Aula 18

TSE - Concurso Unificado (Analista Judiciário - Área Administrativa) Raciocínio Lógico e Matemática - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

20 de Abril de 2023

Índice

APRESENTAÇÃO DA AULA

Fala, pessoal!

Na aula de hoje, trataremos sobre um assunto muito temido pelos concurseiros: **trigonometria**.

Destaco que é especialmente importante você **entender** (**e não somente decorar**) como funciona o **ciclo trigonométrico**, pois ele é a base de toda a trigonometria. Especial atenção deve ser dada também à **Relação Fundamental da Trigonometria (RFT)**, que nos ajuda a resolver diversas questões.

No segundo tópico da aula, estudaremos as principais **funções trigonométricas**, incluindo as funções trigonométricas inversas.

Vamos avançado com calma e constância. A aula apresenta uma teoria extensa, porém necessária para que você ganhe base e confiança para resolver as questões de trigonometria.

Vamos exibir, no **início de cada tópico**, um pequeno **resumo** para que você tenha uma visão geral do conteúdo antes mesmo de iniciar o assunto.

Conte comigo nessa caminhada =)

Prof. Eduardo Mocellin.

@edu.mocellin

TRIGONOMETRIA

Trigonometria

Ângulos

$$\frac{\theta_g}{360^\circ} = \frac{\theta_r}{2\pi\, rad}$$

Razões trigonométricas em um triângulo retângulo

$$\text{sen (ângulo)} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\text{ (ângulo)} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\text{ (ângulo)} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$$

$$\tan\theta = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta}$$

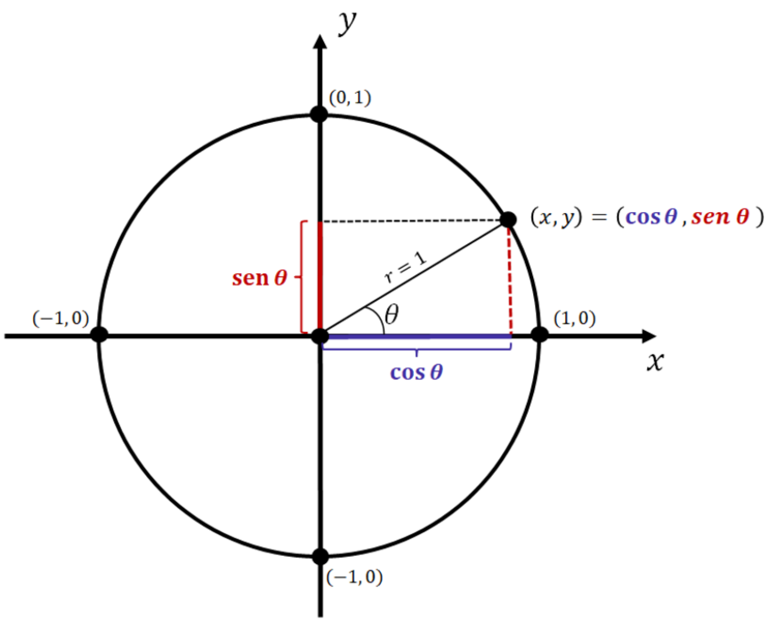
Razões trigonométricas notáveis

ÂNGULO θ (GRAUS ; RAD)	$0^\circ ; 0$	$30^\circ ; \frac{\pi}{6}$	$45^\circ ; \frac{\pi}{4}$	$60^\circ ; \frac{\pi}{3}$	$90^\circ ; \frac{\pi}{2}$
$sen\,\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	**Não existe**

Ciclo trigonométrico

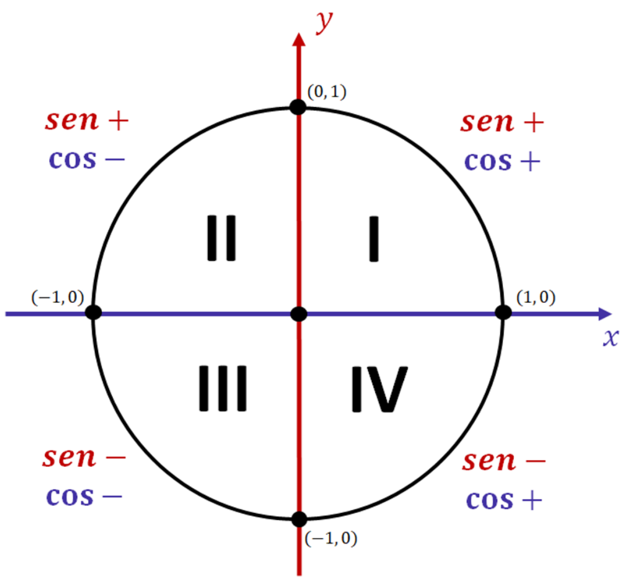
Conceitos básicos

- O **ciclo trigonométrico** (ou círculo trigonométrico) é um **círculo de raio igual a 1** com centro na origem do plano cartesiano (plano xy).
- **Uma vez traçado um raio que faz um ângulo θ com o eixo x**, **a projeção do raio no eixo x é o cosseno de θ** e **a projeção do raio no eixo y é o seno de θ**.
- O **ciclo trigonométrico é um círculo orientado**, de modo que **o sentido positivo** dos ângulos **é o sentido anti-horário**.



Quadrantes

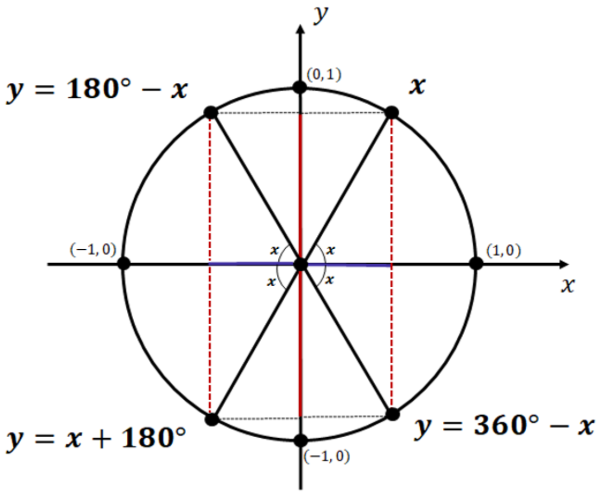
- No **primeiro quadrante (I)** estão os ângulos entre $0°$ e $90°$;
- No **segundo quadrante (II)** estão os ângulos entre $90°$ e $180°$;
- No **terceiro quadrante (III)** estão os ângulos entre $180°$ e $270°$; e
- No **quarto quadrante (IV)** estão os ângulos entre $270°$ e $360°$.



Redução ao primeiro quadrante

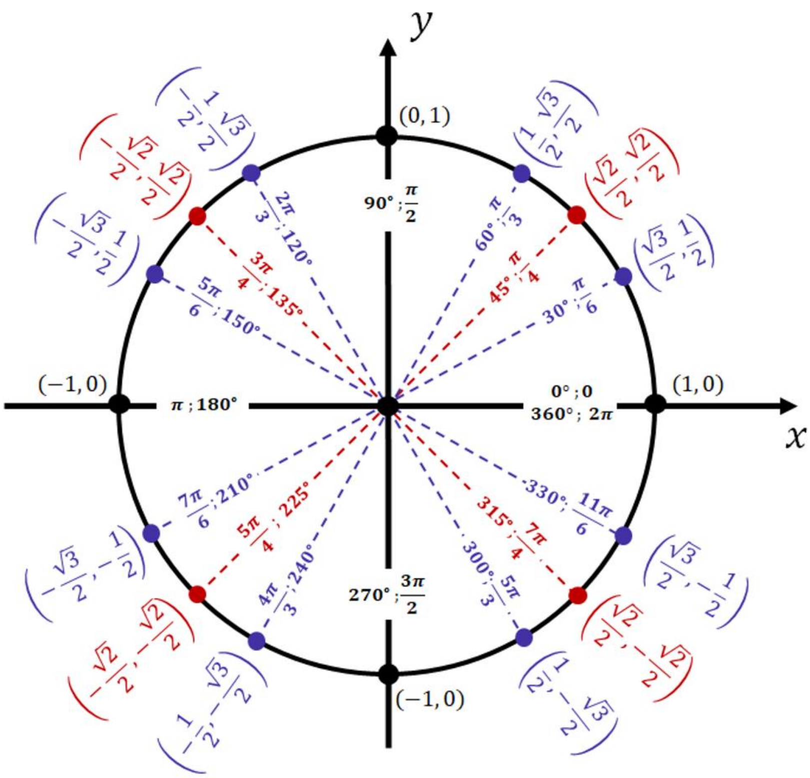
Para reduzir um **ângulo y** a um **ângulo x do primeiro quadrante**, devemos seguir a seguinte regra:

- Se y está no **segundo quadrante**, o ângulo x é tal que $y = 180° - x$;
- Se y está no **terceiro quadrante**, o ângulo x é tal que $y = x + 180°$; e
- Se y está no **quarto quadrante**, o ângulo x é tal que $y = 360° - x$.

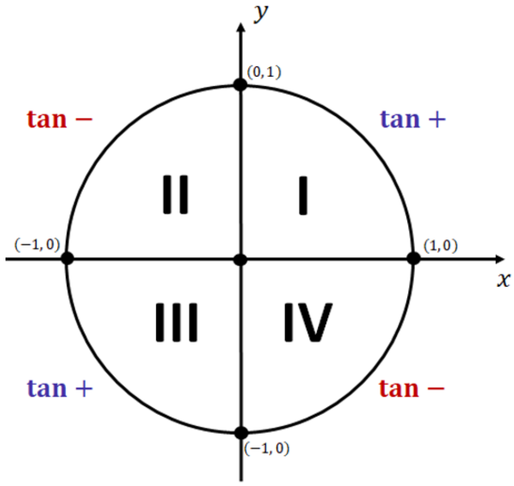


Método prático para obter o seno e cosseno de quaisquer ângulos

- Identificar o quadrante em que se encontra o ângulo y em questão;
- Reduzir o ângulo y ao primeiro quadrante, obtendo o ângulo x;
- Obter o seno e o cosseno do ângulo x do primeiro quadrante; e
- Atribuir os sinais para o **seno** e o **cosseno** de acordo com o quadrante em que se encontra o ângulo y original.



Tangente no ciclo trigonométrico



A tangente de um ângulo y qualquer também pode ser obtida por meio da redução ao primeiro quadrante.

- Identificar o quadrante em que se encontra o ângulo y em questão;
- Reduzir o ângulo y ao primeiro quadrante, obtendo o ângulo x;
- Obter a tangente do ângulo x do primeiro quadrante; e
- Atribuir o sinal para a **tangente** de acordo com o quadrante em que se encontra o ângulo y original.

Cotangente, secante e cossecante

$$cotg\ \theta = \frac{1}{\tan\theta}\ ;\ cotg\ \theta = \frac{\cos\theta}{sen\ \theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$cossec\ \theta = \frac{1}{sen\ \theta}$$

Trigonometria e geometria plana

Lei dos Cossenos

A **Lei dos Cossenos** nos permite **obter qualquer um dos lados do triângulo** a partir do conhecimento de dois lados e do ângulo entre esses dois lados. Temos que:

$$\boldsymbol{a^2} = b^2 + c^2 - 2bc\ \boldsymbol{\cos\hat{A}}$$
$$\boldsymbol{b^2} = a^2 + c^2 - 2ac\ \boldsymbol{\cos\hat{B}}$$
$$\boldsymbol{c^2} = a^2 + b - 2ab\ \boldsymbol{\cos\hat{C}}$$

Lei dos Senos

A **Lei dos Senos** nos diz que **a razão** entre o comprimento de um lado e o seno do ângulo oposto a ele é **igual para todos os lados**:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{sen\ \boldsymbol{\hat{A}}} = \frac{\boldsymbol{b}}{sen\ \boldsymbol{\hat{B}}} = \frac{\boldsymbol{c}}{sen\ \boldsymbol{\hat{C}}}$$

Área do paralelogramo e do triângulo

$$A_{paralelogramo} = a.b.sen\ \alpha$$
$$A_{triângulo} = \frac{1}{2}a.b.sen\ \alpha$$

Identidades

Identidades da cofunção

$$sen\,\theta = \cos(90° - \theta)$$
$$\cos\theta = sen\,(90° - \theta)$$
$$\tan\theta = cotg\,(90° - \theta)$$
$$cotg\,\theta = \tan(90° - \theta)$$

Se a soma de dois ângulos for igual a 90º, o **seno** de um ângulo é igual ao **cosseno** do outro, **e vice-versa**.

Identidades par/ímpar

$$sen\,(-\theta) = -sen\,\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

Identidades pitagóricas

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$tan^2\,\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$cot^2\,\theta + 1 = cossec^2\,\theta$$

Identidades da soma e da subtração

$$sen\,(a+b) = sen\,a\cos b + sen\,b\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - sen\,a\,sen\,b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$

$$sen\,(a-b) = sen\,a\cos b - sen\,b\cos a$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + sen\,a\,sen\,b$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

Identidades do arco duplo

$$sen\,2\theta = 2sen\,\theta\cos\theta$$
$$cos\,2\theta = \cos^2\theta - sen^2\theta$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$cos\,2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$cos\,2\theta = 1 - 2\,sen^2\theta$$

Identidades do arco metade

$$\text{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \qquad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

Transformação da soma em produto

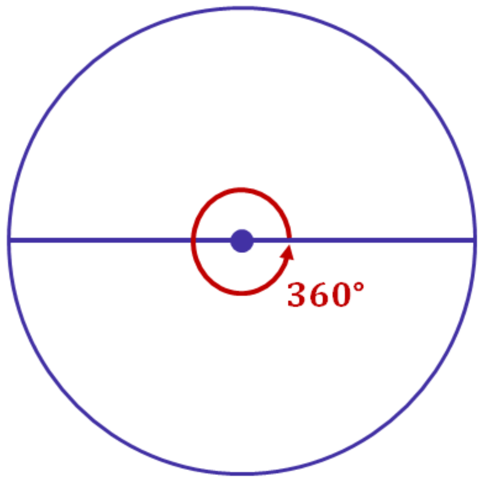
$$sen\,A + sen\,B = 2sen\,\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$sen\,A - sen\,B = 2sen\,\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A - \cos B = -2sen\,\left(\frac{A+B}{2}\right)sen\,\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Ângulos

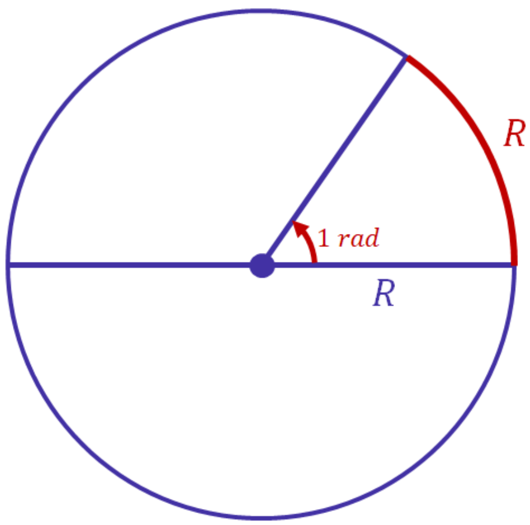
Antes de começarmos a matéria de trigonometria propriamente dita, vamos fazer uma breve revisão sobre ângulos.

No dia a dia, é muito comum medirmos ângulos em graus. Por razões históricas, recebemos como herança dos babilônios o fato de **1°** (**1 grau**) **corresponder a $\frac{1}{360}$ do ângulo referente a uma circunferência**.

Em outras palavras, os babilônios dividiram a circunferência em 360 partes e definiram que um grau corresponde a uma dessas partes.



Atualmente, o **Sistema Internacional de Unidades** (**SI**) adota o **radiano** (**rad**) como medida de ângulo. Para entender esse conceito, considere uma circunferência de raio R e que **uma pessoa percorreu uma distância R ao longo dessa circunferência**.



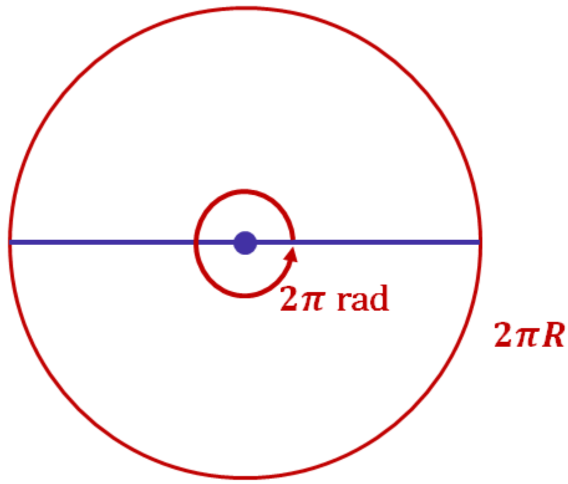
Por definição, **ângulo correspondente** à **distância R percorrida pela pessoa** corresponde a **1 radiano**.

Em outras palavras, **1 radiano é o ângulo correspondente ao arco de comprimento R** de uma circunferência de raio R que, no exemplo, foi percorrido por uma pessoa.

Professor, e se a pessoa percorrer a circunferência toda, qual vai ser o ângulo em radianos?

Excelente pergunta caro aluno! Você deve se lembrar de que o comprimento total de uma circunferência de raio R é $2\pi R$.

Como um arco de comprimento R corresponde a $1\ rad$, a circunferência toda, que tem comprimento de 2π vezes R, apresenta um ângulo de 2π vezes $1\ rad$, isto é, $2\pi\ rad$.



Muito mais importante do que conhecer a definição de radianos é saber **converter um ângulo de graus para radianos e vice-versa**.

Sabemos que o ângulo que corresponde à circunferência completa é $\mathbf{360°}$, que **equivale a $2\pi\ rad$**. Para obter transformar um ângulo de graus para radianos ou de radianos para graus, **basta realizar uma regra de três com esses valores**.

Por exemplo, como exprimir $60°$ em radianos?

Se x é a medida do ângulo em radianos, temos que $60°$ está para $360°$ assim como x está para $2\pi\ rad$. Logo:

$$\frac{60°}{360°} = \frac{x}{2\pi\ rad}$$

$$x = \frac{60}{360} \times 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6} \times 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

E para converter $\frac{2\pi}{3}\ rad$ para graus, como fazer?

Se x é a medida do ângulo em graus, temos que x está para $360°$ assim como $\frac{2\pi}{3}$ rad está para $2\pi\ rad$. Logo:

$$\frac{x}{360°} = \frac{\frac{2\pi}{3}\ rad}{2\pi\ rad}$$

$$x = 360° \times \frac{1}{3}$$

$$x = 120°$$

Genericamente, se um mesmo ângulo apresentar o valor θ_g em graus e o valor θ_r em radianos, temos que θ_g está para $360°$ assim como θ_r está para $2\pi\ rad$. Logo:

$$\boxed{\frac{\theta_g}{360°} = \frac{\theta_r}{2\pi\ rad}}$$

(PM AM/2011) Ao mostrar um projeto para um amigo, um arquiteto diz: "Este arco terá cinco pi sobre seis radianos". O amigo entendeu que o arquiteto se referiu a $(5\pi)/6\ rad$, converteu para graus e obteve:

a) $140°$;

b) $150°$;

c) $160°$;

d) $170°$.

Comentários:

Se um mesmo ângulo apresentar o valor θ_g em graus e o valor θ_r em radianos, temos que θ_g está para $360°$ assim como θ_r está para $2\pi\ rad$. Logo:

$$\frac{\theta_g}{360°} = \frac{\theta_r}{2\pi\ rad}$$

$$\theta_g = 360° \times \frac{\frac{5\pi}{6} rad}{2\pi\ rad}$$

$$= 360 \times \frac{5}{12}$$

$$= 30° \times 5$$

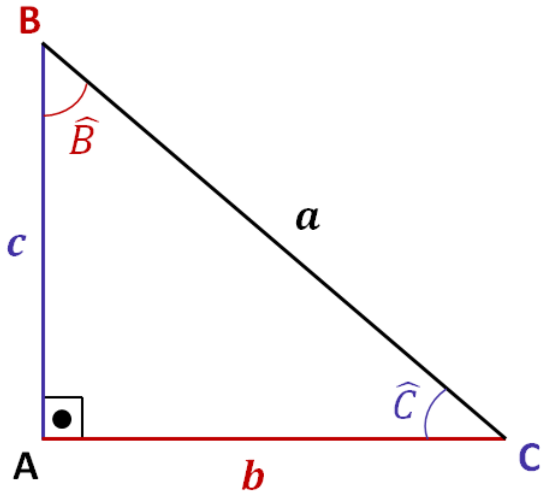
$$= 150°$$

Gabarito: Letra B.

Cumpre destacar que **o radiano é um número adimensional**, **sendo a notação "rad" pouco utilizada**. Em termos práticos, isso significa que, **ao dizer que um ângulo mede 2**, **por exemplo**, **entende-se que o ângulo em questão é 2 rad**. Da mesma forma, um ângulo que mede $\frac{\pi}{2}$ é um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ rad .

Razões trigonométricas em um triângulo retângulo

Considere um triângulo retângulo ABC com um ângulo reto (de 90°) em A. Considere também que o comprimento dos lados opostos aos vértices A, B e C são, respectivamente, a, b e c.



Veja também que chamamos de $\hat{B}$ o ângulo do vértice em B e de $\hat{C}$ o ângulo de vértice C.

Da geometria plana, sabe-se que o lado oposto ao ângulo reto, $\boldsymbol{a}$, é denominado **hipotenusa**. Além disso, os lados **$\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são os catetos** do triângulo retângulo.

Seno de um ângulo

Para os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo retângulo, denominamos **seno do ângulo** **a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa**.

$$\text{sen (ângulo)} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$$

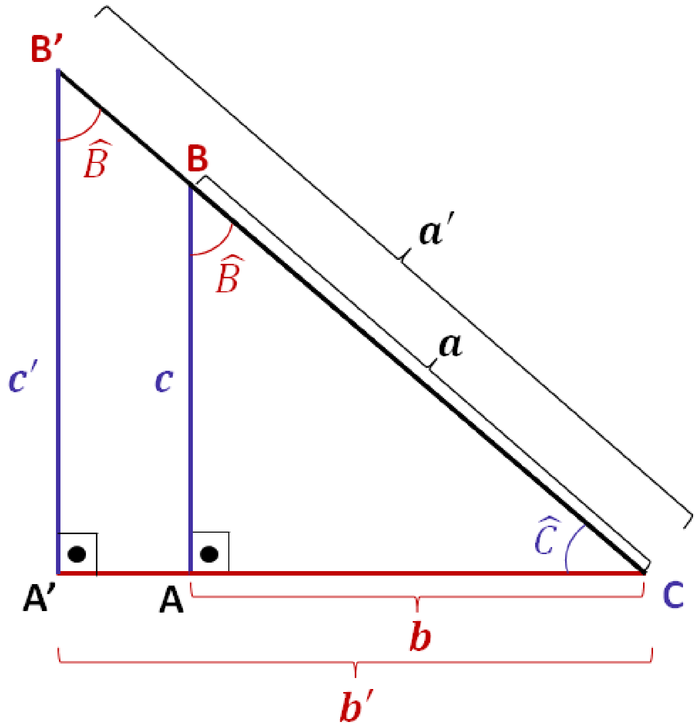
Portanto, para o triângulo que desenhamos, temos:

$$sen\ \widehat{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{b}}{a}$$

$$sen\ \widehat{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{c}}{a}$$

Você deve saber que **o seno de um ângulo é uma <u>propriedade do ângulo</u> em questão**. Em outras palavras, **uma vez determinado o ângulo, o valor da razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa é uma constante**.

Por exemplo, suponha que o triângulo ABC seja "esticado" para o ângulo $A'B'C$, conforme mostrado na figura a seguir.



No triângulo $A'B'C$, temos que o seno do ângulo $\hat{C}$ é dado por:

$$sen\,\widehat{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{c'}}{a'}$$

Da geometria plana, sabemos que os triângulos ABC e $A'B'C$ são semelhantes e, portanto:

$$\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}$$

Logo, temos:

$$sen\,\widehat{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{c}}{a}$$

Note que chegamos ao mesmo valor obtido para o $sen\,\hat{C}$ calculado no triângulo ABC original. Isso ocorre por que, **uma vez determinado o ângulo $\widehat{C}$, o valor da razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa é uma constante**.

(CM Araraquara/2016) Num triângulo ABC retângulo em A, sabe-se que os catetos medem 10 cm e 24 cm e que o ângulo B é maior que o ângulo C. Desse modo, o seno do ângulo B é igual a:

a) $\frac{5}{13}$

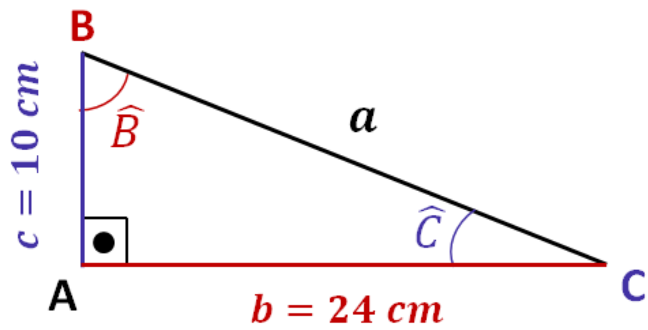
b) $\frac{12}{13}$

c) $\frac{5}{12}$

d) $\frac{10}{13}$

Comentários:

Como o ângulo $\hat{B}$ é maior do que o ângulo $\hat{C}$, o cateto oposto ao vértice B é maior do que o cateto oposto ao vértice C. Logo, $b = 24cm$ e $c = 10cm$.



Pelo **Teorema de Pitágoras**, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 10^2 + 24^2$$

$$a^2 = 676$$

$$a = 26$$

O **seno do ângulo B** é igual a:

$$\text{sen}\ \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto ao } \hat{B}}{\text{hipotenusa}}$$

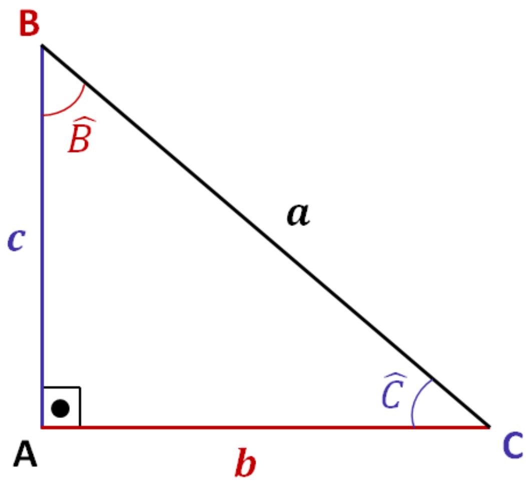
$$\text{sen}\ \hat{B} = \frac{24}{26}$$

$$\text{sen}\ \hat{B} = \frac{12}{13}$$

Gabarito: Letra B.

Cosseno de um ângulo

Vejamos novamente um triângulo retângulo ABC com um ângulo reto em A.



Para os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo retângulo, denominamos **cosseno do ângulo** **a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa**.

$$\cos\,(\text{ângulo}) = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$$

Professor, o que é um cateto adjacente a um determinado ângulo?

Excelente pergunta, caro aluno! Você deve se lembrar de que em um triângulo retângulo existem apenas dois catetos. O **cateto adjacente** a um determinado ângulo é aquele cateto que não é o oposto a esse ângulo! **É aquele cateto que está "do lado" do ângulo**.

Portanto, para o triângulo que desenhamos, temos:

$$\cos \hat{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{a}$$

$$\cos \hat{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{b}}{a}$$

O cosseno de um ângulo também é uma propriedade do ângulo em questão. Em outras palavras, **uma vez determinado o ângulo, o valor da razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa é uma constante**.

(SEDUC MT/2021) Em um triângulo retângulo, o cosseno do ângulo β vale $15/23$. Se o cateto adjacente ao ângulo β mede $45\ mm$, a medida da hipotenusa, em mm, desse triângulo é:

a) 38

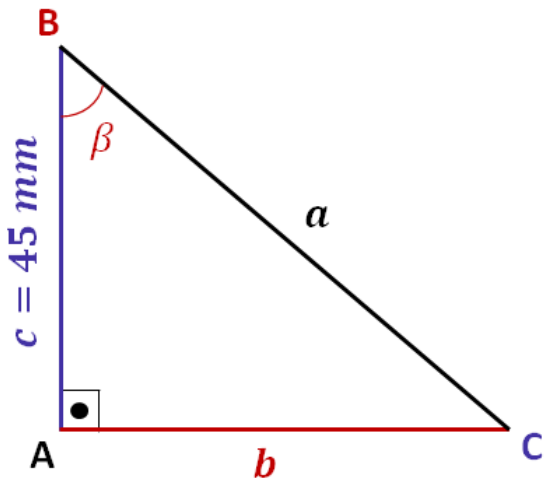
b) 53

c) 69

d) 76

Comentários:

Ao desenhar um triângulo retângulo e determinar uma posição qualquer para o ângulo β, o cateto adjacente ao ângulo β é aquele que está "do lado" do ângulo.



Sendo a a hipotenusa do triângulo retângulo, temos:

$$\cos\beta = \frac{c}{a}$$

$$a = \frac{c}{\cos\beta}$$

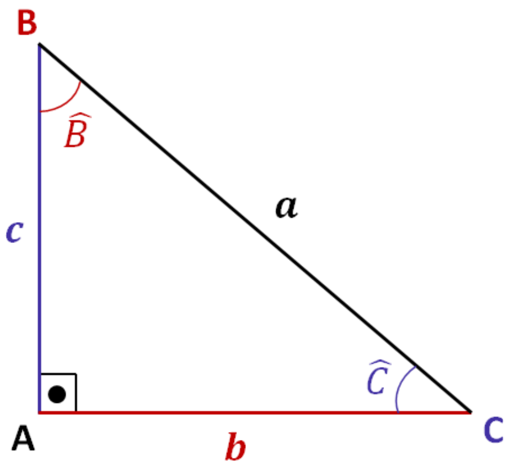
$$a = \frac{45}{15/23}$$

$$a = 69\ mm$$

Gabarito: Letra C.

Tangente de um ângulo

Vejamos novamente um triângulo retângulo ABC com um ângulo reto em A.



Para os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo retângulo, denominamos **tangente do ângulo** **a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a o cateto adjacente ao ângulo**.

$$\tan\,(\text{ângulo}) = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$$

Portanto, para o triângulo que desenhamos, temos:

$$tan\,\widehat{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$$

$$tan\,\widehat{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}$$

A tangente de um ângulo também é uma <u>propriedade do ângulo</u> em questão. Em outras palavras, **uma vez determinado o ângulo, o valor da razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo é uma constante**.

Perceba que o valor da tangente de um ângulo é a razão entre o seno do ângulo e o cosseno do ângulo.

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{\boldsymbol{B}}}{\cos\widehat{\boldsymbol{B}}} = \frac{\boldsymbol{b}/a}{\boldsymbol{c}/a} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} \rightarrow tan\,\widehat{\boldsymbol{B}} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{\boldsymbol{B}}}{\cos\widehat{\boldsymbol{B}}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{\boldsymbol{C}}}{\cos\widehat{\boldsymbol{C}}} = \frac{\boldsymbol{c}/a}{\boldsymbol{b}/a} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}} \rightarrow tan\,\widehat{\boldsymbol{C}} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{\boldsymbol{C}}}{\cos\widehat{\boldsymbol{C}}}$$

Portanto, para um ângulo θ qualquer, temos:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta}}$$

(Pref. Itapipoca/2011) Em um triângulo retângulo o menor cateto mede 6 cm e o cosseno do ângulo oposto a ele é $\frac{4}{5}$.

A tangente do maior ângulo agudo deste triângulo vale

a) $\frac{3}{4}$

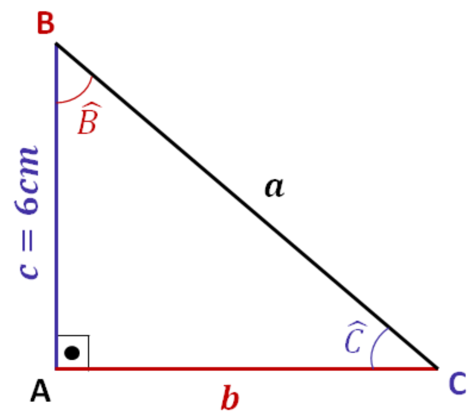
b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{5}{3}$

d) $\frac{4}{3}$

Comentários:

Vamos definir, arbitrariamente, que o menor cateto é oposto ao vértice C de um triângulo ABC.



O **maior ângulo agudo** é o ângulo que é **oposto ao maior cateto**, $\boldsymbol{b}$**.** Trata-se, portanto, do **ângulo** $\widehat{\boldsymbol{B}}$. A questão pergunta pela **tangente do ângulo** $\widehat{\boldsymbol{B}}$. Logo, devemos determinar:

$$\tan \widehat{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{b}}{6}$$

Assim, para resolver o problema, **precisamos determinar o cateto** $\boldsymbol{b}$.

O cosseno do ângulo oposto ao menor cateto é:

$$cos\ \widehat{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{b}}{a}$$

Note, portanto, que:

$$a = \frac{b}{cos\ \hat{C}}$$

$$= \frac{b}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}b$$

Pelo **Teorema de Pitágoras**, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\left(\frac{5}{4}b\right)^2 = b^2 + 6^2$$

$$\frac{25}{16}b^2 = b^2 + 36$$

$$\frac{25}{16}b^2 - b^2 = 36$$

$$\frac{9}{16}b^2 = 36$$

$$b^2 = 36.\frac{16}{9}$$

$$b = \sqrt{36.\frac{16}{9}}$$

$$b = 6.\frac{4}{3}$$

$$b = 8$$

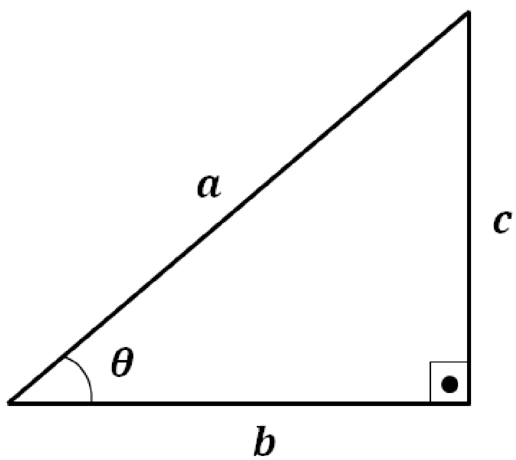
Logo, a tangente do maior ângulo agudo é:

$$\tan \hat{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{b}}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Gabarito: Letra D.

Catetos escritos em termos de um ângulo e da hipotenusa

Uma consequência interessante do que vimos até aqui é que, uma vez que temos **definida a hipotenusa $\boldsymbol{a}$** e um **ângulo $\boldsymbol{\theta}$** de um triângulo retângulo, os catetos são podem ser escritos como função desses dois parâmetros. Observe o triângulo retângulo abaixo

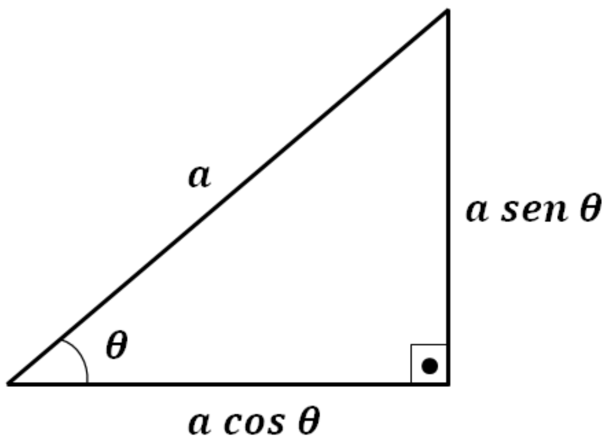


Note que:

$$sen\ \theta = \frac{c}{a} \rightarrow \boldsymbol{c = a.sen\ \theta}$$

$$cos\ \theta = \frac{b}{a} \rightarrow \boldsymbol{b = a.cos\ \theta}$$

Assim, ao visualizar um triângulo retângulo, você já pode ter em mente o seguinte:



Essa ideia será utilizada quando tratarmos do ciclo trigonométrico.

Razões trigonométricas notáveis

É necessário que você **leve para a sua prova** (**DECORE**) alguns valores notáveis para o **seno**, para o **cosseno** e para a **tangente** dos ângulos de $\mathbf{0°, 30°, 45°, 60°}$ e $\mathbf{90°}$.

Esses valores são ditos notáveis justamente porque são passíveis de dedução por meio de conhecimentos básicos de geometria plana.

