 2) \times (2 \times 5)$$

$$= 2^4 \times 3 \times 5$$

Devemos selecionar os fatores primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$140 = 2^2 \qquad \times 5 \times 7$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$240 = 2^4 \times 3 \quad \times 5$

Logo, $\text{MDC}(140; 180; 240) = 2^2 \times 5 = 20$. Portanto, **o tamanho dos pedaços é $x = 20$ cm**.

Temos **cinco** varas de **140cm** de comprimento, **três** de **180cm** e **duas** de **240cm**. Logo, a quantidade de pedaços que será obtida é:

$$\mathbf{5} \times \frac{140}{x} + \mathbf{3} \times \frac{180}{x} + \mathbf{2} \times \frac{240}{x}$$

$$= 5 \times \frac{140}{20} + 3 \times \frac{180}{20} + 2 \times \frac{240}{20}$$

$$= 5 \times 7 + 3 \times 9 + 2 \times 12$$

$$= 35 + 27 + 24$$

$$= 86$$

Gabarito: Letra C.

Cebraspe

8.(CESPE/IFF/2018) Uma companhia aérea fixou rodízio entre duas cidades para seus comissários de bordo de determinado voo diário. A escala estabelece que o comissário A trabalhe nesse voo a cada 8 dias; o comissário B, a cada 10 dias; e o comissário C, a cada 12 dias.

Nesse caso, se os três tiverem trabalhado juntos no voo do dia de hoje, então a próxima vez em que eles trabalharão novamente juntos nesse voo ocorrerá daqui a

a) 30 dias.

b) 74 dias.

c) 120 dias.

d) 240 dias.

e) 960 dias.

Comentários:

Os três comissários trabalham a cada 8, 10 e 12 dias. Como os três trabalharam juntos hoje, eles trabalharão juntos novamente sempre que transcorrer um número de dias **múltiplo**, **ao mesmo tempo**, de 8, 10 e 12 dias. Como queremos saber **próxima vez** em que eles trabalharão juntos, precisamos obter o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) de 8, 10 e 12.

Primeiramente, devemos decompor 8, 10 e 12 em fatores primos.

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \times 4 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \\ &= 2^3 \end{aligned}$$

$$10 = 2 \times 5$$

$$\begin{aligned} 12 &= 4 \times 3 \\ &= 2^2 \times 3 \end{aligned}$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$$\begin{aligned} &8 = 2^3 \\ &10 = 2^2 \qquad \times 5 \\ &12 = 2^2 \times 3 \end{aligned}$$

Logo, $\text{MMC}(8;\ 10;\ 12) = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$. Portanto, a próxima vez em que os três comissários trabalharão novamente juntos ocorrerá daqui a **120 dias**.

Gabarito: Letra C.

9.(CESPE/BNB/2018) A respeito de números reais e de funções de variáveis reais, julgue o item que se segue.

Situação hipotética: Carlos possui uma quantidade de revistas que é maior que 500 e menor que 700. Separando as revistas em conjuntos de 8 revistas, Carlos verificou que sobrou um grupo com 3 revistas. O mesmo acontecia quando ele separava as revistas em conjuntos de 14 ou em conjuntos de 20 revistas: sempre sobrava um conjunto com 3 revistas.

Assertiva: Nesse caso, é correto afirmar que Carlos possui 563 revistas.

Comentários:

Vamos supor que a **quantidade de revistas** que Carlos possui **é x**. Devemos determinar o valor de x.

Note que **a quantidade é maior que 500 e menor que 700**. Logo:

$$\mathbf{500 < x < 700}$$

Além disso, sabemos que **separando as revistas em conjuntos de 8, 14 ou 20 revistas, sempre sobra um grupo com 3 revistas.** Isso significa que **$(x-3)$ é múltiplo, simultaneamente, de 8, 14 e 20.**

Nesse momento, vamos obter o **menor múltiplo comum a 8, 14 e 20**, isto é, o MMC de 8, 14 e 20. Primeiramente, vamos decompor 8, 14 e 20 em fatores primos.

$$8 = 2 \times 4$$
$$= 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^3$$

$$14 = 2 \times 7$$

$$20 = 2 \times 10$$
$$= 2 \times 2 \times 5$$
$$= 2^2 \times 5$$

Após decompor 8, 14 e 20 em fatores primos, devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$8 = 2^3$

$14 = 2 \quad \times 7$

$20 = 2^2 \times 5$

Logo, $\text{MMC}(8; 14; 20) = 2^3 \times 5 \times 7 = \mathbf{280}$. Esse é o menor múltiplo comum a **8, 14 e 20**.

Como **$(x-3)$ é múltiplo, simultaneamente, de 8, 14 e 20**, note que $(x-3)$ deve ser um m múltiplo de 280, isto é, **$(x-3)$ deve ser múltiplo do MMC entre 8, 14 e 20**. Logo, as possibilidades para $(x-3)$ são:

$$\underbrace{280}_{\text{MMC}}, \underbrace{\mathbf{560}}_{2\times 280}, \underbrace{840}_{3\times 280}, \underbrace{1120}_{4\times 280}, \ldots$$

Lembre-se, também, que $500 < x < 700$. Isto é:

$$500 - 3 < (x-3) < 700 - 3$$

$$497 < (x-3) < 697$$

Como $(x-3)$ deve entre 497 e 697, devemos ter que **$(x-3)$ é igual a 560**. Os outros múltiplos de 280 estão fora desse intervalo. Portanto:

$$x - 3 = \mathbf{560}$$

$$x = 563$$

Nesse caso, é **correto afirmar** que Carlos possui **563 revistas**.

Gabarito: CERTO.

Texto para as questões 10 a 12

Considerando que dois álbuns de fotos, com x e y páginas, sejam montados com o menor número possível de capítulos — divisão das fotos por eventos — e que cada capítulo, nos dois álbuns, deva ter o mesmo número z de páginas, julgue os itens subsequentes.

10. (CESPE/TRT 17/2013) Se x = 96 e y = 128, então z = 32.

11. (CESPE/TRT 17/2013) Se x é divisor de y, então z = x.

12. (CESPE/TRT 17/2013) z é múltiplo de x.

Comentários:

Antes julgar os itens da questão, vamos entender o enunciado.

Observe que temos x **páginas em um álbum** e y **páginas em outro álbum**. Os dois álbuns apresentam uma quantidade de capítulos diferentes. Ocorre que, para os dois álbuns, **cada capítulo deve conter exatamente z páginas**.

Observe, portanto, que para o **primeiro álbum teremos $\frac{x}{z}$ capítulos** e para o **segundo álbum teremos $\frac{y}{z}$ capítulos**.

Note que, para que tenhamos uma quantidade inteira de capítulos, necessariamente z deve ser divisor tanto de x quanto de y, isto é, **z deve ser divisor comum a x e a y.**

Além disso, os álbuns devem ser montados com o menor número possível de capítulos. Para tanto, o valor de páginas por capítulo, dado por **z, deve ser o maior possível**.

