Estratégia
Concursos

Aula 11

BNB (Analista Bancário) Matemática - 2023 (Pré-Edital)

Autor:
Equipe Exatas Estratégia Concursos

31 de Maio de 2023

Índice

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Função Exponencial

Revisão: propriedades da potenciação e da radiciação

#	Propriedade	#	Propriedade
P1	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	P6	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
P2	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	P7	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
P3	$(a^m)^n = a^{m \times n}$	P8	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
P4	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	P9	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
P5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	P10	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$

Conhecendo as propriedades da potenciação, podemos trabalhar com a **radiciação** transformando-a em uma potência por meio da **propriedade P6**.

O número de Euler

e ≅ 2,72

Equações exponenciais

As **equações exponenciais** são equações que apresentam a **incógnita no expoente**. Para encontrar o valor da incógnita, deve-se **reduzir os termos da equação a uma base comum**. Isso porque, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$a^b = a^c \leftrightarrow b = c$$

• **Números decimais**: transformá-los em fração para, em seguida, reduzir os termos a uma base comum.
• **Presença da radiciação**: transformar todas as raízes em potências para, em seguida, trabalhar somente com as propriedades da potenciação.
• Em alguns problemas é necessário **colocar em evidência as potências que apresentam a variável no expoente**. Para evitar trabalhar com frações, costuma-se escolher a **potência de menor expoente** para realizar a operação.
• Em alguns problemas pode ser interessante realizar uma **substituição de variável**.

Inequações exponenciais

As **inequações exponenciais** são inequações que apresentam a **incógnita no expoente**. Para resolver as inequações exponenciais, devemos **reduzir os termos da inequação a uma base comum**.

• Para $a > 1$, temos que:

$$a^b > a^c \leftrightarrow b > c$$

(Mantém-se a desigualdade)

• Para $0 < a < 1$, temos que:

$$a^b > a^c \leftrightarrow b < c$$

(Inverte-se a desigualdade)

• Em alguns casos pode ser necessária a **análise do sinal da função obtida** após a redução à base comum.
• Assim como nas equações exponenciais, em alguns problemas de inequações pode ser interessante realizar uma **substituição de variável**.

Função Exponencial

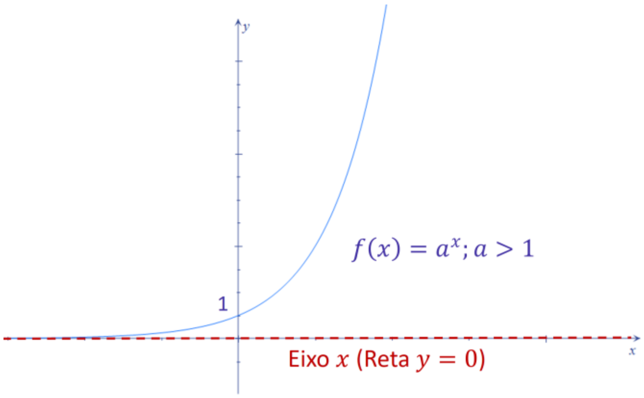
A **função exponencial** é uma função $\boldsymbol{f}$ que **associa uma variável** $\boldsymbol{x}$ pertencente ao conjunto dos números reais ($x \in \mathbb{R}$) ao valor $\boldsymbol{a^x}$ pertencente ao conjunto dos reais positivos ($a^x \in \mathbb{R}_+^*$). Ademais, é **necessário que a base $\boldsymbol{a}$ seja maior do que zero e diferente de 1**.
Em linguagem matemática, a função exponencial é definida da seguinte maneira:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$

$$f(x) = a^x$$

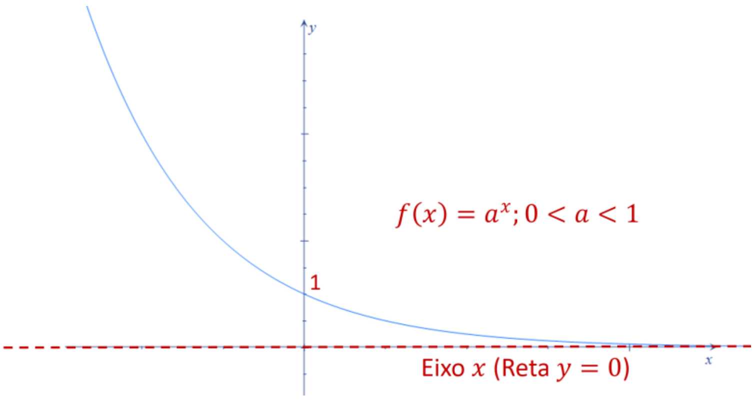
$$a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Gráfico básico e propriedades para a > 1



• **Para $\boldsymbol{a > 1}$**, a função exponencial é **estritamente crescente** (portanto, é **crescente**).
• **Para $\boldsymbol{a > 1}$, à medida que se diminui o valor de $\boldsymbol{x}$**, a função exponencial $f(x) = a^x$ se aproxima cada vez mais do valor zero sem nunca chegar a ser zero (**assíntota em $\boldsymbol{y = 0}$**).

Gráfico básico e propriedades para 0 < a < 1



• **Para $\boldsymbol{0 < a < 1}$**, a função exponencial é **estritamente decrescente** (portanto, é **decrescente**).
• **Para $\boldsymbol{0 < a < 1}$, à medida que se aumenta o valor de $\boldsymbol{x}$**, a função exponencial $f(x) = a^x$ se aproxima cada vez mais do valor zero sem nunca chegar a ser zero (**assíntota em $\boldsymbol{y = 0}$**).

Propriedades válidas para 0 < a < 1 e para a > 1

- **A função exponencial $f(x) = a^x$ corta o eixo y no ponto $(x; y) = (0; 1)$.**
- **A imagem da função exponencial $f(x) = a^x$ é $Im(f) = R_+^* =]\,0;\ +\infty[= (0, +\infty)$**
  Trata-se dos reais positivos, sem incluir o zero.

Obtenção de gráficos provenientes dos gráficos básicos

A obtenção de gráficos provenientes das funções exponenciais básicas é um assunto que ainda não foi muito explorado pelas bancas de concurso público. As principais propriedades são:

- **Translação vertical**: Ao **somar** ou **subtrair** uma constante **de uma função** qualquer, estamos transladando **verticalmente** **para cima** ou **para baixo** o gráfico dessa função.
- **Translação horizontal**: Ao **somar** ou **subtrair** uma constante **da variável x** de uma função qualquer, estamos transladando horizontalmente **para a esquerda** ou **para a direita** o gráfico dessa função.

Função exponencial × Função quadrática

Não se pode afirmar que a **função exponencial** descreve uma **parábola**, nem sequer quando considerado um pequeno intervalo. Somente a **função quadrática** (ou função do **segundo grau**) descreve uma **parábola**.

REVISÃO: PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO E DA RADICIAÇÃO

Antes de começarmos a matéria propriamente dita, faremos uma breve revisão das propriedades da potenciação e da radiciação. O domínio dessas ferramentas é fundamental para a boa compreensão da aula.

Potenciação ou exponenciação

O primeiro ponto a ser lembrado é a **noção básica da potenciação**: trata-se de **uma multiplicação escrita de uma forma simplificada**.

De modo genérico, para um expoente $\boldsymbol{n}$ **natural**, podemos dizer que:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ \boldsymbol{a^n} = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\boldsymbol{n\ vezes}} \end{cases}$$

$\boldsymbol{a}$ é a **base** e $\boldsymbol{n}$ é o **expoente**

Temos as seguintes propriedades para a potenciação, que são válidas para $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{m}$ **e** $\boldsymbol{n}$ **reais** (não só naturais).

#	Propriedade	Exemplo
P1	$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$	$5^3 \times 5^2 = 5^{3+2} = 5^5$
P2	$\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$	$\frac{7^5}{7^4} = 7^{5-4} = 7^1$
P3	$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \times n}}$	$(3^3)^2 = 3^{3\times 2} = 3^6$
P4	$\boldsymbol{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$	$(3 \times 5)^3 = 3^3 \times 5^3$
P5	$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$	$\left(\frac{5}{7}\right)^{11} = \frac{5^{11}}{7^{11}}$

Quando o expoente for negativo, temos que $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$. Exemplo: $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.

Radiciação

A ideia da radiciação é encontrarmos um número b tal que $b^n = a$. De modo genérico, representa-se essa operação do seguinte modo:

$$b = \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}}$$

$\boldsymbol{a}$ é o **radicando** e $\boldsymbol{n}$ é o **índice**

Apresentaremos todas as propriedades da radiciação, porém adianto que **a propriedade que você realmente precisa saber é a seguinte**:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Isso porque essa propriedade transforma a radiciação em uma potência e, **feita a transformação**, **pode-se trabalhar somente com as propriedades da potenciação**.

Vamos às propriedades:

#	Propriedade	Exemplo	Exemplo utilizando as propriedades da potenciação
P6	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[6]{6^2} = 6^{\frac{2}{6}} = 6^{\frac{1}{3}}$	–
P7	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$	$\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3 \times 5} = \sqrt[4]{15}$	$\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{5} \overset{P6}{\widehat{=}} 3^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}} \overset{P4}{\widehat{=}} (3 \times 5)^{\frac{1}{4}} = 15^{\frac{1}{4}} \overset{P6}{\widehat{=}} \sqrt[4]{15}$
P8	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{15}} = \sqrt[3]{\dfrac{20}{15}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{15}} \overset{P6}{\widehat{=}} \dfrac{20^{\frac{1}{3}}}{15^{\frac{1}{3}}} \overset{P5}{\widehat{=}} \left(\dfrac{20}{15}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \overset{P6}{\widehat{=}} \sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}$
P9	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\left(\sqrt[3]{10}\right)^4 = \sqrt[3]{10^4}$	$\left(\sqrt[3]{10}\right)^4 \overset{P6}{\widehat{=}} \left(10^{\frac{1}{3}}\right)^4 \overset{P3}{\widehat{=}} 10^{\frac{1}{3} \times 4} = 10^{\frac{4}{3}} \overset{P6}{\widehat{=}} \sqrt[3]{10^4}$
P10	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[4 \times 3]{5} = \sqrt[12]{5}$	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} \overset{P6}{\widehat{=}} \sqrt[4]{5^{\frac{1}{3}}} \overset{P6}{\widehat{=}} \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \overset{P3}{\widehat{=}} 5^{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{12}} \overset{P6}{\widehat{=}} \sqrt[12]{5}$

Conhecendo as propriedades da potenciação, podemos trabalhar com a **radiciação** transformando-a em uma potência por meio da propriedade P.

O NÚMERO DE EULER

Muito provavelmente você já deve ter ouvido falar do número irracional $\pi = 3{,}141592\ldots$

Assim como o número π, o **número de Euler (e)** também é um número irracional cujo valor é dado por $e = 2{,}7182818284\ldots$

Esse número apresenta diversas aplicações nos mais variados ramos da ciência. Para fins de concursos públicos, a única coisa que você precisa saber (**decorar**) é que esse número é **aproximadamente** **2,72**.

$$\boldsymbol{e \cong 2{,}72}$$

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

As **equações exponenciais** são equações que apresentam a **incógnita no expoente**. Exemplos:

- $5^{x} = 625$;
- $2^{4x+1} = 1024$;
- $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81^{x}}} = 27$;
- $4^{x} + 6^{x} = 2 \times 9^{x}$.

Para encontrar o valor da incógnita, devem-se **reduzir os termos da equação a uma base comum**. Isso porque, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$a^b = a^c \leftrightarrow b = c$$

A redução das potências a uma base comum ocorre por meio do uso conveniente das propriedades da potenciação.

Vamos resolver diversos exemplos para ficarmos prontos para qualquer problema.

Resolva a equação $2^x = 128$.

$$2^x = 128$$

$$2^x = 2^7$$

$$x = 7$$

O conjunto solução é $S = \{7\}$.

Resolva a equação $5^x = \frac{1}{125}$.

$$5^x = \frac{1}{125}$$

$$5^x = \frac{1}{5^3}$$

$$5^x = 5^{-3}$$

$$x = -3$$

O conjunto solução é $S = \{-3\}$.

Resolva a equação $9^x = \frac{1}{81}$.

$$9^x = \frac{1}{81}$$

$$9^x = \frac{1}{9^2}$$

$$9^x = 9^{-2}$$

$$x = -2$$

O conjunto solução é $S = \{-2\}$.

Podemos também resolver a mesma equação do seguinte modo:

$$9^x = \frac{1}{81}$$

$$(3^2)^x = \frac{1}{3^4}$$

$$3^{2x} = 3^{-4}$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

Resolva a equação $9^{3x} = \frac{1}{27}$.