ÂNGULO θ (GRAUS ; RAD)	$0°\,;\,0$	$30°\,;\,\frac{\pi}{6}$	$45°\,;\,\frac{\pi}{4}$	$60°\,;\,\frac{\pi}{3}$	$90°\,;\,\frac{\pi}{2}$
$sen\ \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Não existe

A título de aprofundamento, vamos mostrar a **origem do seno e do cosseno** dos ângulos em questão. Obtidos os valores do seno e do cosseno, a tangente pode ser extraída por meio da seguinte relação já vista:

$$\tan\theta = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta}$$

Cumpre destacar que a tangente para o ângulo $\frac{\pi}{2}$ ou $90°$ não existe, pois, sendo o cosseno igual a zero, a tangente é dada pela razão de um número inteiro pelo número zero.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos a origem do **seno** e do **cosseno** para os ângulos de $\mathbf{0°}, \mathbf{30°}, \mathbf{45°}, \mathbf{60°}$ e $\mathbf{90°}$.

Ângulo $\boldsymbol{\theta = 45°}$

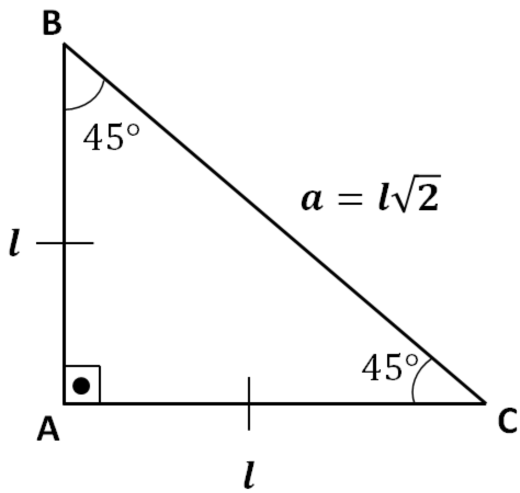
Considere um **triângulo retângulo isósceles ABC**, retângulo no vértice A, que apresenta dois catetos de lado l. Os ângulos $\boldsymbol{A\hat{B}C}$ e$\boldsymbol{A\hat{C}B}$, opostos a dois catetos de mesmo comprimento, são iguais.

Suponha que esses dois ângulos medem α. Como a soma dos ângulos em um triângulo qualquer é igual a 180°, temos:

$$90° + \alpha + \alpha = 180°$$

$$2\alpha = 90°$$

$$\alpha = 45°$$



Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que a hipotenusa a mede:

$$a^2 = l^2 + l^2$$

$$a^2 = 2l^2$$

$$a = l\sqrt{2}$$

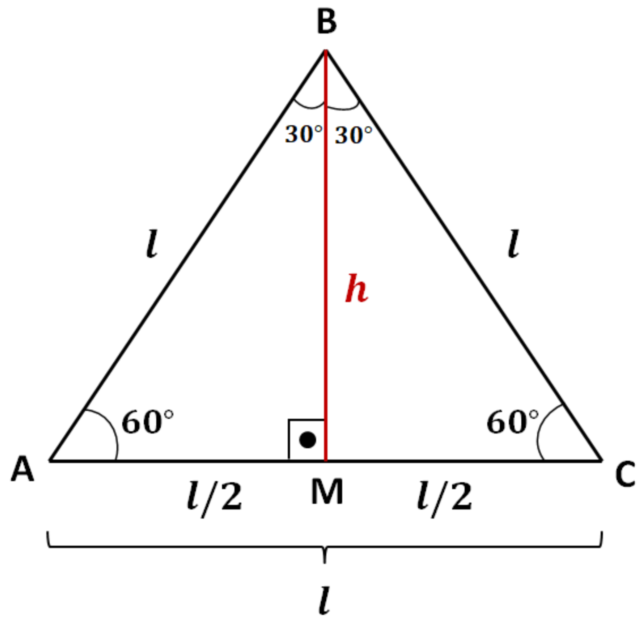
Tomando qualquer ângulo de 45° do triângulo em questão, temos:

$$sen\ 45° = \frac{l}{a} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \boldsymbol{sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$cos\ 45° = \frac{l}{a} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \boldsymbol{cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Ângulo $\theta = 30°$ e Ângulo $\theta = 60°$

Considere um **triângulo equilátero ABC** de lado l. Da geometria plana, sabe-se que todos os ângulos internos desse triângulo equilátero são de $60°$. Além disso, a altura desse triângulo é $\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{l\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}}$.



Note que a altura do triângulo equilátero **ABC** divide o ângulo $\boldsymbol{A\hat{B}C}$ ao meio, bem como essa altura divide o lado **AC** na metade.

Nesse momento, vamos nos concentrar no triângulo retângulo $\boldsymbol{ABM}$.

Observe o ângulo $\boldsymbol{A\hat{B}M = 30°}$. Temos:

$$sen\ 30° = \frac{l/2}{l} \rightarrow \mathbf{sen\ 30° = \frac{1}{2}}$$

$$cos\ 30° = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \rightarrow \mathbf{cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

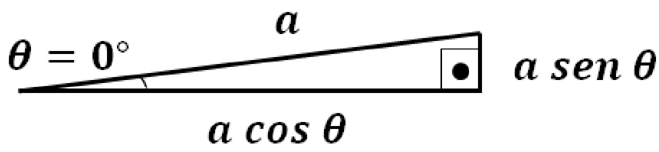
Observe agora o ângulo $\boldsymbol{B\hat{A}M = 60°}$. Temos:

$$sen\ 60° = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \rightarrow \mathbf{sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$cos\ 60° = \frac{l/2}{l} \rightarrow \mathbf{cos\ 60° = \frac{1}{2}}$$

Ângulo $\theta = 0°$

Para um ângulo $\theta = 0°$, pode-se entender que temos um triângulo retângulo degenerado, que apresenta o **cateto oposto a θ igual a zero** e o **cateto adjacente a θ igual à hipotenusa**.



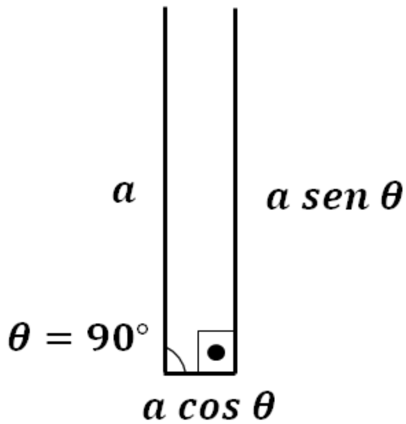
Nesse caso:

$$a \operatorname{sen} 0° = 0 \rightarrow \mathbf{sen\ 0° = 0}$$

$$a \cos 0° = a \rightarrow \mathbf{cos\ 0° = 1}$$

Ângulo $\theta = 90°$

Para um ângulo $\theta = 90°$, pode-se entender, "forçando a barra", que temos um "triângulo" retângulo que apresenta o **cateto oposto a θ igual à hipotenusa** e o **cateto adjacente a θ igual zero**.



Nesse caso:

$$a \operatorname{sen} 90° = a \rightarrow \mathbf{sen\ 90° = 1}$$

$$a \cos 90° = 0 \rightarrow \mathbf{cos\ 90° = 0}$$

Ciclo trigonométrico

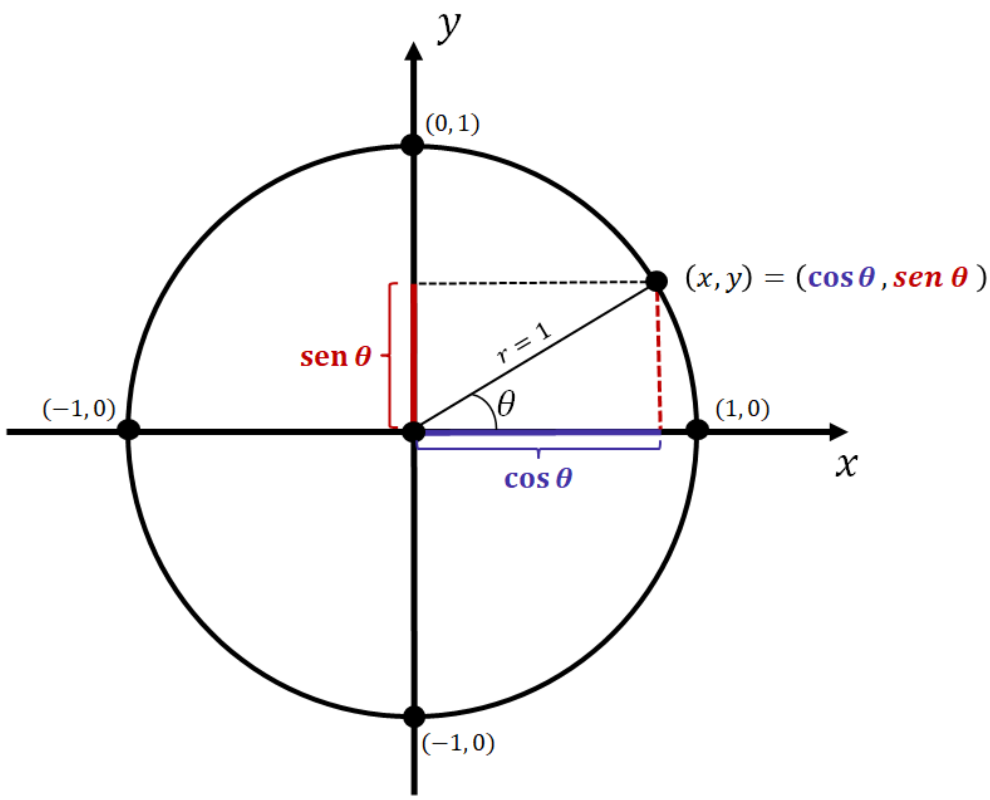
Até o momento, estudamos algumas **razões trigonométricas** (**seno**, **cosseno** e **tangente**) para **ângulos entre $0°$ e $90°$**, isto é, **para ângulos entre 0 e $\frac{\pi}{2}$**.

A partir de agora, por meio do **ciclo trigonométrico**, vamos **estender o conceito para quaisquer ângulos**.

Conceitos básicos

O **ciclo trigonométrico** (ou circulo trigonométrico) é um **círculo de raio igual a 1** com centro na origem do plano cartesiano (plano xy).

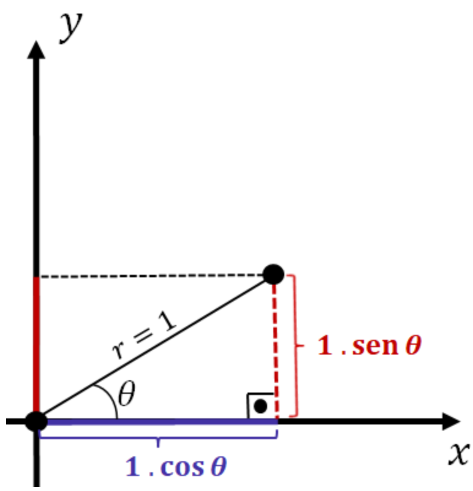
A partir desse círculo, podemos desenhar um raio que faz um ângulo θ com o eixo x.



O encontro desse raio com o círculo é um ponto (x, y), em que **x representa $\cos\theta$** e **y representa $sen\ \theta$**.

Em outras palavras, podemos dizer que, **uma vez traçado um raio que faz um ângulo θ com o eixo x**, **a projeção do raio no eixo x é o cosseno de θ** e **a projeção do raio no eixo y é o seno de θ**.

O concurseiro mais atento deve ter percebido que o fato de $\cos\theta$ ser a projeção no eixo x e o fato de $sen\ \theta$ ser a projeção no eixo y decorre justamente do fato de que **temos um triângulo retângulo com hipotenusa igual a 1**. Observe:



Vale destacar que o **ciclo trigonométrico é um círculo orientado**, de modo que **o sentido positivo** dos ângulos **é o sentido anti-horário**. Você entenderá com mais detalhes essa ideia de orientação nos exemplos do tópico a seguir.

TOME NOTA!

O **ciclo trigonométrico** (ou circulo trigonométrico) é um **círculo de raio igual a 1** com centro na origem do plano cartesiano (plano xy).

Uma vez traçado um raio que faz um ângulo θ com o eixo x, a projeção do raio no eixo x é o cosseno de θ e **a projeção do raio no eixo y é o seno de θ**.

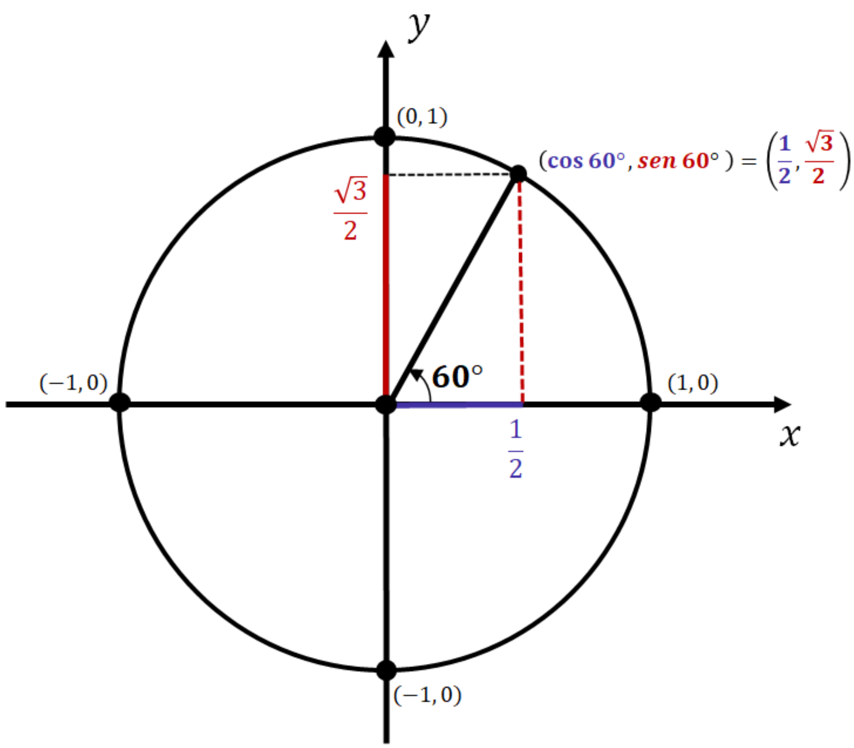
O **ciclo trigonométrico é um círculo orientado**, de modo que **o sentido positivo** dos ângulos **é o sentido anti-horário**.

Seno e cosseno para quaisquer ângulos

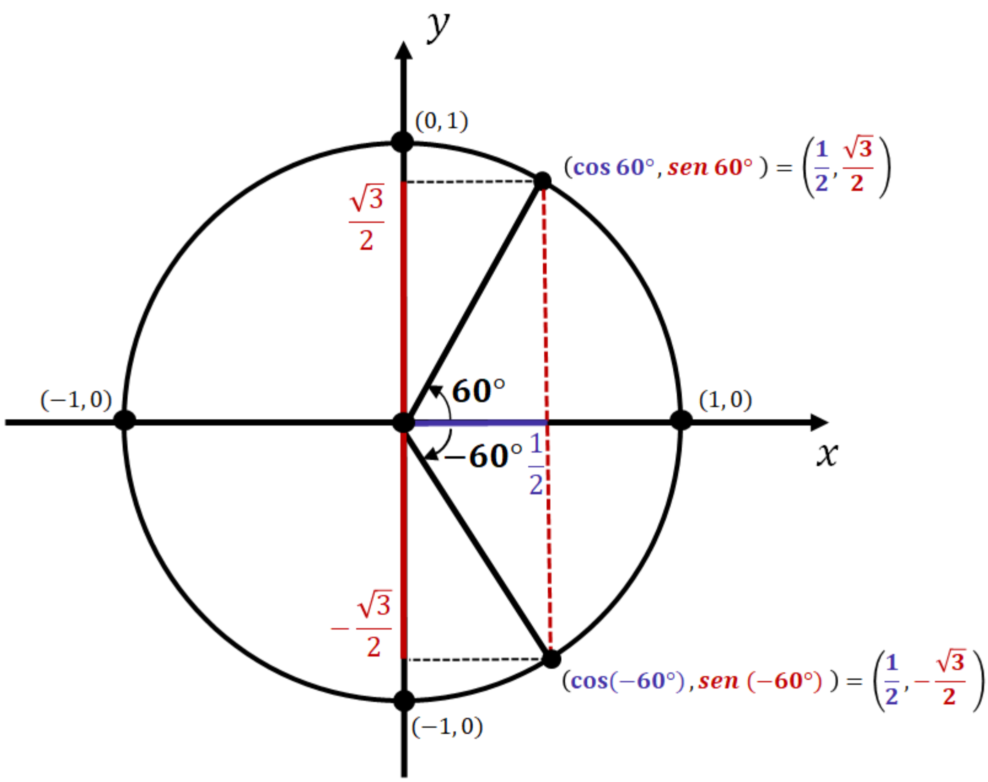
Nesse momento, vamos expandir o conceito de **seno** e **cosseno** **para ângulos fora do intervalo de 0 a $90°$**, isto é, **para ângulos fora do intervalo de 0 a $\frac{\pi}{2}$.**

Inicialmente, vejamos a representação do ângulo $\theta = +60°$.

Sabemos que $60°$ é um ângulo notável, de modo que $\cos 60° = \frac{1}{2}$ e $sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como o **ângulo é positivo**, devemos avançar $60°$ no **sentido anti-horário**.



Vejamos, agora, a representação do ângulo $\boldsymbol{\theta = -60°}$. Como o ângulo é negativo, devemos **avançar 60° no sentido horário**.



Como a **projeção no eixo x é o cosseno** do ângulo e a **projeção do eixo y é o seno do ângulo**, temos:

$$\cos(-60°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$$

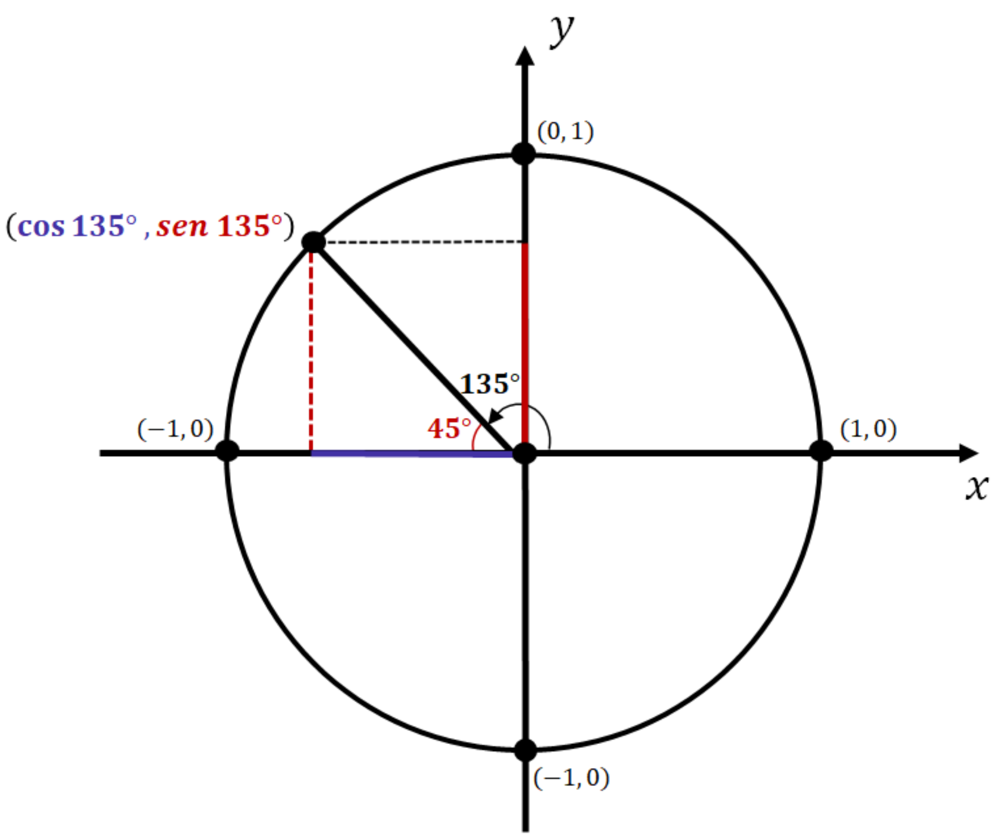
$$sen\,(-60°) = -\,sen\,(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Agora faço uma pergunta para você: qual é o seno e o cosseno de $135°$?

Eu sei lá, professor!

Vamos com calma, caro aluno! A primeira coisa que devemos fazer é representar o ângulo no ciclo trigonométrico. Uma vez que ele está representado, a **projeção no eixo x é o cosseno do ângulo** e a **projeção do eixo y é o seno do ângulo**.

Vamos desenhar esse ângulo no ciclo trigonométrico:



Veja que o ângulo suplementar a $135°$ é:

$$180° - 135° = 45°$$

Sabemos que $45°$ é um ângulo notável, e que:

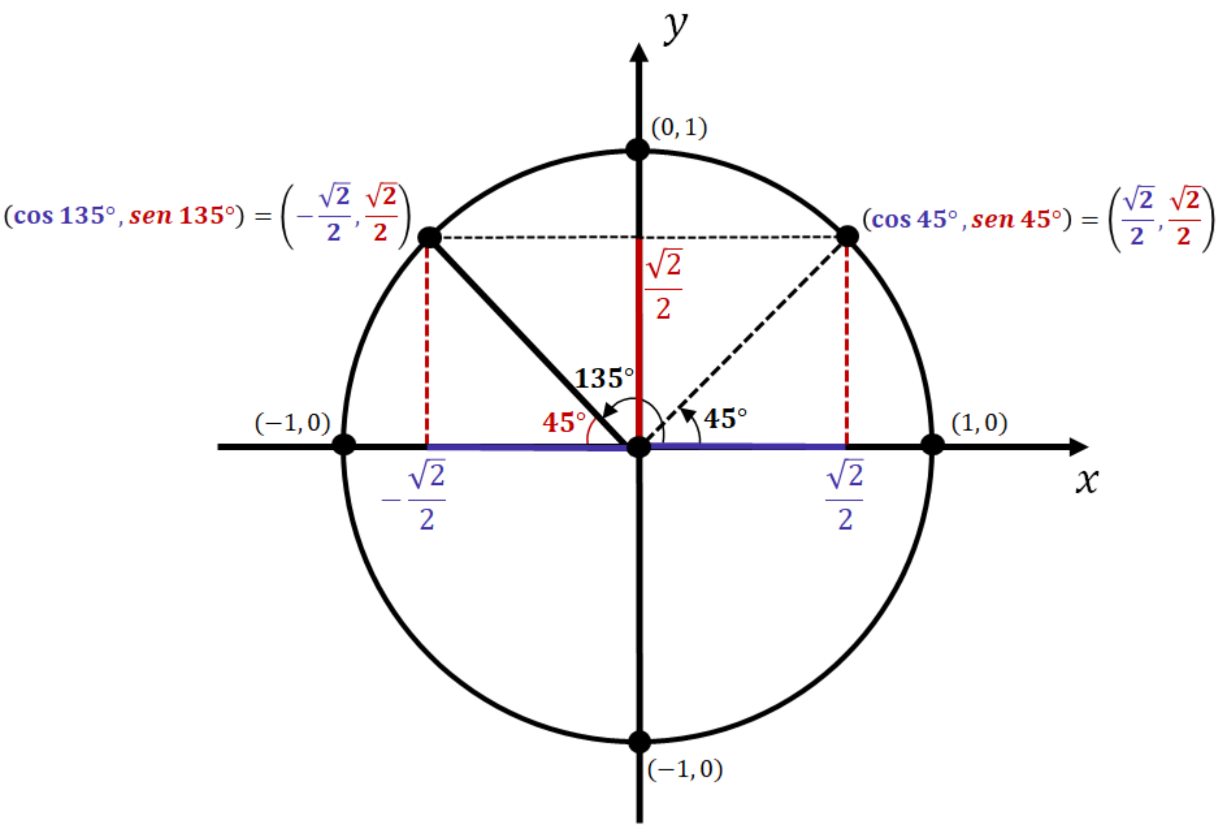
$$sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A partir da figura a seguir, percebe-se que:

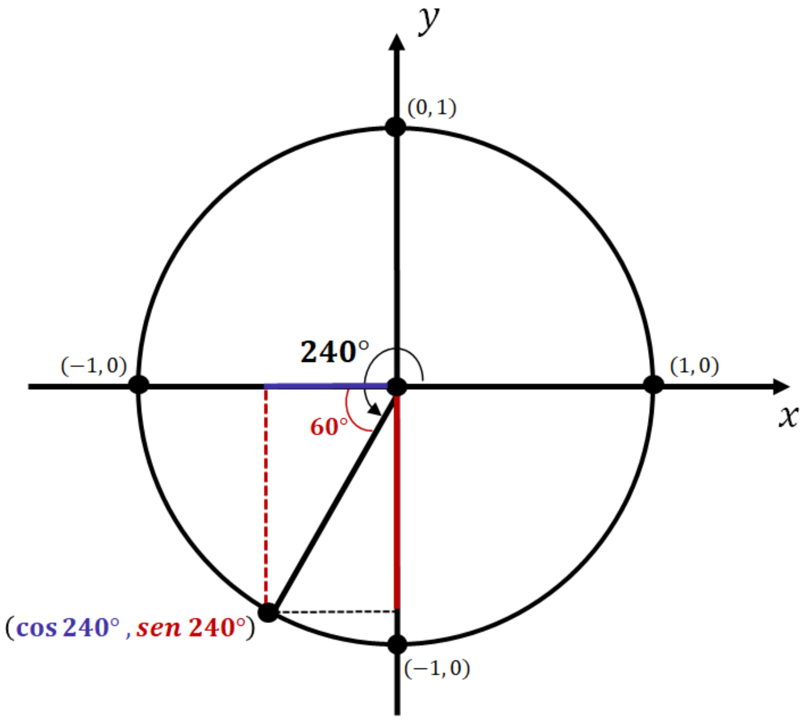
$$\boldsymbol{sen\ 135°} = sen\ 45° = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boldsymbol{\cos 135°} = -cos\ 45° = -\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$



Agora vamos determinar o seno e o cosseno de $240°$.

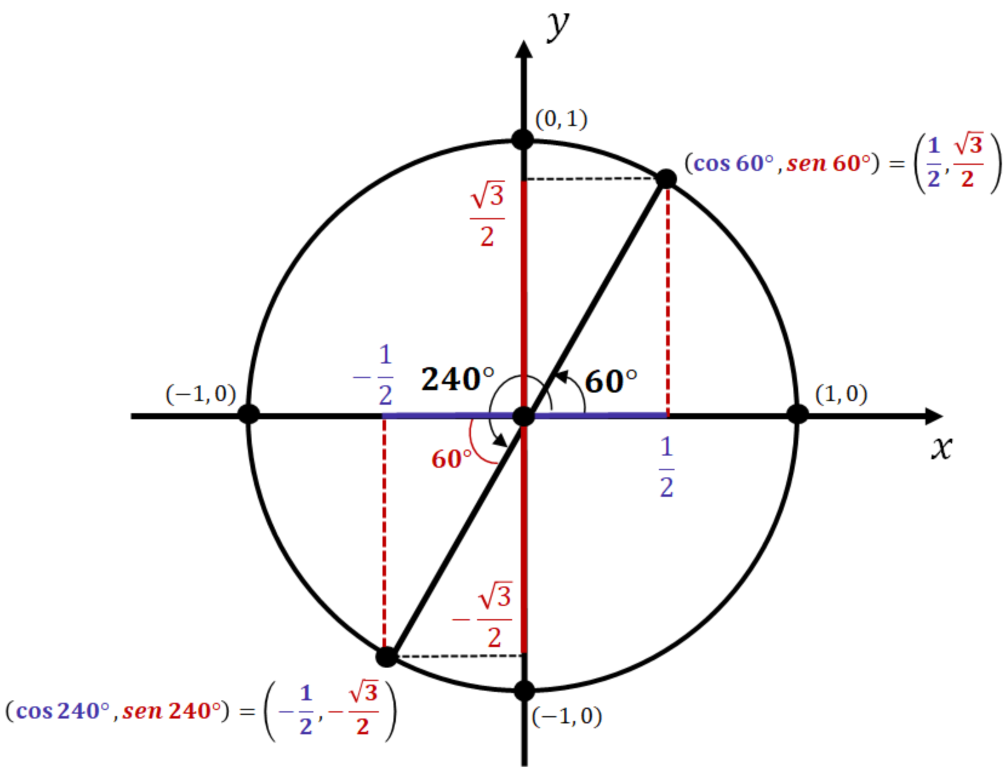
Novamente, a primeira coisa que devemos fazer é representar o ângulo no ciclo trigonométrico. Uma vez que ele está representado, a **projeção no eixo x é o cosseno** do ângulo e a **projeção do eixo y é o seno do ângulo**.



A partir da figura a seguir, podemos perceber que:

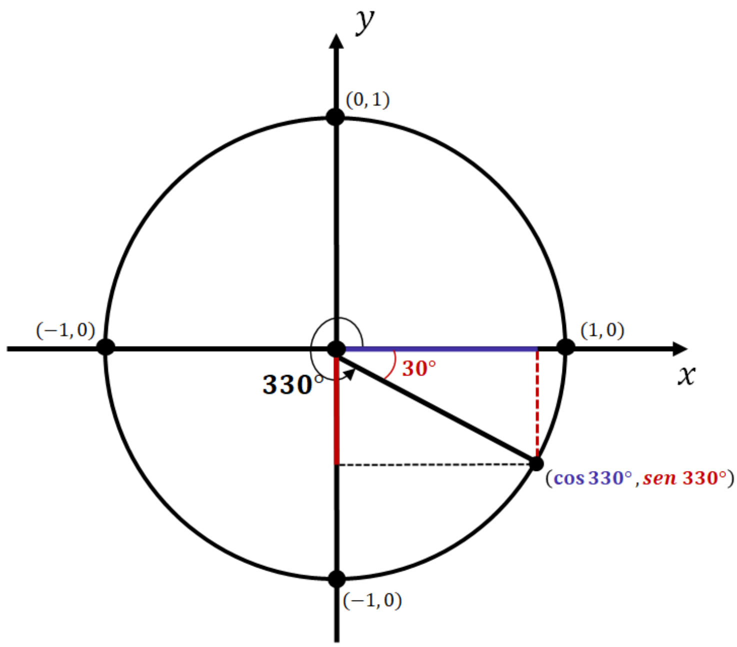
$$\boldsymbol{sen\ 240°} = -sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{cos\ 240°} = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$$



Vejamos agora o seno e o cosseno de $330°$.

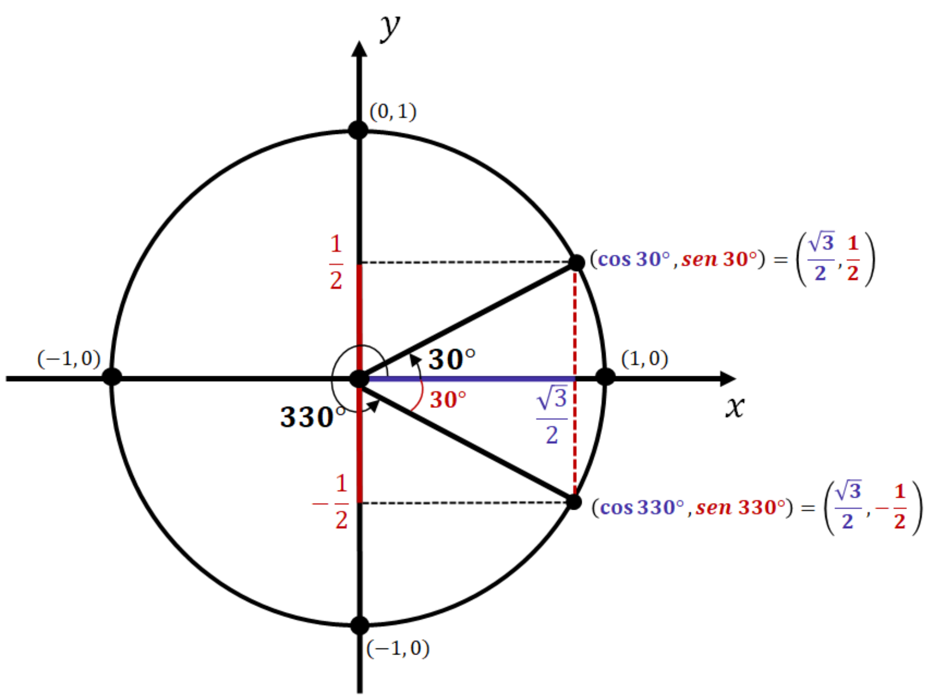
Como de costume, a primeira coisa que devemos fazer é representar o ângulo no ciclo trigonométrico. Uma vez que ele está representado, a **projeção no eixo x é o cosseno** do ângulo e a **projeção do eixo y é o seno do ângulo**.



A partir da figura a seguir, podemos perceber que:

$$\boldsymbol{sen\ 330°} = -sen\ 30° = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{cos\ 330°} = cos\ 30° = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$

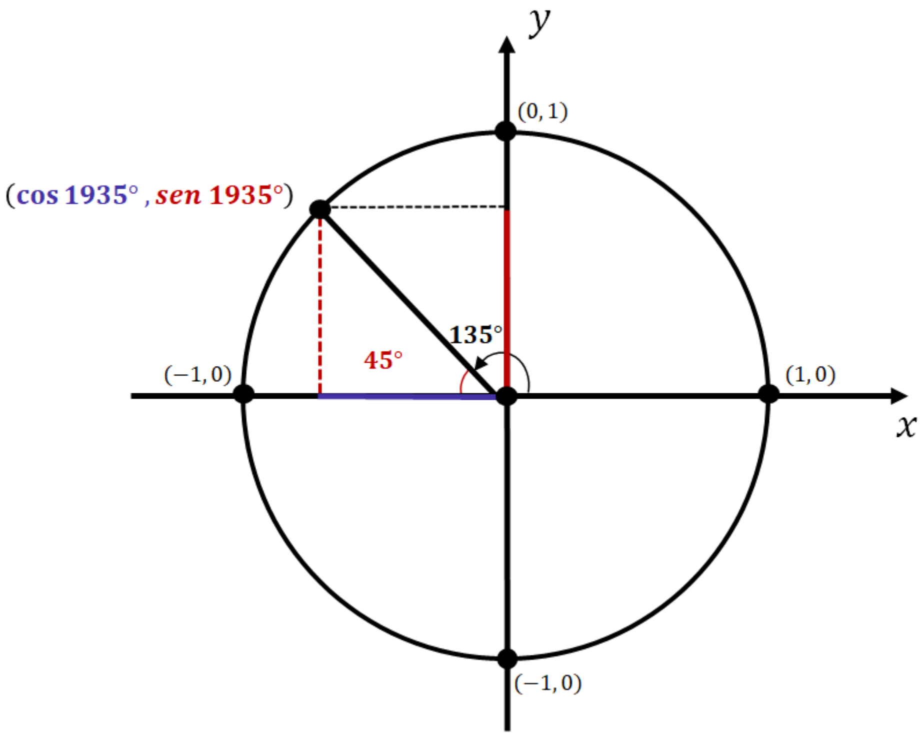


Professor, e se tivermos um ângulo maior do que $360°$*?*

Excelente pergunta, caro aluno! Nesse caso, devemos **desconsiderar as voltas completas**.

Por exemplo, vamos calcular o **seno** e o **cosseno** de $1935°$.

Note que, ao dividir $1935°$ por $360°$, obtemos **quociente 5** e **resto** $\mathbf{135°}$**.** Logo, $1935°$ corresponde a **5 voltas de** $\mathbf{360°}$ e **mais** $\mathbf{135°}$. Consequentemente, **a representação de** $\mathbf{1935°}$ **no ciclo trigonométrico é igual à representação do ângulo** $\mathbf{135°}$.