Portanto, temos que:

- **z é divisor comum a x e a y;**
- **z deve ser o maior possível.**

Logo, conclui-se que **z é o Máximo Divisor Comum (MDC) de x e y.**

Entendido o problema, vamos julgar os itens.

Questão 10

Se x = 96 e y = 128, então z = 32. CERTO.

Vimos que $z = \text{MDC}\ (\text{x}; \text{y})$. Para o caso em questão, $z = \text{MDC}(96; 128)$.

Vamos decompor os números em fatores primos:

$$96 = 2 \times 48$$
$$= 2 \times 2 \times 24$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 12$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 4 \times 3$$
$$= 2^5 \times 3$$

$$128 = 2 \times 64$$
$$= 2 \times 2 \times 32$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 16$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2^4$$
$$= 2^7$$

Devemos selecionar os fatores primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$96 = \ 2^5 \times 23$

$128 = 2^7$

Logo, $\text{MDC}\ (96; 128) = 2^5 = 32$. Portanto, $z = 32$.

Assim, **é correto afirmar que se x = 96 e y = 128, então z = 32**.

Questão 11

Se x é divisor de y, então z = x. CERTO.

Extraímos do enunciado que z é o **MDC** de x e y.

Da teoria de **MDC**, você deve se lembrar que se quisermos calcular o **MDC** de alguns números e **um deles é divisor de todos os outros**, **esse número é o MDC**.

Portanto, uma vez que **x é divisor** de y, **x é o MDC entre x e y**. Como z também é o **MDC** entre x e y, temos que $z = x$.

Questão 12

z é múltiplo de x. ERRADO.

Da teoria da aula, você deve se lembrar disso:

Se **B** é **divisor** de **A**, então **A** é um **múltiplo** de **B**.

Vimos que z é **divisor** de x, pois o número de capítulos do primeiro livro é $\frac{x}{z}$, que deve ser um número inteiro.

Logo, é correto afirmar que x é **múltiplo** de z, não o contrário.

Gabarito: 10 - CERTO. 11 - CERTO. 12 - ERRADO.

FCC

13.(FCC/TRT 9/2022) Em uma escola de basquete há 40 rapazes e 32 moças. Para um treino a professora quer formar grupos com todos os rapazes e moças. Os grupos deverão ter a mesma composição em relação ao número de moças e de rapazes.

O maior número de grupos com essas condições é:

a) 6.

b) 4.

c) 2.

d) 8.

e) 16.

Comentários:

Vamos supor que o **número máximo** de grupos seja x.

Perceba que, como os grupos deverão ter a mesma composição em relação ao número de moças e rapazes, x deve ser, **ao mesmo tempo**, **divisor** do número total de rapazes (**40**) e do número total de moças (**32**). Isso porque, em cada um dos x grupos, teremos $\frac{40}{x}$ rapazes e $\frac{32}{x}$ moças, e esses dois números ($\frac{40}{x}$ e $\frac{32}{x}$) devem ser inteiros.

Consequentemente, **x é o MDC** entre **40** e **32**.

Primeiramente, devemos decompor 40 e 32 em fatores primos.

$$40 = 4 \times 10$$
$$= 2^2 \times (2 \times 5)$$
$$= 2^3 \times 5$$

$$32 = 2 \times 16$$
$$= 2 \times (2 \times 8)$$

$$= 2 \times 2 \times 2^3$$
$$= 2^5$$

Devemos selecionar os fatores primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$40 = 2^3 \times 5$

$32 = 2^5$

Logo, $x = \text{MDC}(40;\ 32) = 2^3 = 8$.

Portanto, o maior número de grupos com as condições do enunciado é $x = 8$.

Gabarito: Letra D.

14.(FCC/TRT 4/2022) Em um auditório, sabe-se que há entre 300 e 400 cadeiras e que elas podem ser arrumadas tanto em 24 fileiras com o mesmo número de cadeiras em cada uma delas, como em 30 fileiras, também com o mesmo número de cadeiras em cada uma. A soma dos algarismos do número total de cadeiras no auditório é igual a:

a) 6

b) 8

c) 7

d) 9

e) 10

Comentários:

Considere que o total de cadeiras procurado é x.

Como as x cadeiras **podem ser arrumadas em 24 fileiras** com o mesmo número de cadeiras em cada uma delas, **x é múltiplo de 24**.

Além disso, as x cadeiras também **podem ser arrumadas em 30 fileiras** com o mesmo número de cadeiras em cada uma delas. Logo, **x é múltiplo de 30**.

Segundo o enunciado, **há entre 300 e 400 cadeiras no auditório**. Logo, **x está entre 300 e 400**.

Portanto, até agora, sabemos que **x é múltiplo comum a 24 e 30** e que **x está entre 300 e 400**.

Nesse momento, vamos calcular o **menor múltiplo comum** (**MMC**) de **24** e **30**.

Primeiramente, vamos decompor 24 e 30 em fatores primos:

$$\begin{aligned}24 &= 3 \times 8\\ &= 3 \times 2^3\\ &= 2^3 \times 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}30 &= 3 \times 10\\ &= 3 \times (2 \times 5)\\ &= 2 \times 3 \times 5\end{aligned}$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$24 = 2^3 \times 3$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

Logo, $\text{MMC}(24;\ 30) = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$.

Portanto, sendo x **múltiplo comum a 24 e 30**, **x deve ser múltiplo de 120**: **120**, **240**, **360**, **480**, ...

Como o número procurado está entre 300 e 400, temos que $\boldsymbol{x = 360}$.

Consequentemente, a soma dos algarismos do número total de cadeiras no auditório é igual a:

$$3 + 6 + 0 = 9$$

Gabarito: Letra D.

15.(FCC/TRT 4/2022) Cento e oitenta bombons, sendo noventa e seis de chocolate meio amargo e oitenta e quatro de chocolate ao leite, devem ser colocados em caixas. As caixas devem ter o mesmo número de bombons, e cada caixa deve ter apenas bombons de um mesmo sabor. O menor número de caixas a serem compradas é:

a) 10

b) 9

c) 12

d) 18

e) 15

Comentários:

A questão pergunta pelo **menor número de caixas a serem compradas**. Nesse caso, **o número de bombons por caixa deve ser o maior possível**.

Vamos supor que o **número máximo** de **bombons por caixa** seja x.

Perceba que, como cada caixa deve ter apenas bombons de um mesmo sabor, x deve ser, **ao mesmo tempo**, **divisor** do número total bombons de chocolate meio amargo (96) e do número total de bombons de chocolate ao leite (84). Logo, x é o **MDC** entre 84 e 96.