Veja que 27 não pode ser escrito como uma potência inteira de 9. Nesse caso, vamos reduzir os termos da equação para a base 3.

$$9^{3x} = \frac{1}{27}$$

$$(3^2)^{3x} = \frac{1}{3^3}$$

$$3^{6x} = 3^{-3}$$

$$6x = -3$$

$$x = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

O conjunto solução é $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Resolva a equação $7^{5x} = 1$.

$$7^{5x} = 1$$

$$7^{5x} = 7^0$$

$$5x = 0$$

$$x = 0$$

O conjunto solução é $S = \{0\}$.

Quando nos depararmos com números decimais, basta transformá-los em uma fração para, em seguida, reduzir os termos a uma base comum.

Resolva a equação $1000^x = 0,00001$.

$$1000^x = 0{,}00001$$
$$(10^3)^x = 10^{-5}$$
$$10^{3x} = 10^{-5}$$
$$3x = -5$$
$$x = -\frac{5}{3}$$

O conjunto solução é $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

Resolva a equação $16^x = 0,125$.

$$16^x = 0{,}125$$
$$(2^4)^x = \frac{125}{1000}$$
$$2^{4x} = \frac{1}{8}$$
$$2^{4x} = \frac{1}{2^3}$$
$$2^{4x} = 2^{-3}$$
$$4x = -3$$
$$x = -\frac{3}{4}$$

O conjunto solução é $S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

Em algumas equações exponenciais temos a presença da **radiciação**. Nesses casos, podemos transformar todas as raízes em potências para, em seguida, trabalhar somente com as propriedades da exponenciação.

Resolva a equação $\left(\sqrt[3]{5}\right)^x = \frac{5}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{5}}}$.

Pessoal, vamos resolvendo com calma até reduzir os termos em potências de base 5.

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^x = \frac{5}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{5}}}$$
$$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^x = \frac{5}{\sqrt[5]{5^{\frac{1}{3}}}}$$
$$5^{\frac{1}{3}\times x} = \frac{5}{\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}}$$

$$5^{\frac{x}{3}} = \frac{5}{5^{\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}}$$

$$5^{\frac{x}{3}} = \frac{5^1}{5^{\frac{1}{15}}}$$

$$5^{\frac{x}{3}} = 5^{1-\frac{1}{15}}$$

$$5^{\frac{x}{3}} = 5^{\frac{14}{15}}$$

Obtemos a base comum 5. Basta agora igualarmos os expoentes:

$$\frac{x}{3} = \frac{14}{15}$$

$$x = \frac{14}{5}$$

O conjunto solução é $S = \left\{\frac{14}{5}\right\}$.

Resolva a equação $\frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{81^x}}} = \sqrt{\left(\sqrt[5]{3}\right)^9}$.

$$\frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{81^x}}} = \sqrt{\left(\sqrt[5]{3}\right)^9}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{(3^4)^x}}} = \sqrt{\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^9}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{((3^4)^x)^{\frac{1}{3}}}} = \left(\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^9\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\left(((3^4)^x)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}} = \left(\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^9\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{3^{4\times x\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}} = 3^{\frac{1}{5}\times 9\times\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{3^{\frac{4x}{15}}} = 3^{\frac{9}{10}}$$

$$3^{-\frac{4x}{15}} = 3^{\frac{9}{10}}$$

$$-\frac{4x}{15} = \frac{9}{10}$$

$$x = -\frac{27}{8}$$

O conjunto solução é $S = \left\{-\frac{27}{8}\right\}$.

Após encontrarmos a base comum, pode ocorrer que a igualde dos expoentes nos retorne uma equação do primeiro ou do segundo grau.

Resolva a equação $8^{3-5x} = \frac{1}{16^{3x}}$.

$$8^{3-5x} = \frac{1}{16^{3x}}$$

$$(2^3)^{3-5x} = \frac{1}{(2^4)^{3x}}$$

$$2^{3\times(3-5x)} = \frac{1}{2^{12x}}$$

$$2^{9-15x} = 2^{-12x}$$

$$9 - 15x = -12x$$

$$9 = 15x - 12x$$

$$9 = 3x$$

$$x = 3$$

O conjunto solução é $S = \{3\}$.

Resolva a equação $512^x = \frac{\sqrt[3]{16^{2x}}}{4^{x-1}}$.

$$512^x = \frac{\sqrt[3]{16^{2x}}}{4^{x-1}}$$

$$(2^9)^x = \frac{\sqrt[3]{(2^4)^{2x}}}{(2^2)^{x-1}}$$

$$2^{9x} = \frac{((2^4)^{2x})^{\frac{1}{3}}}{2^{2\times(x-1)}}$$

$$2^{9x} = \frac{2^{4\times 2x \times\frac{1}{3}}}{2^{2x-2}}$$

$$2^{9x} = 2^{\frac{8x}{3}-(2x-2)}$$

$$9x = \frac{8x}{3} - 2x + 2$$

$$11x - \frac{8x}{3} = 2$$

$$\frac{25x}{3} = 2$$

$$x = \frac{6}{25}$$

O conjunto solução é $S = \left\{\frac{6}{25}\right\}$.

Resolva a equação $(2^x)^{x-5} = \frac{1}{64}$.

$$(2^x)^{x-5} = \frac{1}{64}$$

$$2^{x \times (x-5)} = \frac{1}{2^6}$$

$$2^{x^2-5x} = 2^{-6}$$

$$x^2 - 5x = -6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

A soma das raízes da equação do segundo grau é 5 e o produto é 6. Logo, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

O conjunto solução é $S = \{2; 3\}$.

Resolva a equação $27^{x^2+1} = 9^{5x}$.

$$27^{x^2+1} = 9^{5x}$$

$$(3^3)^{x^2+1} = (3^2)^{5x}$$

$$3^{3 \times (x^2+1)} = 3^{2 \times 5x}$$

$$3^{3x^2+3} = 3^{10x}$$

$$3x^2 + 3 = 10x$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 3 \times 3}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6}$$

$$x = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\ ; x_2 = 3$$

O conjunto solução é $S = \left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$.

Resolva a equação $\sqrt[4]{25^{x-2}} \times \sqrt[x]{5^{4x-10}} - \sqrt[4x]{25^{3x-2}} = 0.$

$$\sqrt[4]{25^{x-2}} \times \sqrt[x]{5^{4x-10}} - \sqrt[4x]{25^{3x-2}} = 0$$

$$\sqrt[4]{25^{x-2}} \times \sqrt[x]{5^{4x-10}} = \sqrt[4x]{25^{3x-2}}$$

$$(25^{x-2})^{\frac{1}{4}} \times (5^{4x-10})^{\frac{1}{x}} = (25^{3x-2})^{\frac{1}{4x}}$$

$$((5^2)^{x-2})^{\frac{1}{4}} \times (5^{4x-10})^{\frac{1}{x}} = ((5^2)^{3x-2})^{\frac{1}{4x}}$$

$$5^{2\times(x-2)\times\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{4x-10}{x}} = 5^{2\times(3x-2)\times\frac{1}{4x}}$$

$$5^{\frac{x-2}{2}} \times 5^{\frac{4x-10}{x}} = 5^{\frac{3x-2}{2x}}$$

$$5^{\frac{x-2}{2}+\frac{4x-10}{x}} = 5^{\frac{3x-2}{2x}}$$

$$\frac{x-2}{2} + \frac{4x-10}{x} = \frac{3x-2}{2x}$$

$$\frac{x^2-2x+8x-20}{2x} = \frac{3x-2}{2x}$$

$$x^2 + 6x - 20 = 3x - 2$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

A soma das raízes da equação do segundo grau é -3 e o produto é -18. Logo:

$$x_1 = -6 \text{ e } x_2 = 3$$

O conjunto solução é $S = \{-6; 3\}$.

Em alguns problemas é necessário **colocar em evidência** as potências que apresentam a variável no expoente. Para evitar trabalhar com frações, costuma-se escolher a **potência de menor expoente** para realizar a operação.

Resolva a equação $3^x - 2 \times 3^{x+1} + 3^{x+2} = 36$

A potência de menor expoente é 3^x. Vamos reescrever $2 \times 3^{x+1}$ e 3^{x+2} em termos de 3^x. Temos que:

- $\mathbf{2 \times 3^{x+1}} = 2 \times 3^{1+x} = 2 \times 3^1 \times 3^x = \mathbf{6 \times 3^x}$
- $\mathbf{3^{x+2}} = 3^{2+x} = 3^2 \times 3^x = \mathbf{9 \times 3^x}$

Logo:

$$3^x - \mathbf{2 \times 3^{x+1}} + \mathbf{3^{x+2}} = 36$$

$$3^x - \mathbf{6 \times 3^x} + \mathbf{9 \times 3^x} = 36$$

Colocando 3^x em evidência:

$$3^x(1 - 6 + 9) = 36$$

$$3^x \times 4 = 36$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

O conjunto solução é $S = \{2\}$.

Resolva a equação $2^{x-2} + 2^x + 2^{x+1} = 416$

A potência de menor expoente é 2^{x-2}. Vamos reescrever 2^x e 2^{x+1} em termos de 2^{x-2}. Temos que:

- $\mathbf{2^x} = 2^{x+(2-2)} = 2^{2+(x-2)} = 2^2 \times 2^{x-2} = \mathbf{4 \times 2^{x-2}}$
- $\mathbf{2^{x+1}} = 2^{x+(3-2)} = 2^{3+(x-2)} = 2^3 \times 2^{x-2} = \mathbf{8 \times 2^{x-2}}$

Logo:

$$2^{x-2} + \mathbf{2^x} + \mathbf{2^{x+1}} = 416$$

$$2^{x-2} + \mathbf{4 \times 2^{x-2}} + \mathbf{8 \times 2^{x-2}} = 416$$

Colocando 2^{x-2} em evidência:

$$2^{x-2}(1 + 4 + 8) = 416$$

$$2^{x-2} \times 13 = 416$$

$$2^{x-2} = 32$$

$$2^{x-2} = 2^5$$

$$x - 2 = 5$$

$$x = 7$$

O conjunto solução é $S = \{7\}$.

Resolva a equação $8 \times 5^{3x-3} + 3 \times 5^{3x-2} - 5^{3x} + 5^{3x+1} = 2615$

A potência de menor expoente é 5^{3x-3}. Vamos reescrever $3 \times 5^{3x-2}$, 5^{3x} e 5^{3x+1} em termos de 5^{3x-3}. Temos que:

- $\mathbf{3 \times 5^{3x-2}} = 3 \times 5^{1+3x-3} = 3 \times 5^1 \times 5^{3x-3} = \mathbf{15 \times 3^{3x-3}}$
- $\mathbf{5^{3x}} = 5^{3+3x-3} = 5^3 \times 5^{3x-3} = \mathbf{125 \times 3^{3x-3}}$
- $\mathbf{5^{3x+1}} = 5^{4+3x-3} = 5^4 \times 5^{3x-3} = \mathbf{625 \times 3^{3x-3}}$

Logo:

$$8 \times 5^{3x-3} + \mathbf{3 \times 5^{3x-2}} - \mathbf{5^{3x}} + \mathbf{5^{3x+1}} = 2615$$

$$8 \times 5^{3x-3} + \mathbf{15 \times 5^{3x-3}} - \mathbf{125 \times 5^{3x-3}} + \mathbf{625 \times 5^{3x-3}} = 2615$$

Colocando 5^{3x-3} em evidência:

$$5^{3x-3}(8 + 15 - 125 + 625) = 2615$$

$$5^{3x-3} \times 523 = 2615$$

$$5^{3x-3} = 5^1$$

$$3x - 3 = 1$$

$$x = \frac{4}{3}$$

O conjunto solução é $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$.

Em alguns problemas pode ser interessante realizar uma **substituição de variável**. Vejamos alguns exemplos:

Resolva a equação $4^x - 2^x = 12$.

$$4^x - 2^x = 12$$
$$(2^2)^x - 2^x - 12 = 0$$

Note que $(2^2)^x$ é igual a $(2^x)^2$:

$$(2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$

Realizando a substituição $\boldsymbol{y = 2^x}$, obtém-se:

$$y^2 - y - 12 = 0$$

Temos uma equação do segundo grau, que pode ser resolvida pela Fórmula de Bhaskara. Note, porém, que a soma das raízes da função $y^2 - y - 12$ é 1 e o produto é -12. Logo:

$$\boldsymbol{y_1 = -3} \text{ e } \boldsymbol{y_2 = 4}$$

Retornando à variável x, temos:

$\boldsymbol{2^x} = \boldsymbol{-3}$ → Não existe x que satisfaça a igualdade, pois $2^x > 0$.

$\boldsymbol{2^x} = \boldsymbol{4} \rightarrow 2^x = 2^2 \rightarrow x = 2$

O conjunto solução é $S = \{2\}$.