Já vimos que:

$$\boldsymbol{sen\ 135°} = sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{\cos 135°} = -cos\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo:

$$\boldsymbol{sen\ 1935°} = sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{\cos 1935°} = -cos\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

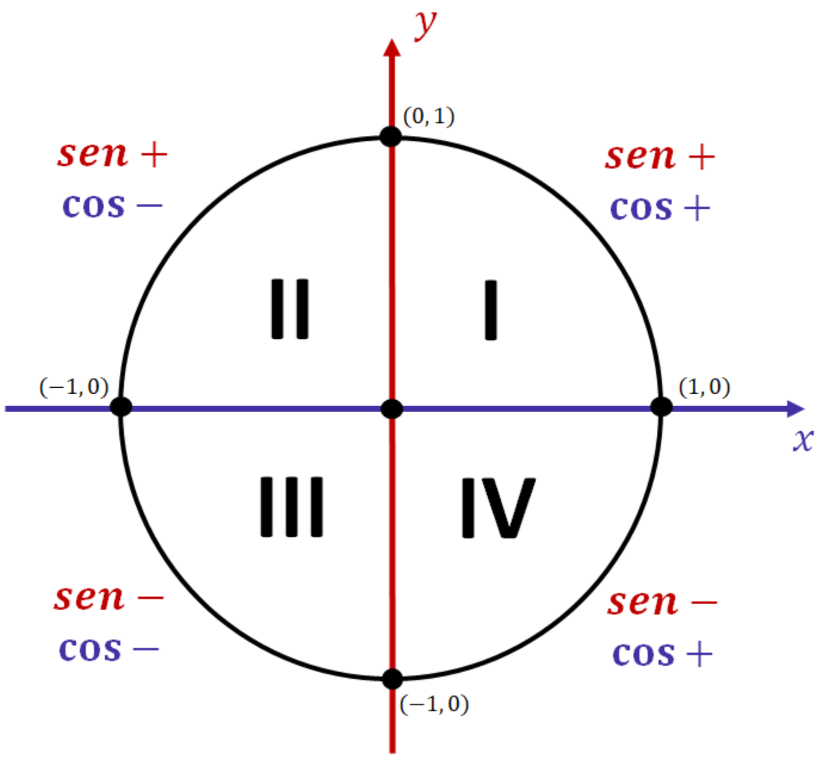
Em resumo, **para obter o seno e o cosseno de ângulos fora do intervalo de $0°$ a $90°$**, devemos encontrar um ângulo correspondente que esteja no intervalo de $0°$ a $90°$, **atentando-se sempre para o sinal dessas razões trigonométricas**.

Observe que podemos dividir o ciclo trigonométrico em quatro quadrantes:

- No **primeiro quadrante (I)** estão os ângulos entre $0°$ e $90°$;
- No **segundo quadrante (II)** estão os ângulos entre $90°$ e $180°$;
- No **terceiro quadrante (III)** estão os ângulos entre $180°$ e $270°$; e
- No **quarto quadrante (IV)** estão os ângulos entre $270°$ e $360°$.

Veja que:

- No **primeiro quadrante (I)**, temos y **positivo** e x **positivo**. Logo, temos o **seno positivo** e o **cosseno positivo**;
- No **segundo quadrante (II)**, temos y **positivo** e x **negativo**. Logo, temos o **seno positivo** e o **cosseno negativo**;
- No **terceiro quadrante (III)**, temos y **negativo** e x **negativo**. Logo, temos o **seno negativo** e o **cosseno negativo**; e
- No **quarto quadrante (IV)**, temos y **negativo** e x **positivo**. Logo, temos o **seno negativo** e o **cosseno positivo**.



Com os exemplos vistos até o momento, você já é capaz de obter o **seno** e o **cosseno** de ângulos fora do primeiro quadrante. O tópico seguinte formaliza a ideia que vimos nos exemplos até agora.

Antes de partir para o próximo tópico, vamos resolver um exercício.

(Pref. Araranguá/2016) Resolva, em $0 \leq x < \pi$, a equação $senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e assinale a alternativa que apresenta a soma das raízes da equação.

a) 3π

b) $\pi/3$

c) $2\frac{\pi}{3}$

d) 2π

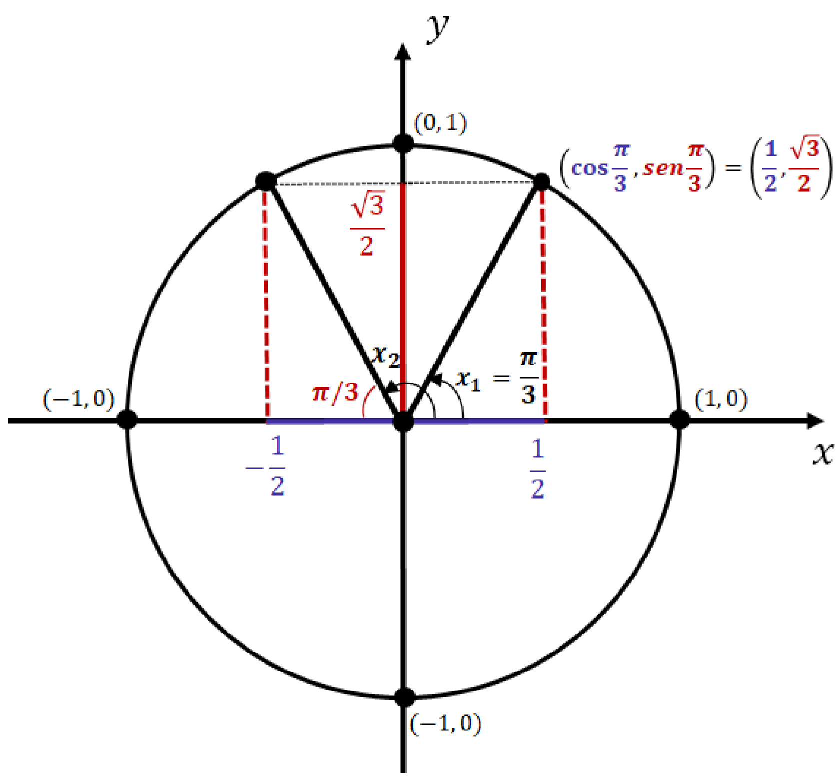
e) π

Comentários:

Para resolver a questão, **precisamos obter os ângulos x entre 0 e π** (entre $0°$ e $180°$) **tais que $sen\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$**.

Sabemos que **$60°$ corresponde a $\frac{\pi}{3}$** e, portanto, $sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, **$x_1 = \frac{\pi}{3}$ é uma solução**.

Desenhando o ciclo trigonométrico, identificamos uma **segunda solução x_2 entre 0 e π** que apresenta o **seno** igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Veja que:

$$x_2 + \frac{\pi}{3} = \pi$$

$$x_2 = \frac{2\pi}{3}$$

Logo, a soma das raízes da equação $senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$, com $0 \leq x < \pi$, é igual a:

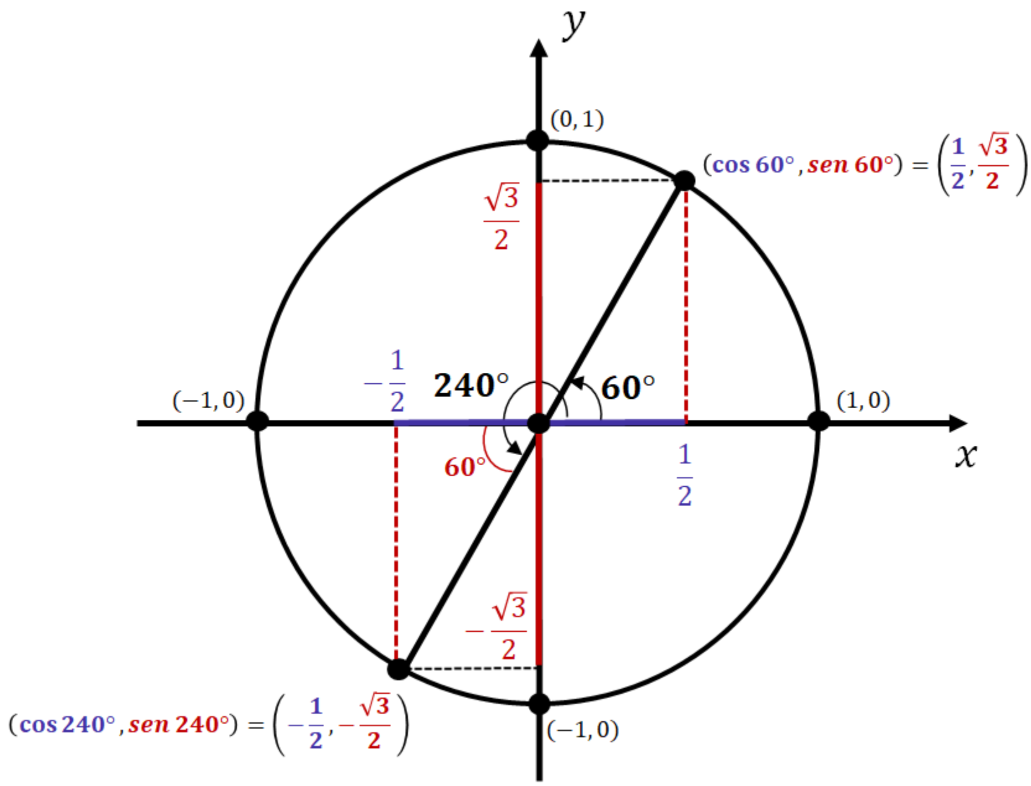
$$x_1 + x_2$$
$$= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$
$$= \pi$$

Gabarito: Letra E.

Redução ao primeiro quadrante

Ao nos depararmos com um ângulo que não está no primeiro quadrante, podemos **encontrar um ângulo correspondente no primeiro quadrante**, de modo que **esse ângulo correspondente apresenta**, **em módulo**, o **mesmo seno** e o **mesmo cosseno do ângulo original**.

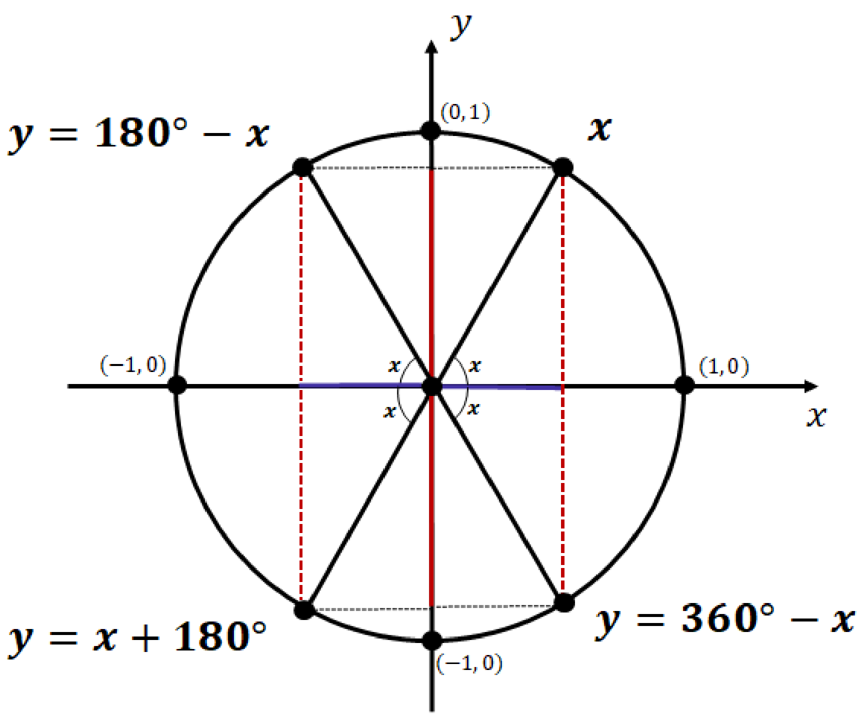
É justamente essa ideia que utilizamos nos exemplos anteriores. Por exemplo, para o ângulo $240°$, obtemos o ângulo $60°$ como o seu correspondente no primeiro quadrante. Note que **o ângulo de $60°$ apresenta**, **em módulo** (**sem considerar o sinal**), o **mesmo seno** e o **mesmo cosseno do ângulo $240°$**.



Para reduzir um **ângulo y** a um **ângulo x do primeiro quadrante**, devemos seguir a seguinte regra:

- Se y está no **segundo quadrante**, o ângulo x é tal que $y = 180° - x$;
- Se y está no **terceiro quadrante**, o ângulo x é tal que $y = x + 180°$; e
- Se y está no **quarto quadrante**, o ângulo x é tal que $y = 360° - x$.

A figura a seguir ilustra essa regra, mostrando a simetria apresentada no ciclo trigonométrico.



Cumpre destacar que, para ângulos **menores do que $0°$** ou para ângulos **maiores do que $360°$**, devemos primeiro **fazer com que o ângulo fique entre $0°$ e $360°$ desconsiderando as voltas completas para que**, **na sequência**, **façamos a redução ao primeiro quadrante utilizando a regra aprendida**.

Por exemplo, vamos reduzir o ângulo $1935°$ ao primeiro quadrante.

Vimos que, ao dividir $1935°$ por $360°$, obtemos **quociente 5** e **resto $135°$**. Logo, podemos **subtrair 5 voltas completas de $1935°$**, **obtendo $135°$**.

Como $\boldsymbol{y = 135°}$ está no **segundo quadrante**, o ângulo x do primeiro quadrante é tal que:

$$\boldsymbol{y = 180° - x}$$

$$135° = 180° - x$$

$$x = 180° - 135°$$

$$x = 45°$$

Portanto, a redução ao primeiro quadrante de $1935°$ é $45°$.

Por outro lado, considere o ângulo $-1935°$. Sabemos que a divisão por $360°$ nos dá quociente -5. **Ao somarmos 5 voltas completas** a $-1935°$, obtemos:

$$-1935° + 5 \,.\, 360° = -135°$$

Somando mais uma volta completa, temos:

$$-135° + 360° = 225°$$

Como $y = 225°$ está no **terceiro quadrante**, o ângulo x do primeiro quadrante é tal que:

$$\boldsymbol{y = x + 180°}$$

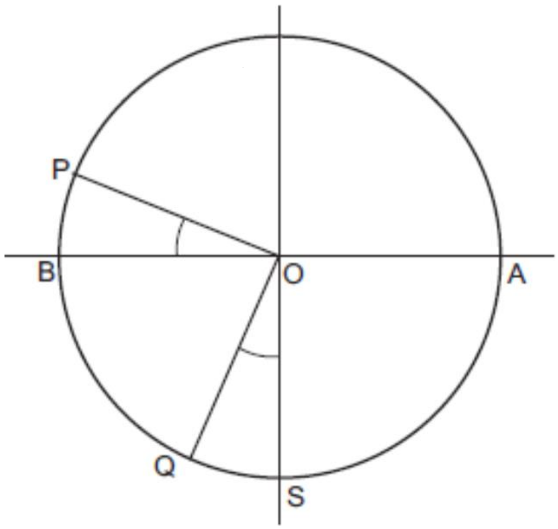
$$225° = x + 180°$$

$$x = 225° - 180°$$

$$x = 45°$$

Portanto, a redução ao primeiro quadrante de $-1935°$ é $45°$.

(PETROBRAS/2012)



No ciclo trigonométrico de centro O, representado na figura, os ângulos $P\hat{O}B$ e $Q\hat{O}S$ são congruentes, e o arco AP, tomado no sentido anti-horário, mede $164°$.

Reduzindo-se o arco AQ ao primeiro quadrante, o valor encontrado será igual a

a) 16°

b) 24°

c) 64°

d) 74°

e) 86°

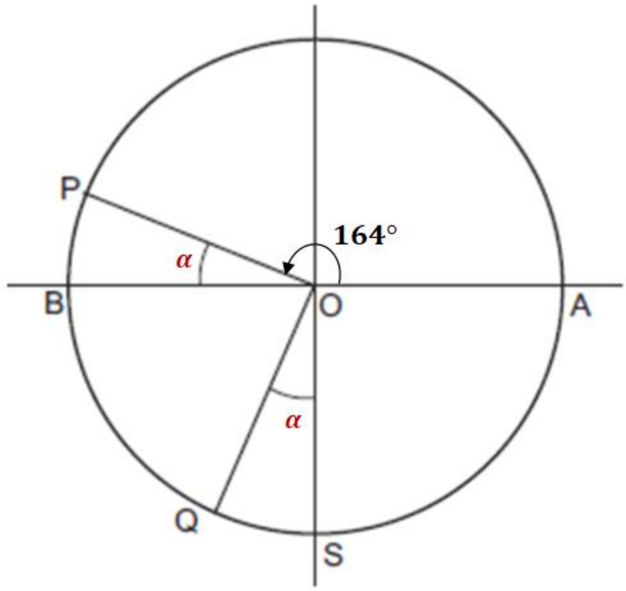
Comentários:

Vamos chamar os ângulos $P\hat{O}B$ e $Q\hat{O}S$ de α.

Sabemos que o arco AP mede $164°$. Em outras palavras, o ângulo $A\hat{O}P$ mede $164°$.

Na figura a seguir, observe que:

$$164° + \alpha = 180°$$



Portanto:

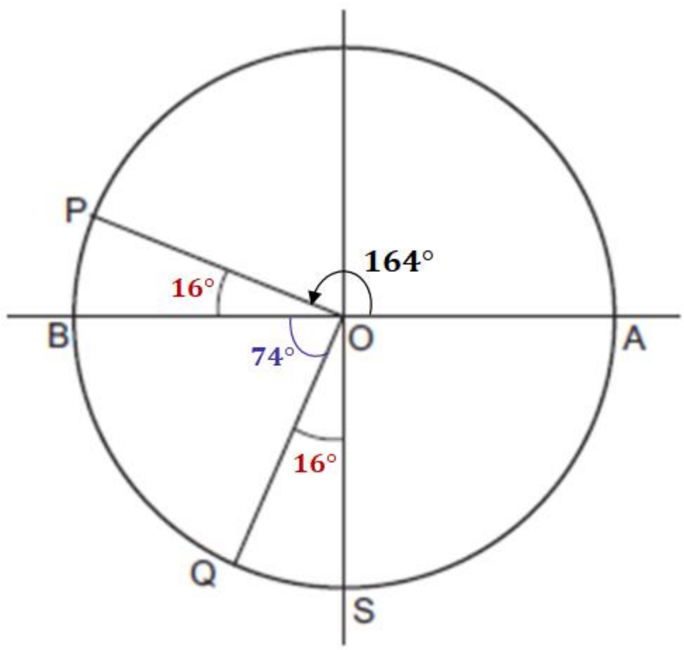
$$164° + \alpha = 180°$$

$$\boldsymbol{\alpha = 16°}$$

Observe agora o terceiro quadrante. Note que o ângulo $B\hat{O}Q$ somado ao ângulo $\boldsymbol{\alpha = 16°}$ corresponde a $90°$. Logo:

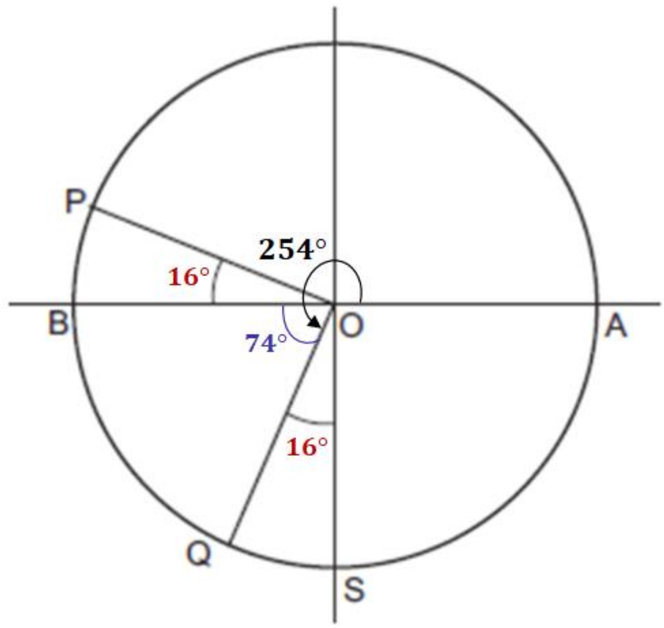
$$B\hat{O}Q + 16° = 90°$$

$$B\hat{O}Q = 74°$$



Portanto, o arco AQ (ângulo $A\hat{O}Q$) é dado por:

$$A\hat{O}P + P\hat{O}B + B\hat{O}Q$$
$$= 164° + 16° + 74°$$
$$= 254°$$

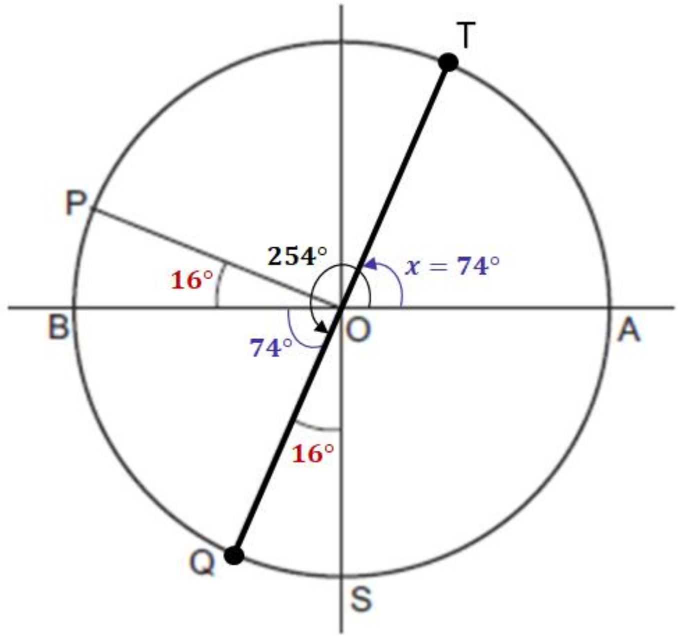


Devemos reduzir o ângulo $y = 254°$ ao ângulo x do primeiro quadrante. Como y está no terceiro quadrante, temos:

$$y = x + 180°$$
$$254° = x + 180°$$
$$x = 254° - 180°$$
$$x = 74°$$

O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Observe que a redução ao primeiro quadrante também poderia ser obtida observando que, na figura a seguir, os ângulos $B\hat{O}Q$ e $x = A\hat{O}T$ são iguais por serem opostos pelo vértice.



Gabarito: Letra D.

Método prático para obter o seno e cosseno de quaisquer ângulos

Agora que sabemos realizar a redução ao primeiro quadrante, temos um método prático para obter o **seno** e o **cosseno** de um **ângulo y fora do primeiro quadrante**. Basta seguir os seguintes passos:

- Identificar o quadrante em que se encontra o ângulo y em questão;
- Reduzir o ângulo y ao primeiro quadrante, obtendo o ângulo x;
- Obter o **seno** e o **cosseno** do ângulo x do primeiro quadrante; e
- Atribuir os sinais para o **seno** e o **cosseno** de acordo com o quadrante em que se encontra o ângulo y original.

Vejamos um exemplo.

Determine o seno e o cosseno de $330°$.

Identificar o quadrante em que se encontra o ângulo y em questão

O ângulo $y = 330°$ encontra-se no quarto quadrante (IV).

Reduzir o ângulo y ao primeiro quadrante, obtendo o ângulo x

Como $y = 330°$ está no quarto quadrante (IV), temos:

$$y = 360° - x$$

$$330° = 360° - x$$

$$x = 30°$$

Obter o seno e o cosseno do ângulo x do primeiro quadrante

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

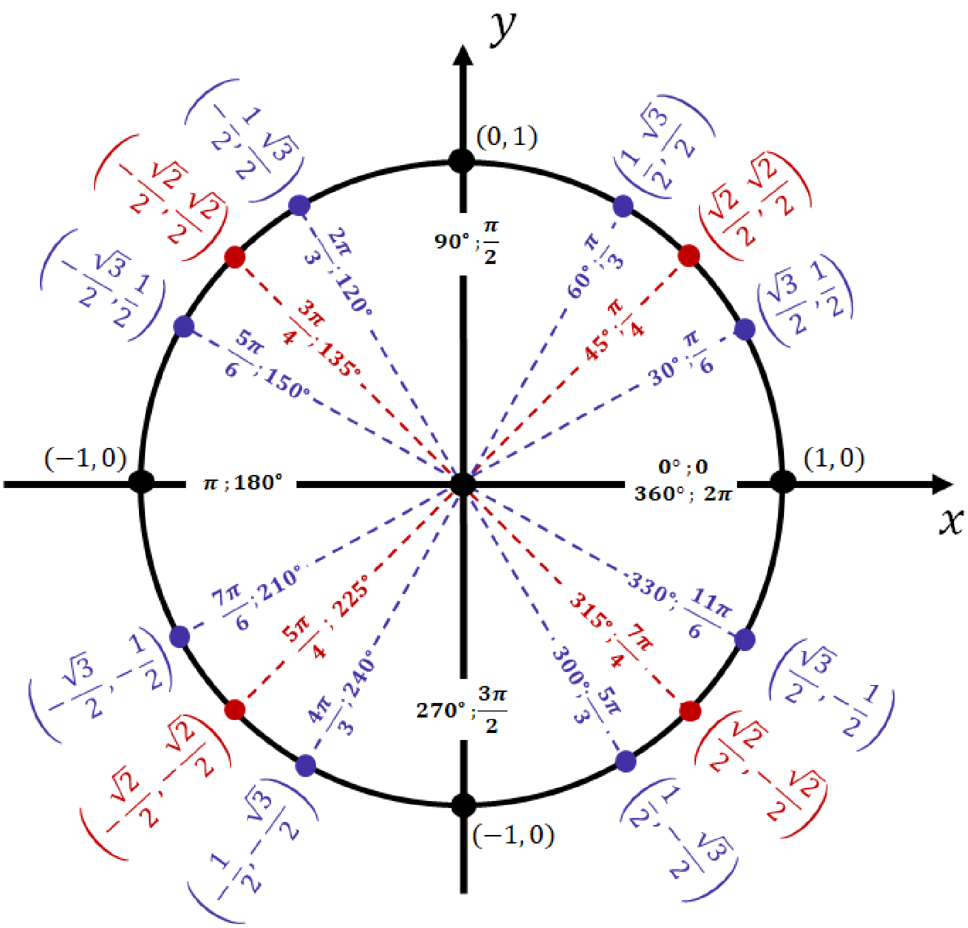
Atribuir os sinais para o seno e o cosseno de acordo com o quadrante em que se encontra o ângulo y original

Como ângulo $y = 330°$ encontra-se no quarto quadrante (IV), o **cosseno é positivo** e o **seno é negativo**. Logo:

$$\mathbf{\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boldsymbol{sen\ 330° = -\frac{1}{2}}$$

A figura a seguir ilustra o **cosseno** e **seno** de ângulos notáveis entre 0° e 360°. Note que os pontos (x, y) representados são tais que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{sen}\,\boldsymbol{\theta})$



HORA DE PRATICAR!

(TCE-TO/2022) Sabendo-se que $cos\ x = \frac{1}{2}$, então $cos\ 20x$ é igual a:

a) 1

b) $-\frac{1}{2}$

c) 0

d) -1

e) 10

Comentários:

Considerando que x está no primeiro quadrante, como $\cos x = \frac{1}{2}$, temos $\boldsymbol{x = 30^o}$.

Nesse caso, o ângulo $20x$ é:

$$20x = 20 \times 30^o = 600^o$$

Queremos, **portanto**, **obter $\cos 600^o$**. Para tanto, vamos utilizar o método prático que acabamos de ver.

Identificar o quadrante em que se encontra o ângulo y em questão

Note que o ângulo em questão apresenta mais de uma volta (é maior do que 360^o). Nesse caso, vamos **subtrair um número inteiro de voltas para que o ângulo fique entre 0^o e 360^o**.

Subtraindo uma volta de 600^o, temos:

$$600^o - 360^o$$

$$= 240^o$$

Temos que o ângulo de 240^o está entre 180^o e 270^o. Portanto, 240^o encontra-se no terceiro quadrante (III).

Reduzir o ângulo y ao primeiro quadrante, obtendo o ângulo x

Como $y = 240^o$ está no segundo terceiro (III), temos:

$$y = x + 180^o$$

$$240^o = x + 180^o$$

$$x = 240^o - 180^o$$

$$x = 60^o$$

Obter o cosseno do ângulo x do primeiro quadrante

$$cos\ 60^o = \frac{1}{2}$$

Atribuir o sinal para o cosseno de acordo com o quadrante em que se encontra o ângulo y original

Como o ângulo $y = 240^o$ encontra-se no terceiro quadrante, o **cosseno é negativo**. Logo:

$$\boldsymbol{cos\ 240^o = -\frac{1}{2}}$$

Consequentemente:

$$\mathbf{cos\ 20}\boldsymbol{x} = \cos 600^o = cos\ 240^o = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

Observação: caso não considerássemos que x está no primeiro quadrante, sendo $\cos x = \frac{1}{2}$, poderíamos obter $\boldsymbol{x} = \mathbf{330^o}$. Nesse caso, teríamos $20x = 6600^o$.

Ao subtrair 18 voltas completas desse ângulo, obtém-se 120^o. Nesse caso, obteríamos a mesma resposta:

$$\mathbf{cos\ 20}\boldsymbol{x} = \cos 6600^o = \cos 120^o = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

(CM Itabirito/2016) Em um ciclo trigonométrico, pode-se observar que diferentes arcos possuem o mesmo valor de seno.

Assim, é CORRETO afirmar que $\sin\frac{\pi}{6}$ é igual a:

a) $\sin\frac{11\pi}{6}$

b) $\sin\frac{7\pi}{6}$

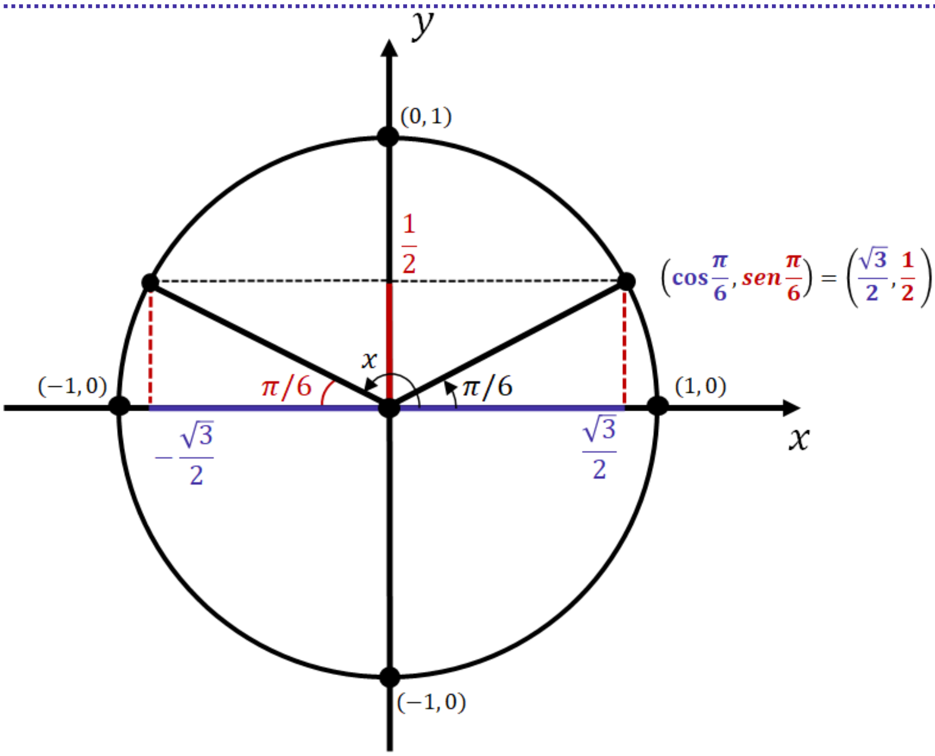
c) $\sin\frac{13\pi}{6}$

d) $\sin\frac{4\pi}{6}$

Comentários:

Sabemos que $\frac{\pi}{6}$ corresponde a $30°$. **Para o intervalo entre $0°$ e $360°$**, o **ângulo suplementar a $\frac{\pi}{6}$** apresenta o mesmo seno, que é $\frac{1}{2}$. Esse ângulo é dado por:

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{5\pi}{6}}$$



Veja que **não temos $\frac{5\pi}{6}$ nas respostas**.

Observe que **outras possibilidades de ângulos que nos dão o mesmo seno de $\frac{\pi}{6}$** são aquelas em que **somamos ou subtraímos voltas de $360°$ (isto é, $2\pi\ rad$) de $\frac{\pi}{6}$ ou de $\frac{5\pi}{6}$**.

Em termos matemáticos, se tomarmos um número inteiro qualquer k, podemos dizer que os ângulos que apresentam o mesmo seno de $\frac{\pi}{6}$ são dos seguintes formatos:

$$\frac{\pi}{6} + k.(2\pi);\ \text{ou}$$

$$\frac{5\pi}{6} + k.(2\pi)$$

Para $k = 1$, temos:

$$\frac{\pi}{6} + 1.(2\pi) = \frac{13\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} + 1.(2\pi) = \frac{17\pi}{6}$$

Poderíamos continuar alterando os valores de k, de modo a obter outros ângulos que também apresentam o seno igual a $\frac{1}{2}$. Observe, porém, que o ângulo $\frac{13\pi}{6}$ aparece na alternativa C, que é o gabarito.

Portanto, **é CORRETO afirmar que $\sin\frac{\pi}{6}$ é igual a $\sin\frac{13\pi}{6}$**.

Gabarito: Letra C.

(PETROBRAS/2010) O cosseno de $\frac{29\pi}{6}$ radianos é

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $-\frac{1}{2}$

d) $+\frac{1}{2}$

e)$+\frac{\sqrt{3}}{2}$

Comentários:

Para obter o cosseno de $\frac{29\pi}{6}$, vamos utilizar o método prático que acabamos de ver.

Identificar o quadrante em que se encontra o ângulo y em questão

Note que o ângulo em questão apresenta mais de uma volta (é maior do que 2π). Nesse caso, vamos **subtrair um número inteiro de voltas** para que o ângulo fique entre $0°$ e $360°$, isto é, **para que o ângulo fique entre $\mathbf{0}$ e $\mathbf{2\pi}$**.

Subtraindo **duas voltas** de $\frac{29\pi}{6}$, temos:

$$\frac{29\pi}{6} - 2.(2\pi)$$

$$= \frac{29\pi - 24\pi}{6}$$

$$= \frac{5\pi}{6}$$

Temos que o ângulo $\frac{5\pi}{6}$ está entre $\frac{\pi}{2}$ e π, isto é, está entre $90°$ e $180°$. Portanto, $\frac{5\pi}{6}$ encontra-se no segundo quadrante (II).

Reduzir o ângulo y ao primeiro quadrante, obtendo o ângulo x

Como $y = \frac{5\pi}{6}$ está no segundo quadrante (II), temos:

$$y = 180° - x$$

$$\frac{5\pi}{6} = \pi - x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Obter o <u>cosseno</u> do ângulo x do primeiro quadrante

$$cos\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Atribuir o sinal para o <u>cosseno</u> de acordo com o quadrante em que se encontra o ângulo y original

Como ângulo $y = \frac{5\pi}{6}$ encontra-se no segundo quadrante (II), o **cosseno é negativo**. Logo:

$$\mathbf{cos}\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{6}} = -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$

Como a representação no ciclo trigonométrico de $\frac{5\pi}{6}$ é igual a representação de $\frac{29\pi}{6}$, temos:

$$\mathbf{cos}\frac{\mathbf{29\pi}}{\mathbf{6}} = -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$

Gabarito: Letra A.

Tangente no ciclo trigonométrico

Sabemos que a tangente de um ângulo pode ser obtida por meio da seguinte divisão:

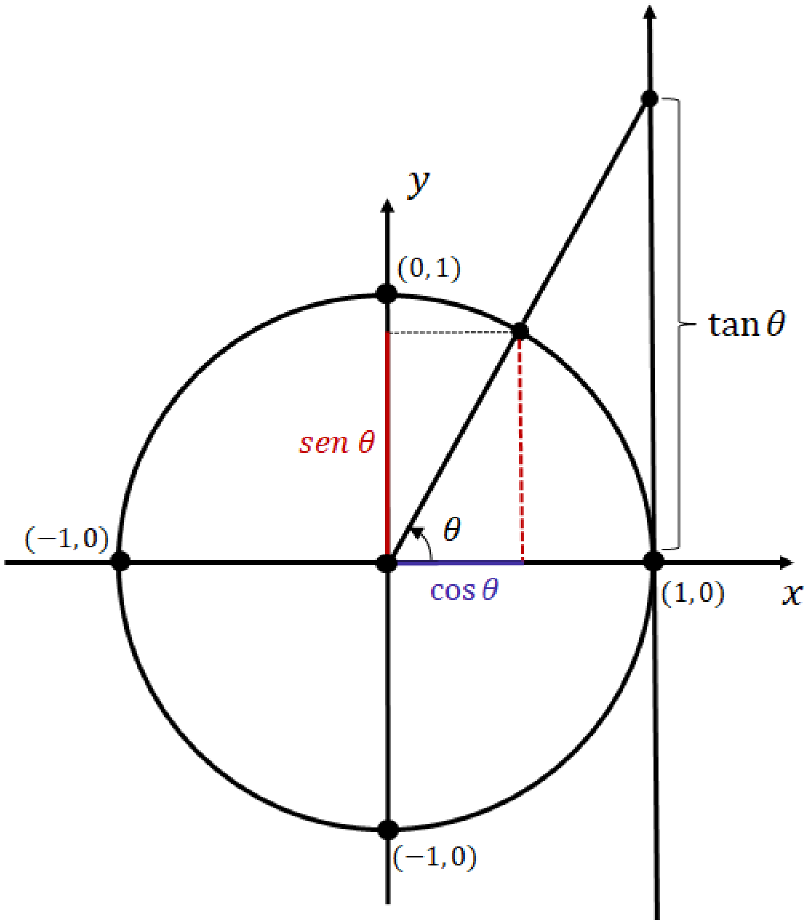
$$\boxed{\tan\theta = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta}}$$

Também é possível **obter a tangente de um ângulo $\boldsymbol{\theta}$** de modo geométrico, por meio do ciclo trigonométrico. Para isso, devemos seguir os seguintes passos:

1. Traçar uma **reta paralela ao eixo $\boldsymbol{y}$** passando pelo **ponto $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$** do ciclo trigonométrico;
2. Traçar uma segunda **reta passando pela origem** do plano cartesiano **com inclinação $\boldsymbol{\theta}$**; e
3. Obter o **ponto de intersecção** entre as duas retas.