Primeiramente, devemos decompor 84 e 96 em fatores primos.

$$84 = 2 \times 42$$
$$= 2 \times 2 \times 21$$
$$= 2 \times 2 \times 3 \times 7$$
$$= 2^2 \times 3 \times 7$$

$$96 = 32 \times 3$$
$$= 2 \times 16 \times 3$$
$$= 2 \times 2^4 \times 3$$
$$= 2^5 \times 3$$

Devemos selecionar os fatores primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$

$96 = 2^5 \times 3$

Logo, $x = \text{MDC}(84; 96) = 2^2 \times 3 = 12.$

Agora, sabemos que cada caixa contém no **máximo x = 12 bombons**. Logo, o número **mínimo de caixas** é:

$$\text{Caixas com bombons meio amargo} + \text{Caixas com bombons ao leite}$$
$$= \frac{84 \text{ bombons meio amargo}}{12 \text{ bombons por caixa}} + \frac{96 \text{ bombons meio amargo}}{12 \text{ bombons por caixa}}$$
$$= 7 + 8$$
$$= 15 \text{ caixas}$$

Gabarito: Letra E.

16. (FCC/TRT 9/2022) Luciana é professora de italiano e dá aula de 14 em 14 dias, Domingos é professor de espanhol e dá aulas de 4 em 4 dias, e Ana é professora de francês e dá aulas de 7 em 7 dias. Os três dão aulas na mesma escola de línguas. Sabendo que deram aula no dia 29 de junho de 2022, a próxima data em que se encontrarão na escola para dar aula é

a) 24 de julho de 2022.

b) 20 de julho de 2022.

c) 03 de agosto de 2022.

d) 10 de agosto de 2022.

e) 27 de julho de 2022.

Comentários:

Segundo o enunciado:

- Domingos dá aulas **a cada 4 dias**;
- Ana dá aulas **a cada 7 dias**; e
- Luciana dá aulas **a cada 14 dias**;

Os três professores dão aulas simultaneamente sempre que o tempo transcorrido em dias for **múltiplo**, **ao mesmo tempo**, **de 4, 7 e 14 dias**. Como queremos saber a **próxima** vez em que os professores darão aula simultaneamente na escola, precisamos obter o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) de **4**, **7** e **14**.

Como 14 é múltiplo de 7, podemos eliminar o 7 do cálculo do MMC:

$$\mathbf{MMC(4;7;14) = MMC(4;14)}$$

O número 4, quando decomposto em fatores primos, é dado por 2^2.

O número 14, quando decomposto em fatores primos, é dado por 2×7.

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$4 = 2^2$

$14 = 2 \times 7^1$

Logo, $\mathrm{MMC}(4; 14) = 2^2 \times 7^1 = 28$.

Portanto, o próximo encontro entre os três professores ocorrerá em **28 dias**.

Sabemos que **o mês de junho apresenta 30 dias**. Ao **somar 28 dias** à data do primeiro encontro, **29 de junho de 2022**, obtemos a data do segundo encontro: **27 de julho de 2022**.

Gabarito: Letra E.

17.(FCC/MANAUSPREV/2021) O segurança do bloco A de uma empresa precisa registrar sua digital em um equipamento de 16 em 16 minutos. Nesse mesmo equipamento, o segurança do bloco B precisa registrar sua digital de 48 em 48 minutos. Se os dois seguranças registraram juntos suas digitais às 9h15 e terminam seu expediente de trabalho às 16h30, o último horário do expediente que eles irão registrar juntos suas digitais no equipamento será às

a) 16h27.

b) 15h55.

c) 16h11.

d) 16h19.

e) 15h39.

Comentários:

Primeiramente, vamos calcular a cada quantos minutos os seguranças registram as suas digitais conjuntamente.

Suponha que o **próximo registro conjunto** ocorrerá em $\boldsymbol{t}$ minutos

Se um segurança registra sua digital **a cada 16 minutos** e o outro registra **a cada 48 minutos**, perceba que o tempo $\boldsymbol{t}$ será **múltiplo** tanto de 16 quanto de 48. Como queremos saber sobre o **próximo registro conjunto**, $\boldsymbol{t}$ é o **menor múltiplo comum** a 16 e 48. Vamos então calcular $t = \text{MMC}(16; 48)$.

Primeiramente, devemos decompor 16 e 48 em fatores primos.

$$\begin{aligned} 16 &= 2 \times 8 \\ &= 2 \times 2^3 \\ &= 2^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 48 &= 6 \times 8 \\ &= (2 \times 3) \times 2^3 \\ &= 2^4 \times 3^1 \end{aligned}$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$16 = 2^4$

$48 = 2^4 \times 3^1$

Logo, $t = \text{MMC}(16; 48) = 2^4 \times 3^1 = 48$. Isso significa que **os registros conjuntos ocorrem a cada 48 minutos**.

Precisamos obter o último registro conjunto antes das **16h30min**. Note que, entre **9h15min** e **16h30min**, temos um tempo transcorrido de **7h15min**:

$$\begin{aligned} &16\text{h } 30\text{min} - 9\text{h}15\text{min} \\ &= (16-9)\text{h } (30-15)\text{min} \\ &= 7\text{h } 15\text{min} \end{aligned}$$

Após sete novos encontros, o seguinte intervalo de tempo terá transcorrido:

$$7 \times 48\text{min}$$

$$= 336\text{min}$$

Sabemos que **1h = 60min**. Ao dividir **336min** por 60, obtemos **quociente 5** e **resto 36**. Logo, após sete novos encontros, temos um tempo transcorrido de **5h 36min**. O horário após esses sete encontros é:

$$9\text{h}15\text{min} + 5\text{h}36\text{min}$$

$$= (9+5)\text{h}\ (15+36)\text{min}$$

$$= 14\text{h}\ 51\text{min}$$

Após um novo encontro, chega-se no seguinte horário:

$$14\text{h}\ 51\text{min} + 48\text{min}$$

$$= 14\text{h}\ (51+48)\text{min}$$

$$= 14\text{h}\ 99\text{min}$$

$$= 15\text{h}\ 39\text{min}$$

Após mais um encontro, chega-se no seguinte horário:

$$15\text{h}\ 39\text{min} + 48\text{min}$$

$$= 15\text{h}\ (39+48)\text{min}$$

$$= 15\text{h}\ 87\text{min}$$

$$= \mathbf{16h\ 27min}$$

Note que, se considerássemos mais um novo encontro, o horário ultrapassaria o término do expediente de **16h30min**. Portanto, o último horário do expediente que os seguranças irão registrar juntos suas digitais no equipamento será às **16h 27min**.

Gabarito: Letra A.

Vunesp

18.(VUNESP/CODEN/2021) Mauro, Rodrigo e Fábio trabalham como vigilantes e têm regimes diferenciados de folgas. Mauro folga 1 dia, após trabalhar 4 dias consecutivos; Rodrigo folga 1 dia, após trabalhar 5 dias consecutivos; e Fábio folga 1 dia, após trabalhar 6 dias consecutivos. Sábado passado, os

três folgaram. Sendo assim, mantidos esses regimes de folgas, o próximo dia em que esses três vigilantes estarão de folga novamente, no mesmo dia, será

a) uma quarta-feira.

b) uma quinta-feira.

c) uma sexta-feira.

d) um sábado.

e) um domingo.