Resolva a equação $25^x - 5^{x+1} = 500$.

$$25^x - 5^{x+1} = 500$$
$$(5^2)^x - 5^1 \times 5^x = 500$$

Note que $(5^2)^x$ é igual a $(5^x)^2$:

$$(5^x)^2 - 5 \times 5^x - 500 = 0$$

Realizando a substituição $\boldsymbol{y = 5^x}$, obtém-se:

$$y^2 - 5y - 500 = 0$$

Temos uma equação do segundo grau, que pode ser resolvida pela Fórmula de Bhaskara. Note, porém, que a soma das raízes da função $y^2 - 5y - 500$ é 5 e o produto é -500. Logo:

$$\boldsymbol{y_1 = -20} \text{ e } \boldsymbol{y_2 = 25}$$

Retornando à variável x, temos:

$\boldsymbol{5^x} = \boldsymbol{-20}$ → Não existe x que satisfaça a igualdade, pois $5^x > 0$.

$\boldsymbol{5^x} = \boldsymbol{25} \rightarrow 5^x = 5^2 \rightarrow x = 2$

O conjunto solução é $S = \{2\}$.

Resolva a equação $3^x + 3^{3-x} = 12$.

$$3^x + 3^{3-x} = 12.$$

$$3^x + \frac{3^3}{3^x} - 12 = 0$$

$$3^x + -12 + \frac{27}{3^x} = 0$$

Multiplicando todos os termos por 3^x, obtemos:

$$(3^x)^2 - 12(3^x) + 27 = 0$$

Realizando a substituição $\boldsymbol{y = 3^x}$, obtém-se:

$$y^2 - 12y + 27 = 0$$

A soma das raízes da equação do segundo grau é 12 e o produto é 27. Logo:

$$\boldsymbol{y_1 = 3} \text{ e } \boldsymbol{y_2 = 9}$$

Retornando à variável x, temos:

$\boldsymbol{3^x} = \boldsymbol{3} \rightarrow x = 1$

$\boldsymbol{3^x} = \boldsymbol{9} \rightarrow 3^x = 3^2 \rightarrow x = 2$

O conjunto solução é $S = \{1; 2\}$.

Para finalizar a teoria de equações exponenciais, vamos resolver uma questão que envolve diferentes bases.

Resolva a equação $9^x + 15^x = 2 \times 25^x$.

Vamos desenvolver a equação:

$$9^x + 15^x = 2 \times 25^x$$

$$(3^2)^x + (3 \times 5)^x = 2 \times (5^2)^x$$

$$(\boldsymbol{3^x})^2 + \boldsymbol{3^x} \times \boldsymbol{5^x} = 2 \times (\boldsymbol{5^x})^2$$

Nesse tipo de questão, a dica é dividir ambos os lados da equação por $(3^x)^2$ ou por $(5^x)^2$. Vamos, então, realizar a divisão por $(5^x)^2$:

$$\frac{(3^x)^2 + 3^x \times 5^x}{(5^x)^2} = \frac{2 \times (5^x)^2}{(5^x)^2}$$

$$\frac{(3^x)^2}{(5^x)^2} + \frac{3^x}{5^x} = 2$$

$$\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 2 = 0$$

Realizando a substituição $\boldsymbol{y} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\boldsymbol{x}}$, obtém-se:

$$y^2 + y - 2 = 0$$

A soma das raízes da equação do segundo grau é -1 e o produto é -2. Logo:

$$\boldsymbol{y_1 = -2} \text{ e } \boldsymbol{y_2 = 1}$$

Retornando à variável x, temos:

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x} = \boldsymbol{-2} \rightarrow$ Não existe x que satisfaça a igualdade, pois $\left(\frac{3}{5}\right)^x > 0$.

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x} = \boldsymbol{1} \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^0 \rightarrow x = 0$

O conjunto solução é $S = \{0\}$.

Vamos praticar o conteúdo aprendido com algumas questões de concursos públicos.

(Pref. Ronda Alta/2019) A solução da equação exponencial $3^{x+3} = 81$ é:

A) $x = 27$.
B) $x = 9$.
C) $x = 3$.
D) $x = 2$.
E) $x = 1$.

Comentários:

Vamos transformar ambos os lados da equação em potências de base 3.

$$3^{x+3} = 81$$

$$3^{x+3} = 3^4$$

$$x + 3 = 4$$

$$x = 1$$

Gabarito: Letra E.

(Pref. Coronel Bicaco/2019) A solução da equação $5^{2x+3} \times 25^{2x+1} = \sqrt{5\sqrt{5^{32-2x}}}$ é:

a) $\frac{10}{7}$

b) $\frac{5}{7}$

c) $\frac{7}{13}$

d) $\frac{7}{11}$

e) $\frac{6}{11}$

Comentários:

Vamos transformar ambos os lados da equação em potências de base 5.

$$5^{2x+3} \times 25^{2x+1} = \sqrt{5\sqrt{5^{32-2x}}}$$

$$5^{2x+3} \times (5^2)^{2x+1} = \sqrt{5 \times (5^{32-2x})^{\frac{1}{2}}}$$

$$5^{2x+3} \times 5^{4x+2} = \left(5 \times (5^{32-2x})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$5^{(2x+3)+(4x+2)} = 5^{\frac{1}{2}} \times (5^{32-2x})^{\frac{1}{4}}$$

$$5^{6x+5} = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{(32-2x)\times\frac{1}{4}}$$

$$5^{6x+5} = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{8-\frac{x}{2}}$$

$$5^{6x+5} = 5^{\frac{1}{2}+(8-\frac{x}{2})}$$

$$5^{6x+5} = 5^{\frac{17}{2}-\frac{x}{2}}$$

$$6x + 5 = \frac{17}{2} - \frac{x}{2}$$

$$6x + \frac{x}{2} = \frac{17}{2} - 5$$

$$\frac{13}{2}x = \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{7}{13}$$

Gabarito: Letra C.

(Pref. Campo Verde/2010) Qual é a soma dos valores de x que verifica a equação $3^{x^2-8x+12} = (9^{x+1})^{x-6}$?

A) 5

B) 2

C) 3

D) 8

E) 4

Comentários:

Vamos transformar ambos os lados da equação em potências de base 3.

$$3^{x^2-8x+12} = (9^{x+1})^{x-6}$$

$$3^{x^2-8x+12} = ((3^2)^{x+1})^{x-6}$$

$$3^{x^2-8x+12} = 3^{2\times(x+1)\times(x-6)}$$

$$x^2 - 8x + 12 = 2 \times (x+1) \times (x-6)$$

Veja que as raízes de $x^2 - 8x + 12$ têm soma 8 e produto 12. Logo, suas raízes são 2 e 6. Podemos escrever esse termo como $(x-2)(x-6)$.

$$(x-2)(x-6) = 2 \times (x+1) \times (x-6)$$

Uma das raízes dessa equação é $\boldsymbol{x_1 = 6}$**.** Simplificando $(x-6)$ dos dois lados da equação, obtemos:

$$x - 2 = 2 \times (x+1)$$

$$x - 2 = 2x + 2$$

$$-2 - 2 = 2x - x$$

$$\boldsymbol{x_2 = -4}$$

Logo, a soma dos possíveis valores de x é $\boldsymbol{x_1 + x_2 = 6 - 4 = 2.}$

Gabarito: Letra B.

(SEAD Passo Fundo/2016) Resolvendo a equação: $2^x + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 104$ no conjunto dos números reais, obtemos como solução:

A) $\frac{47}{3}$
B) 8
C) 3
D) 2

Comentários:

Vamos colocar o termo de menor potência em evidência.

$$2^x + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 104$$

$$2^x + 2^2 \times 2^x + 2^3 \times 2^x = 104$$

$$2^x(1 + 2^2 + 2^3) = 104$$

$$2^x(1 + 4 + 8) = 104$$

$$2^x \times 13 = 104$$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

Gabarito: Letra C.

(PM-SP/2012) É correto afirmar que a solução da equação exponencial $3.9^x - 4.3^x + 1 = 0$ é:

A) $S = \{0,1\}$.

B) $S = \{-1,0\}$.

C) $S = \{-2,1\}$.

D) $S = \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$.

Comentários:

$$3 \times 9^x - 4 \times 3^x + 1 = 0$$

$$3 \times (3^2)^x - 4.3^x + 1 = 0$$

$$3 \times (3^x)^2 - 4.3^x + 1 = 0$$

Realizando a substituição $\boldsymbol{y = 3^x}$, obtém-se:

$$3y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3}$$

$$y = \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$\boldsymbol{y_1 = 1} \text{ e } \boldsymbol{y_2 = \frac{1}{3}}$$

Retornando à variável x, temos:

$\boldsymbol{3^x} = \boldsymbol{1} \ \rightarrow 3^x = 3^0 \ \rightarrow x = 0$

$\boldsymbol{3^x} = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \rightarrow 3^x = 3^{-1} \ \rightarrow x = -1$

Logo, o conjunto solução da equação exponencial é $S = \{-1,0\}$.

Gabarito: Letra B.

INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

As **inequações exponenciais** são inequações que apresentam a **incógnita no expoente**. Exemplos:

- $5^x > 625$
- $2^{4x+1} \leq 1024$;
- $4^x + 6^x > 2 \times 9^x$;
- $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81^x}} > 27.$

Para resolver as inequações exponenciais, devemos **reduzir os termos da inequação a uma base comum**. Vamos ver o que acontece com a desigualdade para todos dos casos em que $a > 0$ com $a \neq 1$.

- Para $a > 1$, temos que:

$$a^b > a^c \leftrightarrow b > c$$

(Mantém-se a desigualdade)

- Para $\mathbf{0 < a < 1}$, temos que:

$$a^b > a^c \leftrightarrow b < c$$

(Inverte-se a desigualdade)

Isso significa que, para resolver uma inequação exponencial, devemos seguir os seguintes passos:

- Reduzir os termos da inequação a uma base comum;
- Verificar se a base a obtida é maior do que 1 ou se está entre zero e 1:
  - Se for maior do que 1, mantém-se a desigualdade para os expoentes; e
  - Se for **entre zero e 1, inverte-se a desigualdade para os expoentes**.

Resolva a inequação $3^{x+1} < 81$.

$$3^{x+1} < 81$$

$$3^{x+1} < 3^4$$

Como a base 3 é maior do que 1, mantém-se a desigualdade para os expoentes:

$$x + 1 < 4$$

$$x < 3$$

O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\} =]-\infty; 3[$.

Resolva a inequação $2^{-5x+2} \geq 16$

$$2^{-5x+2} \geq 16$$

$$2^{-5x+2} \geq 2^4$$

Como a base 2 é maior do que 1, mantém-se a desigualdade para os expoentes:

$$-5x + 2 \geq 4$$

$$-5x \geq 2$$

$$5x \leq -2$$

$$x \leq -\frac{2}{5}$$

O conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{2}{5}\right\} =]-\infty; -\frac{2}{5}]$.

Resolva a inequação $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \frac{1}{9}$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$$

Como a base $\frac{1}{3}$ **está entre 0 e 1, inverte-se a desigualdade para os expoentes**:

$$2x + 1 \leq 2$$

$$2x \leq 1$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

O conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2}\right\} =]-\infty; \frac{1}{2}]$.

Resolva a inequação $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{2}} \geq e^{-3}$.

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{2}} \geq e^{-3}$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{2}} \geq (e^{-1})^{3}$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{2}} \geq \left(\frac{1}{e}\right)^{3}$$

A base $\frac{1}{e}$ é aproximadamente $\frac{1}{2{,}72}$. Isso significa que $\frac{1}{e}$ **está entre 0 e 1**. Nesse caso, **inverte-se a desigualdade para os expoentes**:

$$\frac{x}{2} \leq 3$$

$$x \leq 6$$

O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\} =]-\infty;\ 6]$.

Uma outra forma de resolver o problema seria utilizar a base comum e ao invés de $\frac{1}{e}$. Vejamos:

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{2}} \geq e^{-3}$$

$$(e^{-1})^{\frac{x}{2}} \geq e^{-3}$$

$$e^{-\frac{x}{2}} \geq e^{-3}$$

A base e é aproximadamente 2,72 e, portanto, é maior do que 1. Nesse caso, mantém-se a desigualdade para os expoentes:

$$-\frac{x}{2} \geq -3$$

Ao multiplicar ambos os lados da inequação por -1, inverte-se a desigualdade de "maior ou igual" ($\geq$) para "menor ou igual" ($\leq$):

$$\frac{x}{2} \leq 3$$

$$x \leq 6$$

Novamente, o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\} =]-\infty;\ 6]$.