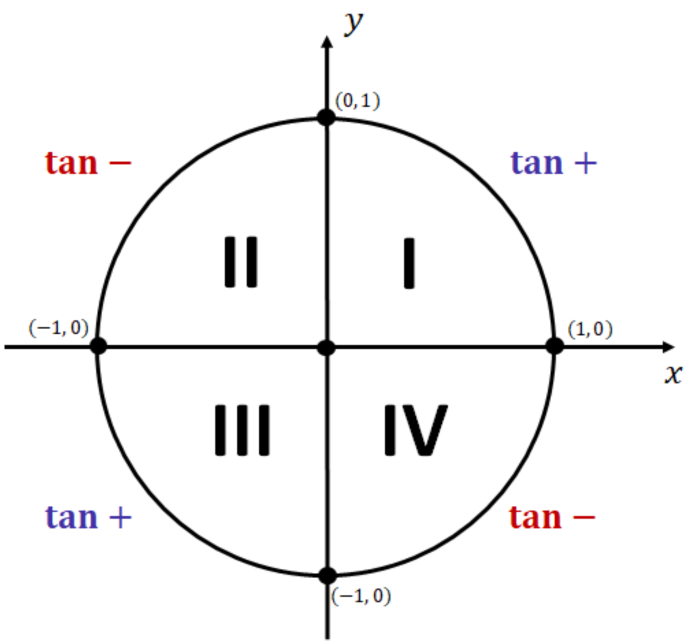
A **tangente do ângulo $\boldsymbol{\theta}$ é a distância**, **considerando o sinal**, **do ponto de intersecção** das duas retas **ao eixo $\boldsymbol{x}$**.

A figura a seguir ilustra a obtenção do valor de $\tan\theta$.

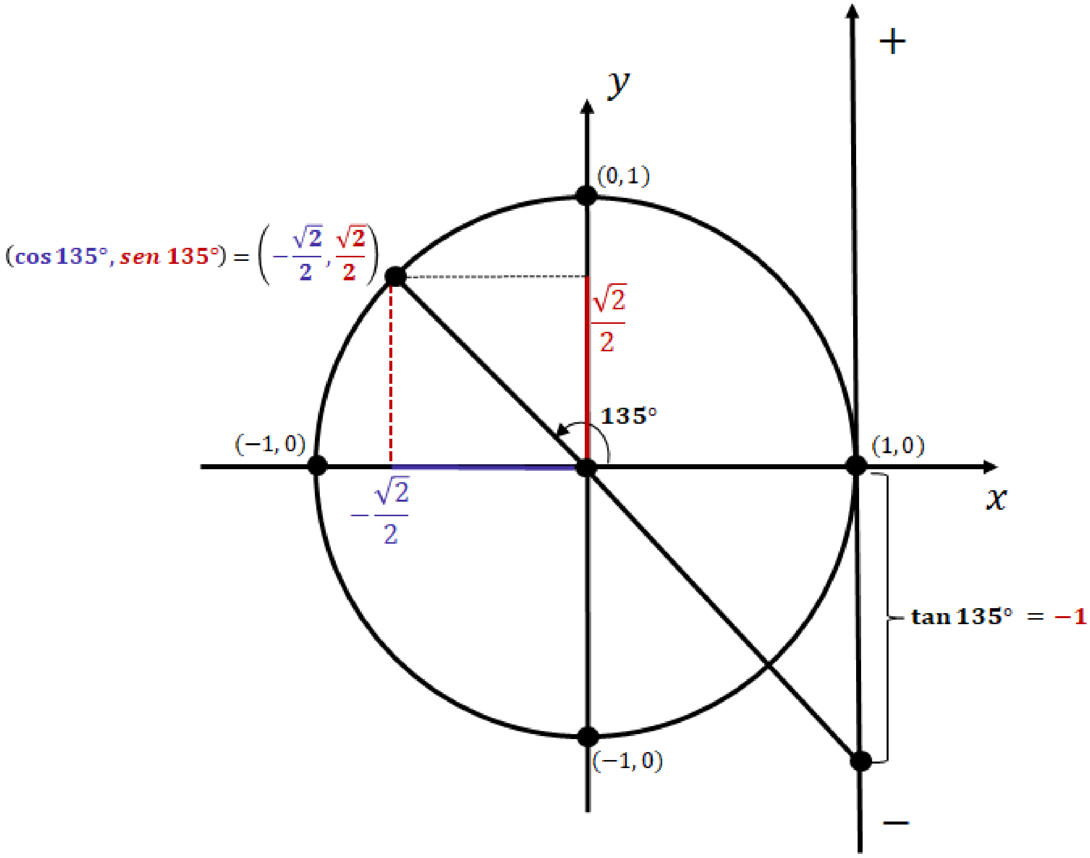


Cumpre destacar que a tangente de um ângulo θ será:

- **Positiva**, se θ estiver nos **quadrantes I e III** e;
- **Negativa**, se θ estiver nos **quadrantes II e IV**.



A título de ilustração, observe a tangente de $135°$:



A tangente de um ângulo y qualquer também pode ser obtida por meio da redução ao primeiro quadrante:

- Identificar o quadrante em que se encontra o ângulo y em questão;
- Reduzir o ângulo y ao primeiro quadrante, obtendo o ângulo x;
- Obter a **tangente** do ângulo x do primeiro quadrante; e
- Atribuir o sinal para a **tangente** de acordo com o quadrante em que se encontra o ângulo y original.

(EEAR/2021) O valor da $\tan 1665°$ é:

a) 0

b) 1

c) $\sqrt{3}$

d) $-\sqrt{3}$

Comentários:

Identificar o quadrante em que se encontra o ângulo y em questão

Note que o ângulo em questão apresenta mais de uma volta (é maior do que $360°$). Nesse caso, vamos **subtrair um número inteiro de voltas** para que o ângulo fique entre $0°$ e $360°$.

Ao dividir $1665°$ por $360°$, obtemos **quociente 4** e **resto $225°$**. Logo, ao subtrair **quatro voltas** de $1665°$, obtemos $\mathbf{225°}$.

O ângulo $225°$ encontra-se no terceiro quadrante (III), pois é maior do que $180°$ e menor do que $270°$.

Reduzir o ângulo y ao primeiro quadrante, obtendo o ângulo x

Como $y = 225°$ está no terceiro quadrante (II), temos:

$$y = 180° + x$$

$$225° = 180° + x$$

$$x = 45°$$

Obter a <u>tangente</u> do ângulo x do primeiro quadrante

$$tan\ 45° = 1$$

Atribuir o sinal para a <u>tangente</u> de acordo com o quadrante em que se encontra o ângulo y original

Como ângulo $y = 225°$ encontra-se no terceiro quadrante (III), a **tangente é positiva**. Logo:

$$\mathbf{\tan 225° = 1}$$

Como a representação no ciclo trigonométrico de $1665°$ é igual a representação de $225°$, temos:

$$\mathbf{\tan 1665° = 1}$$

Gabarito: Letra B.

Cotangente, secante e cossecante

Até o momento, vimos as razões trigonométricas mais comuns: **seno**, **cosseno** e **tangente**. Além dessas três razões trigonométricas, é importante que você conheça a **cotangente**, a **secante** e a **cossecante**.

A **cotangente** é o **inverso da tangente**:

$$\boxed{cotg\ \theta = \frac{1}{\tan\theta}}$$

Logo, podemos escrever a cotangente da seguinte maneira:

$$\boxed{cotg\ \theta = \frac{\cos\theta}{sen\ \theta}}$$

A **secante** é o **inverso do cosseno**:

$$\boxed{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}}$$

Por fim, você deve saber que a **cossecante** é o **inverso do seno**:

$$\boxed{cossec\ \theta = \frac{1}{sen\ \theta}}$$

Vejamos como isso pode aparecer em questões de concurso público.

(Pref. Caetés/2018) A expressão trigonométrica $y = \frac{tan\theta \cdot cotg\theta}{cos\theta}$ é igual a

a) $sec\theta$

b) $cossec\ \theta$

c) $\sin\theta$

d) $\cos\theta$

e) $\tan\theta$

Comentários:

Sabemos que $cotg\theta = \frac{1}{\tan\theta}$. Logo:

$$y = \frac{tan\theta \cdot cotg\theta}{cos\theta}$$

$$= \frac{tan\theta \cdot \frac{1}{tan\theta}}{cos\theta}$$

$$= \frac{1}{cos\theta}$$

$$= \sec\theta$$

Gabarito: Letra A.

(IF PR/2017) Sendo x e y as medidas de dois arcos com $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$, respectivamente. Ao simplificar a expressão $\frac{\sec x}{cotg\, y} \cdot \boldsymbol{cossec\, y} \cdot \mathbf{sec^2}\, \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{cotg\, x}$ obtém-se:

a) $\sec^3 y \,.\, cossec\, x$

b) $\sec^2 y \,.\, cos\, x$

c) $cossec^2\, x \,.\, sen\, y$

d) $cotg\, x$

Comentários:

Vamos reorganizar a expressão, separando as razões trigonométricas que apresentam o arco x daquelas que apresentam o arco y.

$$\frac{\sec x}{cotg\, y} . cossec\, y . \sec^2 y . cotg\, x$$

$$= \frac{1}{cotg\, y} . cossec\, y . \sec^2 y . \sec x . cotg\, x$$

Desenvolvendo a expressão, temos:

$$\frac{1}{\frac{cos\, y}{sen\, y}} . \frac{1}{sen\, y} . sec^2 y . \frac{1}{cos\, x} . \frac{cos\, x}{sen\, x}$$

$$= \frac{sen\, y}{cos\, y} . \frac{1}{sen\, y} . sec^2 y . \frac{1}{1} . \frac{1}{sen\, x}$$

$$= \frac{1}{cos\, y} . \frac{1}{1} . sec^2 y . \frac{1}{sen\, x}$$

$$= sec\, y . sec^2 y . cossec\, x$$

$$= sec^3 y . cossec\, x$$

Gabarito: Letra A.

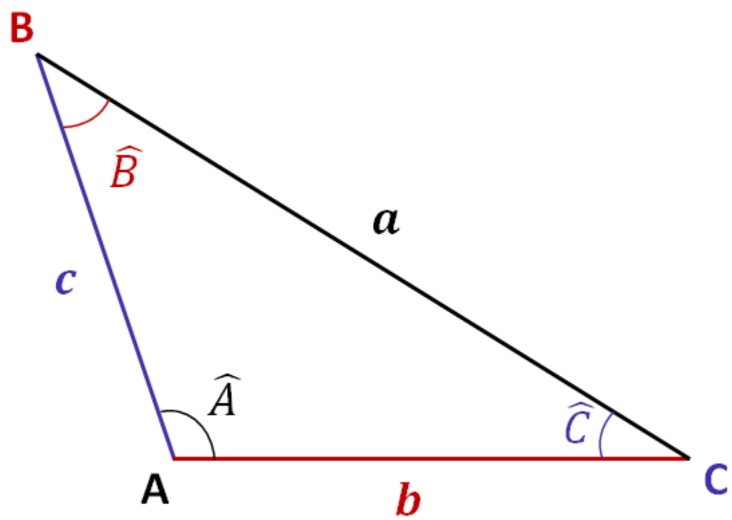
Trigonometria e geometria plana

Se você já estudou geometria plana, provavelmente você já conhece a **Lei dos Cossenos**. Nesse tópico, vamos revisar esse conteúdo, bem como mostraremos outras aplicações da trigonometria na geometria plana.

Destaco que, à exceção da **Lei dos Cossenos**, a incidência do que será visto nesse tópico é extremamente baixa.

Lei dos Cossenos

Considere um triângulo ABC de lados $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ e de ângulos $\widehat{\boldsymbol{A}}$, $\widehat{\boldsymbol{B}}$ e $\widehat{\boldsymbol{C}}$, em que $\widehat{\boldsymbol{A}}$ **é oposto ao lado** $\boldsymbol{a}$, $\widehat{\boldsymbol{B}}$ **é oposto ao lado** $\boldsymbol{b}$ e $\widehat{\boldsymbol{C}}$ **é oposto ao lado** $\boldsymbol{c}$.



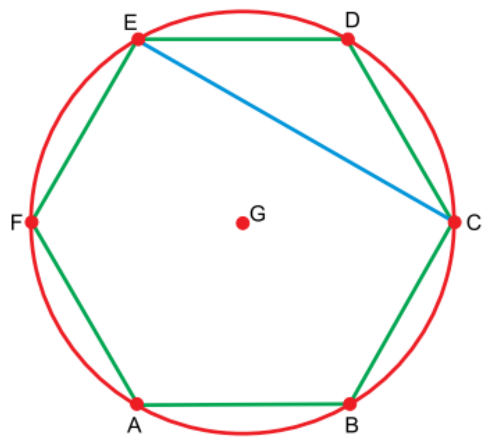
A **Lei dos Cossenos** nos permite **obter qualquer um dos lados do triângulo** a partir do conhecimento de dois lados e do ângulo entre esses dois lados. Temos que:

$$\boldsymbol{a^2} = b^2 + c^2 - 2bc\,\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{A}}$$

$$\boldsymbol{b^2} = a^2 + c^2 - 2ac\,\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{B}}$$

$$\boldsymbol{c^2} = a^2 + b - 2ab\,\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{C}}$$

(PM SP/2018) A figura apresenta um hexágono regular inscrito em uma circunferência de centro G e diâmetro igual a 20 centímetros.



A medida, em centímetros, do segmento de reta de extremidades C e E é igual a:

a) $10\sqrt{3}$

b) $11\sqrt{3}$

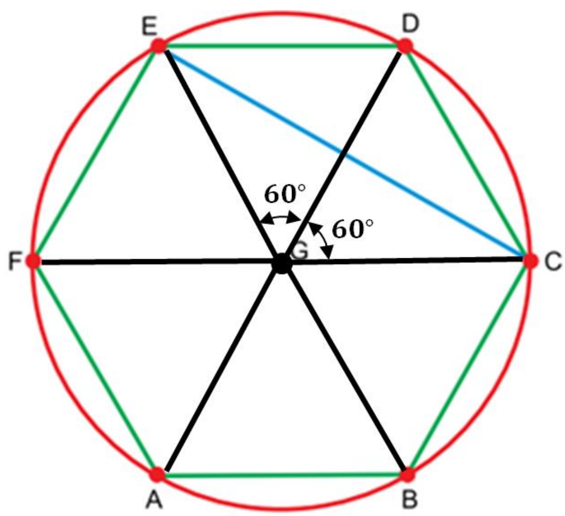
c) $12\sqrt{3}$

d) $13\sqrt{3}$

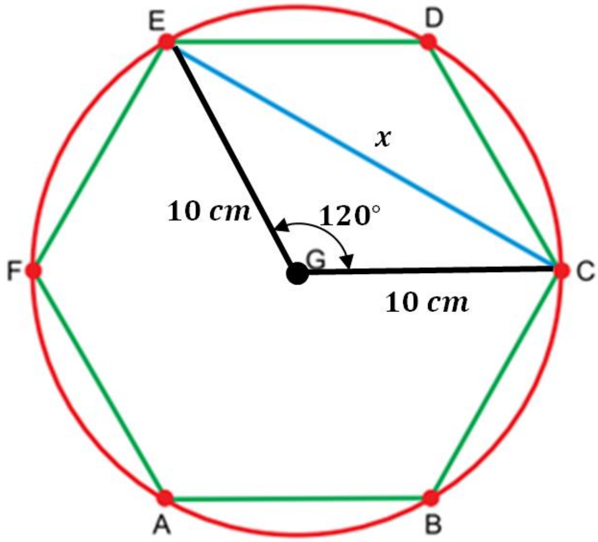
e) $14\sqrt{3}$

Comentários:

Note que, pela simetria do hexágono regular, os ângulos $E\hat{G}D$ e $D\hat{G}C$ medem, cada um, $\frac{360°}{6} = 60°$.



Observe, portanto, que o ângulo $E\hat{G}C$ mede $120°$. Além disso, sabemos que os segmentos GE e GC são raios da circunferência e, portanto, medem $10\ cm$, pois o comprimento do raio é a metade do comprimento do diâmetro.



Podemos aplicar a **Lei dos Cossenos** no triângulo EGC. Denominando o comprimento do segmento de reta de extremidades C e E de x, temos:

$$x^2 = 10^2 + 10^2 - 2.10.10.\cos 120°$$

Sabemos que **$120°$ está no segundo quadrante** e, portanto, apresenta **cosseno negativo**. Reduzindo ao primeiro quadrante, temos o ângulo de 60°, que apresenta cosseno igual a $\frac{1}{2}$. Logo:

$$\boldsymbol{\cos 120° = -\frac{1}{2}}$$

Portanto:

$$x^2 = 100 + 100 - 200.\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 200 + 100$$

$$x^2 = 300$$

$$x = \sqrt{3.10^2}$$

$$x = 10\sqrt{3}$$

Gabarito: Letra A.

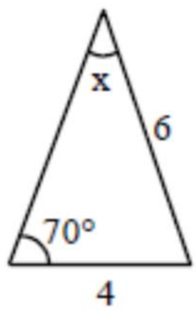
Lei dos senos

Considere um triângulo ABC de lados $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ e de ângulos $\widehat{\boldsymbol{A}}$, $\widehat{\boldsymbol{B}}$ e $\widehat{\boldsymbol{C}}$, em que $\widehat{\boldsymbol{A}}$ **é oposto ao lado** $\boldsymbol{a}$, $\widehat{\boldsymbol{B}}$ **é oposto ao lado** $\boldsymbol{b}$ e $\widehat{\boldsymbol{C}}$ **é oposto ao lado** $\boldsymbol{c}$.

A **Lei dos Senos** nos diz que **a razão** entre o comprimento de um lado e o seno do ângulo oposto a ele é **igual para todos os lados**:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{sen\ \widehat{\boldsymbol{A}}} = \frac{\boldsymbol{b}}{sen\ \widehat{\boldsymbol{B}}} = \frac{\boldsymbol{c}}{sen\ \widehat{\boldsymbol{C}}}$$

(EEAR/2013) Considere as medidas indicadas na figura e que $sen\ 70° = 0{,}9$. Pela "Lei dos Senos", obtém-se sen x = _____ .



a) 0,4

b) 0,5

c) 0,6

d) 0,7

Comentários:

Pela Lei dos Senos, sabemos que:

$$\frac{6}{sen\ 70°} = \frac{4}{sen\ x}$$

Logo:

$$sen\ x = \frac{4}{6} sen 70°$$

$$sen\ x = \frac{4}{6} . 0{,}9$$

$$sen\ x = 0{,}6$$

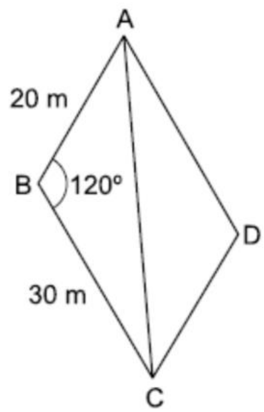
Gabarito: Letra C.

Área do paralelogramo

Conhecidos dois **lados não paralelos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$** de um paralelogramo, bem como conhecido o **ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ entre eles**, a **área do paralelogramo** pode ser obtida por meio da seguinte fórmula:

$$A_{paralelogramo} = a.b.sen\ \alpha$$

(Pref. Alumínio/2016) A figura representa um terreno cujo formato é de um paralelogramo cujos lados medem 20 m e 30 m.



A área desse terreno e a diagonal AC medem, respectivamente,

a) $600\ m^2$ e $10\sqrt{13}\ m$

b) $150\ m^2$ e $10\sqrt{13}\ m$

c) $150\sqrt{3}\ m^2$ e $10\sqrt{19}\ m$

d) $300\sqrt{3}\ m^2$ e $10\sqrt{19}\ m$

e) $300\sqrt{2}\ m^2$ e $10\sqrt{19}\ m$

Comentários:

Utilizando a fórmula que acabamos de aprender, temos que a **área do paralelogramo** é dada por:

$$A_{paralelogramo} = 20.30.sen\ 120°$$

$$= 600.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 300\sqrt{3}\ m^2$$

Aplicando a **Lei dos Cossenos** no triângulo ABC, sendo x o comprimento da diagonal AC, temos:

$$x^2 = 20^2 + 30^2 - 2.20.30.\cos 120°$$

$$x^2 = 400 + 900 - 1200.\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 1.900$$

$$x = \sqrt{19.10^2}$$

$$x = 10\sqrt{19}$$

Portanto, a área do terreno e a diagonal AC medem, respectivamente, $\mathbf{300\sqrt{3}\ m^2}$ **e** $\mathbf{10\sqrt{19}\ m}$.

Gabarito: Letra D.

Área de um triângulo

Conhecidos dois **lados a e b** de um triângulo, bem como conhecido o **ângulo α entre eles**, a **área do triângulo** pode ser obtida por meio da seguinte fórmula:

$$A_{triângulo} = \frac{1}{2} a.b.sen\ \alpha$$

(STN/2005) Em um triângulo ABC qualquer, um dos lados mede $\sqrt{2}$ e outro mede $2cm$. Se o ângulo formado por esses dois lados mede $45°$, então a área do triângulo é igual a:

a) $3^{-\frac{1}{3}}$

b) $2^{\frac{1}{2}}$

c) $2^{-\frac{1}{2}}$

d) $3\sqrt{2}$

e) 1

Comentários:

Utilizando a fórmula que acabamos de aprender, temos que a **área do triângulo** é dada por:

$$A_{triângulo} = \frac{1}{2}.\sqrt{2}.2.sen\ 45°$$

$$= \frac{1}{2}.\sqrt{2}.2.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 1$$

Gabarito: Letra E.

Identidades

Nesse tópico, serão apresentadas diversas identidades trigonométricas.

Identidades da cofunção

Temos as seguintes propriedades que são válidas para quaisquer ângulos θ:

ATENÇÃO DECORE!

$$sen\ \theta = \cos(90° - \theta)$$

$$\cos\theta = sen\ (90° - \theta)$$

$$\tan\theta = cotg\ (90° - \theta)$$

$$cotg\ \theta = \tan(90° - \theta)$$

Por exemplo, para $\theta = 30°$, sabemos que:

$$sen\ 30° = \cos(90° - 30°)$$

$$\mathbf{sen\ 30° = cos\ 60°}$$

Veja que a igualdade é verdadeira, pois ambos os lados da igualdade correspondem a $\frac{1}{2}$.

De modo semelhante, temos:

$$cos\ 30° = \mathrm{sen}(90° - 30°)$$

$$\mathbf{cos\ 30° = sen\ 60°}$$

Veja que a igualdade é verdadeira, pois ambos os lados da igualdade correspondem a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Uma consequência importante dessas identidades é a seguinte:

#DicaDoProf

Para dois ângulos complementares, o **seno** de um ângulo é igual ao **cosseno** do outro, e **vice-versa**.

Em outras palavras, **se a soma de dois ângulos for igual a 90^o**, o **seno** de um ângulo é igual ao **cosseno** do outro, e **vice-versa**.

As **propriedades da cofunção** **valem para ângulos de qualquer quadrante, inclusive para ângulos que não são notáveis**. Exemplos:

$$\text{sen}\,12° = \cos(90° - 12°) \rightarrow \mathbf{sen\,12° = cos\,78°}$$

$$\cos 120° = sen\,(90° - 120°) \rightarrow \mathbf{cos\,120° = \mathit{sen}\,(-30°)}$$

$$\tan 50° = cotg(90° - 50°) \rightarrow \mathbf{tan\,50° = \mathit{cotg}\,40°}$$

$$\text{cotg}\,210° = tan(90° - 210°) \rightarrow \mathbf{cotg\,210° = \mathit{tan}(-120°)}$$

Utilizando a notação em radianos, podemos descrever as **propriedades da cofunção** do seguinte modo:

ATENÇÃO
DECORE!

$$sen\,\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\cos\theta = sen\,\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\tan\theta = cotg\,\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$cotg\,\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

A questão a seguir faz uso de uma das propriedades que acabamos de ver.

(Pref. São João de Pirabas/2016) Reduzindo os arcos ao 1° quadrante, pode-se afirmar que a expressão $\frac{\cos^2 300° - sen\ 330°}{\cos 70° + sen\ 200° - sen\ 270°}$ vale:

a) $1/4$

b) $2/5$

c) $\sqrt{3}/5$

d) $3/4$

e) $5\sqrt{2}/2$

Comentários:

Vamos reduzir os ângulos em questão para o primeiro quadrante, conforme o comando do enunciado.

—

Ângulo $y = 300°$

O ângulo de $300°$ está no quarto quadrante. Logo, a sua redução ao primeiro quadrante é x, em que:

$$y = 360° - x$$

$$x = 360° - y$$

$$x = 360° - 300°$$

$$x = 60°$$

Temos:

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

Como no quarto quadrante o cosseno é positivo, temos:

$$\mathbf{\cos 300° = +\frac{1}{2}}$$

—

Ângulo $y = 330°$

O ângulo de $300°$ está no quarto quadrante. Logo, a sua redução ao primeiro quadrante é x, em que:

$$y = 360° - x$$

$$x = 360° - y$$

$$x = 360° - 330°$$

$$x = 30°$$

Temos:

$$\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$$

Como no quarto quadrante o seno é negativo, temos:

$$\mathbf{sen\ 330° = -\frac{1}{2}}$$

—

Ângulo $y = 70°$

O ângulo de $70°$ já está no primeiro quadrante. Como não se trata de um ângulo notável, não temos "de cabeça" um valor exato para o seu cosseno.

—

Ângulo $y = 200°$

O ângulo de $200°$ está no terceiro quadrante. Logo, a sua redução ao primeiro quadrante é x, em que:

$$y = x + 180°$$

$$x = y - 180°$$

$$x = 200° - 180°$$

$$x = 20°$$

$20°$ não é um ângulo notável. Como $20°$está no primeiro quadrante, sabemos que **$sen\ 20°$ é positivo**.

Portanto, como no terceiro quadrante o seno é negativo, temos:

$$\boldsymbol{sen\ 200° = -sen\ 20°}$$

—

Ângulo $y = 270°$

$270°$ é um ângulo notável. Temos:

$$\boldsymbol{sen\ 270° = -1}$$

Com as informações obtidas até agora, podemos simplificar a expressão pedida.

$$\frac{\cos^2 300° - sen\ 330°}{\cos 70° + sen\ 200° - sen\ 270°}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)}{\cos 70° + (-sen\ 20°) - (-1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\cos 70° - sen\ 20° + 1}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{\boldsymbol{\cos 70° - sen\ 20°} + 1}$$

Note que $70°$ é o ângulo complementar de $20°$. Sabemos que:

$$sen\ 20° = \cos(90° - 20°)$$

$$\boldsymbol{sen\ 20° = \cos 70°}$$

Logo, a expressão pedida é dada por:

$$\frac{-\frac{1}{2}}{\cos 70° - sen\ 20° + 1}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{\cos 70° - \cos 70° + 1}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{1}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Gabarito: Letra D.

Identidades par/ímpar

O **seno** e o **cosseno** de um ângulo θ qualquer obedecem às seguintes propriedades:

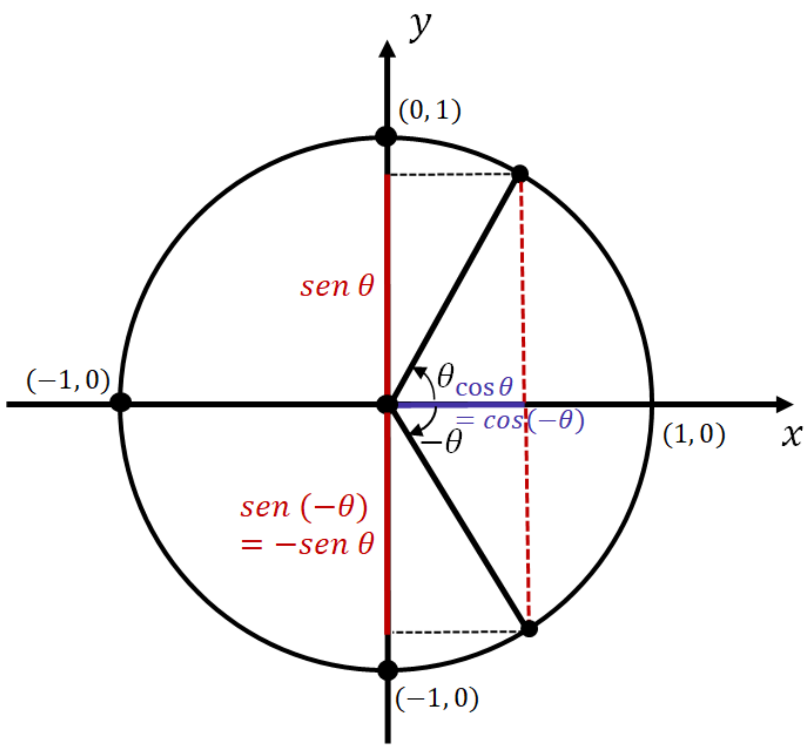
ATENÇÃO DECORE!

$$sen\ (-\theta) = -sen\ \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

Em outras palavras, se considerarmos uma função $\boldsymbol{f_1(x) = sen(x)}$ e uma função $\boldsymbol{f_2(x) = cos(x)}$, podemos dizer que **o seno é uma função ímpar** e **o cosseno é uma função par**.

A figura a seguir ilustra essa propriedade para um ângulo $\boldsymbol{\theta}$ do primeiro quadrante.



Por outro lado, a função **tangente** e a função **cotangente** são ambas **ímpares**:

ATENÇÃO DECORE!

$$tan(-\theta) = -tan\,\theta$$

$$cotg(-\theta) = -cotg\,\theta$$

Veja que:

$$\boldsymbol{tan(-\theta)} = \frac{sen\ (-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-sen\ \theta}{\cos\theta} = \boldsymbol{-\ tan\ \theta}$$

A partir do resultado anterior, temos:

$$\boldsymbol{cotg\ (-\theta)} = \frac{1}{\tan(-\theta)} = \frac{1}{-\tan\theta} = \boldsymbol{-cotg\ \theta}$$

ESTA É DIFÍCIL!

(Pref. Vinhedo/2019) Duas funções trigonométricas, $f(x) = sinx\ e\ g(x) = cos(x + a)$, tem como domínio os números reais. Considerando que x está em radianos em ambas as funções, assinale a alternativa que indica o correto valor de a para que $f(x) = -g(x)$.

a) $a = \pi/3$

b) $a = \pi/2$

c) $a = \pi/4$

d) $a = \pi$

Comentários:

Pessoal, a questão apresenta uma igualdade entre um seno e um cosseno. Vamos **transformar o cosseno em seno** por meio das identidades aprendidas até agora.

Sabemos que, para **qualquer ângulo $\boldsymbol{\theta}$**, temos $\boldsymbol{\cos\theta = sen\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$. Logo, para $\theta = x + a$, podemos proceder do seguinte modo:

$$\boldsymbol{\cos(x+a)} = sen\left(\frac{\pi}{2} - (x + a)\right)$$

$$\boldsymbol{= sen\left(\frac{\pi}{2} - a - x\right)}$$

Queremos determinar um valor para a para que a igualdade $f(x) = -g(x)$ se verifique.

$$f(x) = -g(x)$$

$$sen\,x = -\boldsymbol{cos(x + a)}$$

$$sen\,x = -\boldsymbol{sen\left(\frac{\pi}{2} - a - x\right)}$$

Veja que em um lado da igualdade temos "x" e no outro lado da igualdade temos "$-x$".

Sabemos que, para **qualquer ângulo $\boldsymbol{\theta}$**, $\boldsymbol{sen(-\theta) = -sen\,(\theta)}$. Substituindo θ por $-x$, podemos dizer que:

$$sen(-(-x)) = -sen\,(-x)$$

$$\boldsymbol{sen(x) = -sen\,(-x)}$$

Portanto, **para a igualdade $f(x) = -g(x)$ ser verdadeira**, temos:

$$\boldsymbol{sen\,x} = -sen\left(\frac{\pi}{2} - a - x\right)$$

$$\boldsymbol{-sen\,(-x)} = -sen\left(\frac{\pi}{2} - a - x\right)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por -1, temos:

$$sen\ (-x) = sen\ \left(\frac{\pi}{2} - a - x\right)$$

Veja que a igualdade $f(x) = -g(x)$ se verifica para $\boldsymbol{a = \frac{\pi}{2}}$.

$$sen\ (-x) = sen\ \left(\frac{\pi}{2} - \boldsymbol{\frac{\pi}{2}} - x\right)$$

$$sen\ (-x) = sen\ (0 - x)$$

$$sen\ (-x) = sen\ (-x)$$

O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

Gabarito: Letra B.

Identidades pitagóricas

A fórmula a seguir, denominada **Relação Fundamental da Trigonometria (RFT)**, é definitivamente a mais importante da aula:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Utilizando a **Relação Fundamental da Trigonometria (RFT)**, podemos obter o **cosseno** do ângulo θ a partir do seno do ângulo:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$$

$$\boldsymbol{\cos\theta = \pm\sqrt{1 - sen^2\theta}}$$

Para saber se $\cos\theta$ é positivo ou negativo, precisamos saber de antemão em qual quadrante o ângulo θ se encontra. Se θ estiver no **primeiro** ou no **quarto quadrante**, o **cosseno é positivo**:

$$\boldsymbol{\cos\theta = +\sqrt{1 - sen^2\theta}}$$

Caso contrário, se θ estiver no **segundo** ou no **terceiro quadrante**, o **cosseno é negativo**:

$$\boldsymbol{\cos\theta = -\sqrt{1 - sen^2\theta}}$$

Da mesma forma, utilizando a **Relação Fundamental da Trigonometria (RFT)**, podemos obter o **seno** do ângulo θ a partir do cosseno do ângulo:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$sen^2\theta = 1 - cos^2\theta$$

$$\boldsymbol{sen\,\theta = \pm\sqrt{1 - cos^2\theta}}$$

Para saber se $\operatorname{sen}\theta$ é positivo ou negativo, precisamos saber de antemão em qual quadrante o ângulo θ se encontra. Se θ estiver no **primeiro** ou no **segundo quadrante**, o **seno é positivo**:

$$\boldsymbol{sen\,\theta = +\sqrt{1 - cos^2\theta}}$$

Caso contrário, se θ estiver no **terceiro** ou no **quarto quadrante**, o **seno é negativo**:

$$\boldsymbol{sen\,\theta = -\sqrt{1 - cos^2\theta}}$$

Outras identidades pitagóricas que são menos cobradas são as seguintes:

ATENÇÃO DECORE!

$$tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$cot^2\theta + 1 = cossec^2\theta$$

Veja que:

$$\boldsymbol{\tan^2\theta + 1} = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\boldsymbol{= \sec^2\theta}$$

Além disso:

$$\boldsymbol{cot^2\,\theta + 1} = \left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + 1$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\boldsymbol{= \mathrm{cossec}^2\,\theta}$$

(Pref. Lages/2016) Se x é um ângulo no segundo quadrante tal que $sen(x) \ = \ 1/3$, então o $cos\ (x)$ é igual a:

a) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

c) $-\frac{8}{9}$

d) $\frac{8}{9}$

e) $\frac{4}{9}$

Comentários:

A partir da **Relação Fundamental da Trigonometria (RFT)**, temos:

$$sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$$

$$cos(x) = \pm\sqrt{1 - sen^2(x)}$$

$$cos(x) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$cos(x) = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{9}}$$

$$cos(x) = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$cos(x) = \pm\sqrt{\frac{4.2}{9}}$$

$$cos(x) = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como x está no segundo quadrante, $\cos(x)$ é negativo. Logo:

$$cos(x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Gabarito: Letra A.