Comentários:

Note que:

- Mauro folga 1 dia após trabalhar 4 dias. Portanto, **Mauro folga a cada 5 dias**.
- Rodrigo, por sua vez, folga 1 dia após trabalhar 5. Logo, **Rodrigo folga a cada 6 dias**.
- Fábio folga 1 dia após trabalhar 6. Então, **Fábio folga a cada 7 dias**.

Os três vigilantes irão folgar juntos sempre que o tempo transcorrido em dias for múltiplo, ao mesmo tempo, de 5, 6 e 7. Como queremos saber a próxima folga conjunta, precisamos obter o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) de **5, 6 e 7**.

5 e 7 já são números primos, e 6 pode ser descrito como 2×3.

Após decompor 5, 6 e 7 em fatores primos, devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$5 = \qquad\quad 5$

$6 = 2 \times 3$

$7 = \qquad\qquad 7$

Logo, $\text{MMC}(5;\ 6;\ 7) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$. Isso significa que **os vigilantes irão folgar juntos daqui 210 dias.**

Sendo a primeira folga em um **sábado**, precisamos saber qual dia da semana ocorrerá daqui 210 dias.

Como uma semana tem 7 dias, a cada 7 dias transcorridos volta-se ao mesmo dia da semana.

Ao dividir **210 por 7**, obtemos **quociente 30** e **resto 0**. Isso significa que em 210 dias temos **30 semanas completas e nenhum dia a mais**. Portanto, partindo-se de um **sábado**, após 30 semanas completas (210 dias) chegaremos novamente em um **sábado**.

Gabarito: Letra D.

19. (VUNESP/PM SP/2021) Um programa de entrevistas é apresentado simultaneamente na TV aberta e por uma plataforma de vídeos, via internet. Devido a essa estratégia, os responsáveis pelo programa vendem tempos distintos de propagandas para serem veiculadas na TV aberta ou na internet, nos intervalos desse programa. Esses intervalos sempre têm mais de 2 minutos de duração, sendo que o programa é retomado simultaneamente nos dois formatos de transmissão, sem a interrupção de anúncios.

As propagandas vendidas para serem veiculadas na internet possuem 15 segundos de duração, enquanto que as da TV aberta possuem 25 segundos de duração. Assim sendo, o tempo mínimo de duração dos intervalos desse programa é de

a) 3 minutos e 45 segundos.

b) 2 minutos e 30 segundos.

c) 3 minutos.

d) 3 minutos e 15 segundos.

e) 2 minutos e 50 segundos.

Comentários:

Note que o intervalo total do programa é o mesmo tanto para o formato de TV aberta quanto para o formato via internet.

Como os intervalos da TV duram 25 segundos e os intervalos via internet duram 15 segundos, o intervalo total do programa deve ser **múltiplo**, **ao mesmo tempo**, de **15 e 25 segundos**.

A questão pede o **tempo mínimo** de duração **uma vez que o intervalo tenha mais de 2 minutos de duração**. Logo, vamos obter o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) **de 15 e 25**. **Se o intervalo obtido for menor do que 2 minutos, vamos obter o próximo múltiplo comum**.

Primeiramente, devemos decompor 15 e 25 em fatores primos.

$$15 = 3 \times 5$$

$$25 = 5^2$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$15 = 3 \times 5$

$25 = \quad 5^2$

Logo, $\text{MMC}(15; 25) = 3 \times 5^2 = 75$. Isso significa que os dois tipos de intervalos serão finalizados ao mesmo tempo em **75 segundos**, isto é, em **1 minuto e 15 segundos**.

Como esse intervalo é **menor do que 2 minutos**, devemos tomar o próximo múltiplo: **150 segundos**, isto é, **2 minutos e 30 segundos**. O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

Gabarito: Letra B.

20. (VUNESP/Pref. V Paulista/2021) Em uma avenida plana, há três faróis, A, B e C, que acendem o sinal verde simultaneamente às 8 horas e 20 minutos. Os faróis A, B e C acendem o sinal verde, respectivamente, a cada 35 segundos, 40 segundos e 45 segundos. O próximo horário em que esses três faróis acenderão novamente o sinal verde simultaneamente será às

a) 8 horas e 54 minutos.

b) 8 horas e 58 minutos.

c) 9 horas e 02 minutos.

d) 9 horas e 08 minutos.

e) 9 horas e 14 minutos.

Comentários:

Note que os faróis A, B e C acendem o sinal verde simultaneamente sempre que transcorrer um intervalo que é **múltiplo,** ao **mesmo tempo**, de 35, 40 e 45 segundos.

Como se quer obter a **próxima vez** em que os faróis acenderão o sinal verde novamente, devemos obter o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) **de 35, 40 e 45**.

Primeiramente, devemos decompor 35, 40 e 45 em fatores primos.

$$35 = 5 \times 7$$

$$\begin{aligned} 40 &= 4 \times 10 \\ &= 2^2 \times 2 \times 5 \\ &= 2^3 \times 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45 &= 9 \times 5 \\ &= 3^2 \times 5 \end{aligned}$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$$35 = \qquad\quad 5 \times 7$$
$$40 = 2^3 \qquad \times 5$$
$$45 = \qquad 3^2 \times 5$$

Logo, $\text{MMC}(35; 40; 45) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$. Isso significa que os faróis acenderão o sinal verde juntos novamente **após 2520 segundos**.

Temos que **1 min = 60 segundos.** Logo, os faróis acenderão o sinal verde juntos após:

$$\frac{2520}{60} = 42 \text{ minutos}$$

Como inicialmente os faróis acenderam o sinal verde às $8\text{h } 20\text{min}$, a próxima ocorrência será às:

$$8\text{h } 20\text{min} + 42\text{min}$$
$$8\text{h } 62\text{min}$$

Como **60 min = 1h**, temos que **8h 62min** correspondem a:

$$9\text{h } 02\text{min}$$

Gabarito: Letra C.

21.(VUNESP/Pref. Marília/2021) Uma gráfica recebeu a encomenda de imprimir 2500 panfletos sobre um curso de enfermagem e 3200 panfletos sobre um curso de primeiros socorros. Esses panfletos deverão ser separados em blocos, cada um deles com o mesmo número de panfletos e na maior quantidade possível. Sabendo que cada bloco só poderá ter panfletos sobre o mesmo curso, o maior número de blocos que poderão ser feitos será

a) 100.

b) 85.

c) 68.

d) 57.

e) 50.

Comentários:

Suponha que o **número de panfletos em cada bloco seja x**.