Resolva a inequação $3^x - 5 \times 3^{x+1} + 2 \times 3^{x+2} > 36$

A potência de menor expoente é 3^x. Vamos reescrever $5 \times 3^{x+1}$ e $2 \times 3^{x+2}$ em termos de 3^x. Temos que:

- $\mathbf{5 \times 3^{x+1}} = 5 \times 3^1 \times 3^x = \mathbf{15 \times 3^x}$
- $\mathbf{2 \times 3^{x+2}} = 2 \times 3^2 \times 3^x = \mathbf{18 \times 3^x}$

Logo:

$$3^x - \mathbf{5 \times 3^{x+1}} + \mathbf{2 \times 3^{x+2}} > 36$$

$$3^x - \mathbf{15 \times 3^x} + \mathbf{18 \times 3^x} > 36$$

Colocando 3^x em evidência:

$$3^x(1 - 15 + 18) > 36$$

$$3^x \times 4 > 36$$

$$3^x > 9$$

$$3^x > 3^2$$

Como a base 3 é maior do que 1, mantém-se a desigualdade para os expoentes:

$$x > 2$$

O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} =]2; +\infty[$.

Em alguns casos pode ser necessária a análise do sinal da função obtida após a redução à base comum. Vejamos dois exemplos:

Resolva a inequação $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{x^2}} \leq \pi^{-1}$.

Pessoal, o π é um número como qualquer outro. Para o nosso caso, basta saber que ele é aproximadamente 3,14.

$$\sqrt[4]{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{x^2}} \leq \pi^{-1}$$

$$\left(\left(\frac{1}{\pi}\right)^{x^2}\right)^{\frac{1}{4}} \leq \left(\frac{1}{\pi}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{x^2}{4}} \leq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1}$$

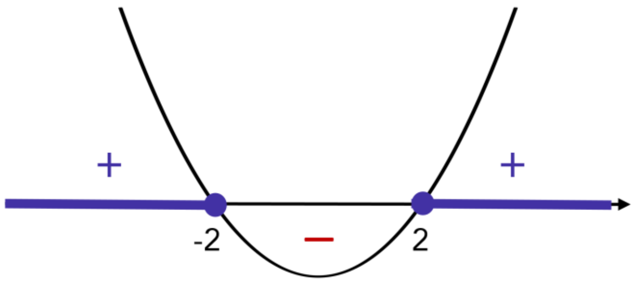
A base $\frac{1}{\pi}$ é aproximadamente $\frac{1}{3,14}$. Isso significa que $\frac{1}{\pi}$ **está entre 0 e 1**. Nesse caso, **inverte-se a desigualdade para os expoentes**:

$$\frac{x^2}{4} \geq 1$$

$$x^2 \geq 4$$

$$x^2 - 4 \geq 0$$

As raízes da função $x^2 - 4$ são 2 e -2. Vamos analisar o sinal:



Note que, para que $x^2 - 4$ seja maior ou igual a zero, devemos ter:

$$x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2$$

O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\} =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

Resolva a inequação $\frac{\sqrt[x-1]{5^{x+1}}}{\sqrt[x+1]{5^{x-1}}} > 5^{\frac{3}{2}}$.

$$\frac{\sqrt[x-1]{5^{x+1}}}{\sqrt[x+1]{5^{x-1}}} > 5^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{5^{\frac{x+1}{x-1}}}{5^{\frac{x-1}{x+1}}} > 5^{\frac{3}{2}}$$

$$5^{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}} > 5^{\frac{3}{2}}$$

Como a base 5 é maior do que 1, mantém-se a desigualdade para os expoentes:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}>\frac{3}{2}$$

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}-\frac{3}{2}>0$$

$$\frac{2(x+1)^2-2(x-1)^2-3(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)}>0$$

$$\frac{2[(x+1)^2-(x-1)^2]-3(x^2-1)}{2(x-1)(x+1)}>0$$

$$\frac{2[4x]-3x^2+3}{2(x-1)(x+1)}>0$$

$$\frac{-3x^2+8x+3}{2(x-1)(x+1)}>0$$

As raízes da função $-3x^2+8x+3$ são $-\frac{1}{3}$ e 3, e essa função apresenta concavidade virada para baixo. Vamos analisar o sinal de cada parcela da expressão $\frac{-3x^2+8x+3}{2(x-1)(x+1)}$ e verificar quando que ela é positiva.

	-1	$-\frac{1}{3}$	1	3	x
$(x+1)$	−	+	+	+	+
$(x-1)$	−	−	−	+	+
$-3x^2+8x+3$	−	−	+	+	−
$\frac{-3x^2+8x+3}{2(x+1)(x-1)}$	−	+	−	+	−

Portanto, $\frac{-3x^2+8x+3}{2(x-1)(x+1)}>0$ para:

$$-1<x<-\frac{1}{3} \text{ ou } 1<x<3$$

O conjunto solução é $S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid -1<x<-\frac{1}{3} \text{ ou } 1<x<3\right\}$.

Também podemos escrever $S=\left]-1;-\frac{1}{3}\right[\ \cup\ ]1\,;3[$.

Assim como nas equações exponenciais, em alguns problemas de inequações pode ser interessante realizar uma **substituição de variável**.

Resolva a inequação $4^x-6\times 2^x\geq -8$.

$$4^x-6\times 2^x\geq -8$$

$$(2^2)^x-6\times 2^x+8\geq 0$$

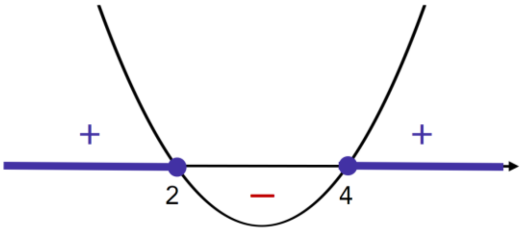
$$(2^x)^2-6\times 2^x+8\geq 0$$

Realizando a substituição $y = 2^x$, obtém-se:

$$y^2 - 6y + 8 \geq 0$$

A soma das raízes da função $y^2 - 6y + 8$ é 6 e o produto é 8. Logo, as raízes são 2 e 4.

Vamos fazer o estudo do sinal dessa função do segundo grau e verificar para quais valores ela é maior ou igual a zero.



Note, portanto, que devemos ter:

$$y \leq 2 \text{ ou } y \geq 4$$

Retornando para a variável x, temos:

$$2^x \leq 2 \text{ ou } 2^x \geq 4$$

$$2^x \leq 2^1 \text{ ou } 2^x \geq 2^2$$

Como em ambas as desigualdades temos a base 2, que é maior do que 1, então:

$$x \leq 1 \text{ ou } \ x \geq 2$$

O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\} =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$.

Vamos praticar o conteúdo aprendido com algumas questões de concursos públicos.

(ALESP/2002) Se x é um número real tal que $[(2^{-x})(4^x)] < 8^{x+1}$, então:

A) $x > -\frac{3}{2}$

B) $x < \frac{3}{2}$

C) $x = 0$

D) $x = 1$

Comentários:

Vamos transformar os termos da inequação em potências de base 2.

$$[(2^{-x}) \times (4^x)] < 8^{x+1}$$

$$2^{-x} \times (2^2)^x < (2^3)^{x+1}$$

$$2^{-x} \times 2^{2x} < 2^{3x+3}$$

$$2^{-x+2x} < 2^{3x+3}$$

$$2^{x} < 2^{3x+3}$$

Como a base 2 é maior do que 1, mantém-se a desigualdade para os expoentes:

$$x < 3x + 3$$

$$-3 < 3x - x$$

$$-3 < 2x$$

$$2x > -3$$

$$x > -\frac{3}{2}$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Itaquaquecetuba/2012) Qual o conjunto solução da inequação exponencial $\left(\frac{3}{5}\right)^{x} \geq \frac{125}{27}$?

a) $S = \{x \in\ R \mid x < -3\}$

b) $S = \{x \in\ R \mid x > -3\}$

c) $S = \{x \in\ R \mid x \geq -3\}$

d) $S = \{x \in\ R \mid x \leq -3\}$

Comentários:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x} \geq \frac{125}{27}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x} \geq \frac{5^3}{3^3}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^{3}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$

Como a base $\frac{3}{5}$ **está entre 0 e 1**, **inverte-se a desigualdade para os expoentes**:

$$x \leq -3$$

Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in\ R \mid x \leq -3\}$.

Gabarito: Letra D.

(Pref. Matias Olímpio/2016/Adaptada) O conjunto solução da seguinte inequação $3 \times 2^{x+2} - 2^{2x} > 32$ é:

A) $]4, 8[$

B) $]2, 3[$

C) $]2, 8[$

D) $]1, 3[$

Comentários:

Vamos transformar ambos os lados da inequação em potências de base 2.

$$3 \times 2^{x+2} - 2^{2x} > 32$$

$$3 \times 2^2 \times 2^x - (2^x)^2 > 32$$

$$0 > (2^x)^2 - 12 \times (2^x) + 32$$

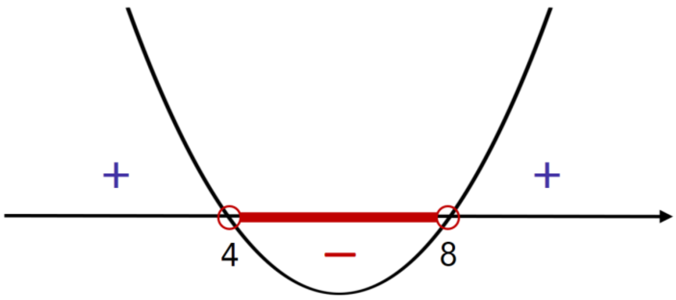
$$(2^x)^2 - 12 \times (2^x) + 32 < 0$$

Realizando a substituição $y = 2^x$, obtém-se:

$$y^2 - 12y + 32 < 0$$

A soma das raízes de $y^2 - 12y + 32$ é 12 e o produto é 32. Logo, $y_1 = 4$ e $y_2 = 8$.

Vamos fazer o estudo do sinal dessa função do segundo grau e verificar para quais valores ela é menor do que zero.



Note, portanto, que devemos ter:

$$4 < y < 8$$

Retornando para a variável x, temos:

$$4 < 2^x < 8$$

$$2^2 < 2^x < 2^3$$

De $2^x > 2^2$, temos que $x > 2$. De $2^x < 2^3$, temos que $x < 3$. Juntando os resultados obtidos, tem-se:

$$2 < x < 3$$

Isto é, o conjunto solução da inequação é dado por $S =]2, 3[$.

Gabarito: Letra B.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição de função exponencial

A **função exponencial** é uma função $\boldsymbol{f}$ que **associa uma variável** $\boldsymbol{x}$ pertencente ao conjunto dos números reais ($x \in \mathbb{R}$) **ao valor** $\boldsymbol{a^x}$ pertencente ao conjunto dos reais positivos ($a^x \in \mathbb{R}_+^*$). Ademais, é **necessário que a base** $\boldsymbol{a}$ **seja maior do que zero e diferente de 1**.

Em linguagem matemática, a função exponencial é definida da seguinte maneira:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$
$$f(x) = a^x$$
$$a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Por que a base deve ser maior do que zero e diferente de 1?

Vamos entender o porquê de a base a ser maior do que zero e diferente de 1. Para tanto, analisaremos o que aconteceria caso ela fosse igual a 1, igual a zero ou menor do que zero.

$a = 1$

Se tivéssemos uma base $a = 1$, obteríamos a seguinte função:

$$f(x) = 1^x$$

Veja que, nesse caso, trata-se de uma **função constante**. Isso porque, para qualquer valor de x, teríamos $f(x) = 1^x = 1$.

$a = 0$

Caso tivéssemos uma base 0, estaríamos com a seguinte função:

$$f(x) = 0^x$$

Note que:

- Para $x > 0$, teríamos a **função constante** $f(x) = 0$.

  Exemplo: para $x = 3$, tem-se $f(3) = 0^3 = 0$

- Para $x = 0$, teríamos uma **indeterminação.**

  $$"f(0) = 0^0"$$

- Para $x < 0$, teríamos uma divisão **impossível**.

Exemplo: para $x = -3$, tem-se "$f(-3) = 0^{-3} = \frac{1}{0^3}$"

$a < 0$

Por fim, caso tivéssemos uma base menor do que 0, alguns valores racionais de x fariam com que a função retornasse um valor que não pertence ao conjunto dos números reais. Por exemplo, se a função $f(x)$ fosse $(-2)^x$, $x = \frac{1}{2}$ nos retornaria o seguinte:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$$

Trata-se de um número complexo, que não pertence ao conjunto dos números reais.