(SAP SP/2017) Seja a expressão $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \times \frac{\cos^2 x}{1-cosx}$ definida em $0 < x < \frac{\pi}{2}$**.** Ao simplificá-la, obteremos:

a) 1

b) sen^2x

c) $\cos^2 x$

d) 0

Comentários:

Vamos desenvolver a expressão.

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \times \frac{\cos^2 x}{1-cosx}$$
$$= \frac{\sin^2 x \, . \cos^2 x}{(1+\cos x).(1-cosx)}$$
$$= \frac{\sin^2 x \, . \cos^2 x}{1-\cos^2 x}$$

A partir da **Relação Fundamental da Trigonometria (RFT)**, temos:

$$sin^2x + \cos^2 x = 1$$
$$\boldsymbol{sin^2x = 1 - \cos^2 x}$$

Logo, a expressão é dada por:

$$\frac{\sin^2 x \, . \cos^2 x}{\boldsymbol{1-\cos^2 x}}$$
$$= \frac{\sin^2 x \, . \cos^2 x}{\boldsymbol{sin^2 x}}$$
$$= \cos^2 x$$

Gabarito: Letra C.

(ALERO/2018) Sabe-se que $sen\,x - cos\,x\ =\ 0{,}6$.

O valor de $y\ = sen\,x\,.\,cos\,x$ é

a) 0,18.

b) 0,32.

c) 0,36.

d) 0,64.

e) 0,72.

Comentários:

Pessoal, essa questão aqui apresenta uma "**malandragem clássica**" que consiste em **elevar equações ao quadrado** de modo que apareça $\boldsymbol{sen^2 x + \cos^2 x}$, **que sabemos ser igual a 1**.

Veja que:

$$sen\,x - cos\,x\ =\ 0{,}6$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, temos:

$$(sen\,x - cos\,x)^2\ =\ 0{,}6^2$$

Conhecemos o seguinte produto notável: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Para o caso em questão, temos:

$$sen^2 x - 2.\,senx.\,cosx + \cos^2 x\ =\ 0{,}36$$

$$-2.\,senx.\,cosx + (sen^2 x + \cos^2 x)\ =\ 0{,}36$$

$$-2.\,senx.\,cosx + 1 =\ 0{,}36$$

$$-2.\,senx.\,cosx = 0{,}36 - 1$$

$$-2.\,senx.\,cosx = -0{,}64$$

$$\boldsymbol{senx.\,cosx = 0{,}32}$$

Gabarito: Letra B.

Identidades da soma e da subtração

Dados dois ângulos a e b, pode-se obter o **seno**, o **cosseno** e a **tangente** de $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ por meio das seguintes identidades:

ATENÇÃO
DECORE!

$$sen\ (a+b) = sen\ a \cos b + sen\ b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - sen\ a\ sen\ b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Da mesma forma, dados dois ângulos a e b, pode-se obter o **seno**, o **cosseno** e a **tangente** de $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ por meio das seguintes identidades:

ATENÇÃO
DECORE!

$$sen\ (a-b) = sen\ a \cos b - sen\ b \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + sen\ a\ sen\ b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Uma vez que você decorou as fórmulas do **seno**, do **cosseno** e da **tangente** de $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, as fórmulas para $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ podem ser obtidas fazendo $(\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}))$.

A título de aprofundamento, vamos ver como obter as fórmulas para $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

INDO MAIS FUNDO!

Sabemos que o **seno e a tangente** são funções **<u>ímpares</u>** e o **cosseno** é uma função **<u>par</u>**. Logo:

$$sen\,(-b) = -sen\,b$$

$$tan\,(-b) = -tan\,b$$

$$\cos(-b) = \cos b$$

Veja que:

$$sen\,(a-b)$$

$$= sen\,(a+(-b))$$

$$= sen\,a.\cos(-b) + sen\,(-b).\cos a$$

$$= sen\,a\cos b + (-sen\,b)\cos a$$

$$sen\,a\cos b - sen\,b\cos a$$

$$\cos(a-b)$$

$$= \cos(a+(-b))$$

$$= \cos a\cos(-b) - sen\,a\;sen\,(-b)$$

$$= \cos a\cos(b) - sen\,a\,(-sen\,b)$$

$$= \cos a\cos b + sen\,a\;sen\,b$$

$$\tan(a-b)$$

$$= \tan(a+(-b))$$

$$= \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a\tan(-b)}$$

$$= \frac{\tan a + (-\tan b)}{1 - \tan a\,(-\tan b)}$$

$$= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

HORA DE PRATICAR!

(EEAR/2021) Se $sin(a+b) = -\frac{1}{2}$ e $cos(a-b) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, então o valor de $(\sin a + \cos a)(\sin b + \cos b)$ é

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{(1+\sqrt{3})}{2}$

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a multiplicação sugerida pelo enunciado.

$$(\sin a + \cos a)(\sin b + \cos b)$$
$$= \sin a \sin b + \sin b \cos b + \cos a \sin b + \cos a \cos b$$

Rearranjando os termos, ficamos com:

$$(\cos a \cos b + \sin a \sin b) + (\sin b \cos b + \cos a \sin b)$$
$$= (\boldsymbol{\cos a \cos b + \sin a \sin b}) + (\boldsymbol{\sin b \cos b + \sin b \cos a})$$
$$= \boldsymbol{\cos(a-b)} + \boldsymbol{\sin(a+b)}$$
$$= -\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$
$$= -\frac{(1+\sqrt{3})}{2}$$

Gabarito: Letra D.

(Pref. Areial/2021) Se $sen\ 10° = a, sen\ 12° = b, cos\ 10° = c, cos\ 12° = d$ e $ab + cd \neq 0$, podemos AFIRMAR que $tg\ 2°$ é igual a:

a) $tg\ 2° = \frac{ad-bc}{ab+cd}$

b) $tg\ 2° = \frac{ac-bd}{\mathrm{ab+cd}}$

c) $tg\ 2° = \frac{ac+ba}{ab+cd}$

d) $tg\ 2° = \frac{bc-ad}{\mathrm{ab+cd}}$

e) $tg\ 2° = \frac{2ac-bd}{ab+cd}$

Comentários:

Para o exercício em questão, temos $\boldsymbol{sen\ 10° = a}$, $\boldsymbol{sen\ 12° = b}$, $\boldsymbol{cos\ 10° = c}$, $\boldsymbol{cos\ 12° = d}$. Assim:

$$tg\ 10° = \frac{sen\ \ 10°}{\cos\ 10°} \to \boldsymbol{tg\ 10° = \frac{a}{c}}$$

$$tg\ 12° = \frac{sen\ \ 12°}{\cos\ 12°} \to \boldsymbol{tg\ 12° = \frac{b}{d}}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{tg\ 2°} \\ &= tg\ (12° - 10°) \\ &= \frac{tg\ 12° - tg\ 10°}{1 + tg\ 12°. tg10°} \\ &= \frac{\frac{b}{d} - \frac{a}{c}}{1 + \frac{b}{d}.\frac{a}{c}} \\ &= \frac{\frac{bc - ad}{cd}}{\frac{cd + ab}{cd}} \\ &= \frac{bc - ad}{cd}.\frac{cd}{cd + ab} \end{aligned}$$

Simplificando o termo cd, temos:

$$\boldsymbol{tg\ 2°} = \frac{bc - ad}{cd + ab}$$

$$= \boldsymbol{\frac{bc - ad}{ab + cd}}$$

Gabarito: Letra D.

Identidades do arco duplo

Uma vez que se tem determinado um ângulo θ, pode-se obter o **seno**, o **cosseno** e a **tangente** de 2θ por meio das seguintes identidades:

$$sen\ 2\theta = 2sen\ \theta \cos\theta$$

$$cos\ 2\theta = \cos^2\theta - sen^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Essas identidades do arco duplo são obtidas por meio das **identidades da soma de dois ângulos a e b**, **fazendo $a = b = \theta$**.

$$\boldsymbol{sen\ 2\theta}$$
$$= sen\ (\theta + \theta)$$
$$= sen\ \theta cos\theta + sen\theta\ cos\theta$$
$$= \boldsymbol{2sen\theta\ cos\theta}$$

$$\boldsymbol{cos\ 2\theta}$$
$$= cos\ (\theta + \theta)$$
$$= cos\theta\ cos\theta - sen\theta\ sen\theta$$
$$= \boldsymbol{cos^2\theta - sen^2\theta}$$

$$\boldsymbol{\tan 2\theta}$$
$$= \tan(\theta + \theta)$$
$$= \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\,.\tan\theta}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$$

As seguintes identidades do arco duplo decorrem da identidade já vista para $\boldsymbol{cos\ 2\theta}$ combinada com a **Relação Fundamental da Trigonometria (RFT)**:

$$cos\ 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$cos\ 2\theta = 1 - 2\,sen^2\theta$$

Vamos deduzir as duas relações anteriores. Já conhecemos a seguinte identidade:

$$\boldsymbol{cos\ 2\theta = \cos^2\theta - sen^2\theta}$$

Além disso, da **Relação Fundamental da Trigonometria (RFT)**, sabemos que:

$$\boldsymbol{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$$

Consequentemente:

$$\boldsymbol{sen^2\theta = 1 - cos^2\theta}$$

$$\boldsymbol{cos^2\theta = 1 - sen^2\theta}$$

Portanto:

$$\boldsymbol{\cos 2\theta}$$

$$= \cos^2\theta - \boldsymbol{sen^2\theta}$$

$$= \cos^2\theta - (\boldsymbol{1 - cos^2\theta})$$

$$= \boldsymbol{2\cos^2\theta - 1}$$

$$\boldsymbol{\cos 2\theta}$$

$$= \boldsymbol{\cos^2\theta} - sen^2\theta$$

$$= (\boldsymbol{1 - sen^2\theta}) - sen^2\theta$$

$$= \boldsymbol{1 - 2sen^2\theta}$$

(Pref SJQM/2019) No estudo da trigonometria, as identidades são de muita importância para a resolução de alguns problemas. Para todos os valores x, a expressão $(senx)^2 - (cosx)^2$ é idêntica à seguinte expressão:

a) $-sen(2x)$

b) 1

c) $-cos(2x)$

d) -1

Comentários:

A partir da identidade do arco duplo para o cosseno, temos que:

$$cos\ 2x = \cos^2 x - sen^2 x$$

Note que a expressão presente no enunciado corresponde a $-\cos 2x$.

$$\boldsymbol{(senx)^2 - (cosx)^2}$$
$$= sen^2 x - \cos^2 x$$
$$= -(\cos^2 x - sen^2 x)$$
$$\boldsymbol{= -\cos(2x)}$$

Gabarito: Letra C.

(EEAR/2021) Dado $tan(x) + cotg(x) = 5/2$, determine $\sin 2x$

a) 2/5

b) 4/5

c) 3/7

d) 9/7

Comentários:

A partir do enunciado, sabemos que:

$$tan\ x + cotg\ x = \frac{5}{2}$$
$$\frac{sin\ x}{\cos x} + \frac{\cos x}{sin\ x} = \frac{5}{2}$$
$$\frac{sin^2 x + cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{5}{2}$$
$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{5}{2}$$
$$\boldsymbol{\sin x \cos x = \frac{2}{5}}$$

A partir da identidade do arco duplo para o seno, temos que:

$$\sin 2x = 2\, \mathbf{\sin x \cos x}$$
$$= 2.\frac{2}{5}$$
$$= \frac{4}{5}$$

Gabarito: Letra B.

(Pref. Jaguaribe/2020) Seja $sin(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ com $0 < k < \frac{\pi}{2}$. Assinale a alternativa que representa corretamente o valor de $E = \frac{1}{2} sin(2k).cos(2k)$.

a) $E = \frac{1}{25}$

b) $E = \frac{2}{25}$

c) $E = \frac{4}{25}$

d) $E = \frac{6}{25}$

Comentários:

Inicialmente, vamos obter o **cosseno** de k.

Sabemos que $\sin k = \frac{1}{\sqrt{5}}$. A partir da **Relação Fundamental da Trigonometria**, temos:

$$\sin^2 k + \cos^2 k = 1$$
$$\cos^2 k = 1 - \sin^2 k$$
$$\cos k = \pm\sqrt{1 - sen^2 k}$$

Como $0 < k < \frac{\pi}{2}$, k está no primeiro quadrante. Logo, o cosseno é positivo:

$$\cos k = +\sqrt{1 - sen^2 k}$$
$$\cos k = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}$$
$$\cos k = \sqrt{1 - \frac{1}{5}}$$
$$\cos k = \sqrt{\frac{4}{5}}$$
$$\cos k = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Sabemos que:

$$\boldsymbol{sin(2k)} = 2\sin k\ \cos k$$
$$= 2\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

$$\boldsymbol{cos(2k)} = \cos^2 k - sen^2 k$$
$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$$
$$= \frac{4}{5} - \frac{1}{5}$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

Logo, o valor de E é dado por:

$$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{sin(2k)}.\boldsymbol{cos(2k)}$$
$$= \frac{1}{2}.\boldsymbol{\frac{4}{5}}.\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$
$$= \frac{6}{25}$$

Gabarito: Letra D.

Identidades do arco metade

Uma vez que se tem determinado um ângulo θ, pode-se obter o **seno**, o **cosseno** e a **tangente** de $\frac{\theta}{2}$ por meio das seguintes identidades:

$$\text{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

Por meio dessas fórmulas, os sinais do **seno**, do **cosseno** e da **tangente** são definidos por meio da identificação do quadrante de $\frac{\theta}{2}$.

Além disso, temos que o **seno**, o **cosseno** e a **tangente de θ** **podem ser escritos em função de um único parâmetro: tan $\frac{\theta}{2}$**.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \qquad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

Destaco que as fórmulas desse tópico, relacionadas ao arco metade, apresentam uma **incidência quase zero** em provas de concursos públicos.

(IF Baiano/2017) Sabendo que $tan\left[\frac{\alpha}{2}\right] = 5$, onde tan significa função tangente, $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, o seno de α é igual a:

a) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{5}{13}$

c) $\frac{3}{13}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{1}{5}$

Comentários:

O seno de α pode ser escrito em função de $\tan\frac{\alpha}{2}$ por meio da seguinte identidade:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

Logo:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2.5}{1+5^2}$$

$$= \frac{10}{1+25}$$

$$= \frac{10}{26}$$

$$= \frac{5}{13}$$

Gabarito: Letra B.

(AFRFB/2014) O cosseno de um ângulo x, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, é igual a $-\frac{7}{25}$. Desse modo, a tangente de $\frac{x}{2}$ é igual a:

a) $-\frac{4}{3}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $-\frac{3}{2}$

d) $\frac{3}{23}$

e) 1

Comentários:

Sabemos que:

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Como x está entre $\frac{\pi}{2}$ e π, temos que $\frac{x}{2}$ está entre $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$. Consequentemente, a tangente de $\frac{\pi}{2}$ será positiva. Ficamos com:

$$\tan\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{7}{25}\right)}{1+\left(-\frac{7}{25}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{1-\frac{7}{25}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{25+7}{25}}{\frac{25-7}{25}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{25+7}{25}}{\frac{25-7}{25}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{32}{25}}{\frac{18}{25}}}$$

$$= \sqrt{\frac{32}{18}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9}}$$

$$= \frac{4}{3}$$

Gabarito: Letra B.

Transformação da soma em produto

Considere dois ângulos A e B. As identidades a seguir transformam somas e diferenças trigonométricas de A e B em produtos trigonométricos de $\frac{A+B}{2}$ e $\frac{A-B}{2}$.

TOME NOTA!

$$sen\ A + sen\ B = 2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$sen\ A - sen\ B = 2sen\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A - \cos B = -2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Destaco que as fórmulas desse capítulo, relacionadas a transformação de soma em produto, apresentam uma **incidência muito baixa** em provas de concursos públicos.

(Pref. Crato/2021) A expressão $sen\ 90° - sen\ 80°$ é equivalente a

a) $2sen\ 85° \cdot cos\ 5°$

b) $2sen75° \cdot cos\ 15°$

c) $2sen\ 55° \cdot cos\ 25°$

d) $2sen\ 10° \cdot cos\ 80°$

e) $2 \cdot sen5° \cdot cos\ 85°$

Comentários:

Para resolver esse problema, podemos utilizar a fórmula a seguir:

$$sen\ A - sen\ B = 2sen\ \left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Fazendo $A = 90°$ e $B = 80°$, temos:

$$\boldsymbol{sen\ 90° - sen\ 80°} = 2sen\ \left(\frac{90° - 80°}{2}\right)\cos\left(\frac{90° + 80°}{2}\right)$$

$$= 2sen\ \left(\frac{10°}{2}\right)\cos\left(\frac{170°}{2}\right)$$

$$= \boldsymbol{2sen\ 5°.\cos 85°}$$

Gabarito: Letra E.

(Pref. Riacho da Cruz/2017) O valor de

$$\frac{\sin 48° - \sin 12°}{\cos 48° - \cos 12°}$$

é igual a

a) $\frac{3}{2}$

b) $-\sqrt{3}$

c) $tg\ 36°$

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Comentários:

Para resolver esse problema, podemos utilizar as fórmulas a seguir:

$$sen\ A - sen\ B = 2sen\ \left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\cos A - \cos B = -2sen\ \left(\frac{A+B}{2}\right)sen\ \left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Fazendo $A = 48°$ e $B = 12°$, temos:

$$\boldsymbol{sen\ 48° - sen\ 12°} = 2sen\left(\frac{48° - 12°}{2}\right)\cos\left(\frac{48° + 12°}{2}\right)$$

$$= 2sen\left(\frac{36°}{2}\right)\cos\left(\frac{60°}{2}\right)$$

$$= 2sen\ (18°)\cos(30°)$$

$$= 2sen\ 18°.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{3}sen\ 18°}$$

$$\boldsymbol{\cos 48° - \cos 12°} = -2sen\left(\frac{48° + 12°}{2}\right)sen\left(\frac{48° - 12°}{2}\right)$$

$$= -2sen\left(\frac{60°}{2}\right)sen\left(\frac{36°}{2}\right)$$

$$= -2sen\ (30°)sen\ (18°)$$

$$= -2.\frac{1}{2}\ sen\ 18°$$

$$\boldsymbol{= -sen\ 18°}$$

Logo, a expressão requerida é dada por:

$$\boldsymbol{\frac{\sin 48° - \sin 12°}{\cos 48° - \cos 12°}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}sen\ (18°)}{-sen\ (18°)}}$$

$$= \boldsymbol{-\sqrt{3}}$$

Gabarito: Letra B.

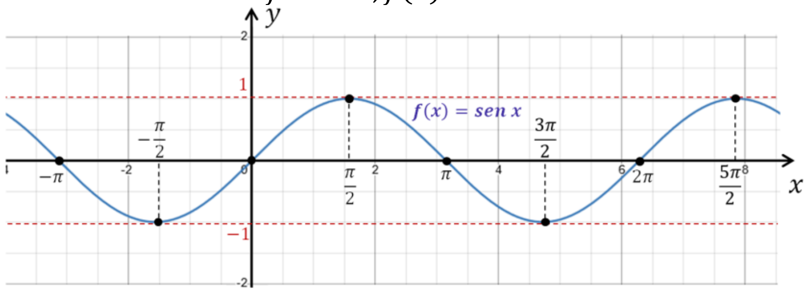
Funções Trigonométricas

Funções Trigonométricas

Funções trigonométricas básicas

Função seno

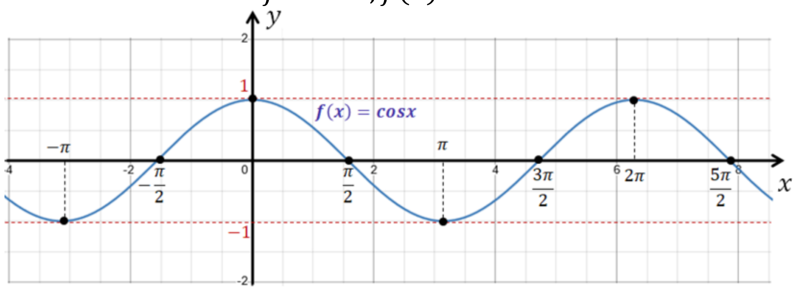
$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = sen\, x$$



- Imagem: $Im(f) = [-1, 1]$.
- É periódica, com período igual a 2π.
- É uma função **ímpar**.

Função cosseno

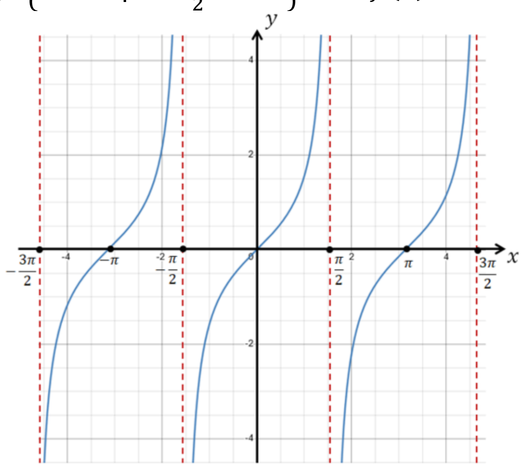
$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = cos\, x$$



- Imagem: $Im(f) = [-1, 1]$.
- É periódica, com período igual a 2π.
- É uma função **par**.

Função tangente

$$f: \left\{x \in \mathrm{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi\right\} \to R, f(x) = tan\, x$$



- Imagem: $Im(f) = \mathrm{R}$.
- É periódica, com período igual a π.
- É uma função **ímpar**.

Gráficos provenientes da função seno e cosseno

$$f(x) = a.sen\,(bx + c) + d$$

ou

$$f(x) = a.cos\,(bx + c) + d$$

- O coeficiente a **altera a amplitude** da função trigonométrica;
- O coeficiente b **altera o período** da função trigonométrica;
- O coeficiente c trata de uma **translação horizontal** da função trigonométrica; e
- O coeficiente d trata de uma **translação vertical** da função trigonométrica.

$$Amplitude = 2.|a|$$

$$Período = \frac{2\pi}{|b|}$$

A **inclusão da constante c** faz com que o gráfico seja transladado **horizontalmente** em $\frac{c}{b}$ **unidades**.

- Se $\frac{c}{b} < 0$, a translação horizontal é **para a direita**; e
- Se $\frac{c}{b} > 0$, a translação horizontal é **para a esquerda**.

A **inclusão da constante d** faz com que o gráfico seja transladado **verticalmente** em d **unidades**.

- Se $d < 0$, a translação vertical é **para baixo**; e
- Se $d > 0$, a translação vertical é **para cima**.

$$d = \frac{f_{MAX} + f_{MIN}}{2}$$

Valores máximos e mínimos

$$-1 \leq sen\,(bx + c) \leq 1$$

$$-1 \leq cos\,(bx + c) \leq 1$$

$$f(x) = \alpha.sen\,(bx + c) + \beta \cos(bx + c)$$

$$\rightarrow f_{MAX} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\rightarrow f_{MIN} = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Funções trigonométricas inversas

Função arco-seno

$$h: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], h(x) = arcsen\,x$$

- Devemos entender $arcsen\,x$ como "**o arco cujo seno é x**".
- Sendo o contradomínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, **a resposta da função $arcsen\,x$ deve ser um arco entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, inclusive**.

Função arco-cosseno

$$h: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], h(x) = arccos\,x$$

- Devemos entender $arccos\,x$ como "**o arco cujo cosseno é x**".
- Sendo o contradomínio $[0, \pi]$, **a resposta da função deve ser um arco entre 0 e π, inclusive**.

Função arco-tangente

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, h(x) = arctan\,x$$

- Devemos entender $arctan\,x$ como "**o arco cuja tangente é x**".
- Sendo o contradomínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, **a resposta da função deve ser um arco entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, sem considerar as extremidades do intervalo**.

Funções trigonométricas básicas

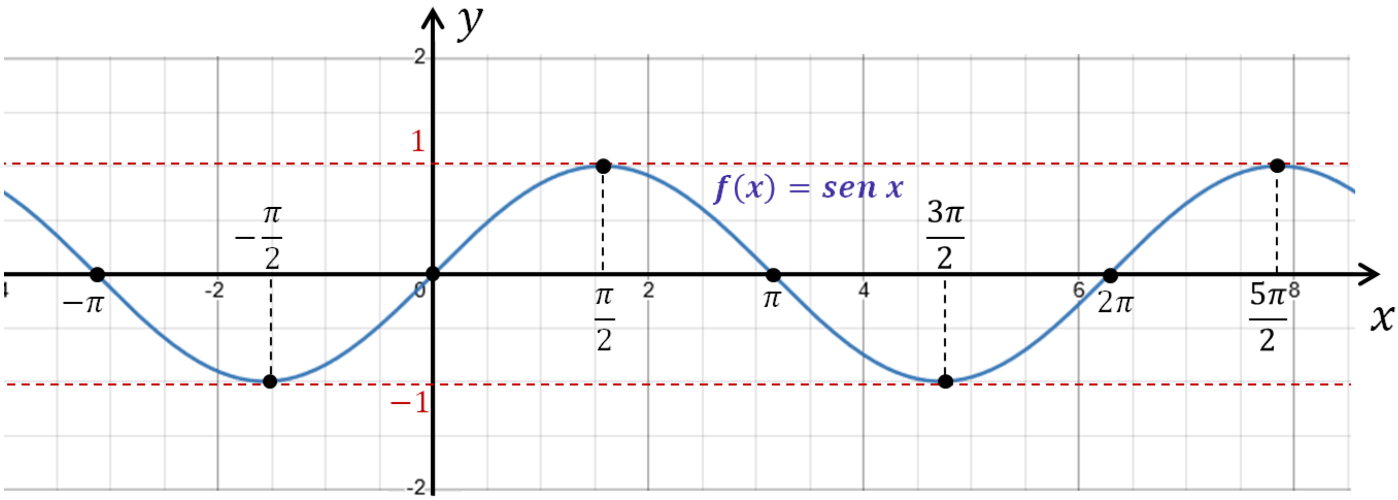
Nesse momento, vamos estudar os **gráficos básicos** de $\boldsymbol{sen\ x}$, $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{x}$ e $\mathbf{tan}\ \boldsymbol{x}$.

Função seno

A **função seno** é uma função que associa cada valor real x ao seno desse valor x.

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = sen\ x$$

A seguir, observe o gráfico de $f(x) = sen\ x$.



Perceba que:

- Para $\boldsymbol{x = 0}$, temos $\boldsymbol{f(0)} = sen\ 0 = \mathbf{0}$;
- Para $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$, temos $\boldsymbol{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} = sen\ \frac{\pi}{2} = \mathbf{1}$;
- Para $\boldsymbol{x = \pi}$, temos $\boldsymbol{f(\pi)} = sen\ \pi = \mathbf{0}$;
- Para $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{2}}$, temos $\boldsymbol{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = sen\ \frac{3\pi}{2} = \mathbf{-1}$; e
- Para $\boldsymbol{x = 2\pi}$, temos $\boldsymbol{f(2\pi)} = sen\ 2\pi = \mathbf{0}$.

Observando o gráfico da função seno, em consonância com o ciclo trigonométrico, temos que:

- De $\boldsymbol{x = 0}$ **a** $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$, a função seno é **crescente**, variando de 0 a 1;
- De $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$ **a** $\boldsymbol{x = \pi}$, a função seno é **decrescente**, variando de 1 a 0;
- De $\boldsymbol{x = \pi}$ **a** $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{2}}$, a função seno ainda é **decrescente**, variando de 0 a -1; e
- De $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{2}}$ **a** $\boldsymbol{x = 2\pi}$, a função seno é **crescente**, variando de -1 a 0.

Por meio do gráfico, bem como por meio do ciclo trigonométrico, percebe-se que o seno de um ângulo pode variar de -1 até 1. Portanto:

$$-1 \leq sen\ x \leq 1$$

Logo, a **imagem da função $sen\ x$** é:

$$\boldsymbol{Im(f) = [-1, 1]}$$

Note, ainda, que o gráfico de $sen\ x$ é uma repetição de tudo que acontece entre $x = 0$ e $x = 2\pi$. Isso significa que a função **$f(x) = senx$ é periódica**, **com período igual a 2π**:

$$2\pi - 0 = 2\pi$$

Consequentemente, para qualquer valor k inteiro, temos:

$$sen\ (x) = sen\ (x + k.2\pi)$$

Em outras palavras, se somarmos k voltas completas ao ângulo x, o seno apresenta o mesmo valor. O mesmo vale para subtração de voltas completas, caso em que temos k negativo.

Destaca-se, ainda, que a função **$f(x) = sen\ x$ é uma função ímpar**, pois a seguinte igualdade é válida para todo x real:

$$f(-x) = -f(x)$$

Isso porque, como vimos no tópico de **identidades par/ímpar**, temos:

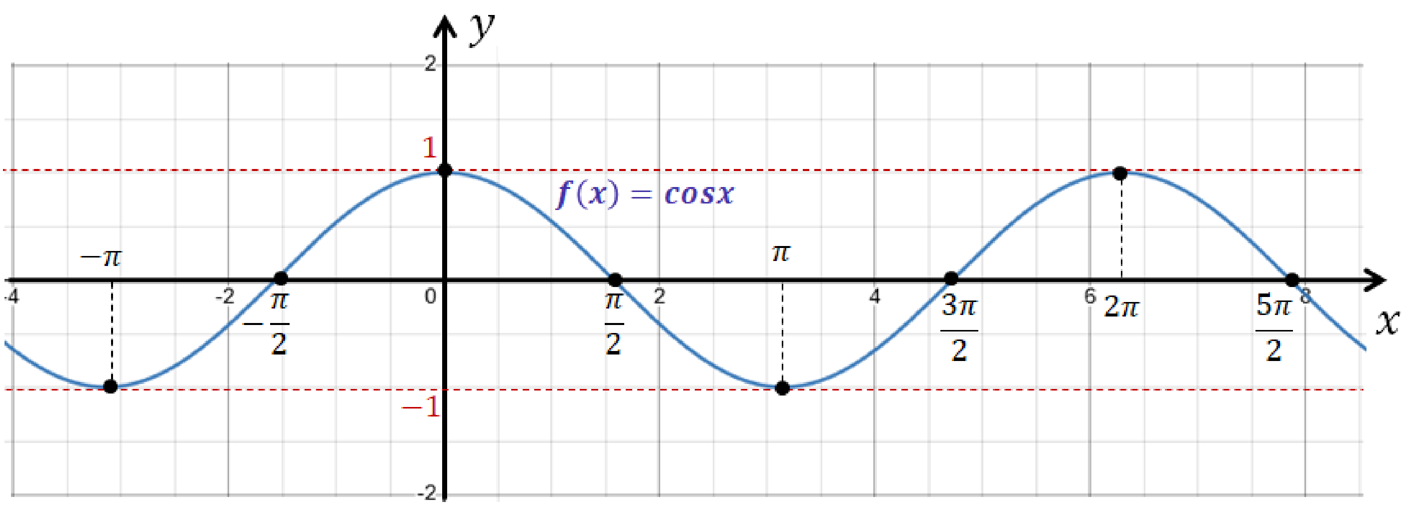
$$sen\ (-x) = -sen(x)$$

Função cosseno

A **função cosseno** é uma função que associa cada valor real x ao cosseno desse valor x.

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = cos\ x$$

A seguir, observe o gráfico de $f(x) = cos\ x$.



Perceba que:

- Para $\boldsymbol{x = 0}$, temos $\boldsymbol{f(0)} = cos\ 0 = \mathbf{1}$;
- Para $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$, temos $\boldsymbol{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} = cos\ \frac{\pi}{2} = \mathbf{0}$;
- Para $\boldsymbol{x = \pi}$, temos $\boldsymbol{f(\pi)} = sen\ \pi = \mathbf{-1}$;
- Para $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{2}}$, temos $\boldsymbol{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = sen\ \frac{3\pi}{2} = \mathbf{0}$; e
- Para $\boldsymbol{x = 2\pi}$, temos $\boldsymbol{f(2\pi)} = sen\ 2\pi = \mathbf{1}$.

Observando o gráfico da função cosseno, em consonância com o ciclo trigonométrico, temos que:

- De $\boldsymbol{x = 0}$ a $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$, a função cosseno é **decrescente**, variando de 1 a 0;
- De $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$ a $\boldsymbol{x = \pi}$, a função cosseno ainda é **decrescente**, variando de 0 a -1;
- De $\boldsymbol{x = \pi}$ a $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{2}}$, a função cosseno é **crescente**, variando de -1 a 0; e
- De $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{2}}$ a $\boldsymbol{x = 2\pi}$, a função cosseno ainda é **crescente**, variando de 0 a 1.

Por meio do ciclo trigonométrico, percebe-se que o cosseno de um ângulo pode variar de -1 até 1. Portanto:

$$-1 \leq cos\ x \leq 1$$

Logo, a **imagem da função $\boldsymbol{cos\ x}$** é:

$$\boldsymbol{Im(f) = [-1, 1]}$$

Note, ainda, que o gráfico de $cos\ x$ é uma repetição de tudo que acontece entre $x = 0$ e $x = 2\pi$. Isso significa que a função **$\boldsymbol{f(x) = cos\ x}$ é periódica**, **com período igual a $\boldsymbol{2\pi}$**:

$$2\pi - 0 = 2\pi$$

Consequentemente, para qualquer valor k inteiro, temos:

$$cos\ (x) = cos\ (x + k.2\pi)$$

Em outras palavras, se somarmos k voltas completas ao ângulo x, o cosseno apresenta o mesmo valor. O mesmo vale para subtração de voltas completas, caso em que temos k negativo.

Destaca-se, ainda, que a função **$\boldsymbol{f(x) = cos\ x}$ é uma função par**, pois a seguinte igualdade é válida para todo x real:

$$f(-x) = f(x)$$

Isso porque, como vimos no tópico de **identidades par/ímpar**, temos:

$$cos\ (-x) = cos\ (x)$$

Função tangente

A **função tangente** é uma função que associa um valor real x à tangente desse valor x.

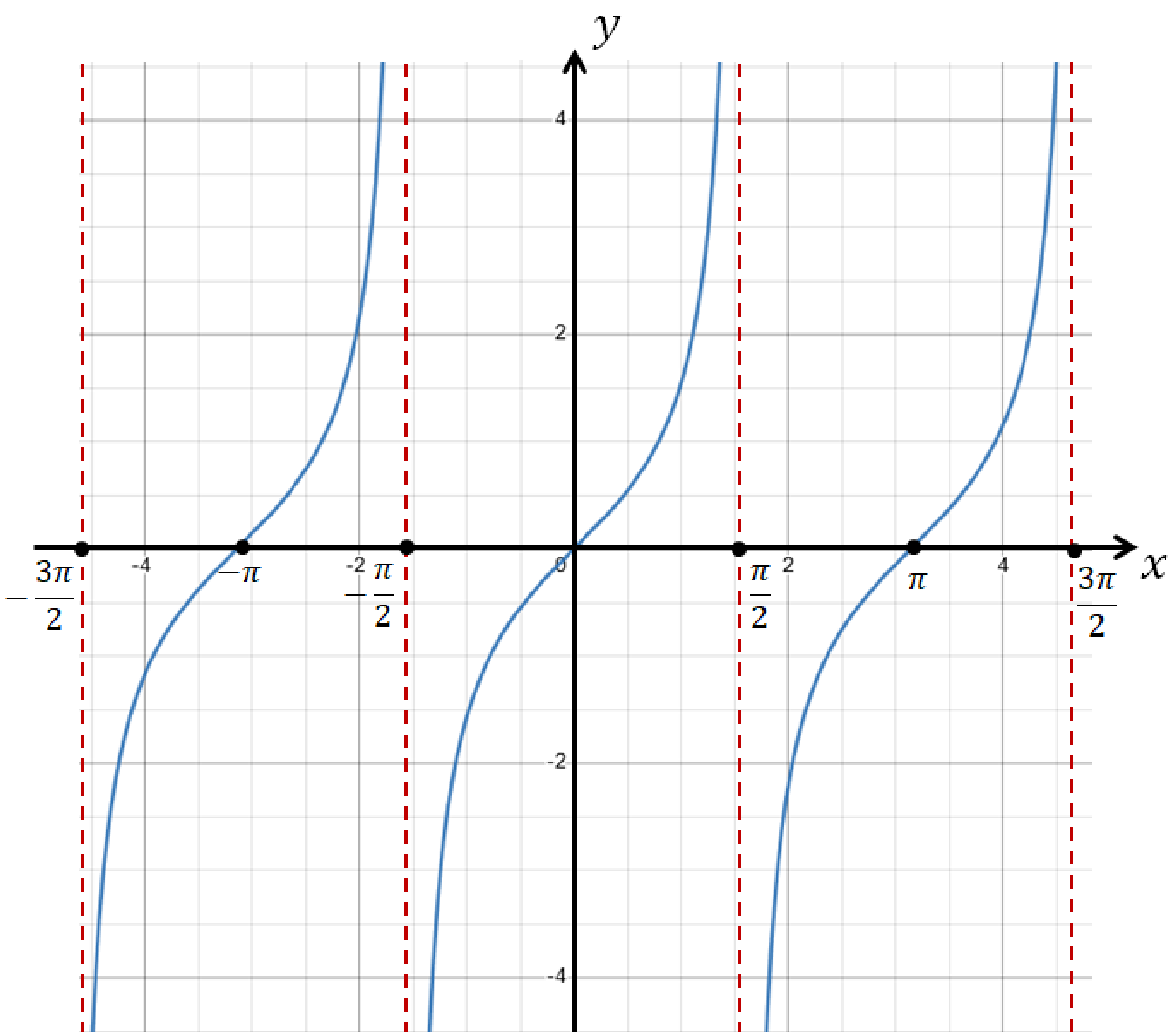
$$f: \boldsymbol{D} \rightarrow R, f(x) = tan\ x$$

O **domínio $\boldsymbol{D}$ da função tangente** são os números reais **excetuando-se** os números da forma $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + k.\pi}$, sendo k um número inteiro.

$$D = \left\{x \ \in \mathrm{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi\right\}$$

Isso ocorre porque, **para valores de $\boldsymbol{x}$ da forma $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + k.\pi}$, a tangente de $\boldsymbol{x}$ não é definida**.