Como cada bloco deve ter panfletos do mesmo tipo, x deve ser **divisor**, **ao mesmo tempo**, de **2.500** e de **3.200**. Como a quantidade de panfletos em cada bloco deve ser a **maior possível**, **x é o máximo divisor comum** (**MDC**) de **2.500** e **3.200**.

Primeiramente, devemos decompor 2.500 e 3.200 em fatores primos.

$$\begin{aligned} 2.500 &= 25 \times 100 \\ &= 5^2 \times 10 \times 10 \\ &= 5^2 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \\ &= 2^2 \times 5^4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3.200 &= 32 \times 100 \\
&= 2^5 \times 10 \times 10 \\
&= 2^5 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \\
&= 2^7 \times 5^2
\end{aligned}
$$

Devemos selecionar os fatores primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$2.500 = 2^2 \times 5^4$

$3.200 = 2^7 \times 5^2$

Logo, $\text{MDC}(2.500; 3.200) = 2^2 \times 5^2 = 100$.

Agora sabemos que $\boldsymbol{x = 100}$, isto é, **cada bloco contém 100 panfletos**. Nesse caso, o **número de blocos** será:

$$\frac{2.500}{100} + \frac{3.200}{100}$$

$$= 25 + 32$$

$$\boldsymbol{= 57}$$

O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Observe que o enunciado cometeu uma imprecisão. Não há necessidade de se perguntar "**o maior número de blocos que poderão ser feitos**". Isso porque, por meio dos dados do problema, sabemos que **o número exato de blocos que poderão ser feitos é 57**.

Gabarito: Letra D.

22.(VUNESP/Pref. Morro Agudo/2020) Tem-se 144 cm de fita na cor vermelha e 168 cm de fita na cor verde. Pretende-se cortar essas fitas em pedaços, todos com o mesmo comprimento, sendo este o maior possível, de modo a utilizar totalmente essas fitas, sem desperdiçá-las. Nesse caso, o número total de pedaços de fitas que será possível obter é

a) 12.

b) 13.

c) 16.

d) 24.

e) 26.

Comentários:

Suponha que o **comprimento dos pedaços seja x centímetros**.

Como não deve haver desperdício das fitas, x deve ser **divisor**, **ao mesmo tempo**, de **144 cm** e de **168 cm**. Além disso, como o comprimento x deve ser o **maior possível**, **x é o máximo divisor comum** (**MDC**) de **144** e **168**.

Primeiramente, devemos decompor 144 e 168 em fatores primos.

$$\begin{aligned} 144 &= 12 \times 12 \\ &= (3 \times 4) \times (3 \times 4) \\ &= (3 \times 2^2) \times (3 \times 2^2) \\ &= 2^4 \times 3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 168 &= 2 \times 84 \\ &= 2 \times 4 \times 21 \\ &= 2 \times 4 \times 3 \times 7 \\ &= 2^3 \times 3 \times 7 \end{aligned}$$

Devemos selecionar os fatores primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$144 = 2^4 \times 3^2$

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$

Logo, $\text{MDC}(144; 168) = 2^3 \times 3 = 24$.

Agora sabemos que $x = 24$, isto é, **cada pedaço tem 24 cm**. Nesse caso, o **número de pedaços** de fita será:

$$\frac{144}{24} + \frac{168}{24}$$

$$= 6 + 7$$

$$= \mathbf{13}$$

O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

Gabarito: Letra B.

LISTA DE QUESTÕES - MULTIBANCAS

Múltiplos e Divisores

1.(FGV/TRT-PB/2022) A soma de 2 números naturais é 22253. Um dos números é divisível por 10 e se retirarmos o algarismo das unidades desse número obtém-se o outro número.

A diferença entre o maior e o menor número é

a) 13222.

b) 14644.

c) 15876.

d) 17732.

e) 18207.

2.(FGV/PM SP/2022) Um número inteiro positivo N, de 2 algarismos, é tal que exatamente 3 das 4 afirmações a seguir são verdadeiras:

- **N é um número par;**
- **N é um número primo;**
- **N é múltiplo de 3;**
- **um dos algarismos de N é 5.**

O algarismo das unidades de N é

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 8.

3.(FGV/Senado Federal/2022) Maria foi desafiada a calcular quantos números naturais que sejam múltiplos de 3 ou de 7 existem entre 1000 e 2000. Maria refletiu um pouco e respondeu corretamente:

a) 47

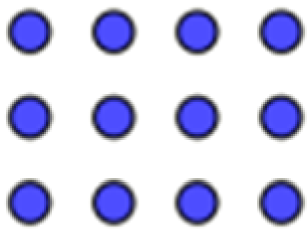
b) 284

c) 369

d) 428

e) 512

4.(FGV/CBM-RJ/2022) Em um pátio, 240 soldados deverão ser dispostos em formação retangular de linhas e colunas. Por exemplo, a figura abaixo mostra 12 soldados em uma formação retangular de 3 linhas e 4 colunas.



Para os 240 soldados, a formação deve ter ao menos, 4 linhas e ao menos 4 colunas.

Assinale a opção que indica o número de maneiras diferentes de realizar essa formação.

a) 7.

b) 8.

c) 12.

d) 14.

e) 18.

5.(FGV/SEAD-AP/2022) O maior fator primo do número 65536 é 2, pois $65536 = 2^{16}$.

A soma dos algarismos do maior fator primo de 65535 é

a) 3.

b) 5.

c) 8.

d) 11.

e) 14.

6.(FGV/TRT-PB/2022) Carlos considera que um número é agradável quando a soma dos seus algarismos é 7 ou múltiplo de 7. Por exemplo, o ano de 2005 foi agradável pois 2 + 0 + 0 + 5 = 7, e o de 2039 será também, pois 2 + 0 + 3 + 9 = 14.

Por esse critério, o número de anos agradáveis do século XX foi igual a

a) 7.

b) 10.

c) 11.

d) 13.

e) 14.

7.(FGV/SEFAZ AM/2022) Considere uma operação entre números inteiros positivos a e b, representada pelo símbolo $\#$ e definida por:

$$a\#b = 2a + b$$

Considere, agora, o conjunto M dos números inteiros x tais que $x \# 3$ seja múltiplo de 5.

É correto afirmar que, dos números a seguir, o único que pertence ao conjunto M é

a) 2.

b) 5.

c) 13.

d) 15.

e) 21.

8. (FGV/SEMSA Manaus/2022) N é o maior número inteiro menor do que 100 que, quando dividido por 2 ou por 3, deixa resto igual a 1.

A soma dos algarismos de N é igual a

a) 18.

b) 17.

c) 16.

d) 15.

e) 14.

9. (FGV/SEMSA Manaus/2022) Considere um número N, inteiro e positivo, tal que 36 e 54 são ambos divisíveis por N.

A soma dos possíveis valores de N é

a) 27.

b) 32.

c) 36.

d) 39.

e) 54.