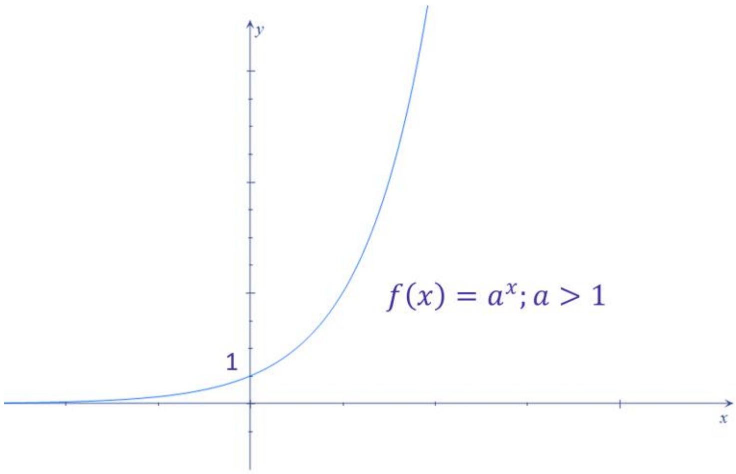
Gráficos básicos e propriedades da função exponencial

Agora que temos bem consolidado o fato de que precisamos ter $a > 0$ e $a \neq 1$, vamos verificar os gráficos básicos e as propriedades da função exponencial $f(x) = a^x$. Para tanto, dividiremos a seção em três tópicos:

- Gráfico básico e propriedades para $a > 1$;
- Gráfico básico e propriedades para $0 < a < 1$;
- Propriedades válidas para $0 < a < 1$ e para $a > 1$.

Gráfico básico e propriedades para $a > 1$

Para o caso em que a base é maior do que 1, a função exponencial tem o seguinte formato:



A partir desse gráfico básico, podemos visualizar as seguintes propriedades:

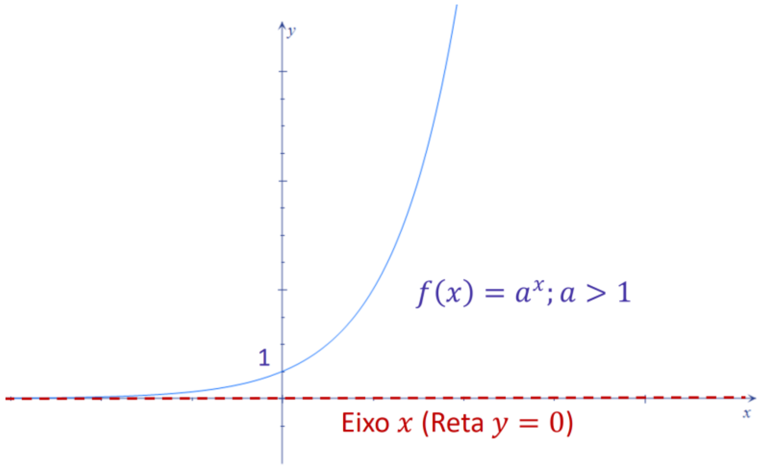
- **Para $a > 1$, a função exponencial é estritamente crescente (e, portanto, é crescente).**

  Uma função $f(x)$ é estritamente crescente quando, ao selecionarmos quaisquer números reais distintos x_1 e x_2 com $x_1 > x_2$, temos necessariamente que $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplo: suponha que a nossa função exponencial com $a > 1$ seja $f(x) = 2^x$. Observe que $5 > 3$ e que $f(5) > f(3)$, pois $2^5 > 2^3$.

- **Para $a > 1$, à medida que se diminui o valor de x, a função exponencial $f(x) = a^x$ se aproxima cada vez mais do valor zero sem nunca chegar a ser zero.**

Note que, para o caso em que $a > 1$, quanto menor o valor de x, mais próximo de zero a função exponencial $f(x) = a^x$ fica.



Veja também que a função **nunca será zero**, ou seja, nunca tocará a reta $y = 0$. Podemos dizer que essa **função tende a zero** quando **x tende a menos infinito**.

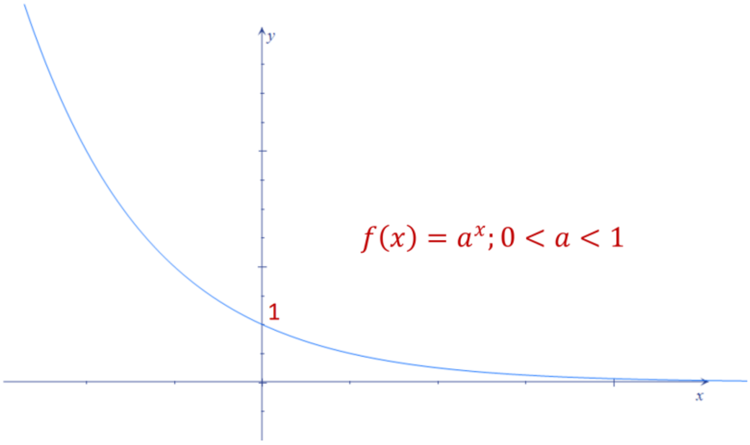
Em outras palavras, **$y = 0$ é uma assíntota horizontal quando x tende a menos infinito ($-\infty$).**

Exemplo: suponha que a nossa função exponencial com $a > 1$ seja $f(x) = 2^x$. Vamos verificar o valor de $f(x)$ para valores cada vez menores de x.

x	$f(x) = 2^x$
-1	$2^{-1} = 0{,}5$
-5	$2^{-5} = 0{,}03125$
-10	$2^{-10} = 0{,}00098$
-15	$2^{-15} = 0{,}00003$
-20	$2^{-20} = 9{,}54 \,.\, 10^{-7}$

Gráfico básico e propriedades para $0 < a < 1$

Para o caso em que a base está entre 0 e 1, a função exponencial tem o seguinte formato:



A partir desse gráfico, podemos visualizar as seguintes propriedades:

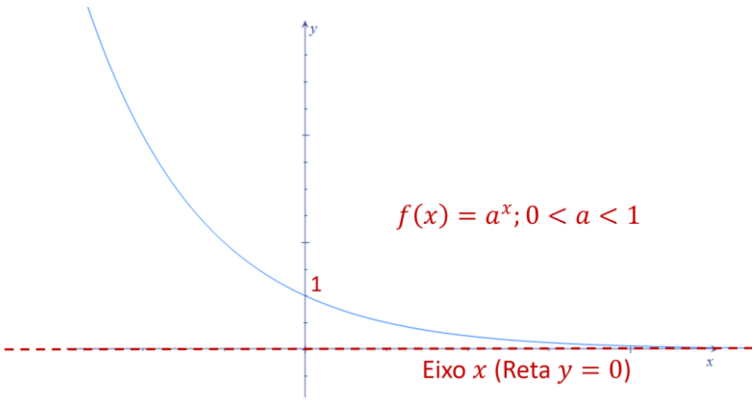
- **Para $0 < a < 1$, a função exponencial é estritamente decrescente (e, portanto, é decrescente).**

  Uma função $f(x)$ é estritamente decrescente quando, ao selecionarmos quaisquer números reais distintos x_1 e x_2 com $x_1 > x_2$, temos necessariamente que $f(x_1) < f(x_2)$.

  <u>Exemplo</u>: suponha que a nossa função exponencial com $0 < a < 1$ seja $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Observe que $3 > 2$ e que $f(3) < f(2)$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$, isto é, $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$.

- **Para $0 < a < 1$, à medida em que se <u>aumenta</u> o valor de x, a função exponencial $f(x) = a^x$ se aproxima cada vez mais do valor zero sem nunca chegar a ser zero.**

  Note que, para o caso em que $0 < a < 1$, quanto <u>maior</u> o valor de x, mais próximo de zero a função exponencial $f(x) = a^x$ fica.



Veja também que a função **nunca será zero**, ou seja, nunca tocará a reta $y = 0$. Podemos dizer que essa **função <u>tende</u> a zero** quando **x <u>tende</u> a mais infinito**.

Em outras palavras, **$y = 0$ é uma assíntota horizontal quando x tende a mais infinito ($+\infty$).**

Exemplo: suponha que a nossa função exponencial com $0 < a < 1$ seja $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Vamos verificar o valor de $f(x)$ para valores cada vez maiores de x.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = (1/2)^x}$
1	$(1/2)^1 = 0{,}5$
5	$(1/2)^5 = 0{,}03125$
10	$(1/2)^{10} = 0{,}00098$
15	$(1/2)^{15} = 0{,}00003$
20	$(1/2)^{20} = 9{,}54\,.\,10^{-7}$

Propriedades válidas para $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$ e para $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$

Além das propriedades já apresentadas, temos as seguintes que valem tanto para o caso $a > 1$ quanto para o caso em que $0 < a < 1$.

- **A função exponencial $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ corta o eixo $\boldsymbol{y}$ no ponto $\boldsymbol{(x; y) = (0; 1)}$.**

  Uma função qualquer corta o eixo y do plano cartesiano quando $x = 0$. Observe que, para a função exponencial, temos:

  $$f(0) = a^0 = 1$$

  Isto é, a função exponencial corta o eixo y no ponto $(x; y) = (0; 1)$.

- **A imagem da função exponencial $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ é $\boldsymbol{Im(f) = R_+^* =]\,0;\ +\infty[= (0, +\infty)}$.**

  Observe que os possíveis valores que $f(x) = a^x$ pode assumir são os **reais positivos** (**esse conjunto não inclui o zero**). Isso porque a função exponencial:

  - Se aproxima do valor zero sem nunca chegar nesse valor; e
  - Nunca será negativa.

(Pref. São Cristóvão/2019) Julgue o item, relativo a funções exponenciais.

As funções exponenciais $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 0{,}5^x$ são crescentes e as suas imagens coincidem com o conjunto de todos os números reais positivos.

Comentários:

A função $f(x) = 2^x$ de fato é uma função crescente – sendo mais específico, $f(x)$ é **estritamente crescente**. Isso porque a sua base 2 é maior do que 1. Além disso, as funções $f(x)$ e $g(x)$ de fato apresentam como imagem os reais positivos ($\boldsymbol{R}_+^*$).

A questão está **errada** porque $\boldsymbol{g(x)} = (0{,}5)^x$ é uma função **estritamente decrescente**, pois sua base está entre 0 e 1.

Gabarito: ERRADO.

(PM-AM/2011) Avalie as afirmativas a seguir em relação à função real $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$.

I: $f(0) = 1$.

II: f é crescente.

III: A imagem de f é o intervalo $(0;\ \infty)$.

Está correto o que se afirma em:

a) I, apenas;

b) I e III, apenas;

c) II e III, apenas;

d) I, II e III.

Comentários:

Vamos avaliar cada afirmação.

I. $\boldsymbol{f(0) = 1}$.

CORRETO. Basta notar que $f(0) = \left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$.

II: f é crescente.

ERRADO. f é uma função exponencial com base entre 0 e 1. Trata-se, portanto, de uma função **estritamente decrescente**.

III: A imagem de f é o intervalo $(\boldsymbol{0};\ \infty)$.

CORRETO. A imagem de uma função exponencial da forma a^x é o conjunto dos reais positivos $\boldsymbol{R}_+^*$, que pode ser descrito por $(0; \infty)$.

Gabarito: Letra B.

Obtenção de gráficos provenientes dos gráficos básicos

A partir dos dois gráficos básicos já apresentados para $f(x) = a^x$, podemos construir diversas variantes dessa função.

Atenção!

A **obtenção de gráficos provenientes das funções exponenciais básicas da forma $f(x) = a^x$** é um assunto que até o momento **não foi muito explorado por bancas de concurso público**.

Inserimos esse conteúdo nessa aula somente para que você disponha de um **material completo**. **Não se trata de um assunto com um bom custo-benefício**.

Sugerimos que você tenha uma visão geral do assunto e que sejam entendidos especialmente a **translação vertical** e a **translação horizontal**.

Translação vertical

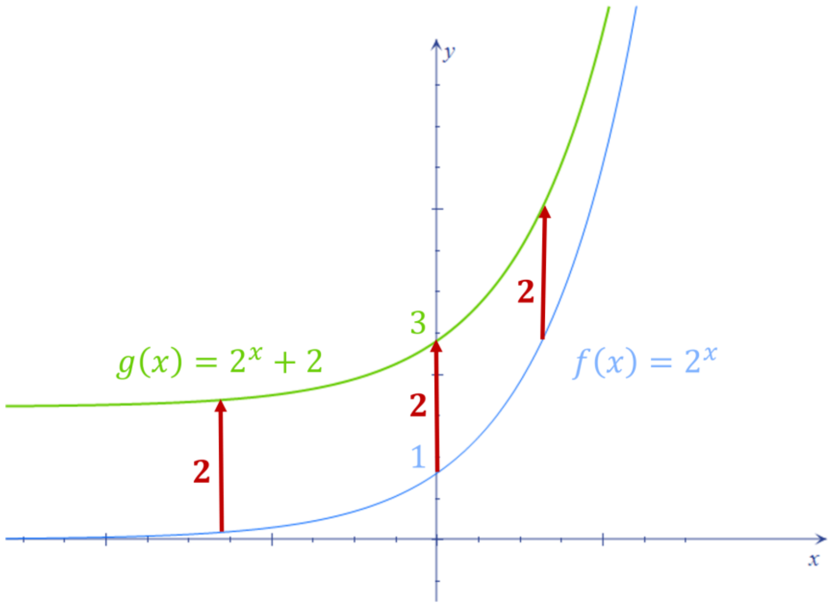
Ao **somar** ou **subtrair** uma constante **de uma função** qualquer, estamos transladando **verticalmente** **para cima** ou **para baixo** o gráfico dessa função. Vejamos dois exemplos para o caso da função exponencial:

Obtenha o gráfico de $2^x + 2$

Para construir o gráfico de $2^x + 2$, basta representar o gráfico de 2^x e transladá-lo verticalmente duas unidades para cima.