A seguir, observe o gráfico de $f(x) = tan\ x$.



Por meio do gráfico, bem como por meio do ciclo trigonométrico, percebe-se que a tangente de um ângulo pode variar de $-\infty$ até $+\infty$. Portanto, **a imagem de $\boldsymbol{f(x) = \tan x}$ é o conjunto dos números reais**.

$$\boldsymbol{Im(f) = \mathrm{R}}$$

Note, ainda, que o gráfico de $tan\,x$ é uma repetição de tudo que acontece entre $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$. Isso significa que a função **$f(x) = tanx$ é periódica**, **com período igual a π**:

$$\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Consequentemente, para qualquer valor k inteiro, temos:

$$\tan x = \tan(x + k.\pi)$$

Destaca-se, ainda, que a função **$f(x) = tan\,x$ é uma função ímpar**, pois a seguinte igualdade é válida para todo x real:

$$f(-x) = -f(x)$$

Isso porque, como vimos no tópico de **identidades par/ímpar**, temos:

$$tan\,(-x) = -tan(x)$$

(Pref. Ipiranga de GO/2020) Assinale a opção verdadeira:

a) A função cosseno é uma função ímpar.

b) A função seno é uma função ímpar.

c) O domínio da função seno é $[-1{,}1]$.

d) A imagem da função seno é $(-1, 1)$.

Comentários:

Vamos analisar cada uma das alternativas.

a) A função cosseno é uma função ímpar. ERRADO.

A função cosseno é uma função **par**, pois:

$$\cos(-x) = \cos x$$

b) A função seno é uma função ímpar. CERTO.

A função seno é uma função **ímpar**, pois:

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x$$

c) O domínio da função seno é $[-1, 1]$. ERRADO.

O domínio da função seno é o conjunto dos números reais

d) A imagem da função seno é $(-1, 1)$. ERRADO.

A alternativa apresenta como conjunto imagem da função seno o intervalo aberto $(-1, 1)$. Na verdade, o conjunto imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$.

Gabarito: Letra B.

(EEAR/2012) Sejam as sentenças:

I- período $p = \pi$

II - domínio $D = \mathrm{R}$

III conjunto imagem $Im = [-1, 1]$

Em relação à função tangente, é (são) verdadeira(s) a(s) sentença(s)

a) I.

b) III.

c) I e II.

d) II e III.

Comentários:

Vamos analisar cada uma das sentenças.

I- período $\boldsymbol{p = \pi}$. **CERTO**.

Conforme visto na teoria, o período da função $\tan x$ é π.

II - domínio $\boldsymbol{D = \mathrm{R}}$. **ERRADO**.

O **domínio $\boldsymbol{D}$ da função tangente** são os números reais **excetuando-se** os números da forma $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + k.\pi}$, sendo k um número inteiro.

$$D = \left\{x \in \mathrm{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi\right\}$$

III conjunto imagem $\boldsymbol{Im = [-1, 1]}$. **ERRADO**.

A tangente de um ângulo pode variar de $-\infty$ até $+\infty$. Portanto, **a imagem de $\boldsymbol{f(x) = \tan x}$ é o conjunto dos números reais**.

$$\boldsymbol{Im(f) = \mathrm{R}}$$

Apenas a sentença I é verdadeira. O **gabarito**, portanto, é **letra A**.

Gabarito: Letra A.

Gráficos provenientes da função seno e cosseno

Nesse momento, vamos tratar de funções trigonométricas das seguintes formas:

$$\boldsymbol{f(x) = a.sen\,(bx + c) + d}$$

ou

$$\boldsymbol{f(x) = a.cos\,(bx + c) + d}$$

Os coeficientes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ **e** $\boldsymbol{d}$ realizam as seguintes transformações nas funções trigonométricas básicas $\boldsymbol{sen\,x}$ e $\boldsymbol{\cos x}$:

- O coeficiente $\boldsymbol{a}$ **altera a amplitude** da função trigonométrica;
- O coeficiente $\boldsymbol{b}$ **altera o período** da função trigonométrica;
- O coeficiente $\boldsymbol{c}$ trata de uma **translação horizontal** da função trigonométrica; e
- O coeficiente $\boldsymbol{d}$ trata de uma **translação vertical** da função trigonométrica.

A seguir, vamos apresentar exemplos para essas quatro transformações. Destaca-se que ao utilizar o **seno** como exemplo, a mesma ideia valerá para a função **cosseno**, e vice-versa.

Alteração da amplitude

Entende-se como **amplitude** de uma função trigonométrica a **diferença entre o maior e o menor valor** que ela pode assumir.

Sabemos que a função $\boldsymbol{sen\,x}$ e a função $\boldsymbol{\cos x}$ variam de -1 a 1. A amplitude dessas duas funções trigonométricas básicas é:

$$Amplitude = 1 - (-1) = 2$$

O **coeficiente $\boldsymbol{a}$ altera a amplitude** das funções trigonométricas, de modo que a amplitude **passa a ser $\boldsymbol{2|a|}$**.

Por exemplo, para a função $\boldsymbol{f(x) = 3\cos x}$, o maior valor que $f(x)$ pode assumir ocorre quando o cosseno é igual a 1, e o menor valor que $f(x)$ pode assumir ocorre quando o cosseno é igual a -1. Logo, o maior e o menor valor assumidos por $\boldsymbol{f(x) = 3\cos x}$ são, respectivamente, **$\boldsymbol{3}$ e $\boldsymbol{-3}$**.

Portanto, a amplitude de $\boldsymbol{f(x) = 3\cos x}$ é:

$$Amplitude = \boldsymbol{3} - (\boldsymbol{-3}) = 6$$

Esse valor corresponde a $2|a|$:

$$Amplitude = 2|a| = 2.|3| = 6$$

Já para a função $\boldsymbol{f(x) = -4\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1}$, o maior valor que $f(x)$ pode assumir ocorre quando o cosseno é igual a -1, e o menor valor que $f(x)$ pode assumir ocorre quando o cosseno é igual a 1. Logo, o maior e o menor valor assumidos por $\boldsymbol{f(x) = -4\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1}$ são, respectivamente, **5 e -3**.

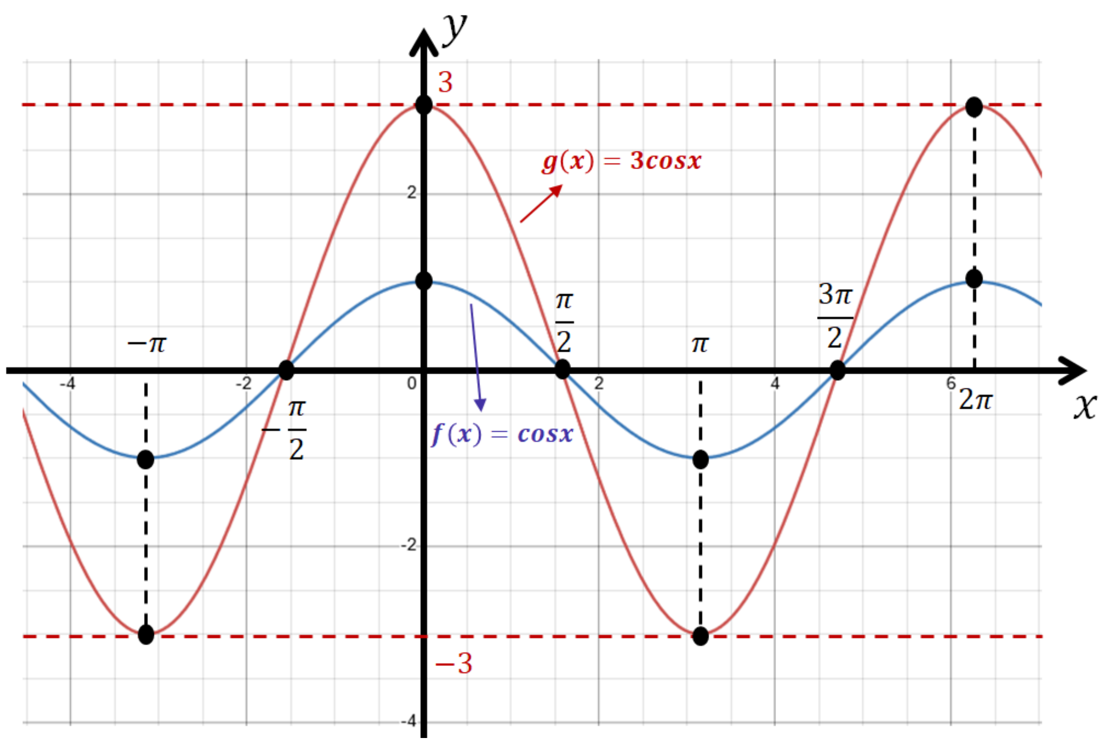
Portanto, a amplitude de $\boldsymbol{f(x) = -4\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1}$ é:

$$Amplitude = \mathbf{5} - (\mathbf{-3}) = 8$$

Esse valor corresponde a $2|a|$:

$$Amplitude = 2.|-4| = 2.4 = 8$$

O gráfico a seguir compara os gráficos de $\boldsymbol{\cos x}$ e $\boldsymbol{3\cos x}$.



Para uma função trigonométrica da forma $\boldsymbol{f(x) = a.sen\,(bx + c) + d}$ ou da forma $\boldsymbol{f(x) = a.cos\,(bx + c) + d}$, temos:

$$Amplitude = 2.|a|$$

Alteração do período

Entende-se como **período de uma função $f(x)$** o **menor valor p** em que:

$$f(x) = f(x+p), \text{ para todo } x \text{ do domínio de } f$$

De modo informal, temos que uma função apresenta o período p quando, graficamente, ela **repete a sua representação em intervalos iguais a p**.

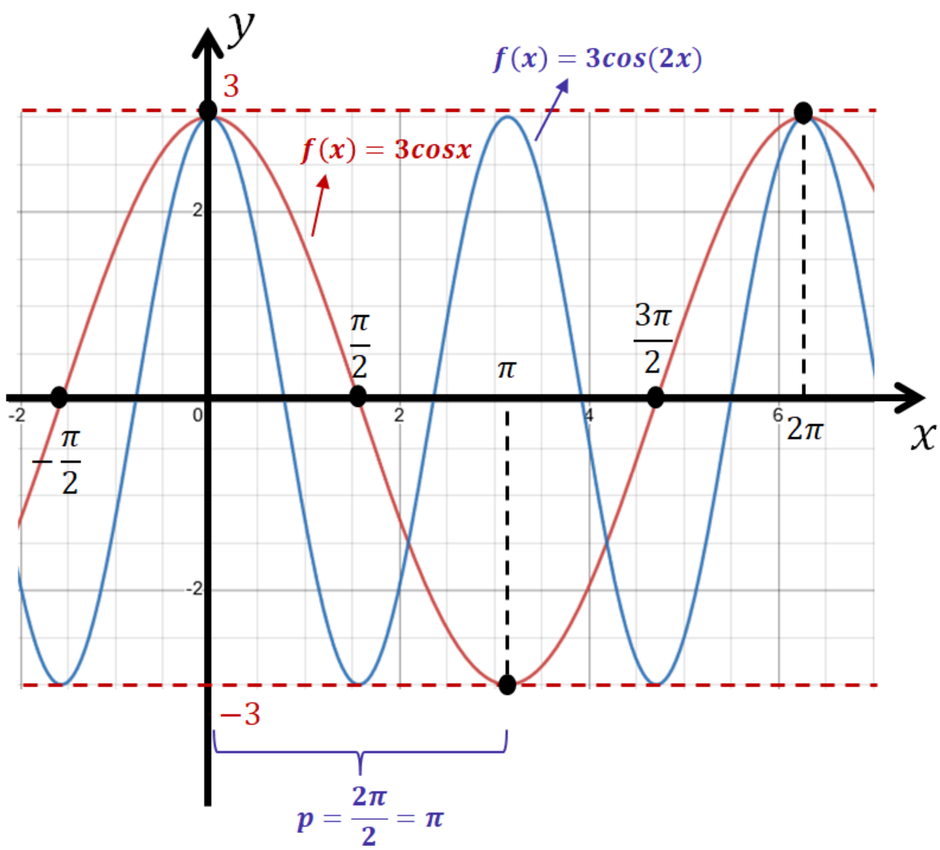
Por exemplo, a função $\boldsymbol{sen\ x}$ e a função $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{x}$ apresentam período $p = 2\pi$, pois o gráfico dessas funções é uma repetição de tudo que acontece entre $x = 0$ e $x = 2\pi$.

Para funções trigonométricas da forma $\boldsymbol{f(x) = a.sen\,(bx+c)+d}$ ou $\boldsymbol{f(x) = a.cos\,(bx+c)+d}$, o período dessas funções é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{|b|}$$

Compare, a seguir, os gráficos de $\boldsymbol{f(x) = 3cosx}$ e $\boldsymbol{g(x) = 3\cos(2x)}$. Note que o gráfico de $\boldsymbol{g(x) = 3\cos(2x)}$ é uma repetição de tudo que acontece entre $x = 0$ e $x = \pi$. Isso porque o seu período é:

$$p = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$



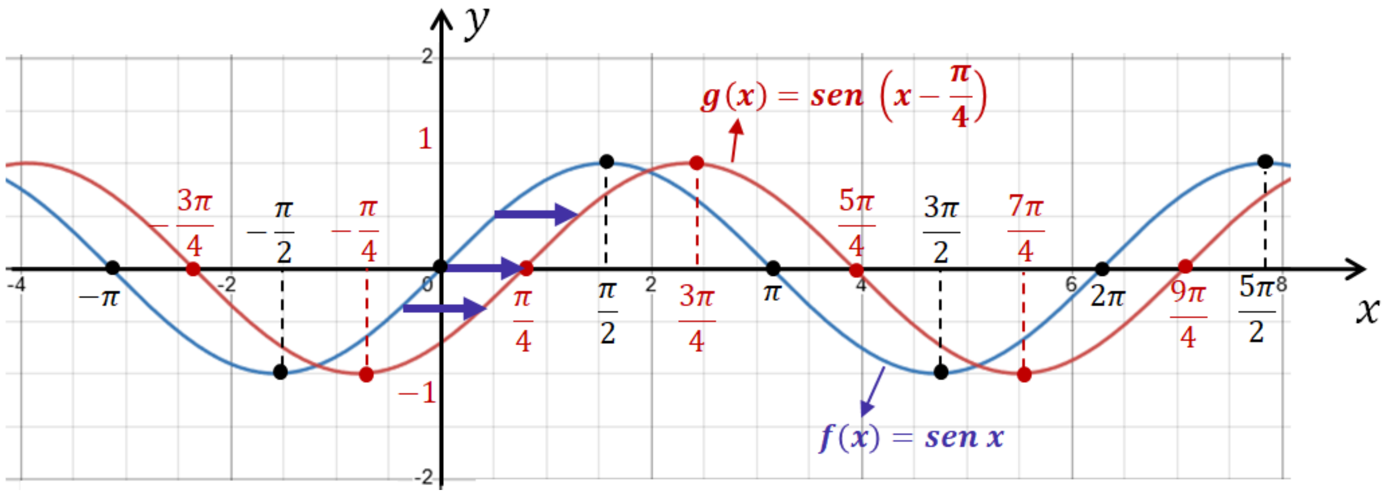
TOME NOTA!

Para uma função trigonométrica da forma $\boldsymbol{f(x) = a.sen\,(bx + c) + d}$ ou da forma $\boldsymbol{f(x) = a.cos\,(bx + c) + d}$, o período é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{|b|}$$

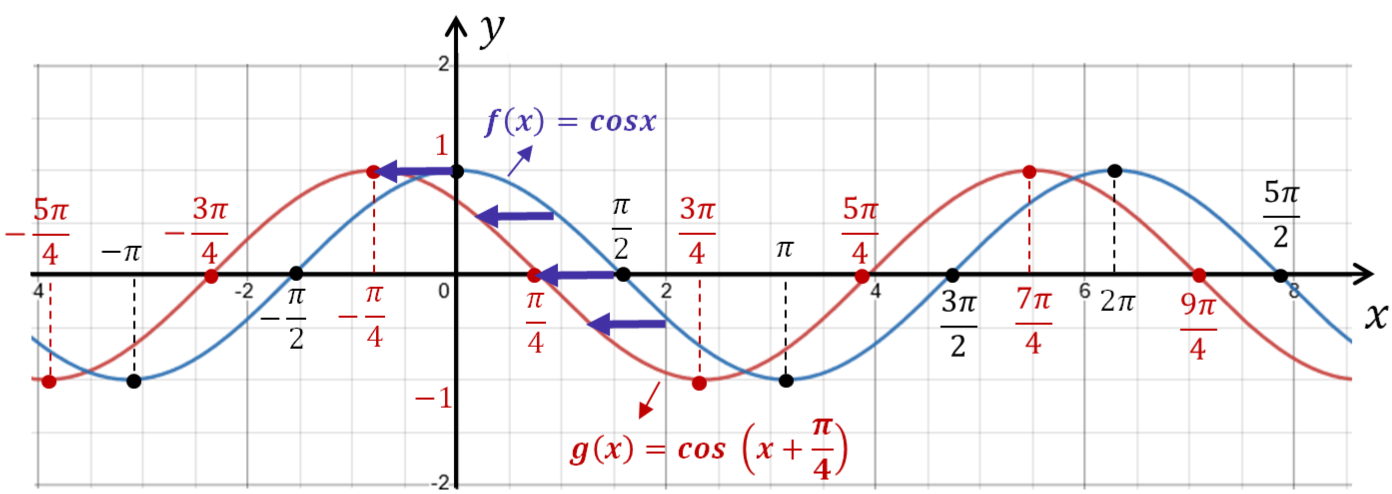
Translação horizontal

A seguir, apresentamos as funções $\boldsymbol{f(x) = sen\,x}$ e $\boldsymbol{g(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$.



Veja que o coeficiente $\boldsymbol{c = -\frac{\pi}{4}}$ transladou o gráfico em questão em $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ **unidades para a <u>direita</u>**.

A seguir, apresentamos as funções $\boldsymbol{f(x) = cos\,x}$ e $\boldsymbol{g(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.



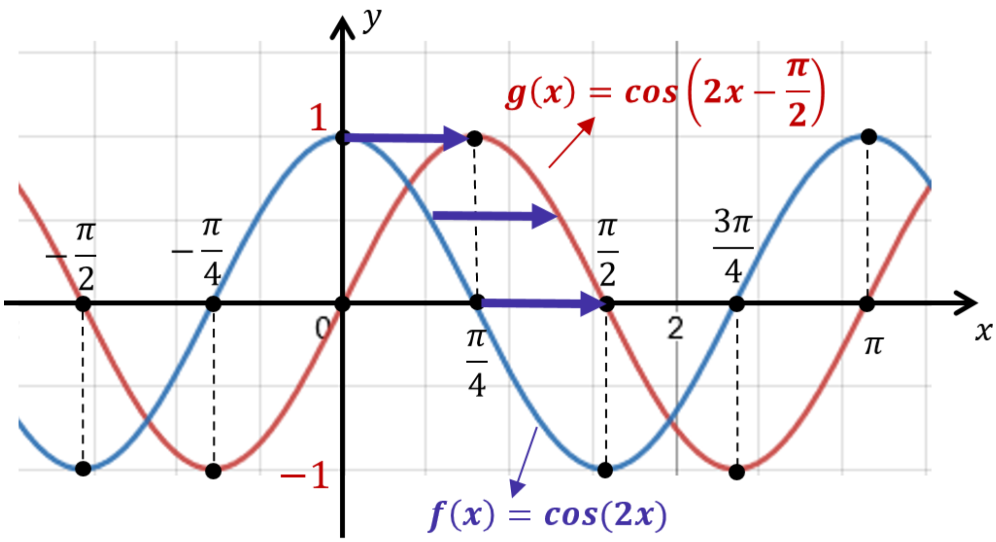
Veja que o coeficiente $c = +\frac{\pi}{4}$ transladou o gráfico em questão em $\frac{\pi}{4}$ **unidades para a <u>esquerda</u>**.

Vamos agora comparar os gráficos $\boldsymbol{f(x) = \cos(2x)}$ e $\boldsymbol{g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}$.

É muito comum que os alunos acreditem que $\boldsymbol{\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}$ é uma translação horizontal de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a direita com relação a $\boldsymbol{\cos(2x)}$. Note, porém, que:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Isso significa que estamos subtraindo apenas $\frac{\pi}{4}$ da variável x, de modo que $\boldsymbol{\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}$ **é uma translação horizontal de** $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ **unidades para a <u>direita</u>** com relação a $\boldsymbol{\cos(2x)}$.



O quadro a seguir resume a ideia da translação horizontal.

TOME NOTA!

A **inclusão da constante** $\boldsymbol{c}$ em uma função da forma $\boldsymbol{f(x) = a.sen\,(bx + c) + d}$ ou da forma $\boldsymbol{f(x) = a.cos\,(bx + c) + d}$ faz com que o **gráfico seja transladado horizontalmente em**:

$$\frac{c}{b} \textbf{ unidades}$$

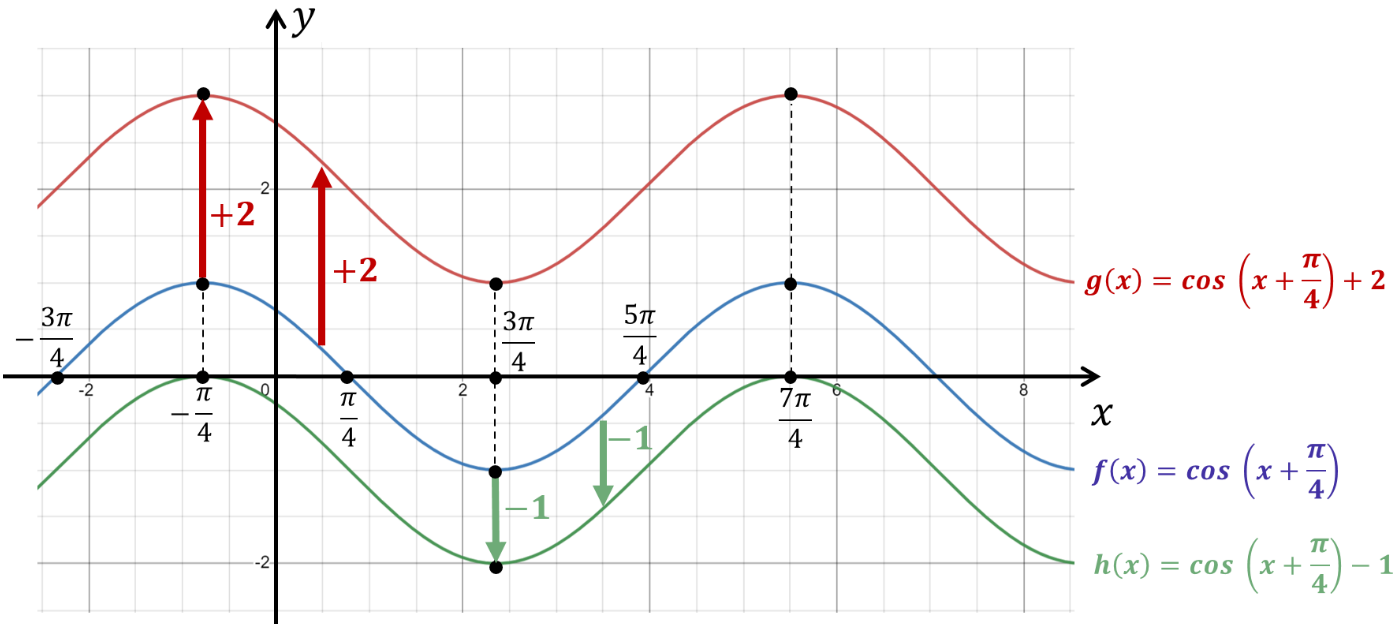
- Se $\frac{c}{b} < 0$, a translação horizontal é **para a direita**; e
- Se $\frac{c}{b} > 0$, a translação horizontal é **para a esquerda**.

Note que, no último exemplo:

$$\frac{c}{b} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{2} = -\frac{\pi}{4} \rightarrow \text{translação de} \frac{\pi}{4} \text{ para a direita}$$

Translação vertical

A seguir, temos as funções $\boldsymbol{f(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$, $\boldsymbol{g(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2}$ e $\boldsymbol{h(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1}$.



Note que, para $g(x)$, o coeficiente $d = +2$ transladou o gráfico verticalmente em 2 unidades para cima. Por outro lado, em $h(x)$, o coeficiente $d = -1$ transladou o gráfico verticalmente em 1 unidade para baixo.

Para obter o coeficiente d de uma função trigonométrica da forma $\boldsymbol{f(x) = a.sen\,(bx + c) + d}$ ou da forma $\boldsymbol{f(x) = a.cos\,(bx + c) + d}$, podemos fazer a média entre o valor máximo e o valor mínimo que a função $f(x)$ admite.

$$d = \frac{f_{MAX} + f_{MIN}}{2}$$

TOME NOTA!

A **inclusão da constante d** em uma função da forma $f(x) = a.sen\,(bx + c) + d$ ou da forma $f(x) = a.cos\,(bx + c) + d$ faz com que o **gráfico seja transladado verticalmente em d unidades**:

- Se $d < 0$, a translação vertical é **para baixo**; e
- Se $d > 0$, a translação vertical é **para cima**.

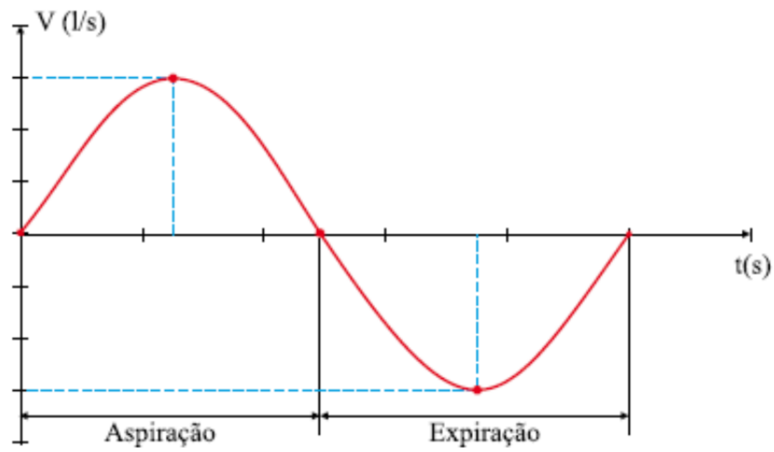
d é a **média entre o valor máximo e o valor mínimo** da função $f(x)$:

$$d = \frac{f_{MAX} + f_{MIN}}{2}$$

HORA DE PRATICAR!

(UNESP/2010) Em situação normal, observa-se que os sucessivos períodos de aspiração e expiração de ar dos pulmões em um indivíduo são iguais em tempo, bem como na quantidade de ar inalada e expelida.

A velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo está representada pela curva do gráfico, considerando apenas um ciclo do processo.



Sabendo-se que, em uma pessoa em estado de repouso, um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos e que a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 l/s, a expressão da função cujo gráfico mais se aproxima da curva representada na figura é:

a) $V(t) = \frac{2\pi}{5} sen\left(\frac{3}{5}t\right)$.

b) $V(t) = \frac{3}{5} sen(\frac{5}{2\pi}t)$.

c) $V(t) = 0{,}6\ cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

d) $V(t) = 0{,}6\ sen\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

e) $V(t) = \frac{5}{2\pi} cos(0{,}6t)$.

Comentários:

Note que, segundo o gráfico apresentado, a função $V(t)$ é igual a zero quanto $t = 0$.

Logo, como nas alternativas **não há nenhuma translação horizontal**, sabemos que **a função básica que rege $V(t)$ é o seno**. Além disso, sabendo-se que nas alternativas **também não há translação vertical**, podemos dizer que $V(t)$ é da seguinte forma:

$$V(t) = a. sen(bt)$$

O enunciado nos diz que **a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 l/s**. Isso significa que o valor máximo de $V(t)$ é 0,6 e o valor mínimo de $V(t)$ é $-0{,}6$. Logo, a amplitude é dada por:

$$Amplitude = 0{,}6 - (-0{,}6)$$
$$= 1{,}2$$

Sabemos que:

$$Amplitude = 2|a|$$
$$1{,}2 = 2|a|$$
$$|a| = 0{,}6$$

Como não temos nas alternativas $a = -0{,}6$, o valor do coeficiente a é 0,6:

$$\boldsymbol{a = 0,6}$$

Sabemos, ainda, que **um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos**. Em outras palavras, o período da função $V(t)$ é igual a 5. Logo:

$$p = \frac{2\pi}{|b|}$$
$$5 = \frac{2\pi}{|b|}$$
$$|b| = \frac{2\pi}{5}$$

Como não temos nas alternativas $b = -\frac{2\pi}{5}$, o valor do coeficiente b é $\frac{2\pi}{5}$:

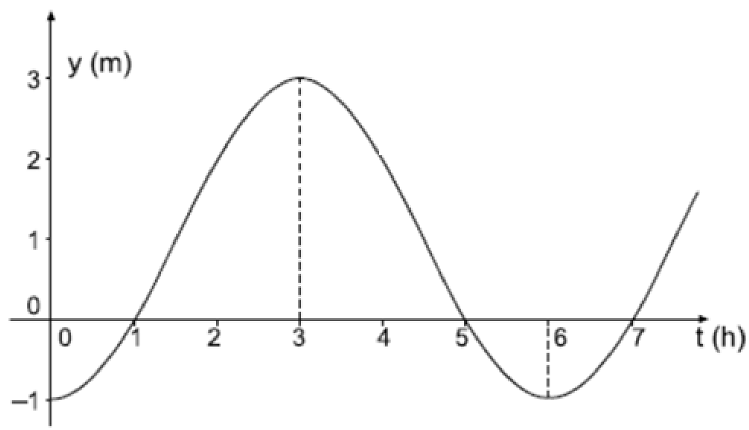
$$b = \frac{2\pi}{5}$$

Portanto, a expressão da função $V(t)$ é:

$$V(t) = 0,6.sen\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$$

Gabarito: Letra D.

(Pref. Alumínio/2016) Em certa época do ano, a maré baixa em uma cidade foi à meia-noite: 0h. A altura de água no porto dessa cidade é uma função periódica, pois oscila regularmente entre maré baixa e maré alta. Ou seja, a altura da maré aumenta até atingir um valor máximo (maré alta) e vai diminuindo até atingir um valor mínimo (maré baixa), para depois aumentar de novo até a maré alta, e assim por diante. Observe que o valor mínimo é 1 m abaixo do nível normal e o máximo é 3 m acima desse nível. O gráfico mostra a variação da altura $\boldsymbol{y}$ em metros em função do tempo $\boldsymbol{t}$, em horas.



A relação entre y e t pode ser expressa por

a) $y = 1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

b) $y = -1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

c) $y = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

d) $y = 1 + 2\,sen\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

e) $y = 2 + sen\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

Comentários:

Inicialmente, sabemos que a função requerida apresenta na sua composição um **seno** ou um **cosseno**. Nesse caso, podemos representar genericamente essa função das seguintes formas:

$$\boldsymbol{y = a.sen\,(bt + c) + d}$$

ou

$$\boldsymbol{y = a.cos\,(bt + c) + d}$$

Sabemos que o valor máximo da função é 3, e o valor mínimo é -1. Nesse caso, a amplitude é dada por:

$$Amplitude = 3 - (-1) = 4$$

Da teoria, sabemos que:

$$Amplitude = 2|a|$$

$$4 = 2a$$

$$|a| = 2$$

$$\boldsymbol{a = \pm 2}$$

Nesse momento, podemos **eliminar as alternativas C e E**, que apresentam os coeficientes a iguais a -1 e $+1$, respectivamente. **Resta-nos as alternativas A, B e D**.

Por meio do gráfico, observa-se que o período da função é $t = 6$ horas. Da teoria, sabemos que:

$$Período = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$6 = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$|b| = \frac{2\pi}{6}$$

$$|b| = \frac{\pi}{3}$$

Como não temos nas alternativas $b = -\frac{\pi}{3}$, o valor do coeficiente b é $\frac{\pi}{3}$:

$$\boldsymbol{b = \frac{\pi}{3}}$$

Nesse momento, podemos **eliminar a alternativa D**, que apresenta $b = \frac{\pi}{6}$. **Resta-nos as alternativas A e B**.

Além disso, sabemos que o deslocamento horizontal d é dado pela média dos valores admitidos pela função.

$$d = \frac{f_{MAX} + f_{MIN}}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

Nesse momento, podemos **eliminar a alternativa B**, que apresenta $d = -1$. **Resta-nos apenas a alternativa A**, que é o gabarito da questão.

Gabarito: Letra A.

Valores máximos e mínimos

Em provas que não exigem conhecimentos de cálculo diferencial, basicamente você precisa saber que tanto a **função seno** quanto a **função cosseno**, **quando não há restrição no domínio**, **variam de -1 a 1**:

$$-1 \leq sen\,(bx + c) \leq 1$$

$$-1 \leq cos\,(bx + c) \leq 1$$

Observe que, **se restringirmos o domínio da função**, **precisamos avaliar cada caso**.

Por exemplo, para o **domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**, a função $\boldsymbol{f(x) = sen\,x}$ apresenta o valor **mínimo igual a 0**, para $x = 0$, e o valor máximo igual a 1, para $x = \frac{\pi}{2}$.

Vejamos um exemplo de questão.

(Pref. Mafra/2021) Considere a expressão $4\sin^2(x) + 12sin(x) + 9$.

O valor máximo que a expressão pode atingir, para x um número real, é:

a) Menor que 14.

b) Maior que 14 e menor que 19.

c) Maior que 19 e menor que 24.

d) Maior que 24 e menor que 29.

e) Maior que 29.

Comentários:

Note que a questão não restringiu o intervalo de x, de modo que podemos dizer que o valor máximo que a função seno pode atingir é 1. Nesse caso, veja que:

- O valor máximo de $4\sin^2(x)$ ocorre para $\sin(x) = 1$; e
- O valor máximo de $12\sin(x)$ ocorre para $\sin(x) = 1$.

Logo, o valor máximo que a expressão $4\,\mathbf{sin^2(x)} + 12\mathbf{sin(x)} + 9$ pode atingir é:

$$= 4.\mathbf{1}^2 + 12.\mathbf{1} + 9$$

$$= 25$$

Gabarito: Letra D.

Considere agora uma função do seguinte formato:

$$f(x) = \boldsymbol{\alpha}.sen\,(bx + c) + \boldsymbol{\beta}\cos(bx + c)$$

É importante também que você saiba que o **valor máximo** desse tipo de função é dado por:

$$f_{MAX} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2}$$

Além disso, o **valor mínimo** desse tipo de função é dado por:

$$f_{MIN} = -\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2}$$

(PETROBRAS/2018) O maior valor que a expressão $E = senx + 2\sqrt{2}cosx$ pode assumir, para valores reais de x, é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 2

e) $2\sqrt{2}$

Comentários:

O enunciado apresenta uma função da seguinte forma:

$$f(x) = \mathbf{1}.sen\,x + \mathbf{2\sqrt{2}}\cos x$$

O valor máximo que essa função pode assumir é:

$$f_{MAX} = \sqrt{\mathbf{1}^2 + \left(\mathbf{2\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 8}$$

$$= \sqrt{9}$$

$$= 3$$

Gabarito: Letra C.