10.(FGV/PM SP/2021) 180 soldados serão posicionados no pátio do quartel, arrumados em linhas e colunas, de maneira a formar um retângulo perfeito. Sabe se que tanto o número de linhas quanto o número de colunas do retângulo não podem ser menores que 5.

O maior número de arrumações possíveis para esse retângulo de soldados é

a) 4.

b) 5.

c) 7.

d) 10.

e) 12.

Cebraspe

11.(CESPE/SERPRO/2021) Suponha que sejam gerados 5 números válidos de CPF para serem atribuídos a 5 indivíduos distintos. Com base nessas informações, julgue o item a seguir.

Suponha que a seja o último dígito de um dos CPFs gerados, que b seja o último dígito de outro desses CPFs e que a e b sejam números ímpares consecutivos. Nessa situação, a + b é múltiplo de 4.

12. (CESPE/PC DF/2021) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada.

Um foragido da justiça, que gostava de se exibir perante seus comparsas e conhecia um pouco de matemática, ligou para a polícia e passou as seguintes informações: "em 30 minutos, eu estarei na rua Alfa, em uma casa, do lado direito da rua, cujo número tem as seguintes características: é inferior a 1.000, o algarismo das centenas é igual ao número de diagonais de um retângulo e, além disso, a parte do número formada só pelos algarismos das dezenas e das unidades é múltiplo de 7". Uma viatura foi deslocada para o intervalo de casas da rua Alfa correspondente ao algarismo das centenas revelado. Lá chegando, os policiais verificaram que, nesse trecho da rua Alfa, os números das casas tinham as seguintes características: os algarismos das dezenas e das unidades começavam de 01 e de uma casa para a próxima eram acrescentadas 8 unidades. Nessa situação, o número da casa informado pelo foragido é inferior a 250.

13. (CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Julgue o item a seguir, relativo a sequências numéricas.

A quantidade de números inteiros múltiplos de 19 que estão entre 1.234 e 4.321 é inferior a 160.

14. (CESPE/SEFAZ RS/2018) Uma assistente administrativa rasgou em n pedaços uma folha de papel que continha informação considerada sigilosa. Como ainda era possível ler alguma informação em um desses pedaços, ela rasgou-o também em n pedaços. Receosa de que a informação sigilosa pudesse ser recuperada de um desses últimos pedaços, rasgou-o também em n pedaços.

Assinale a opção que indica uma quantidade possível de pedaços em que a folha foi rasgada.

a) 15

b) 26

c) 28

d) 30

e) 36

15. (CESPE/FUB/2018) Paulo, Maria e João, servidores lotados em uma biblioteca pública, trabalham na catalogação dos livros recém-adquiridos. Independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, Paulo cataloga 1/4, Maria cataloga 1/3 e João, 5/12.

A respeito da catalogação de livros por esses servidores, julgue o item a seguir.

Sempre que trabalharem de segunda-feira a sexta-feira, os três servidores catalogarão uma quantidade de livros que será um número múltiplo de 12.

16. (CESPE/Pref. SL/2017) A quantidade N de pacotes de arroz distribuídos no primeiro trimestre para as 6 escolas de determinado município é um número de três algarismos que pode ser escrito na forma N = X3Y, em que X e Y são dois algarismos entre 0 e 9. Sabe-se que cada escola recebeu a mesma quantidade de pacotes das demais e o número N é o maior possível que atende às condições descritas.

Nessa situação, a quantidade de pacotes de arroz distribuídos no primeiro trimestre para as 6 escolas do município foi

a) superior a 800 e inferior a 900.

b) superior a 900.

c) inferior a 600.

d) superior a 600 e inferior a 700.

e) superior a 700 e inferior a 800.

17. (CESPE/SECTI DF/2014) Acerca das propriedades dos conjuntos numéricos, julgue o item a seguir.

Existem exatamente quatro números inteiros r para os quais a fração $\frac{14}{2r+1}$ é um número inteiro.

18. (CESPE/PC DF/2013) Considerando que 300 pessoas tenham sido selecionadas para trabalhar em locais de apoio na próxima copa do mundo e que 175 dessas pessoas sejam do sexo masculino, julgue o seguinte item.

É impossível dividir as 300 pessoas em grupos de modo que todos os grupos tenham a mesma quantidade de mulheres e a mesma quantidade de homens.

FCC

19.(FCC/TRT 19/2022) O número inteiro x, quando dividido por 6, tem resto 3. O resto da divisão de 4x por 6 é:

a) 4

b) 0

c) 2

d) 1

e) 3

20.(FCC/TRT 19/2022) Maria quer cortar uma corda em 6 pedaços de mesmo tamanho e marca os pontos onde deverá efetuar os cortes. José quer cortar a mesma corda em 8 pedaços de mesmo tamanho e também marca os pontos onde a corda deve ser cortada. Carlos corta a corda em todos os pontos marcados por Maria e José. O número de pedaços de corda resultante é:

a) 11

b) 13

c) 10

d) 12

e) 9

21.(FCC/TRT 22/2022) O número 150 foi multiplicado por 2 ou por 3. Em seguida, ao resultado do produto, foi somado 1 ou 2. Por fim, o número obtido foi dividido por 3 ou 4. Sabendo-se que a divisão teve resto zero, o quociente da divisão foi

a) 112.

b) 114.

c) 113.

d) 111.

e) 110.

22.(FCC/TRT 9/2022) Em uma loja há entre 30 e 50 troféus em miniatura. A funcionária da loja agrupou-os de 5 a 5 e sobrou-lhe um troféu. Depois, agrupou-os de 3 a 3 e não sobrou nenhum troféu.

O número exato de troféus na loja é:

a) 41.

b) 39.

c) 36.

d) 48.

e) 42.

23.(FCC/SABESP/2018) O total de 168 lanches foram servidos para x pessoas, sendo que todas receberam o mesmo número de lanches e não sobraram lanches sem serem distribuídos entre essas pessoas. Não sendo possível servir frações de lanche para as pessoas e sendo x um número entre 5 e 30, o total de possibilidades diferentes para x é igual a

a) 6

b) 9

c) 8

d) 5

e) 7

24.(FCC/METRO SP/2015) A área de um retângulo é 144 m². Sabe-se que as medidas do comprimento e da largura desse retângulo, em metros, são número inteiros positivos, e que o comprimento é maior do que a largura. Apenas com os dados fornecidos, o total de possibilidades numéricas diferentes para o comprimento desse retângulo é igual a

a) cinco.

b) seis.

c) nove.

d) sete.

e) oito.

25.(FCC/SABESP/2018) De modo geral, um ano bissexto é todo aquele que é múltiplo de 4. Porém, essa regra tem uma exceção: mesmo que o ano seja múltiplo de 4, se ele também for múltiplo de 100, ele deixa de ser bissexto.

Essa última regra tem outra exceção: se o ano for múltiplo de 100, mas também for múltiplo de 400, ele volta a ser bissexto.