Note que, nesse caso, a assíntota também se desloca de $y = 0$ para $y = 2$, uma vez que a nova função tende a 2 quando x tende a menos infinito $(-\infty)$.

Além disso, a imagem, que era $R_+^* =]0; +\infty[$, passa a ser $]2, +\infty[$.

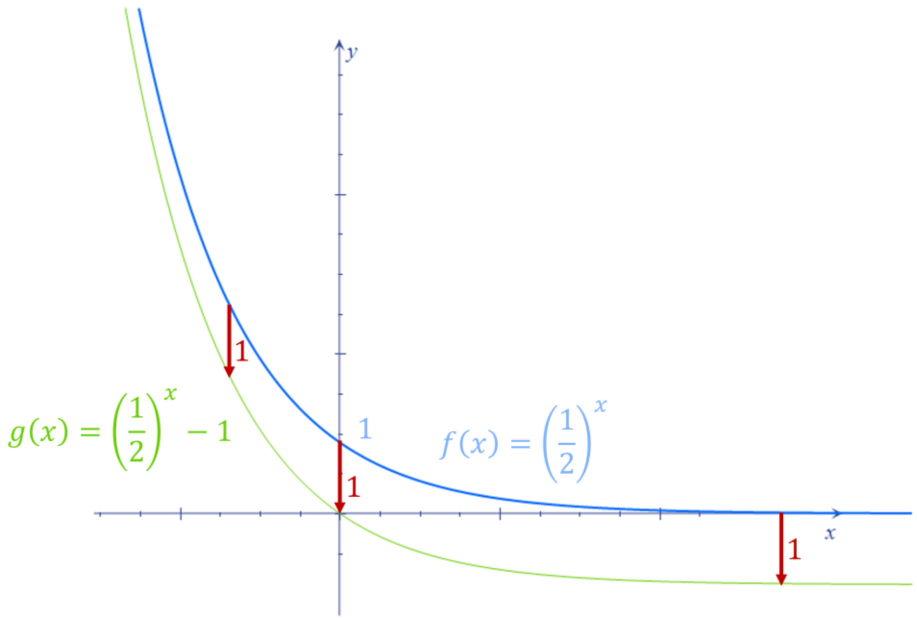


Obtenha o gráfico de $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

Para construir o gráfico de $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$, basta representar o gráfico de $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e transladá-lo verticalmente uma unidade para baixo.

Note que, nesse caso, a assíntota também se deslocou de $y = 0$ para $y = -1$, uma vez que a nova função tende a -1 quando x tende a mais infinito $(+\infty)$.

Além disso, a imagem, que era $R_+^* =]0;\ +\infty[$, passa a ser $]-1, +\infty[$.

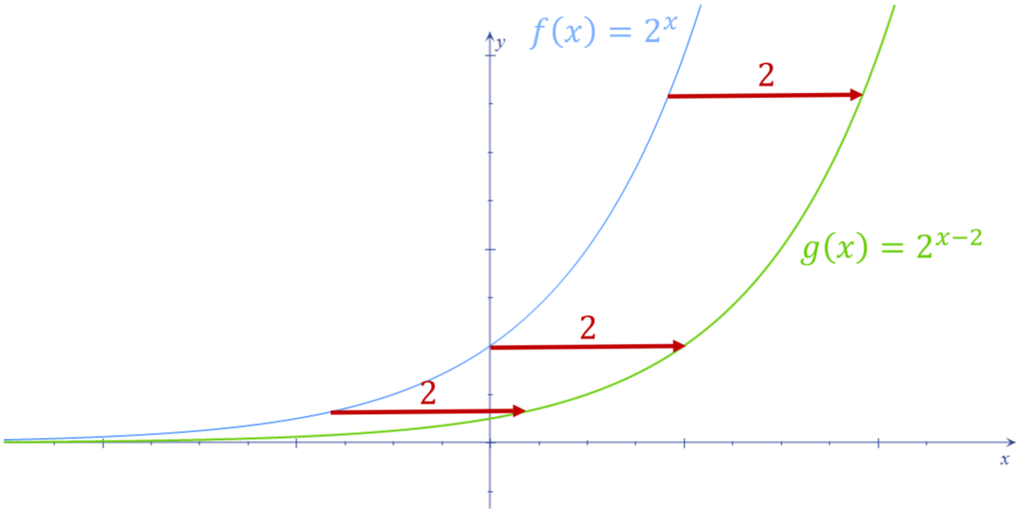


Translação horizontal

Ao **somar** ou **subtrair** uma constante **da variável x** de uma função qualquer, estamos transladando **horizontalmente** **para a esquerda** ou **para a direita** o gráfico dessa função. Vejamos dois exemplos para o caso da função exponencial:

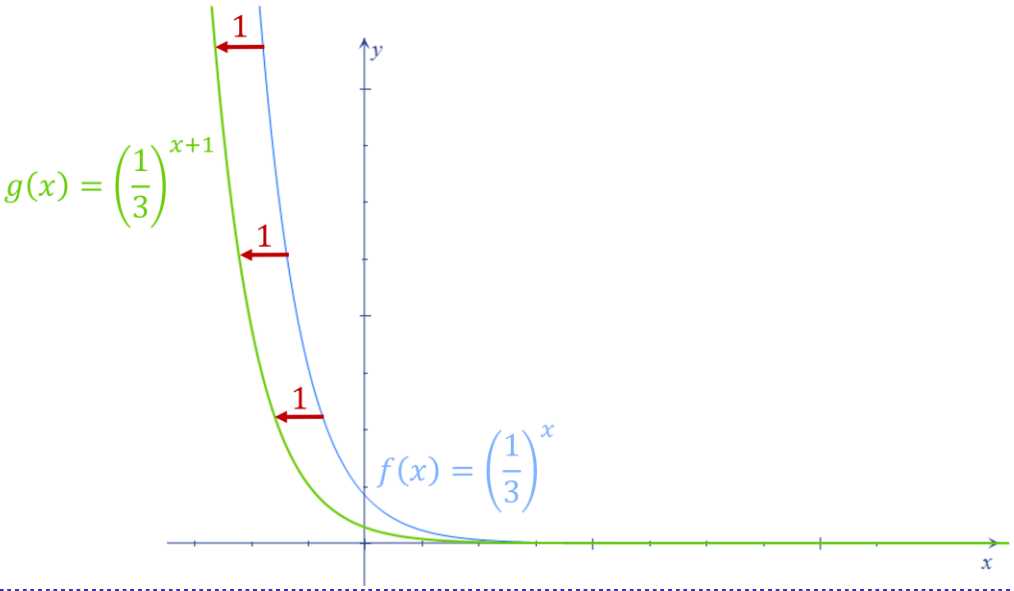
Obtenha o gráfico de 2^{x-2}

Para construir o gráfico de 2^{x-2}, basta representar o gráfico de 2^x e transladá-lo para a direita duas unidades. Note que a assíntota se mantém em $y = 0$ e a imagem se mantém $R_+^* =]0;\ +\infty[$.



Obtenha o gráfico de $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

Para construir o gráfico de $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$, basta representar o gráfico de $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ e transladá-lo para a esquerda uma unidade. Note que a assíntota se mantém em $y = 0$ e a imagem se mantém $R_+^* =]0;\ +\infty[$.



Multiplicação e divisão da função por uma constante positiva

Ao se multiplicar ou se dividir por uma constante positiva a função exponencial básica $f(x) = a^x$, **via de regra** **o gráfico da nova função** **não se trata de uma simples translação horizontal**, pois outros efeitos são adicionados ao formato curva.

INDO MAIS FUNDO!

Exceção a essa regra ocorre quando a constante que multiplica ou divide a^x é uma potência da própria base a, pois, nesses casos, temos somente **translação horizontal**. Exemplos:

$$2^2 \times 2^x = 2^{x+2} \rightarrow \text{translação horizontal para a esquerda}$$

$$\frac{1}{5^3} \times 5^x = 5^{x-3} \rightarrow \text{translação horizontal para a direita}$$

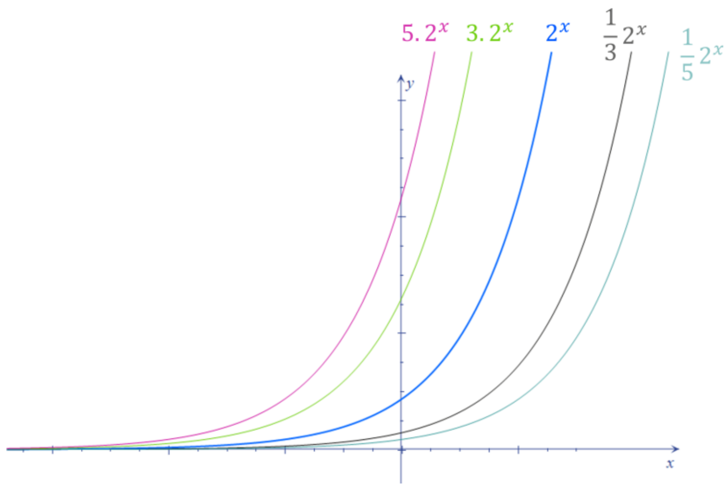
Vamos verificar **qualitativamente** o que acontece com os gráficos de $f(x) = a^x$ para dois casos

- Base $a > 1$; e
- Base a entre 0 e 1.

Base $a > 1$

- A multiplicação por uma constante $C > 1$ faz com que o gráfico seja deslocado para a **esquerda**, podendo haver também alteração no formato da curva.

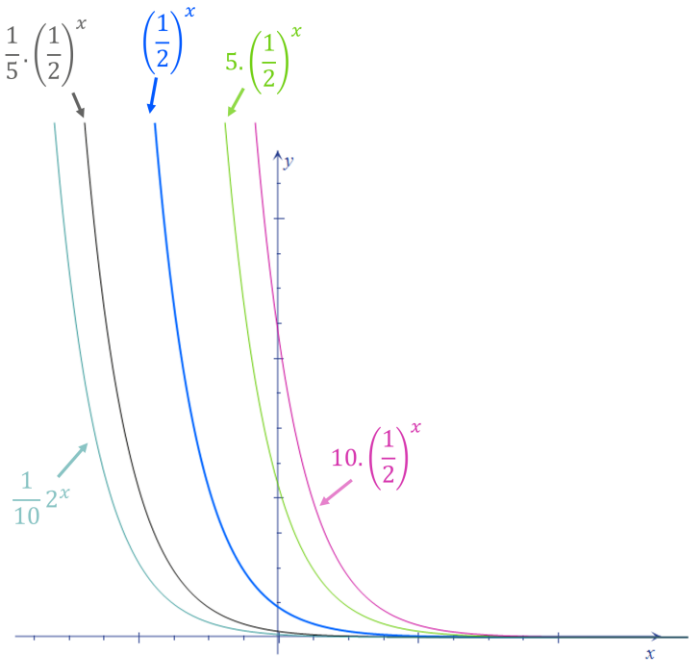
- A multiplicação por uma constante C com $0 < C < 1$ — ou seja, a divisão por uma constante maior do que 1 — faz com que o gráfico seja deslocado para a **direita**, podendo haver também alteração no formato da curva.



<u>Base a entre 0 e 1</u>

- A <u>multiplicação</u> por uma constante $C > 1$ faz com que o gráfico seja deslocado para a **direita**, podendo haver também alteração no formato da curva.

- A <u>multiplicação</u> por uma constante C com $0 < C < 1$ — ou seja, a <u>divisão</u> por uma constante maior do que 1 — faz com que o gráfico seja deslocado para a **esquerda**, podendo haver também alteração no formato da curva.