Funções trigonométricas inversas

Nesse momento, vamos estudar as funções **arco-seno**, **arco-cosseno** e **arco-tangente**.

Função arco-seno

Note que a função $\boldsymbol{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $\boldsymbol{f(x) = sen\ x}$ **não é sobrejetora nem injetora**.

INDO MAIS FUNDO!

Para que uma função seja **sobrejetora**, o **contradomínio deve ser igual à imagem**.

Sendo o contradomínio de f o conjunto dos números reais, temos que o elemento 5, por exemplo, pertence a esse contradomínio. Observe, porém, que não existe x pertencente ao domínio R tal que $f(x) = 5$. Assim, **o contradomínio de $\boldsymbol{f(x)}$ não é igual a sua imagem**, pois 5 pertence ao contradomínio e não pertence à imagem.

Além disso, para que a função seja **injetora**, **dois elementos distintos do domínio devem resultar em dois elementos distintos do contradomínio**.

Observe, porém, que para a função f em questão, temos $\frac{\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}$ e $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Portanto, $\boldsymbol{f(x)}$ **não é injetora**.

Como $\boldsymbol{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $\boldsymbol{f(x) = sen\ x}$ **não é sobrejetora nem injetora**, temos que ela **não é bijetora** e, portanto, **não é inversível**.

Observe, porém, que **se restringirmos o domínio a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e o contradomínio a $[-1, 1]$**, temos que a função seno é injetora e sobrejetora e, portanto, é inversível. Em outras palavras, a seguinte função é inversível:

$$\boldsymbol{g}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1];\ \boldsymbol{g(x) = sen\ (x)}$$

A inversa dessa função é a **função arco-seno**, representada por:

$$\boldsymbol{h}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \boldsymbol{h(x) = arcsen\ x}$$

Devemos entender $\boldsymbol{arcsen\ x}$ como "**o arco cujo seno é $\boldsymbol{x}$**". Sendo o contradomínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, **a resposta da função $\boldsymbol{arcsen\ x}$ deve ser um arco entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, inclusive**.

Por exemplo:

- $arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, pois $\frac{\pi}{6}$ é o arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é $\frac{1}{2}$; e
- $arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, pois $-\frac{\pi}{3}$ é o arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Função arco-cosseno

Assim como ocorreu na função seno, note que a função $\boldsymbol{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $\boldsymbol{f(x) = cos\ x}$ **não é sobrejetora nem injetora** e, portanto, **não é bijetora**. Consequentemente, essa função $\boldsymbol{f}$ **não é inversível**.

Observe, porém, que se **restringirmos o domínio a $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$** e o **contradomínio a $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$**, temos que a função cosseno é injetora e sobrejetora e, portanto, é inversível. Em outras palavras, a seguinte função é inversível:

$$\boldsymbol{g}: [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}] \to [-\mathbf{1}, \mathbf{1}];\ \boldsymbol{g(x) = cos\ (x)}$$

A inversa dessa função é a **função arco-cosseno**, representada por:

$$\boldsymbol{h}: [-\mathbf{1}, \mathbf{1}] \to [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}], \boldsymbol{h(x) = arccos\ x}$$

Devemos entender $\boldsymbol{arccos\ x}$ como "**o arco cujo cosseno é $\boldsymbol{x}$**". Sendo o contradomínio $[0, \pi]$, **a resposta da função deve ser um arco entre $\mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\pi}$, inclusive**.

Por exemplo:

- $arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, pois $\frac{\pi}{4}$ é o arco do intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno é $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e
- $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, pois $\frac{5\pi}{6}$ é o arco do intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno é $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Função arco-tangente

A função $\boldsymbol{f}: \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R} \mid \boldsymbol{x} \neq \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k.\pi}\right\} \to \mathbf{R}$ tal que $\boldsymbol{f(x)} = \mathbf{tan}\,\boldsymbol{x}$, apesar de ser sobrejetora, **não é injetora**. Isso porque **dois elementos distintos do domínio de $\boldsymbol{f}$ podem resultar em um mesmo elemento do contradomínio**. Por exemplo, para a função f em questão, temos que $0 \neq \pi$ e $f\ (0) = f\ (\pi)$.

Observe, porém, que se **restringirmos o domínio a $\left]-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right[$**, mantendo o contradomínio como sendo o conjunto dos reais, temos que a função tangente é injetora e sobrejetora e, portanto, é inversível. Em outras palavras, a seguinte função é inversível:

$$\boldsymbol{g}: \left]-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right[\to \mathbf{R};\ \boldsymbol{g(x) = tan\ (x)}$$

A inversa dessa função é a **função arco-tangente**, representada por:

$$\boldsymbol{h}: \mathbf{R} \to \left]-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right[, \boldsymbol{h(x) = arctan\ x}$$

Devemos entender ***arctan x*** como "**o arco cuja tangente é x**". Sendo o contradomínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, **a resposta da função deve ser um arco entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, sem considerar as extremidades do intervalo**.

Por exemplo:

- $arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, pois $\frac{\pi}{3}$ é o arco do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente é $\sqrt{3}$; e
- $arctan\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$, pois $-\frac{\pi}{4}$ é o arco do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente é -1.

(UNESP/2005) Considere o ângulo $\theta = arcsen\frac{3}{5}$, sendo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. O valor da $tg(\theta)$ é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{3}{5}$

d) 1

e) $\frac{3}{4}$

Comentários:

Note que não temos o valor do ângulo θ nem em graus nem em radianos. Sabemos, porém, que θ é o arco cujo seno é $\frac{3}{5}$ que está no intervalo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Logo:

$$sen\ \theta = \frac{3}{5}$$

Pela **Relação Fundamental da Trigonometria**, sabemos que:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2\theta = \frac{25-9}{25}$$

$$\cos^2\theta = \frac{16}{25}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$$

Como $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ é positivo. Logo:

$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

Portanto:

$$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

Gabarito: Letra E

(IFF/2018) Em relação às funções trigonométricas $sen\,x$ e $cos\,x$ e às suas inversas $arcsen\,x$ e $arccos\,x$, assinale a opção correta.

a) No intervalo $0 \leq x \leq \pi$, a função $sen\,x$ é injetiva e, assim, é possível definir a sua inversa $arcsen\,x$.

b) $arccos\,\left(cos\frac{\pi}{4}\right) = \pi/4$.

c) $arcsen\left(sen\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) A função $arccos\,x$ pode ser definida para todo x do intervalo $[0,\pi]$.

e) $sen\left(arcsen\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Comentários:

Vamos comentar cada uma das alternativas.

a) No intervalo $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{\pi}$, a função $\boldsymbol{sen\,x}$ é injetiva e, assim, é possível definir a sua inversa $\boldsymbol{arcsen\,x}$. ERRADO.

A função $sen\,x$ é injetora no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Nesse caso, considerando a função $g\colon\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ tal que $g(x) = sen\,x$, podemos definir a sua inversa do seguinte modo:

$$h\colon[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];\, h(x) = arcsen\,x$$

b) $\boldsymbol{arccos}\,\left(\boldsymbol{cos}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\right) = \boldsymbol{\pi}/\mathbf{4}$. CERTO. Este é o gabarito.

Note que:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo:

$$arccos\left(cos\frac{\pi}{4}\right) = arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Agora eu te pergunto: qual é o arco do intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$? É o arco $\frac{\pi}{4}$! Logo:

$$\boldsymbol{arccos\left(cos\frac{\pi}{4}\right)} = arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

c) $\boldsymbol{arcsen\left(sen\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$**. ERRADO.**

Note que:

$$sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo:

$$arcsen\left(sen\frac{\pi}{3}\right) = arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Agora eu te pergunto: qual é o arco do intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cujo seno é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$? É o arco $\frac{\pi}{3}$! Logo:

$$\boldsymbol{arcsen\left(sen\frac{\pi}{3}\right)} = arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

d) A função $\boldsymbol{arccos\ x}$ pode ser definida para todo $\boldsymbol{x}$ do intervalo $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$. ERRADO.

A função $arccos\, x$ pode ser definida para todo x do intervalo $[-1, 1]$. **O intervalo $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ é o contradomínio da função em questão**.

e) $\boldsymbol{sen\left(arcsen\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}}$**. ERRADO.**

Note que o arco do intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cujo seno é $\frac{1}{2}$ é dado por $\frac{\pi}{6}$. Assim:

$$arcsen\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Logo:

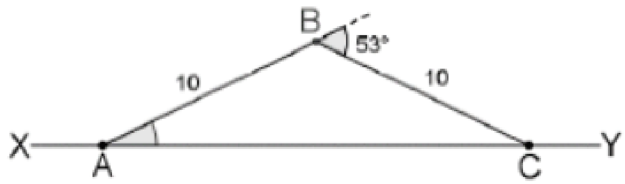
$$\boldsymbol{sen\left(arcsen\frac{1}{2}\right)} = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

Gabarito: Letra B.

Questões Comentadas - FGV

Trigonometria

1.(FGV/CGU/2022) Um avião percorria a trajetória reta XY da figura abaixo, de X para Y, quando o piloto percebeu turbulências à frente. Para evitá-las fez, no ponto A, um giro na trajetória para a esquerda e percorreu 10 km. No ponto B fez um giro de 53º para a direita e, ao percorrer mais 10 km, percebeu que tinha atingido o ponto C da trajetória inicial.



Dados:

Use o necessário,

$\boldsymbol{sen 37° = 0,6}$

$\boldsymbol{cos 37° = 0,8}$

$\boldsymbol{\sqrt{5} = 2,24}$

A distância entre os pontos A e C é, aproximadamente:

a) 16,4;

b) 16,7;

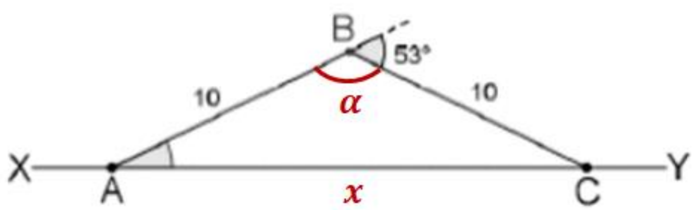
c) 17,1;

d) 17,5;

e) 17,9.

Comentários:

Considere que a distância entre os pontos A e C é x. Observe que esse lado é oposto ao ângulo $A\hat{B}C$, que chamaremos de α.



Note que o ângulo α é suplementar ao ângulo de 53^o. Logo:

$$\alpha = 180^{o} - 53^{o}$$

$$\alpha = 127^{o}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ABC, temos:

$$x^2 = 10^2 + 10^2 - 2.10.10. \cos \alpha$$

$$x^2 = 100 + 100 - 200 \cos 127^{o}$$

$$x^2 = 200 - 200 \cos 127^{o}$$

Não conhecemos o cosseno de 127^{o}. Para obter esse valor, vamos reduzir o ângulo ao primeiro quadrante e obter o cosseno por meio do **método prático** visto na teoria da aula.

Identificar o quadrante em que se encontra o ângulo y em questão

O ângulo $y = 127^{o}$ encontra-se no segundo quadrante (II).

Reduzir o ângulo y ao primeiro quadrante, obtendo o ângulo x

Como $y = 127^{o}$ está no segundo quadrante (II), temos:

$$y = 180^{o} - x$$

$$127^{o} = 180^{o} - x$$

$$x = 180^{o} - 127^{o}$$

$$x = 53^{o}$$

Obter o cosseno do ângulo x do primeiro quadrante

Note que o ângulo $x = 53^{o}$ é o ângulo complementar de 37^{o}. Logo:

$$\mathbf{\cos 53^{o}} = \text{sen}\, 37^{o} = \mathbf{0,6}$$

Atribuir o sinal para o cosseno de acordo com o quadrante em que se encontra o ângulo y original

Como o ângulo $y = 127^{o}$ encontra-se no segundo quadrante, o **cosseno é negativo**. Logo:

$$\boldsymbol{\cos 127^{o} = -0,6}$$

Agora que conhecemos o cosseno de 127^{o}, temos:

$$x^2 = 200 - 200 \cos 127^{o}$$

$$x^2 = 200 - 200. (-0,6)$$

$$x^2 = 200 + 120$$

$$x = \sqrt{320}$$

$$x = \sqrt{32 \times 10}$$

$$x = \sqrt{32 \times 2 \times 5}$$

$$x = \sqrt{64 \times 5}$$

$$x = \sqrt{64} \times \sqrt{5}$$

$$x = 8 \times \sqrt{5}$$

Segundo os dados do problema, $\sqrt{5} = 2{,}24$. Logo:

$$x = 8 \times 2{,}24$$

$$x = 17{,}92$$

Portanto, a distância entre os pontos A e C é, aproximadamente, 17,9.

Gabarito: Letra E.

2.(FGV/TCE-TO/2022) Sabendo-se que $cos\ x = \frac{1}{2}$, então $cos\ 20x$ é igual a:

a) 1

b) $-\frac{1}{2}$

c) 0

d) -1

e) 10

Comentários:

Considerando que x está no primeiro quadrante, como $\cos x = \frac{1}{2}$, temos $\boldsymbol{x = 30^0}$.

Nesse caso, o ângulo $20x$ é:

$$20x = 20 \times 30^{\circ} = 600^{\circ}$$

Queremos, **portanto**, **obter $\cos 600^{o}$**. Para tanto, vamos realizar a redução ao primeiro quadrante e obter o cosseno por meio do **método prático** visto na teoria da aula.

Identificar o quadrante em que se encontra o ângulo y em questão

Note que o ângulo em questão apresenta mais de uma volta (é maior do que 360^o). Nesse caso, vamos **subtrair um número inteiro de voltas para que o ângulo fique entre $\mathbf{0^o}$ e $\mathbf{360^o}$**.

Subtraindo uma volta de 600^o, temos:

$$600^o - 360^o$$

$$= 240^o$$

Temos que o ângulo de 240^o está entre 180^o e 270^o. Portanto, 240^o encontra-se no terceiro quadrante (III).

Reduzir o ângulo y ao primeiro quadrante, obtendo o ângulo x

Como $y = 240^o$ está no segundo terceiro (III), temos:

$$y = x + 180^o$$

$$240^o = x + 180^o$$

$$x = 240^o - 180^o$$

$$x = 60^o$$

Obter o <u>cosseno</u> do ângulo x do primeiro quadrante

$$cos\ 60^o = \frac{1}{2}$$

Atribuir o sinal para o <u>cosseno</u> de acordo com o quadrante em que se encontra o ângulo y original

Como o ângulo $y = 240^o$ encontra-se no terceiro quadrante, o **cosseno é negativo**. Logo:

$$\boldsymbol{cos\ 240^o = -\frac{1}{2}}$$

Consequentemente:

$$\mathbf{cos\ 20}\boldsymbol{x} = \cos 600^o = cos\ 240^o = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

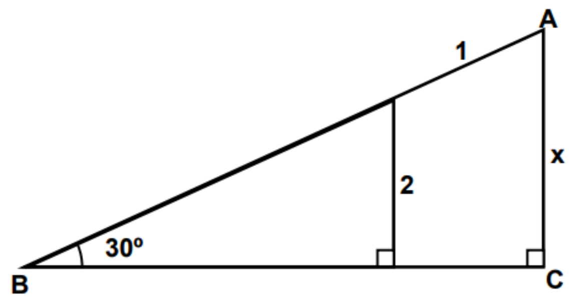
Observação: caso não considerássemos que x está no primeiro quadrante, sendo $\cos x = \frac{1}{2}$, poderíamos obter $\boldsymbol{x = 330^o}$. Nesse caso, teríamos $20x = 6600^o$.

Ao subtrair 18 voltas completas desse ângulo, obtém-se 120^o. Nesse caso, obteríamos a mesma resposta:

$$\mathbf{\cos 20x} = \cos 6600^o = \cos 120^o = \mathbf{-\frac{1}{2}}$$

Gabarito: Letra B.

3.(FGV/CODEBA/2010)



A figura ilustra um triângulo ABC, retângulo em C. O comprimento de AC é

a) $\frac{5}{2}$.

b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

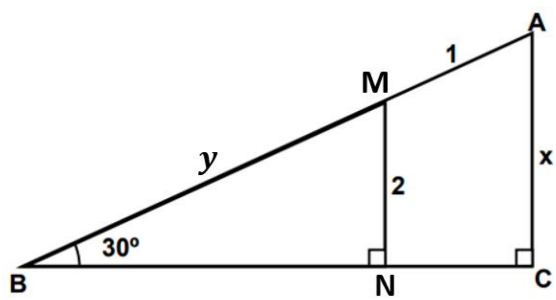
c) 3.

d) $3\sqrt{3}$

e)$\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Comentários:

A figura a seguir ilustra o triângulo ABC com os pontos M e N, sendo y o comprimento do segmento BM.



A partir do triângulo retângulo BMN, temos:

$$sen\ 30^o = \frac{2}{y}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{y}$$

$$y = 4$$

A partir do triângulo retângulo ABC, temos:

$$sen\ 30^{o} = \frac{x}{y+1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{4+1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{5}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Portanto, o comprimento de AC é $\frac{5}{2}$.

Gabarito: Letra A.

4.(FGV/PC MA/2012) Se α e β são as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, então:

a) $sen(\alpha + \beta) = 0$

b) $cos(\alpha + \beta) = 0$

c) $sen(\alpha - \beta) = 1$

d) $cos(\alpha - \beta) = 1$

e) $sen(\alpha) + sen(\beta) = 0$

Comentários:

Em um triângulo qualquer, a soma dos ângulos internos é igual a 180^{o}. No caso em questão, temos um triângulo retângulo com os ângulos α, β e 90^{o}. Logo:

$$\alpha + \beta + 90^{o} = 180^{o}$$

$$\alpha + \beta = 180^{o} - 90^{o}$$

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 90^{o}}$$

Logo:

$$\mathbf{cos(\alpha + \beta)} = \cos(90^{o}) = \mathbf{0}$$

Gabarito: Letra B.

5. (FGV/PM MA/2012) Na circunferência trigonométrica o arco x é tal que $sen(x) = 1$.

Então, $cos(2x)$ é igual a:

a) −2.

b) −1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

Comentários:

Considerando ângulos entre 0^o e 360^o, temos que, para $sen\ (x) = 1$, necessariamente $x = 90^o$. Logo:

$$\cos(2x) = \cos(2.90^o)$$

$$= \cos(180^o)$$

$$= -1$$

Gabarito: Letra B.

6. (FGV/SAD PE/2009) Se $cos\ x = -\frac{1}{2}$, então $cos\ 6x$ é igual a:

a) 0.

b) 1.

c) $\frac{1}{2}$.

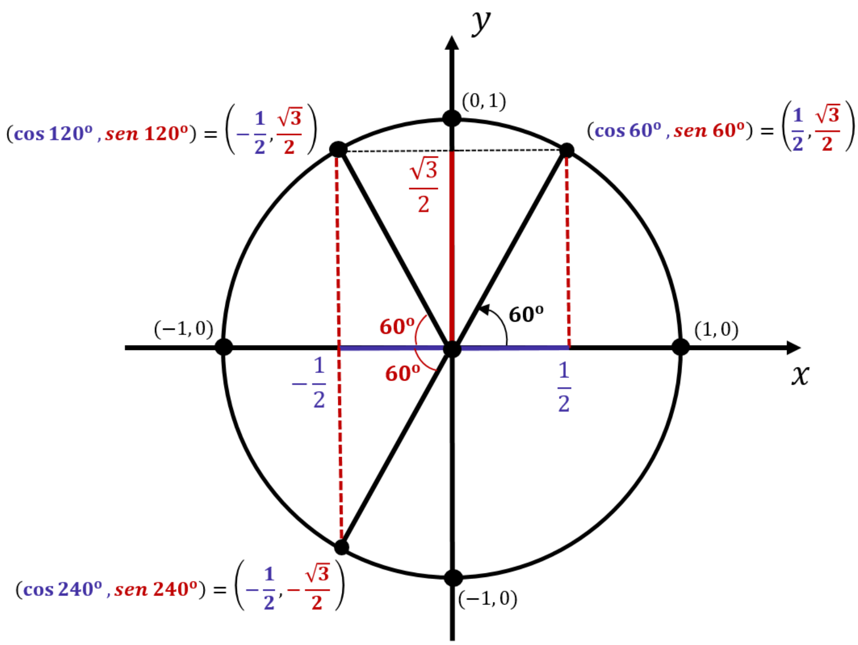
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) -1.

Comentários:

Considerando ângulos entre 0^o e 360^o, temos que, para $cos\ (x) = -\frac{1}{2}$:

$$\boldsymbol{x = 120^o} \text{ ou } \boldsymbol{x = 240^o}$$



Logo, podemos ter:

$$6x = 6.120^o = 720^o$$

ou

$$6x = 6.240^o = 1440^o$$

Note que 720^o correspondem a duas voltas de 360^o. Logo:

$$\mathbf{\cos 6x} = \cos 720^o = \cos 0^o = \mathbf{1}$$

Além disso, 1440^o correspondem a quatro voltas de 360^o. Logo:

$$\mathbf{\cos 6x} = \cos 1440^o = \cos 0^o = \mathbf{1}$$

Portanto, $\mathbf{\cos 6x = 1}$.

Gabarito: Letra B.

7. (FGV/SAD PE/2009) Somando-se a tangente de um ângulo θ com a cotangente desse mesmo ângulo θ, obtém-se:

a) $sen2\theta$

b) $\frac{2}{sen2\theta}$

c) 1

d) $\frac{2}{cos2\theta}$

e) $cos2\theta$

Comentários:

Pela **Relação Fundamental da Trigonometria**, sabemos que $\boldsymbol{sen^2\theta + \cos^2\theta = 1}$. Além disso, sabemos que:

$$sen\ 2\theta = 2sen\theta . cos\theta \rightarrow \boldsymbol{sen\theta . cos\theta = \frac{1}{2} sen\ 2\theta}$$

Portanto:

$$\boldsymbol{\tan\theta + cotg\ \theta}$$

$$= \frac{sen\ \theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{sen\ \theta}$$

$$= \frac{\boldsymbol{sen^2\theta + \cos^2\theta}}{\boldsymbol{sen\ \theta . \cos\theta}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\frac{1}{2} sen2\theta}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{sen2\theta}}$$

Gabarito: Letra B.

8.(FGV/ALERO/2018) O valor de $y = cos\ 36°. cos\ 72°$ é

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{2}\ sen18°$.

d) $\frac{1}{4}\ cos18°$.

e) $\frac{1}{8}$.

Comentários:

Perceba que 72° é o dobro do ângulo 36°. Logo, é interessante "darmos um jeito" de o ângulo 36° "se transformar" no ângulo de 72°.

Temos:

$$y = cos\ 36°. cos\ 72°$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $2. sen36°$, temos:

$$2. sen36°. y = \mathbf{2. sen36°. cos\ 36°}. cos\ 72°$$

Utilizando a identidade do arco duplo para o seno, sabemos que $\mathbf{sen\ 72^o = 2. sen36°. cos\ 36°}$. Ficamos com:

$$2. sen36°. y = \mathbf{sen\ 72°}. cos\ 72°$$

Multiplicando ambos os lados da equação por 2, temos:

$$4. sen36°. y = \mathbf{2. sen\ 72°. cos\ 72°}$$

Utilizando a identidade do arco duplo para o seno, sabemos que $\mathbf{sen\ 144^o = 2. sen72°. cos72°}$. Ficamos com:

$$4. sen36°. y = \mathbf{sen\ 144°}$$

Note que 144^o e 36^o são ângulos complementares (somam 180^o) e, portanto, apresentam o mesmo seno. Logo:

- $$4. y = 1$$

$$y = \frac{1}{4}$$

Gabarito: Letra B.

QUESTÕES COMENTADAS - FGV

Funções Trigonométricas

1. (FGV/SEAD AP/2022) Considere a equação

$$sen\ x = \frac{x}{3\pi}$$

Para $x \geq 0$ o número de soluções dessa equação é:

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

Comentários:

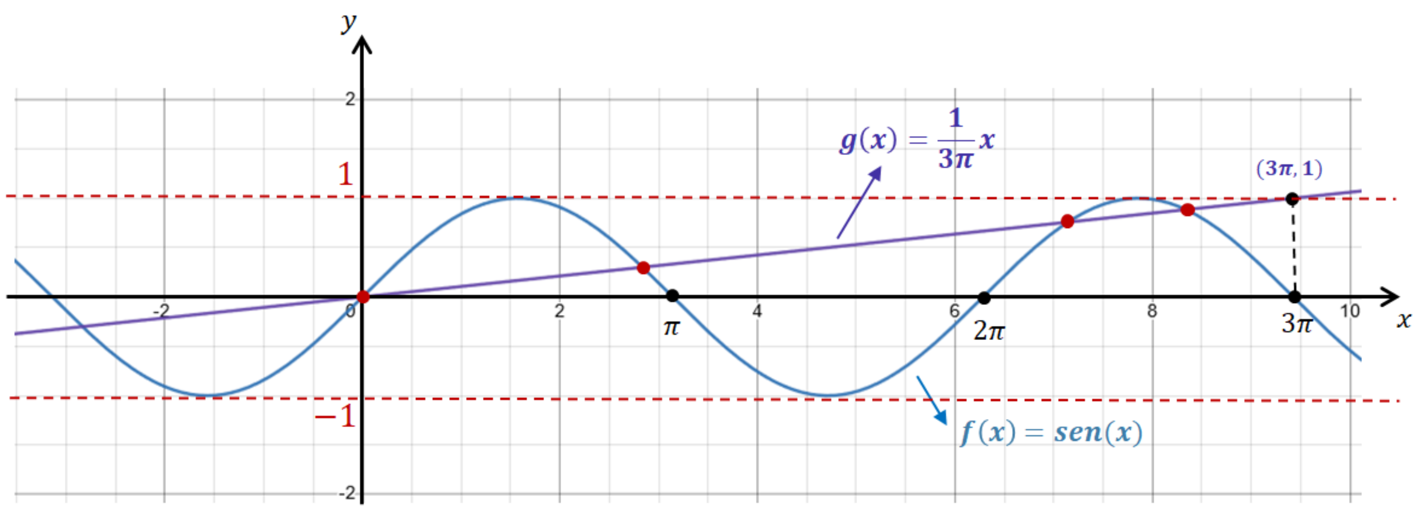
A equação apresentada não pode ser resolvida analiticamente.

Para obter o **número de soluções da equação**, devemos obter o número de intersecções das funções $f(x) = sen\ x$ e $g(x) = \frac{1}{3\pi}x$.

Note que a função **$g(x)$ é uma função afim**, pois podemos escrevê-la da forma $g(x) = ax + b$, com $a = \frac{1}{3\pi}$ e $b = 0$.

Veja que, para $x = 0$, temos $g(x) = 0$. Além disso, para $x = 3\pi$, temos $g(x) = 1$.

Com base nessas informações, vamos desenhar os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$.



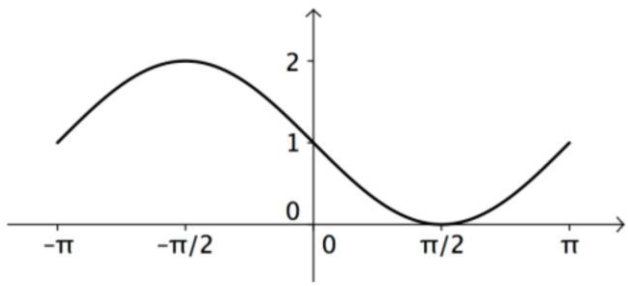
Observando os gráficos desenhados, percebe-se que, para $x \geq 0$, o número de intersecções é igual a 4, sendo uma das intersecções no ponto $(x, y) = (0,0)$.

Portanto, temos **4 soluções** para a equação $\boldsymbol{sen\, x = \frac{x}{3\pi}}$.

Gabarito: Letra E.

2. (FGV/SEE PE/2016) Uma função trigonométrica cuja expressão contém apenas seno e/ou cosseno além de alguma constante tem o seguinte gráfico no intervalo $[-\pi, \pi]$:

Essa função é



a) $y = 1 + sen(x)$

b) $y = 1 - sen(x)$

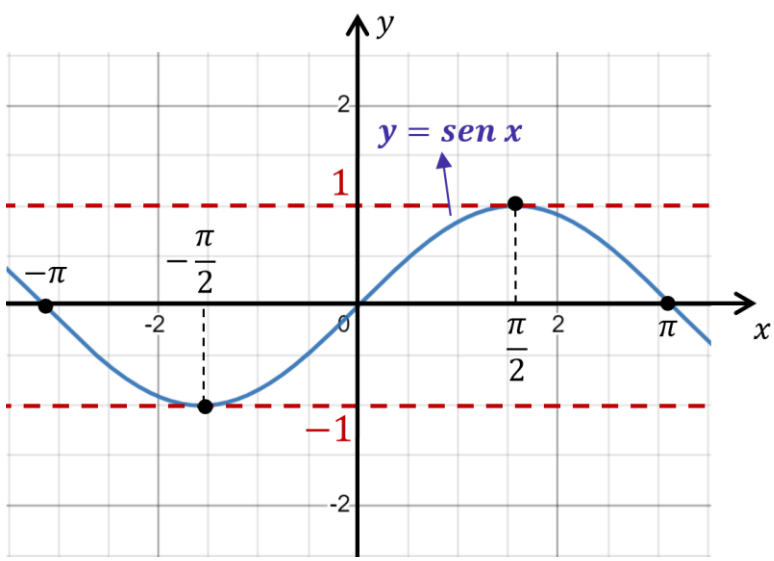
c) $y = 1 + cos(x)$

d) $y = 1 - cos(x)$

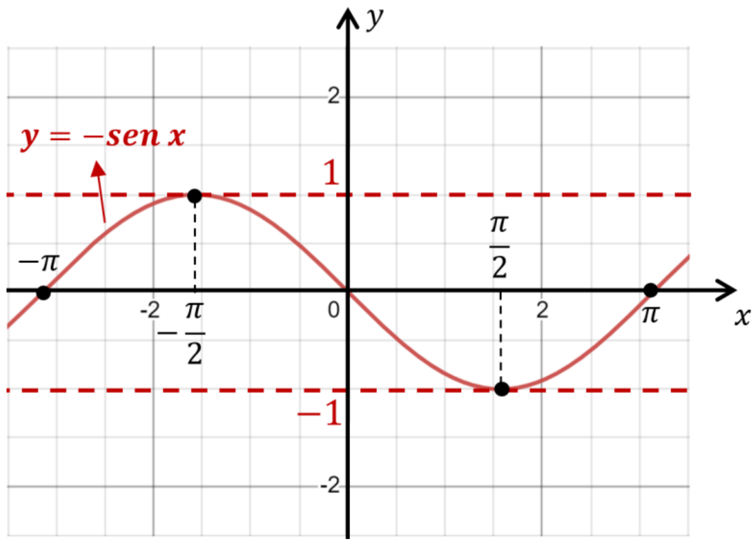
e) $y = sen(x) - cos(x)$

Comentários:

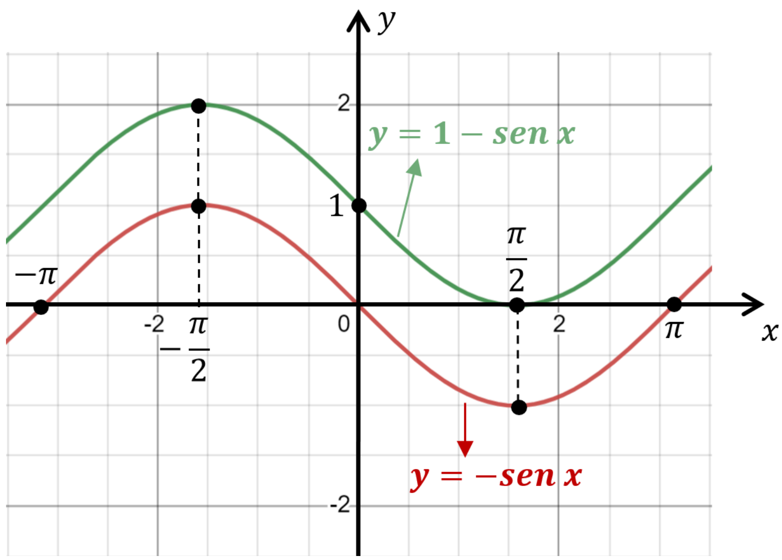
A função $\boldsymbol{y = sen\, x}$, no intervalo $[-\pi, \pi]$, é representada do seguinte modo:



Para representar $y = -sen\ (x)$, toda ordenada y do gráfico que era positiva vira negativa, e vice-versa. Em outras palavras, devemos **rebater o gráfico em torno do eixo x**. Ficamos com a seguinte representação:



Ao somar uma unidade à função, obtemos $y = 1 - sen\ (x)$. Trata-se de um **deslocamento vertical** em uma unidade para cima.



Note, portanto, que a função representada no enunciado é justamente $y = 1 - sen\ (x)$.

Gabarito: Letra B.

3.(FGV/SEDUC AM/2014) Considere a função $f(x) = \frac{2-7sen(x)}{4+sen(x)}$ definida para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Os valores mínimo e máximo dessa função são, respectivamente,

a) $-\frac{5}{4}$ e $\frac{2}{5}$

b) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{5}$

c) $-\frac{1}{2}$ e 0

d) -1 e $\frac{1}{2}$

e) 0 e 1

Comentários:

Sabemos que, **para o intervalo $[0, 2\pi]$**, a função $y = sen\ x$ admite o valor máximo 1 e o valor mínimo -1, isto é:

$$-1 \leq sen\ x \leq 1$$

Note que o enunciado **restringe** os valores de x para o **intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**. Nesse caso, temos que a função $y = sen\ x$ admite o **valor máximo 1**, para $x = \frac{\pi}{2}$, e o **valor mínimo 0**, para $x = 0$.

Note que, **ao maximizar $sen\ x$**, a função $f(x) = \frac{2-7sen(x)}{4+sen(x)}$ tem o seu numerador reduzido e o seu denominador aumentado. Nesse caso, **$f(x)$ é minimizado**. Portanto, o valor mínimo de $f(x)$ ocorre para o valor máximo de $sen\ x$ no intervalo considerado.

$$f_{MIN} = \frac{2 - 7.\mathbf{1}}{4 + \mathbf{1}} = \frac{-5}{5} = -1$$

Por outro lado, ao **minimizar $sen\ x$**, a função $f(x) = \frac{2-7sen(x)}{4+sen(x)}$ tem o seu numerador aumentado e o seu denominador reduzido. Nesse caso, **$f(x)$ é maximizado**. Portanto, o valor máximo de $f(x)$ ocorre para o valor mínimo de $sen\ x$ no intervalo considerado.

$$f_{MAX} = \frac{2 - 7.\mathbf{0}}{4 + \mathbf{0}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

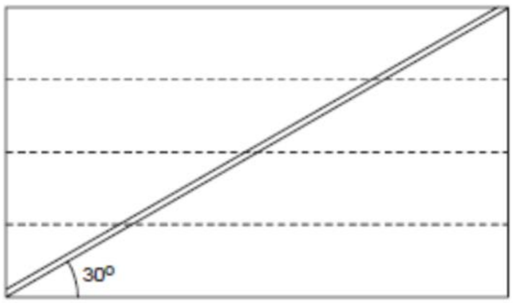
Portanto, valores mínimo e máximo de $f(x)$ são, respectivamente, -1 e $\frac{1}{2}$.

Gabarito: Letra D.

QUESTÕES COMENTADAS – FCC

Trigonometria

1.(FCC/SEE MG/2012) O triângulo é uma figura rígida: não se deforma como aconteceria com um quadrado. Esta rigidez o torna de grande utilidade na vida prática. Uma aplicação, por exemplo, é na maneira de "travar" uma estante para que ela não se deforme. Na parte posterior de uma estante de 1,30 m de altura, com a base apoiada no chão, foi colocada uma trava na diagonal, formando um ângulo de 30° com a horizontal, constituindo assim um triângulo.



O comprimento dessa trava será

a) 0,65 m.

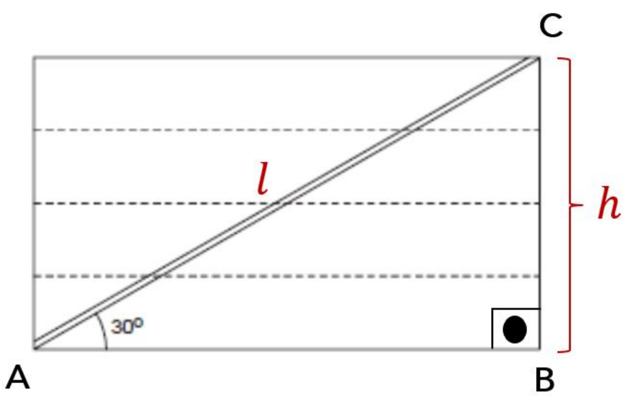
b) 1,00 m.

c) 1,30 m.

d) 2,60 m.