Considerando essas informações, é correto afirmar que existem anos que são

a) múltiplos de 400 e não são bissextos.

b) múltiplos de 100 e são bissextos.

c) bissextos e não são múltiplos de 4.

d) ímpares e são bissextos.

e) bissextos e não são múltiplos de 2.

26.(FCC/TRT 6/2018) O número natural x possui ao todo três divisores positivos distintos. O número natural y possui ao todo três divisores positivos distintos. O produto x . y é um número natural maior que 30 e menor que 40. A soma x + y é igual a

a) 12.

b) 14.

c) 13.

d) 16.

e) 19.

Vunesp

27.(VUNESP/EsFCEx/2020) Se o número inteiro $2^a.3^b.11^c$ (sendo $a, b, c \in$ N) divide o número 1056, então o número de divisores positivos e negativos de 1056 é igual a

a) 36.

b) 24.

c) 44.

d) 12.

e) 48.

28. (VUNESP/ISS Osasco/2019) As tarefas numeradas de 1 a 50 devem ser realizadas no prazo dos cinco dias úteis de uma semana. A pessoa que vai realizar as tarefas decidiu fazer aquelas que estão numeradas com um múltiplo de 3 na segunda-feira. Das que sobrarem, ela fará as numeradas por múltiplo de 4 na terça-feira. Das que sobrarem, ela fará as numeradas por múltiplo de 5 na quarta-feira. Seguindo o mesmo padrão, das que sobrarem, ela fará as numeradas por múltiplo de 6 na quinta-feira e, por fim, fará as que restarem na sexta-feira. Sendo assim, essa pessoa terá que realizar na sexta-feira um total de tarefas igual a

a) 17.

b) 18.

c) 19.

d) 20.

e) 21.

29. (VUNESP/CM Poá/2016) Seja X um número inteiro, positivo e menor do que 100. O resto da divisão de X por 5 é igual a 1, e o resto da divisão de X por 11 é igual a 7. A soma dos algarismos de X é igual a

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

e) 10.

30.(VUNESP/Pref. Araçatuba/2019) Ariel, Gabriel e Rafael frequentam a mesma academia. Ariel vai à academia a cada 2 dias, Gabriel, a cada 3 dias, e Rafael, a cada 4 dias. Incluindo o dia primeiro de março, quando os 3 estiveram na academia, até o dia 15 de março, o número de dias em que pelo menos dois desses garotos estiveram na academia, no mesmo dia, foi

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

Gabarito - Multibancas

Múltiplos e Divisores

1. LETRA E
2. LETRA C
3. LETRA D
4. LETRA D
5. LETRA E
6. LETRA E
7. LETRA E
8. LETRA C
9. LETRA D
10. LETRA D
11. CERTO
12. CERTO
13. ERRADO
14. LETRA C
15. CERTO
16. LETRA B
17. CERTO
18. ERRADO
19. LETRA B
20. LETRA D
21. LETRA C
22. LETRA C
23. LETRA C
24. LETRA D
25. LETRA B
26. LETRA C
27. LETRA E
28. LETRA E
29. LETRA A
30. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES - MULTIBANCAS

MMC e MDC

FGV

1.(FGV/TRT-PB/2022) Laura coleciona figurinhas. Ontem ela arrumou suas figurinhas em montinhos de 6 figurinhas cada e não faltou nem sobrou figurinha alguma. Hoje ela fez uma nova arrumação com as mesmas figurinhas, dessa vez em montinhos de 10 figurinhas cada um e também não faltou nem sobrou figurinha alguma.

O número mínimo de figurinhas que Laura pode ter é M.

A soma dos algarismos de M é

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

2.(FGV/CBM-RJ/2022) Max e Rubens estão andando de bicicleta em uma pista circular. Eles andam em sentidos opostos. Max dá uma volta na pista a cada 6 minutos e Rubens dá uma volta na pista a cada 10 minutos. Em um determinado momento eles se cruzam em um ponto P da pista.

Eles voltarão a se cruzar pela primeira vez nesse mesmo ponto P após

a) 6 minutos.

b) 10 minutos.

c) 24 minutos.

d) 30 minutos.

e) 60 minutos.

3.(FGV/PM SP/2022) Seja M o menor número inteiro, maior do que 2, que, dividido por 3, por 5, ou por 7, deixa sempre resto 2.

A soma dos algarismos de M é

a) 8.

b) 9.

c) 10.

d) 12.

e) 15.

4.(FGV/SEAD-AP/2022) O mínimo múltiplo comum entre A e B é 24 e o mínimo múltiplo comum entre B e C é 75.

O menor valor que o mínimo múltiplo comum entre A e C pode ter é

a) 100.

b) 120.

c) 150.

d) 180.

e) 200.

5.(FGV/SEFAZ AM/2022) Um pote contém entre 150 e 200 balas. Miguel reparou que separando essas balas em grupos de 5 sobravam 2 balas, e que, separando em grupos de 7, sobravam também 2 balas.

Se Miguel separasse as balas em grupos de 9 balas, sobrariam

a) 0.

b) 2.

c) 4.

d) 6.

e) 8.

6. (FGV/IBGE/2017) João recebeu 32 relatórios verdes e 40 relatórios vermelhos. Ele deve colocar esses relatórios em envelopes da seguinte forma:

• Todos os envelopes devem conter a mesma quantidade de relatórios.

• Nenhum envelope pode misturar relatórios de cores diferentes.

Cumprindo essas exigências, o menor número de envelopes que ele precisará utilizar é:

a) 8;

b) 9;

c) 12;

d) 16;

e) 18.

7. (FGV/TCE-BA/2014) Em uma serraria há dez varas de madeira: cinco de 1,40m de comprimento, três de 1,80m e duas de 2,40m. Essas varas devem ser cortadas em pedaços iguais, com o maior comprimento possível e aproveitando toda a madeira.

A quantidade de pedaços que será obtida é

a) 30.

b) 43.

c) 86.

d) 172.

e) 344.

Cebraspe

8.(CESPE/IFF/2018) Uma companhia aérea fixou rodízio entre duas cidades para seus comissários de bordo de determinado voo diário. A escala estabelece que o comissário A trabalhe nesse voo a cada 8 dias; o comissário B, a cada 10 dias; e o comissário C, a cada 12 dias.

Nesse caso, se os três tiverem trabalhado juntos no voo do dia de hoje, então a próxima vez em que eles trabalharão novamente juntos nesse voo ocorrerá daqui a

a) 30 dias.

b) 74 dias.

c) 120 dias.

d) 240 dias.

e) 960 dias.

9.(CESPE/BNB/2018) A respeito de números reais e de funções de variáveis reais, julgue o item que se segue.