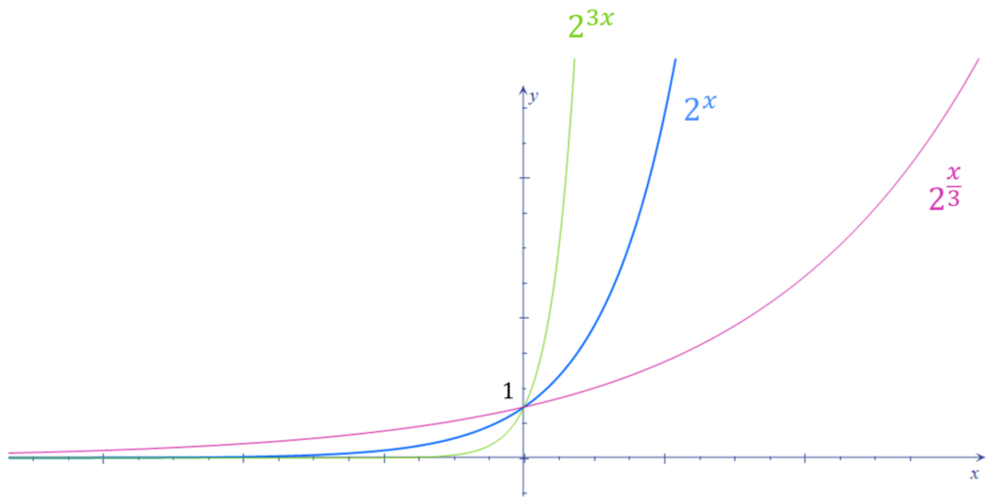
Multiplicação e divisão da variável x por uma constante positiva

Vamos verificar **<u>qualitativamente</u>** o que acontece com os gráficos de $f(x) = a^x$ quando multiplicamos ou dividimos **<u>a variável x</u>** por uma constante C. Para todos os dois possíveis da base a (maior do que 1 e entre 0 e 1), temos os seguintes efeitos

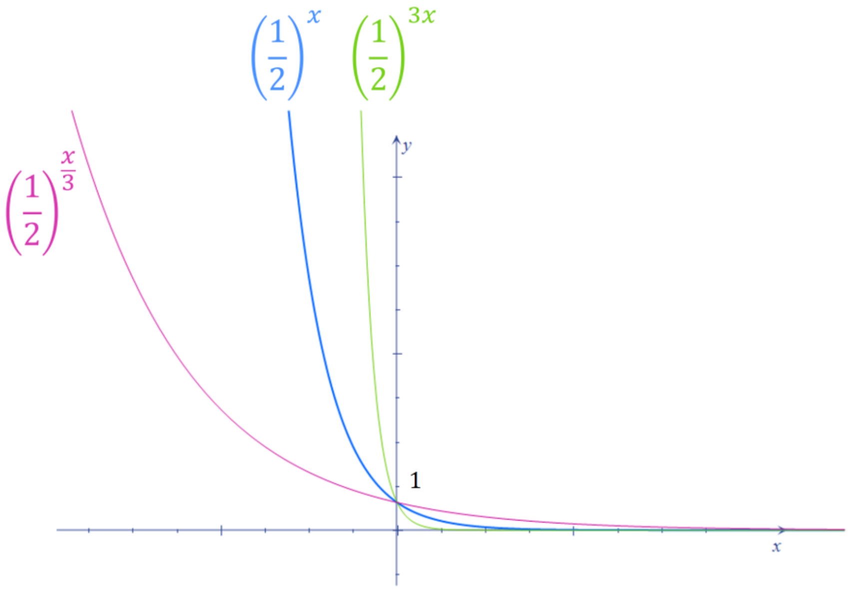
- A multiplicação **<u>da variável x</u>** por uma constante $\boldsymbol{C > 1}$ faz com que a curva tenha uma inclinação **mais acentuada**.
- A multiplicação **<u>da variável x</u>** por uma constante C com $\boldsymbol{0 < C < 1}$ — ou seja, a divisão por uma constante maior do que 1 — faz com que a curva tenha uma inclinação **menos acentuada**.

Vejamos dois exemplos:

Base $a > 1$



Base a entre 0 e 1

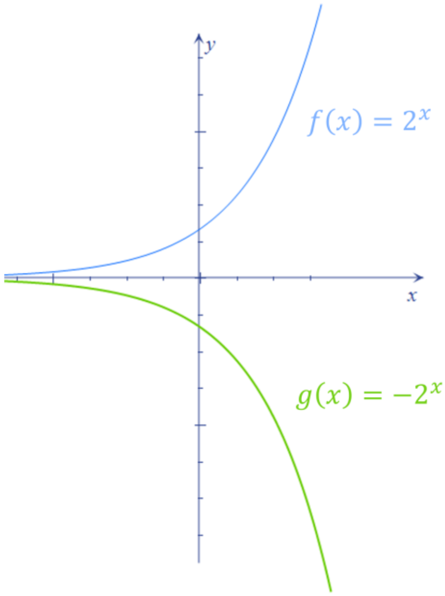


Multiplicação da função por -1

Ao se multiplicar uma função por -1, o gráfico da nova função é o exato "espelho" da original com relação ao eixo x. Vejamos dois exemplos para o caso da função exponencial:

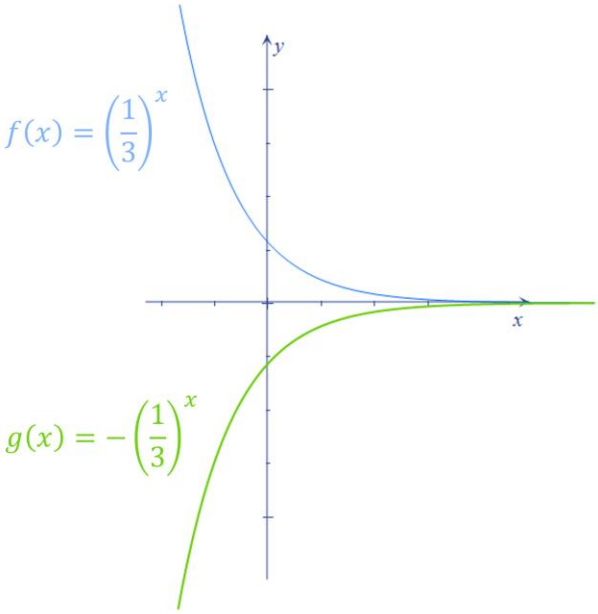
Obtenha o gráfico de -2^x

Para construir o gráfico de -2^x, basta representar o gráfico de 2^x e espelhá-lo com relação ao eixo x.



Obtenha o gráfico de $-\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Para construir o gráfico de $-\left(\frac{1}{3}\right)^x$, basta representar o gráfico de $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ e espelhá-lo com relação ao eixo x.



Módulo na variável x

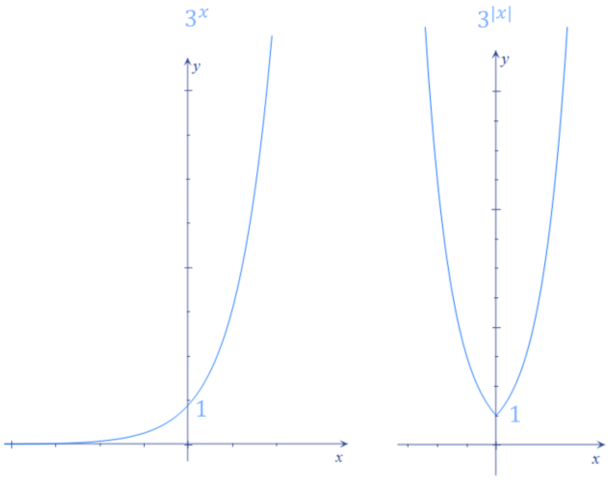
Ao se aplicar um módulo na variável x, o novo gráfico é obtido do seguinte modo:

- Para $x \geq 0$, o novo gráfico é igual ao gráfico original; e
- Para x negativo, o novo gráfico é um espelho, com relação ao eixo y, do caso $x \geq 0$.

Vejamos dois exemplos para o caso da função exponencial:

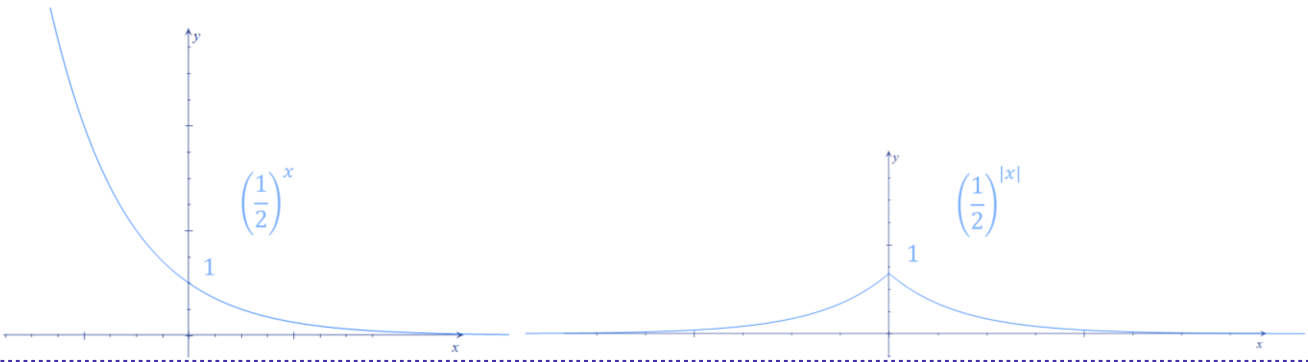
Obtenha o gráfico de $3^{|x|}$

Note que, para $x \geq 0$, o gráfico de $3^{|x|}$ é exatamente igual ao gráfico de 3^x. Já para os valores negativos de x, o gráfico é um espelho, com relação ao eixo y, do caso $x \geq 0$.



Obtenha o gráfico de $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

Note que, para $x \geq 0$, o gráfico de $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ é exatamente igual ao gráfico de $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$. Já para os valores negativos de x, o gráfico é um espelho, com relação ao eixo y, do caso $x \geq 0$.



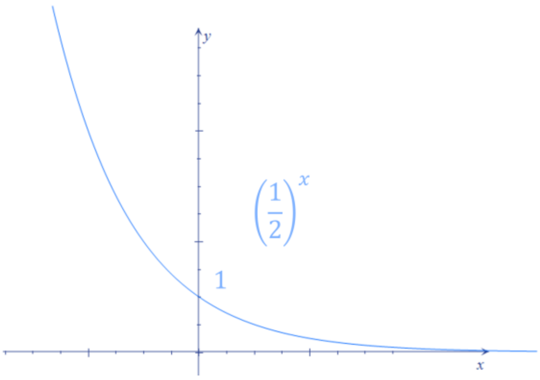
Composição de várias transformações

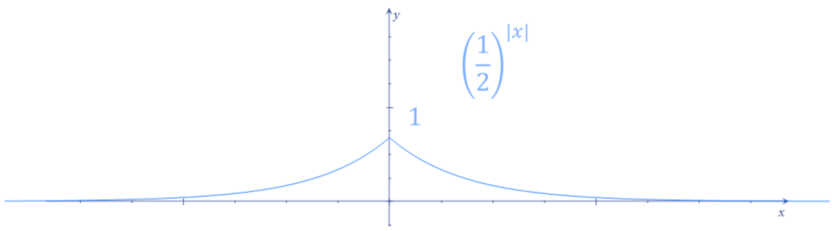
Agora que estamos munidos de diversas ferramentas para a obtenção de gráficos derivados de $f(x) = a^x$, vamos realizar um exemplo mais completo.

Obtenha o gráfico de $-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} + 2$

Obtenção de $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ a partir de $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

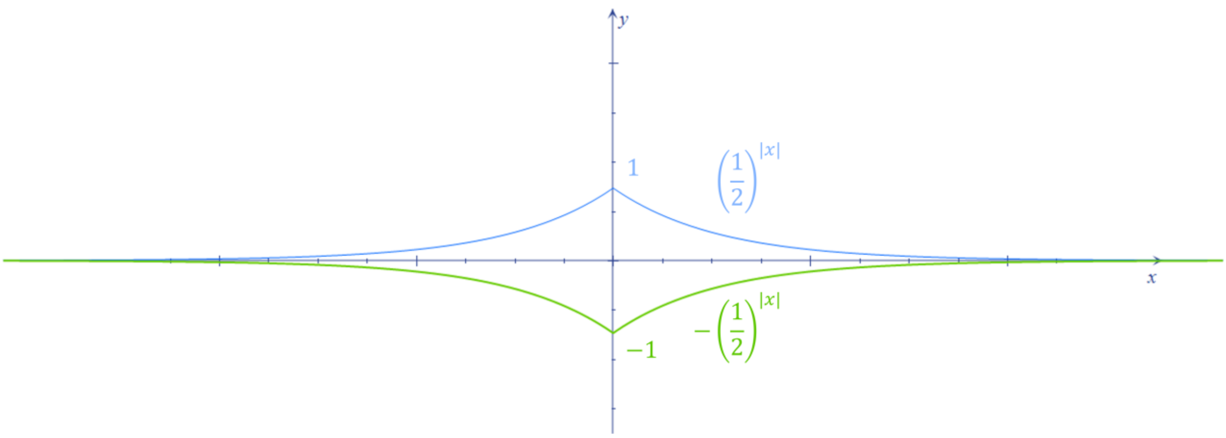
Note que, para $x \geq 0$, o gráfico de $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ é exatamente igual ao gráfico de $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$. Já para os valores negativos de x, o gráfico é um espelho, com relação ao eixo y, do caso $x \geq 0$.