Comentários:

Vamos supor que a estante em questão é um retângulo, que é composto por quatro ângulos retos. Nesse caso, a trava forma um triângulo retângulo ABC, conforme a figura a seguir:



Considerando que a trava tem comprimento l e sabendo-se que a altura da estante é $\boldsymbol{h = 1,3\ m}$, temos que:

$$sen\ 30^o = \frac{h}{l}$$

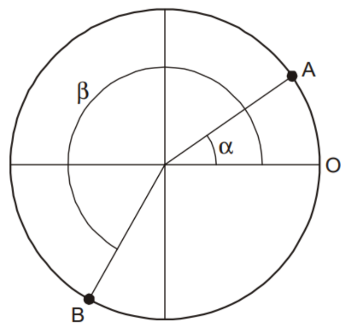
$$\frac{1}{2} = \frac{1,3}{l}$$

$$l = 2.1,3$$

$$\boldsymbol{l = 2,6\ m}$$

Gabarito: Letra D.

2.(FCC/SEE MG/2012) No ciclo trigonométrico abaixo estão localizados os ângulos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$.



Nessas condições, está correto afirmar que

a) $sen\ \alpha\ >\ cos\ \alpha$

b) $sen\ \alpha\ >\ cos\ \beta$

c) $sen\ \beta\ >\ cos\ \beta$

d) $sen\ \beta\ >\ cos\ \alpha$

Comentários:

No ciclo trigonométrico, sabemos que uma vez traçado um raio que faz um ângulo $\boldsymbol{\theta}$ com o eixo $\boldsymbol{x}$, a **projeção do raio no eixo x é o cosseno de θ** e **a projeção do raio no eixo y é o seno de θ**.

Para o exercício em questão, temos que:

- **α está no primeiro quadrante**. Logo, o **seno** e o **cosseno** são **positivos**.
- **β está no terceiro quadrante**. Logo, o **seno** e o **cosseno** são **negativos**.

Vamos avaliar as alternativas.

a) $\boldsymbol{sen\ \alpha\ >\ cos\ \alpha}$. **ERRADO**.

Por meio da figura apresentada, α aparenta ter menos do que 45^o. Nesse caso, a sua projeção no eixo x é maior do que a sua projeção no eixo y, de modo que $\cos\alpha > sen\ \alpha$.

b) $sen\ \alpha > cos\ \beta$. **CERTO**. Este é o **gabarito**.

Como α está no primeiro quadrante, $sen\ \alpha$ **é positivo**. Por outro lado, como β está no terceiro quadrante, **cos** β **é negativo**. Consequentemente, é correto afirmar que $sen\ \alpha > cos\ \beta$.

c) $sen\ \beta > cos\ \beta$. **ERRADO**.

Por meio da figura apresentada, o **tamanho** da **projeção** do raio que representa β **no eixo** y é maior do que o **tamanho** da **projeção** desse raio **no eixo** x.

Como o seno e o cosseno são negativos no terceiro quadrante, $sen\ \beta$ é "mais negativo" (menor) do que $cos\ \beta$. Logo, $sen\ \beta < cos\ \beta$.

d) $sen\ \beta > cos\ \alpha$. **ERRADO**.

Como α está no primeiro quadrante, $cos\ \alpha$ **é positivo**. Por outro lado, como β está no terceiro quadrante, **sen** β **é negativo**. Consequentemente, temos que $cos\ \alpha > sen\ \beta$.

Gabarito: Letra B.

3.(FCC/SEDU ES/2018) O valor de $sen\frac{2\pi}{3}$ é igual ao cosseno de

a) $\frac{2\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{3}$

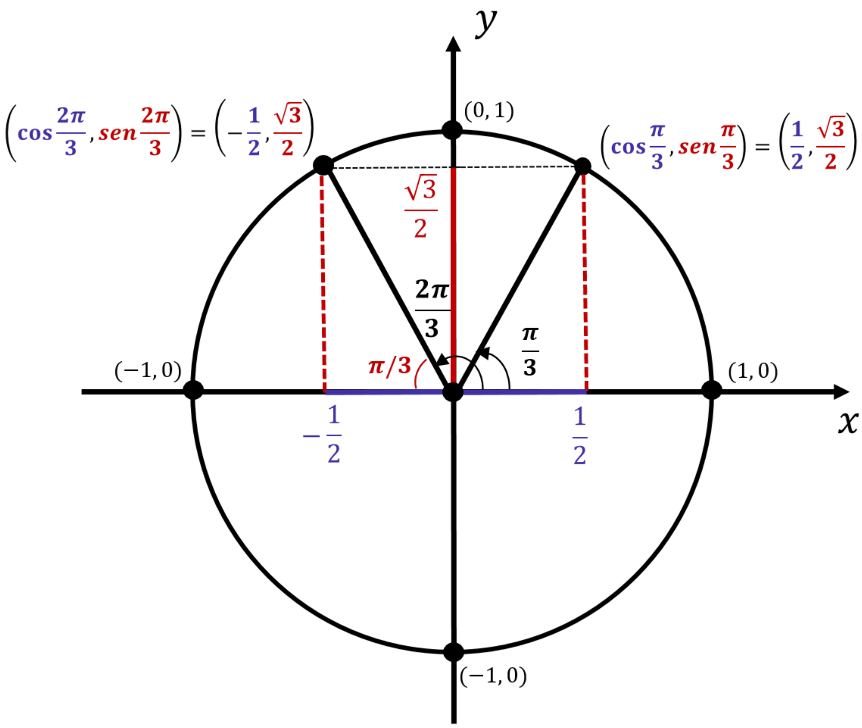
c) $\frac{7\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{6}$

e) $\frac{4\pi}{3}$

Comentários:

Note que $\frac{2\pi}{3}$ corresponde a 120^o e está no segundo quadrante.



Sua redução ao primeiro quadrante é $\frac{\pi}{3}$, que corresponde a 60^{o}. Logo, como pode ser observado no ciclo trigonométrico:

$$sen\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sabemos que $\frac{\pi}{6}$ corresponde a 30^{o}. Logo:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, é correto afirmar que o valor de $sen\frac{2\pi}{3}$ **é igual ao cosseno de** $\frac{\pi}{6}$.

Gabarito: Letra D.

4.(FCC/SEDU ES/2016) Na função trigonométrica $g(x) = sinx$, com $x \in R$, $g\left(\frac{13\pi}{3}\right)$é igual a

a) $g\left(\frac{5\pi}{2}\right)$.

b) $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

c) $g\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

d) $g(\pi)$.

e) $g\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Comentários:

Temos que $g\left(\frac{13\pi}{3}\right) = sen\ \frac{13\pi}{3}$. Para obter o valor do seno de $\frac{13\pi}{3}$, devemos **reduzir esse ângulo ao primeiro quadrante**.

Uma volta completa no ciclo trigonométrico é igual a 2π, que corresponde a $\frac{6\pi}{3}$.

Subtraindo duas voltas completas do ângulo $\frac{13\pi}{3}$, temos:

$$\frac{13\pi}{3} - 2.\frac{6\pi}{3}$$

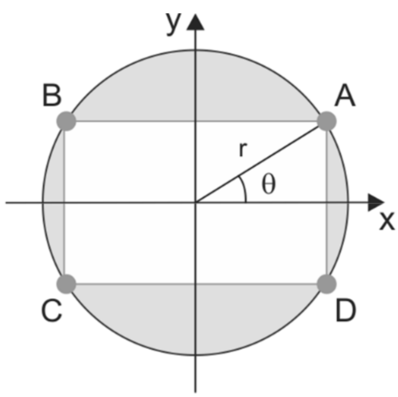
$$= \frac{\pi}{3}$$

Logo, $sen\ \frac{13\pi}{3} = sen\frac{\pi}{3}$. Consequentemente, $\boldsymbol{g\left(\frac{13\pi}{3}\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right)}$.

Gabarito: Letra E.

5.(FCC/UNILUS/2022) A figura mostra, no plano cartesiano, um círculo de raio r, centrado na origem do sistema de coordenadas, e um retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados inscrito no círculo.

Sabendo que o ângulo entre o eixo x e a reta que passa pela origem e por um dos vértices do retângulo mede θ, a área externa ao retângulo e interna ao círculo vale



a) $r^2(\pi - 2sin(\theta))$

b) $2r(\pi - sin(2\theta))$

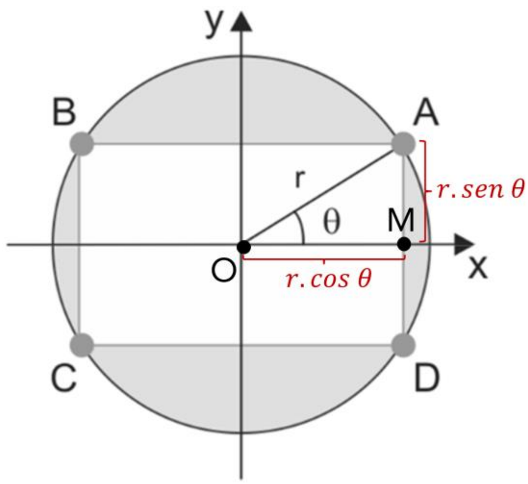
c) $r^2(\pi - 2sin(2\theta))$

d) $r(\pi - 2sin(\theta))$

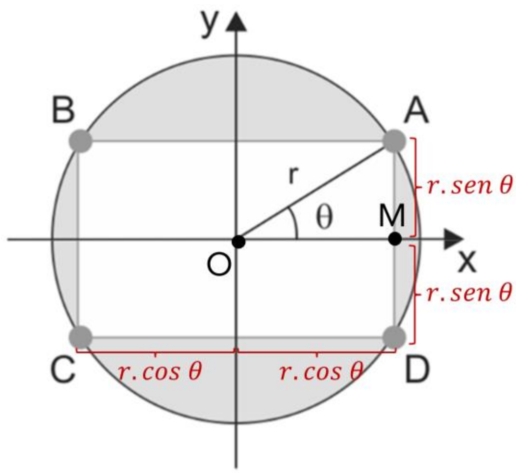
e) $2r^2(sin(2\theta))$

Comentários:

Note que o triângulo OMA representado a seguir é retângulo. Seu cateto oposto mede $\boldsymbol{r.sen\theta}$ e seu cateto adjacente mede $\boldsymbol{r.cos\theta}$.



Consequentemente, o **comprimento** do retângulo mede $\boldsymbol{2.r.cos\,\theta}$ e a **largura** mede $\boldsymbol{2.r.sen\theta}$.



Para obter o valor da área externa ao retângulo e interna ao círculo, devemos **subtrair a área do retângulo da área do círculo**.

$$A = A_{círculo} - A_{retângulo}$$

$$= \pi r^2 - (2rcos\theta).(2rsen\theta)$$

$$= \pi r^2 - 4r^2\boldsymbol{sen\theta cos\theta}$$

Sabemos que $sen2\theta = 2.sen\theta.cos\theta$ e, portanto, $\boldsymbol{sen\theta.cos\theta = \frac{1}{2}sen2\theta}$. Logo:

$$A = \pi r^2 - 4r^2\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}sen2\theta}\right)$$

$$= \pi r^2 - 2r^2sen2\theta$$

$$r^2(\pi - 2sen2\theta)$$

Gabarito: Letra C.

6.(FCC/SEDU ES/2016) A solução da equação $sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2 \cdot cos\pi + 3 \cdot cos(2x) = 1$, com x no 1º quadrante do círculo trigonométrico, é

a) $\frac{\pi}{4}$.

b) $\frac{\pi}{3}$.

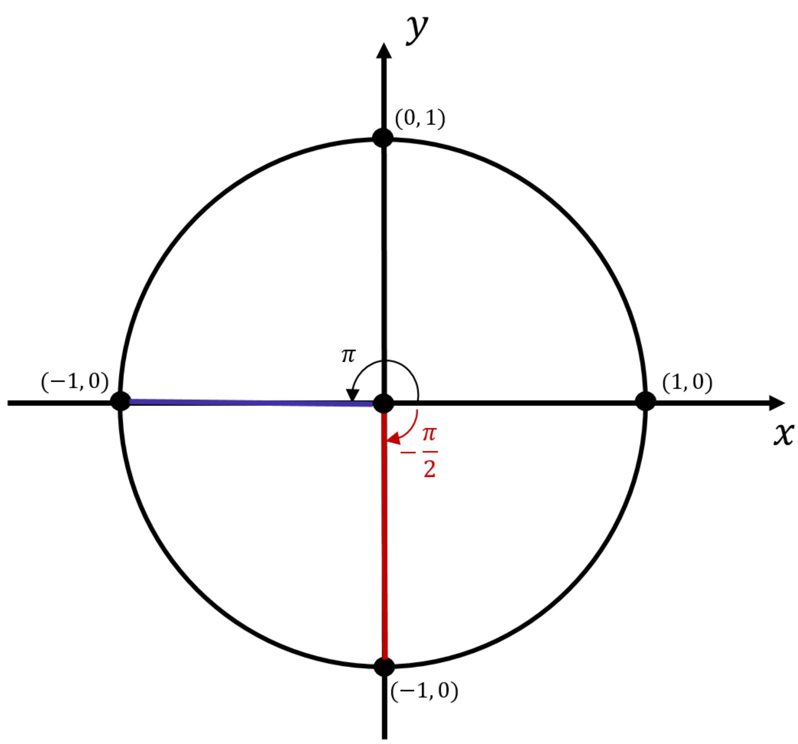
c) $\frac{3\pi}{8}$.

d) $\frac{\pi}{6}$.

e) $\frac{3\pi}{4}$.

Comentários:

Por meio do ciclo trigonométrico, sabemos que $sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ e que $\cos\pi = -1$.



Temos:

$$sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2 \cdot cos\pi + 3 \cdot cos(2x) = 1$$

$$-1 - 2(-1) + 3\cos(2x) = 1$$

$$-1 + 2 + 3\cos(2x) = 1$$

$$\cos(2x) = 0$$

Existem diversos ângulos cujo cosseno é igual a zero, como $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ e também **qualquer ângulo obtido somando k voltas completas a esses dois ângulos**.

Logo, os possíveis valores para $2x$ que anulam $\cos(2x)$ são:

$$\mathbf{2x = \frac{\pi}{2} + k.(2\pi); k \text{ inteiro}}$$

ou

$$\mathbf{2x = \frac{3\pi}{2} + k.(2\pi); \ k \text{ inteiro}}$$

Note, porém, que x deve estar no primeiro quadrante, isto é:

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Logo, $2x$ deve estar no seguinte intervalo:

$$0 < 2x < \pi$$

Assim, a única possibilidade para $2x$ que anula cos $(2x)$ é:

$$2x = \frac{\pi}{2}$$

Portanto:

$$x = \frac{\pi}{4}$$

Gabarito: Letra A.

7.(IBMEC/2019) O número de arcos no intervalo $[0; 2\pi]$, tais que seu seno é igual ao seno do seu triplo, é

a) 8

b) 7

c) 2

d) 4

e) 6

Comentários:

Devemos encontrar os arcos θ no intervalo $[0; 2\pi]$, isto é, no intervalo de $[0^o; 360^o]$, tais que:

$$sen\ \theta = sen\ 3\theta$$

Sabemos que:

$$\boldsymbol{sen\ 2\theta = 2sen\theta cos\theta}$$

$$\boldsymbol{\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1}$$

Para obter o seno de 3θ, vamos obter o seno da soma de $2\theta + \theta$.

$$\boldsymbol{sen\ 3\theta} = sen\ (2\theta + \theta)$$

$$= \boldsymbol{sen2\theta}.cos\theta + sen\theta.\boldsymbol{cos2\theta}$$

$$= (\boldsymbol{2sen\theta cos\theta}).cos\theta + sen\theta.(\boldsymbol{2\cos^2\theta - 1})$$

$$= 2sen\theta\cos^2\theta + sen\theta.(2\cos^2\theta - 1)$$

$$= sen\theta(2\cos^2\theta + 2\cos^2\theta - 1)$$

$$= \boldsymbol{sen\theta(4\cos^2\theta - 1)}$$

Realizando a igualdade requerida pelo enunciado, temos:

$$sen\ \theta = \boldsymbol{sen\ 3\theta}$$

$$sen\ \theta = \boldsymbol{sen\theta(4\cos^2\theta - 1)}$$

A igualdade se verifica para $\boldsymbol{sen\theta = 0}$. Nesse caso, temos como soluções:

$$\boldsymbol{\theta_1 = 0^o, \theta_2 = 180^o \text{e } \theta_3 = 360^o}$$

Para $\boldsymbol{sen\theta \neq 0}$, podemos dividir ambos os lados da equação por $sen\theta$.

$$sen\ \theta = sen\theta(4\cos^2\theta - 1)$$

$$1 = 4\cos^2\theta - 1$$

$$4\cos^2\theta = 2$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

No intervalo de $[0^o; 360^o]$, temos quatro ângulos cujo cosseno pode resultar em $+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou em $-\frac{\sqrt{2}}{2}$:

- $cos\theta = +\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boldsymbol{\theta_4 = 45^o}$ e $\boldsymbol{\theta_5 = 135^o}$
- $cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boldsymbol{\theta_6 = 225^o}$ e $\boldsymbol{\theta_7 = 315^o}$

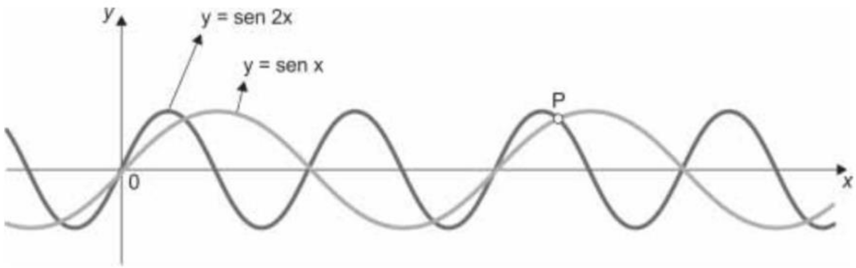
Note que ao todo **obtivemos sete soluções** para a equação $sen\,\theta = sen\,3\theta$. O gabarito, portanto, é a alternativa B.

Comentários: Letra B.

QUESTÕES COMENTADAS – FCC

Funções Trigonométricas

1.(FCC/SEDU ES/2018) Observe abaixo o gráfico das funções trigonométricas $y = sen\ x$ e $y = sen\ 2x$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e o ponto P em uma das interseções dos dois gráficos.



Recordando que $sen\ 2x = 2.sen\ x.cos\ x$, a abscissa do ponto P, transformada para graus, é igual a

a) 405°.

b) 420°.

c) 435°.

d) 390°.

e) 450°.

Comentários:

As duas funções trigonométricas se intersectam para valores de x tais que:

$$sen\ 2x = sen\ x$$

Como $sen\ 2x = 2.sen\ x.\cos x$, temos que:

$$\mathbf{2.sen\ x.cos\ x = sen\ x}$$

Caso 1: $senx = 0$

Uma possibilidade para que a igualdade se verifique é $\mathbf{sen\ x = 0}$.

Observe, porém, que **o ponto P requerido não se enquadra nesse caso**. Isso porque, quando o seno de x é igual a zero, a função $y = sen\ x$ cruza o eixo x, sendo que P não está localizado em cima do eixo x. Portanto, estamos interessados para os casos em que $\mathbf{senx \neq 0}$.

Caso 2: $senx \neq 0$

Se o seno de x é diferente de zero, podemos dividir ambos os lados da igualdade por $sen\ x$.

$$\mathbf{2.\,sen\,x.\cos x = sen\,x}$$

$$2.\cos x = 1$$

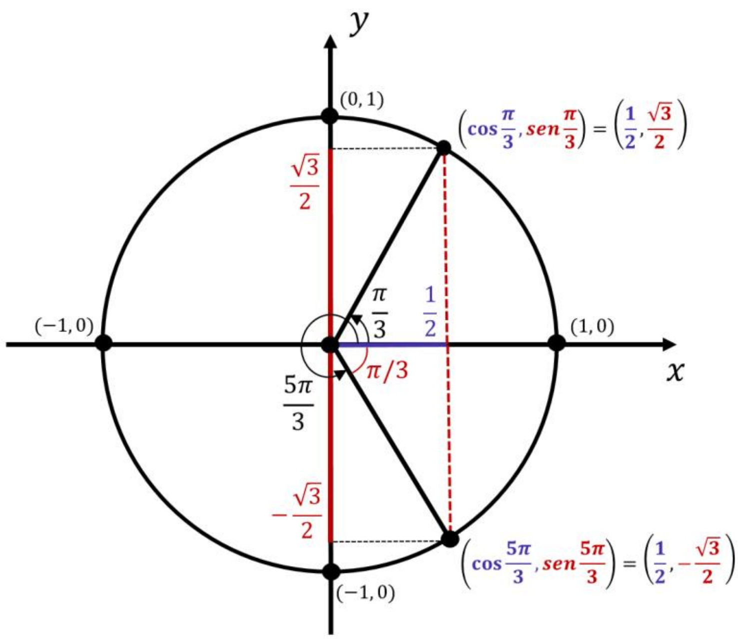
$$\cos x = \frac{1}{2}$$

Para a primeira volta do ciclo trigonométrico $(0 \leq x < 2\pi)$, o cosseno do ângulo x é igual a $\frac{1}{2}$ para dois casos:

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}}$$

ou

$$\boldsymbol{x = \frac{5\pi}{3}}$$



Para valores fora da primeira volta do ciclo trigonométrico, devemos adicionar um número inteiro k de voltas (2π) às duas soluções encontradas. Logo, os possíveis valores de x são:

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} + k.(2\pi)}$$

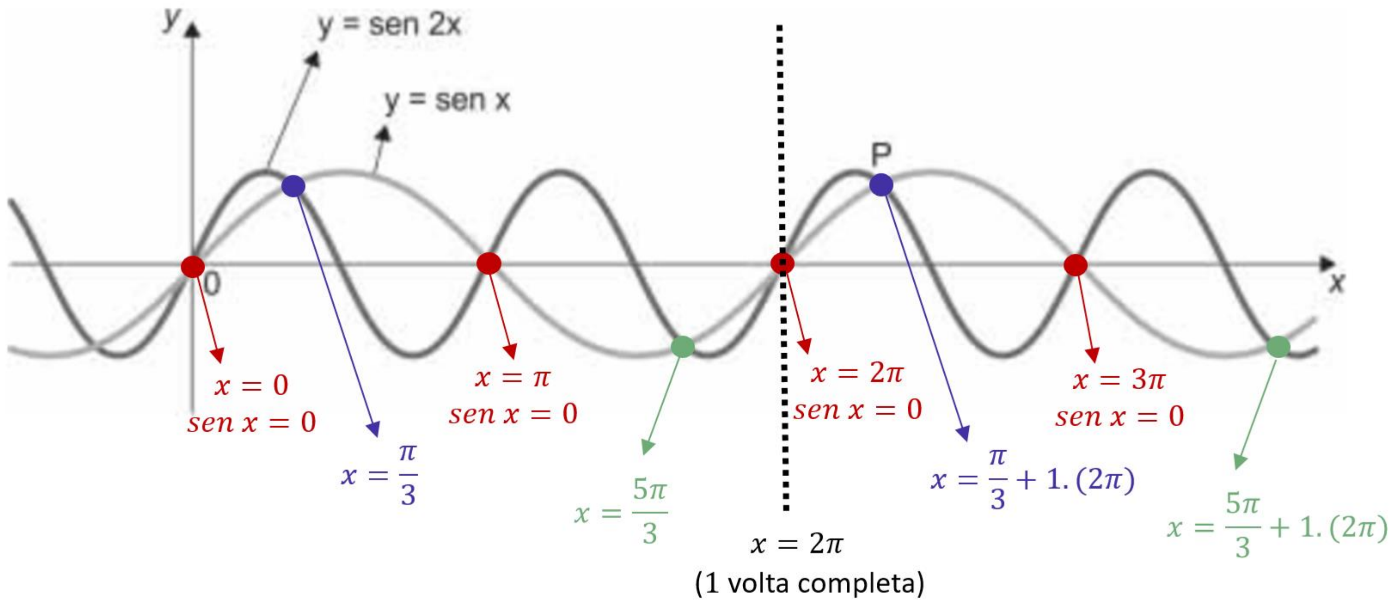
ou

$$\boldsymbol{x = \frac{5\pi}{3} + k.(2\pi)}$$

Observando os pontos em que os gráficos se intersectam fora do eixo x, percebe-se que o ponto P ocorre:

- Na segunda volta do ciclo trigonométrico ($2\pi < x < 4\pi$); e
- Na primeira oportunidade dessa segunda volta em que as funções se cruzam fora do eixo x.

Portanto, o ponto P ocorre para o caso de abcissa $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} + k.(2\pi)}$**, com** $\boldsymbol{k = 1}$.



Logo, a abcissa x do ponto P, em radianos, é:

$$x = \frac{\pi}{3} + 1.(2\pi)$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}$$

$$= \frac{7\pi}{3}$$

Transformada para graus, a abcissa θ_g do ponto P é tal que:

$$\frac{\theta_g}{360^o} = \frac{x}{2\pi}$$

$$\frac{\theta_g}{360^o} = \frac{\frac{7\pi}{3}}{2\pi}$$

$$\theta_g = 360^o.\frac{7}{6}$$

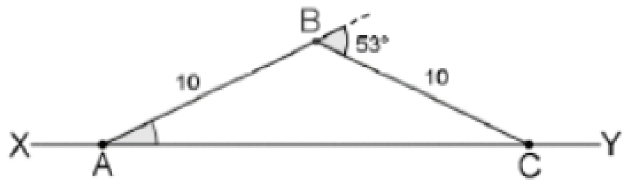
$$\theta_g = 420^o$$

Gabarito: Letra B.

LISTA DE QUESTÕES - FGV

Trigonometria

1.(FGV/CGU/2022) Um avião percorria a trajetória reta XY da figura abaixo, de X para Y, quando o piloto percebeu turbulências à frente. Para evitá-las fez, no ponto A, um giro na trajetória para a esquerda e percorreu 10 km. No ponto B fez um giro de 53º para a direita e, ao percorrer mais 10 km, percebeu que tinha atingido o ponto C da trajetória inicial.



Dados:

Use o necessário,

$\boldsymbol{sen37° = 0,6}$

$\boldsymbol{cos37° = 0,8}$

$\boldsymbol{\sqrt{5} = 2,24}$

A distância entre os pontos A e C é, aproximadamente:

a) 16,4;

b) 16,7;

c) 17,1;

d) 17,5;

e) 17,9.

2.(FGV/TCE-TO/2022) Sabendo-se que $cos\ x = \frac{1}{2}$, então $cos\ 20x$ é igual a:

a) 1

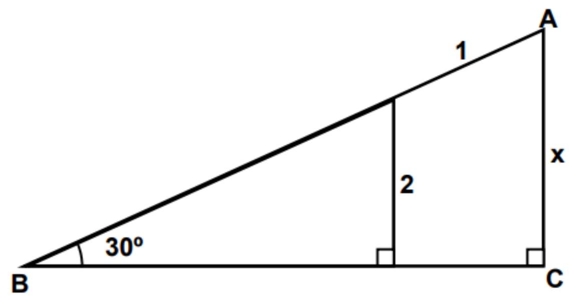
b) $-\frac{1}{2}$

c) 0

d) -1

e) 10

3.(FGV/CODEBA/2010)



A figura ilustra um triângulo ABC, retângulo em C. O comprimento de AC é

a) $\frac{5}{2}$.

b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

c) 3.

d) $3\sqrt{3}$

e) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

4.(FGV/PC MA/2012) Se α e β são as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, então:

a) $sen(\alpha+\beta)=0$

b) $cos(\alpha+\beta)=0$

c) $sen(\alpha-\beta)=1$

d) $cos(\alpha-\beta)\ =1$

e) $sen(\alpha)+sen(\ \beta\ )=0$

5.(FGV/PM MA/2012) Na circunferência trigonométrica o arco x é tal que $sen(x)=1$.

Então, $cos(2x)$ é igual a:

a) -2.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

6. (FGV/SAD PE/2009) Se $\boldsymbol{cos\ x = -\frac{1}{2}}$, então $\boldsymbol{cos\ 6x}$ é igual a:

a) 0.

b) 1.

c) $\frac{1}{2}$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) -1.

7. (FGV/SAD PE/2009) Somando-se a tangente de um ângulo $\boldsymbol{\theta}$ com a cotangente desse mesmo ângulo $\boldsymbol{\theta}$, obtém-se:

a) $sen2\theta$

b) $\frac{2}{sen2\theta}$

c) 1

d) $\frac{2}{cos2\theta}$

e) $cos2\theta$

8.(FGV/ALERO/2018) O valor de $\boldsymbol{y = cos\ 36°.cos\ 72°}$ é

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{2}\ sen18°$.

d) $\frac{1}{4}\ cos18°$.

e) $\frac{1}{8}$.

GABARITO - FGV

Trigonometria

1. LETRA E

2. LETRA B

3. LETRA A

4. LETRA B

5. LETRA B

6. LETRA B

7. LETRA B

8. LETRA B

Lista de Questões - FGV

Funções Trigonométricas

1.(FGV/SEAD AP/2022) Considere a equação

$$sen\ x = \frac{x}{3\pi}$$

Para $x \geq 0$ o número de soluções dessa equação é:

a) 0.

b) 1.

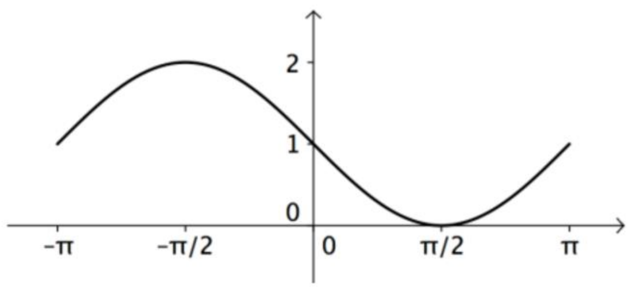
c) 2.

d) 3.

e) 4.

2.(FGV/SEE PE/2016) Uma função trigonométrica cuja expressão contém apenas seno e/ou cosseno além de alguma constante tem o seguinte gráfico no intervalo $[-\pi, \pi]$:

Essa função é



a) $y = 1 + sen(x)$

b) $y = 1 - sen(x)$

c) $y = 1 + cos(x)$

d) $y = 1 - cos(x)$

e) $y = sen(x) - cos(x)$

3.(FGV/SEDUC AM/2014) Considere a função $f(x) = \frac{2-7sen(x)}{4+sen(x)}$ definida para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Os valores mínimo e máximo dessa função são, respectivamente,

a) $-\frac{5}{4}$ e $\frac{2}{5}$

b) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{5}$

c) $-\frac{1}{2}$ e 0

d) -1 e $\frac{1}{2}$

e) 0 e 1

Gabarito - FGV

Funções Trigonométricas

1. LETRA E

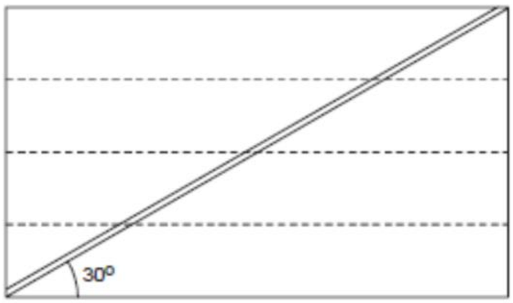
2. LETRA B

3. LETRA D

Lista de Questões – FCC

Trigonometria

1.(FCC/SEE MG/2012) O triângulo é uma figura rígida: não se deforma como aconteceria com um quadrado. Esta rigidez o torna de grande utilidade na vida prática. Uma aplicação, por exemplo, é na maneira de "travar" uma estante para que ela não se deforme. Na parte posterior de uma estante de 1,30 m de altura, com a base apoiada no chão, foi colocada uma trava na diagonal, formando um ângulo de 30° com a horizontal, constituindo assim um triângulo.



O comprimento dessa trava será

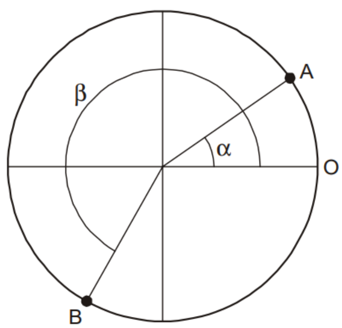
a) 0,65 m.

b) 1,00 m.

c) 1,30 m.

d) 2,60 m.

2.(FCC/SEE MG/2012) No ciclo trigonométrico abaixo estão localizados os ângulos α e β.



Nessas condições, está correto afirmar que

a) $sen\ \alpha > cos\ \alpha$

b) $sen\ \alpha > cos\ \beta$

c) $sen\ \beta > cos\ \beta$

d) $sen\ \beta > cos\ \alpha$

3.(FCC/SEDU ES/2018) O valor de $sen\frac{2\pi}{3}$ é igual ao cosseno de

a) $\frac{2\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{7\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{6}$

e) $\frac{4\pi}{3}$

4.(FCC/SEDU ES/2016) Na função trigonométrica $g(x) = sinx$, com $x \in R$, $g\left(\frac{13\pi}{3}\right)$é igual a

a) $g\left(\frac{5\pi}{2}\right)$.

b) $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

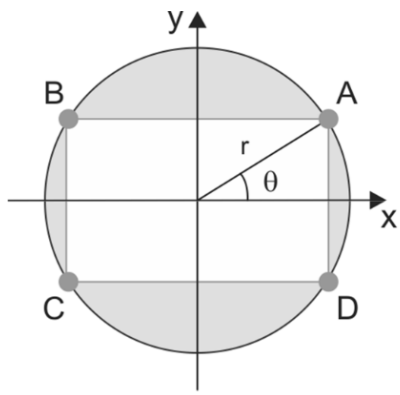
c) $g\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

d) $g(\pi)$.

e) $g\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

5.(FCC/UNILUS/2022) A figura mostra, no plano cartesiano, um círculo de raio r, centrado na origem do sistema de coordenadas, e um retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados inscrito no círculo.

Sabendo que o ângulo entre o eixo x e a reta que passa pela origem e por um dos vértices do retângulo mede θ, a área externa ao retângulo e interna ao círculo vale



a) $r^2(\pi - 2sin(\theta))$

b) $2r(\pi - sin(2\theta))$

c) $r^2(\pi - 2sin(2\theta))$

d) $r(\pi - 2sin(\theta))$

e) $2r^2(sin(2\theta))$

6.(FCC/SEDU ES/2016) A solução da equação $sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2 \cdot cos\pi + 3 \cdot cos(2x) = 1$, com x no $1^{º}$ quadrante do círculo trigonométrico, é

a) $\frac{\pi}{4}$.

b) $\frac{\pi}{3}$.

c) $\frac{3\pi}{8}$.

d) $\frac{\pi}{6}$.

e) $\frac{3\pi}{4}$.

7.(IBMEC/2019) O número de arcos no intervalo $[0; 2\pi]$, tais que seu seno é igual ao seno do seu triplo, é

a) 8

b) 7

c) 2

d) 4

e) 6

GABARITO – FCC

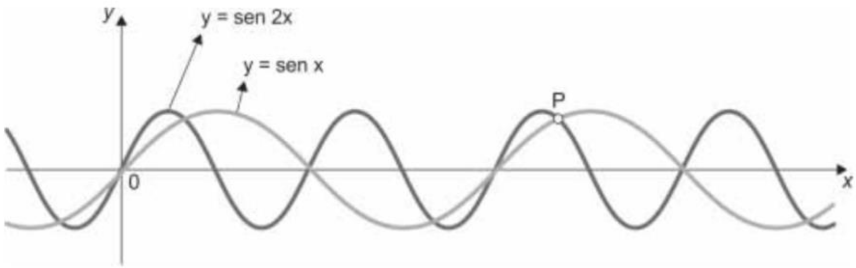
Trigonometria

1. LETRA D
2. LETRA B
3. LETRA D
4. LETRA E
5. LETRA C
6. LETRA A
7. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES – FCC

Funções Trigonométricas

1.(FCC/SEDU ES/2018) Observe abaixo o gráfico das funções trigonométricas $y = sen\, x$ e $y = sen\, 2x$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e o ponto P em uma das interseções dos dois gráficos.



Recordando que $sen\, 2x = 2.sen\, x.cos\, x$, a abscissa do ponto P, transformada para graus, é igual a

a) 405°.

b) 420°.

c) 435°.

d) 390°.

e) 450°.

GABARITO – FCC

Funções Trigonométricas

1. LETRA B

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:

PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.