Situação hipotética: Carlos possui uma quantidade de revistas que é maior que 500 e menor que 700. Separando as revistas em conjuntos de 8 revistas, Carlos verificou que sobrou um grupo com 3 revistas. O mesmo acontecia quando ele separava as revistas em conjuntos de 14 ou em conjuntos de 20 revistas: sempre sobrava um conjunto com 3 revistas.

Assertiva: Nesse caso, é correto afirmar que Carlos possui 563 revistas.

Texto para as questões 10 a 12

Considerando que dois álbuns de fotos, com x e y páginas, sejam montados com o menor número possível de capítulos — divisão das fotos por eventos — e que cada capítulo, nos dois álbuns, deva ter o mesmo número z de páginas, julgue os itens subsequentes.

10. (CESPE/TRT 17/2013) Se x = 96 e y = 128, então z = 32.

11. (CESPE/TRT 17/2013) Se x é divisor de y, então z = x.

12. (CESPE/TRT 17/2013) z é múltiplo de x.

FCC

13.(FCC/TRT 9/2022) Em uma escola de basquete há 40 rapazes e 32 moças. Para um treino a professora quer formar grupos com todos os rapazes e moças. Os grupos deverão ter a mesma composição em relação ao número de moças e de rapazes.

O maior número de grupos com essas condições é:

a) 6.

b) 4.

c) 2.

d) 8.

e) 16.

14.(FCC/TRT 4/2022) Em um auditório, sabe-se que há entre 300 e 400 cadeiras e que elas podem ser arrumadas tanto em 24 fileiras com o mesmo número de cadeiras em cada uma delas, como em 30 fileiras, também com o mesmo número de cadeiras em cada uma. A soma dos algarismos do número total de cadeiras no auditório é igual a:

a) 6

b) 8

c) 7

d) 9

e) 10

15.(FCC/TRT 4/2022) Cento e oitenta bombons, sendo noventa e seis de chocolate meio amargo e oitenta e quatro de chocolate ao leite, devem ser colocados em caixas. As caixas devem ter o mesmo número de bombons, e cada caixa deve ter apenas bombons de um mesmo sabor. O menor número de caixas a serem compradas é:

a) 10

b) 9

c) 12

d) 18

e) 15

16. (FCC/TRT 9/2022) Luciana é professora de italiano e dá aula de 14 em 14 dias, Domingos é professor de espanhol e dá aulas de 4 em 4 dias, e Ana é professora de francês e dá aulas de 7 em 7 dias. Os três dão aulas na mesma escola de línguas. Sabendo que deram aula no dia 29 de junho de 2022, a próxima data em que se encontrarão na escola para dar aula é

a) 24 de julho de 2022.

b) 20 de julho de 2022.

c) 03 de agosto de 2022.

d) 10 de agosto de 2022.

e) 27 de julho de 2022.

17.(FCC/MANAUSPREV/2021) O segurança do bloco A de uma empresa precisa registrar sua digital em um equipamento de 16 em 16 minutos. Nesse mesmo equipamento, o segurança do bloco B precisa registrar sua digital de 48 em 48 minutos. Se os dois seguranças registraram juntos suas digitais às 9h15 e terminam seu expediente de trabalho às 16h30, o último horário do expediente que eles irão registrar juntos suas digitais no equipamento será às

a) 16h27.

b) 15h55.

c) 16h11.

d) 16h19.

e) 15h39.

Vunesp

18.(VUNESP/CODEN/2021) Mauro, Rodrigo e Fábio trabalham como vigilantes e têm regimes diferenciados de folgas. Mauro folga 1 dia, após trabalhar 4 dias consecutivos; Rodrigo folga 1 dia, após trabalhar 5 dias consecutivos; e Fábio folga 1 dia, após trabalhar 6 dias consecutivos. Sábado passado, os três folgaram. Sendo assim, mantidos esses regimes de folgas, o próximo dia em que esses três vigilantes estarão de folga novamente, no mesmo dia, será

a) uma quarta-feira.

b) uma quinta-feira.

c) uma sexta-feira.

d) um sábado.

e) um domingo.

19. (VUNESP/PM SP/2021) Um programa de entrevistas é apresentado simultaneamente na TV aberta e por uma plataforma de vídeos, via internet. Devido a essa estratégia, os responsáveis pelo programa vendem tempos distintos de propagandas para serem veiculadas na TV aberta ou na internet, nos intervalos desse programa. Esses intervalos sempre têm mais de 2 minutos de duração, sendo que o programa é retomado simultaneamente nos dois formatos de transmissão, sem a interrupção de anúncios.

As propagandas vendidas para serem veiculadas na internet possuem 15 segundos de duração, enquanto que as da TV aberta possuem 25 segundos de duração. Assim sendo, o tempo mínimo de duração dos intervalos desse programa é de

a) 3 minutos e 45 segundos.

b) 2 minutos e 30 segundos.

c) 3 minutos.

d) 3 minutos e 15 segundos.

e) 2 minutos e 50 segundos.

20.(VUNESP/Pref. V Paulista/2021) Em uma avenida plana, há três faróis, A, B e C, que acendem o sinal verde simultaneamente às 8 horas e 20 minutos. Os faróis A, B e C acendem o sinal verde, respectivamente, a cada 35 segundos, 40 segundos e 45 segundos. O próximo horário em que esses três faróis acenderão novamente o sinal verde simultaneamente será às

a) 8 horas e 54 minutos.

b) 8 horas e 58 minutos.

c) 9 horas e 02 minutos.

d) 9 horas e 08 minutos.

e) 9 horas e 14 minutos.

21.(VUNESP/Pref. Marília/2021) Uma gráfica recebeu a encomenda de imprimir 2500 panfletos sobre um curso de enfermagem e 3200 panfletos sobre um curso de primeiros socorros. Esses panfletos deverão ser separados em blocos, cada um deles com o mesmo número de panfletos e na maior quantidade possível. Sabendo que cada bloco só poderá ter panfletos sobre o mesmo curso, o maior número de blocos que poderão ser feitos será

a) 100.

b) 85.

c) 68.

d) 57.

e) 50.

22.(VUNESP/Pref. Morro Agudo/2020) Tem-se 144 cm de fita na cor vermelha e 168 cm de fita na cor verde. Pretende-se cortar essas fitas em pedaços, todos com o mesmo comprimento, sendo este o maior possível, de modo a utilizar totalmente essas fitas, sem desperdiçá-las. Nesse caso, o número total de pedaços de fitas que será possível obter é

a) 12.

b) 13.

c) 16.

d) 24.

e) 26.

Gabarito - Multibancas

MMC e MDC

1. LETRA B
2. LETRA D
3. LETRA A
4. LETRA E
5. LETRA D
6. LETRA B
7. LETRA C
8. LETRA C
9. CERTO
10. CERTO
11. CERTO
12. ERRADO
13. LETRA D
14. LETRA D
15. LETRA E
16. LETRA E
17. LETRA A
18. LETRA D
19. LETRA B
20. LETRA C
21. LETRA D
22. LETRA B

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.