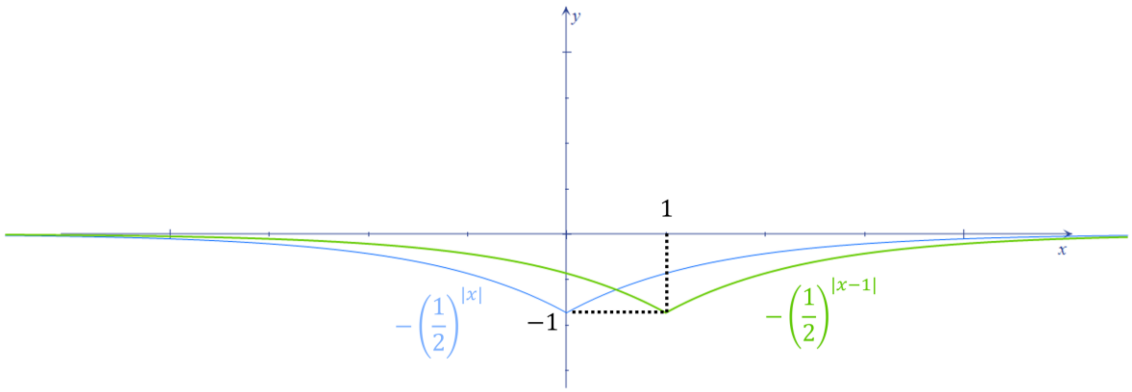
Obtenção de $-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ a partir de $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

Para construir o gráfico de $-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$, basta representar o gráfico de $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ e espelhá-lo com relação ao eixo x.



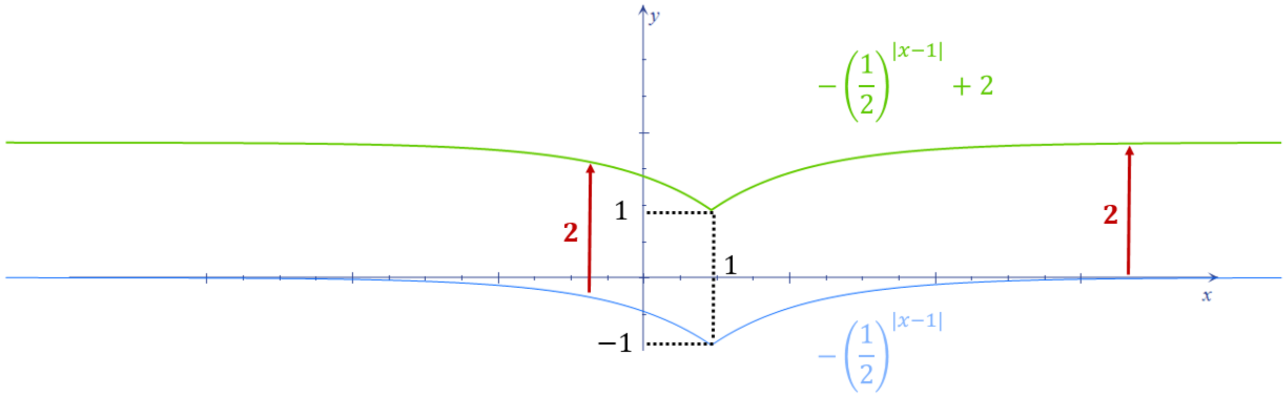
Obtenção de $-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$ a partir de $-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

Para construir o gráfico de $-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$, basta representar o gráfico de $-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ e transladá-lo para a direita uma unidade.



Obtenção de $-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}+2$ a partir de $-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$

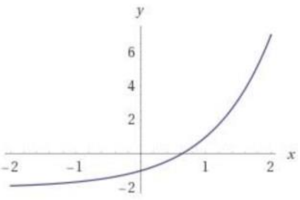
Finalmente, para construir o gráfico de $-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}+2$, basta representar o gráfico de $-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$ e transladá-lo verticalmente duas unidades para cima.



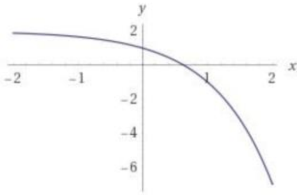
Vamos praticar o que aprendemos.

(Pref. Cabeceira Grande/2018) Marque a alternativa que contém o gráfico da função $f(x) = -2 + 3^x$.

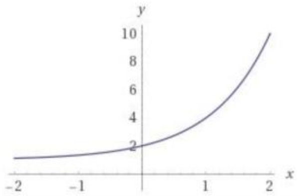
A)



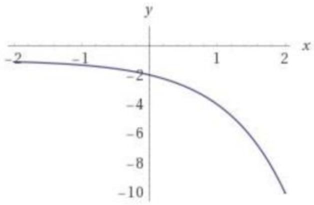
B)



C)



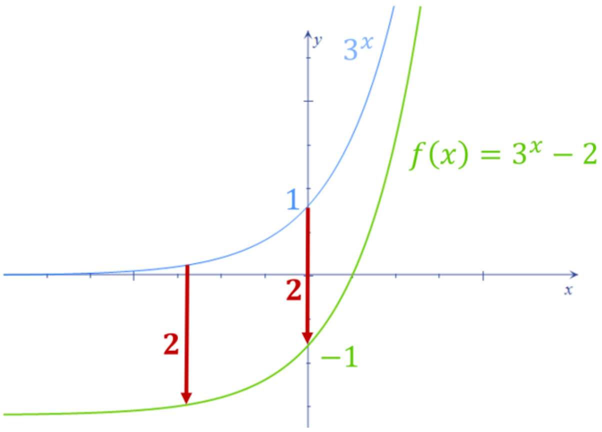
D)



Comentários:

Veja que a função que se quer obter é $f(x) = -2 + 3^x$, que pode ser reescrita como $3^x - 2$.

Para obter o gráfico de $3^x - 2$, partimos de 3^x para, em seguida, transladar o gráfico verticalmente duas unidades para baixo.

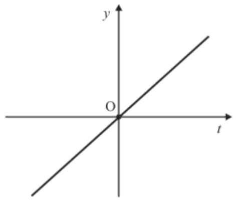


O gráfico obtido corresponde a alternativa A.

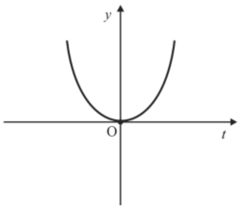
Gabarito: Letra A.

(TJ PR/2019) Um investimento em que os juros são capitalizados a cada momento é exemplo de aplicação da função exponencial expressa pela equação $y = f(t) = C \times b^t$, em que $C > 0$ é o capital inicial, t é o tempo e $b > 1$ é um número real. Assinale a opção em que o gráfico apresentado pode representar a função $y = f(t)$ dada, definida para todo t real.

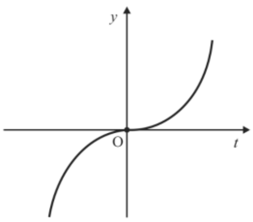
A)



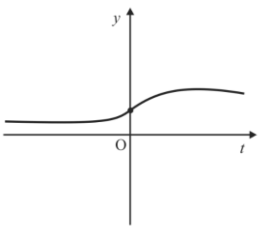
B)



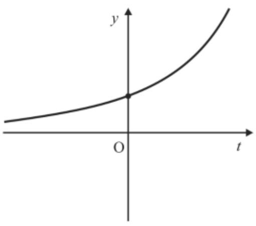
C)



D)



E)



Comentários:

A questão pergunta pelo gráfico de $f(t) = C \times b^t$, onde $C > 0$, $b > 1$ e a **variável t é real**.

A resposta correta é a letra E, pois b^t corresponde a uma função exponencial clássica com base maior do que 1 e a constante positiva C, que multiplica essa exponencial, desloca a curva e altera o seu formato sem, no entanto, mudar o "jeito" da função .

Vamos comentar as demais alternativas:

A) Trata-se de uma função do primeiro grau da forma $y = ax$, com $a > 0$.

B) Trata-se de uma função do segundo grau da forma $y = ax^2$, com $a > 0$.

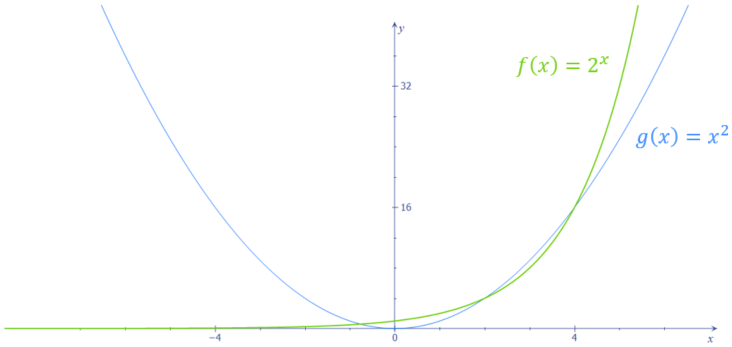
C) Trata-se de uma função polinomial de grau ímpar, que poderia ser $y = x^3$ ou $y = x^5$, por exemplo.

D) Essa função poderia ser uma raiz de índice ímpar somada a uma constante, como $y = \sqrt[3]{x} + 1$.

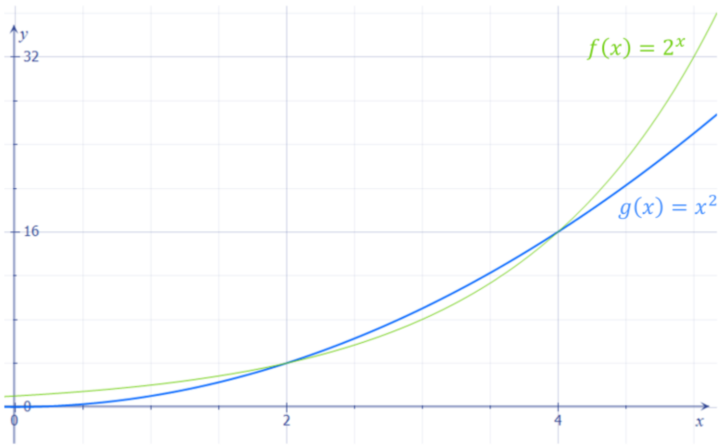
Gabarito: Letra E.

Função exponencial × Função quadrática

Para valores positivos de x, o gráfico de uma função exponencial com **base $a > 0$** pode se **parecer**, em certos intervalos de valores, com uma função do segundo grau. Veja, por exemplo, a comparação entre as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$.



Note que, no intervalo de 0 a 5, os gráficos são parecidos:



Apesar da similaridade, não se pode afirmar que a função exponencial descreve uma parábola, **nem sequer quando considerado um pequeno intervalo**. Isso porque a palavra **parábola**, na matemática, apresenta um **significado preciso**.

Para o nosso curso não convém apresentarmos a definição de parábola: basta saber que a **função quadrática** (ou função do segundo grau) **descreve uma parábola** e a **função exponencial não**.

(INSS/2003) Suponha que a arrecadação líquida e os gastos da previdência com benefícios, em bilhões de reais, sejam dados respectivamente pelas funções $f(t) = mt + n$ e $g(t) = c2^{kt}$, em que t é o número de anos transcorridos desde 2000, m, n, c e k são constantes reais.

Nessa situação julgue o item.

Em um plano cartesiano de coordenadas $t \times y$, o gráfico da função g para $0 \leq t \leq 5$, é um arco de parábola.

Comentários:

Note que g é uma **função exponencial**. Portanto, ela **não descreve uma parábola**, uma vez que não se trata de uma função quadrática.

Gabarito: ERRADO.

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Equações exponenciais

FGV

1.(FGV/ALERO/2018) Se $100^{2x} \times 1000^{3x} = 100^4$, então o valor de x é

a) $\frac{4}{5}$.

b) $\frac{4}{9}$.

c) $\frac{8}{11}$.

d) $\frac{8}{13}$.

e) $\frac{8}{15}$.

Comentários:

Para resolver a equação exponencial, devemos transformar todas as potências em uma mesma base. Vamos utilizar a base 10.

$$100^{2x} \times 1000^{3x} = 100^4$$

$$(10^2)^{2x} \times (10^3)^{3x} = (10^2)^4$$

$$10^{2\times 2x} \times 10^{3\times 3x} = 10^{2\times 4}$$

$$10^{4x} \times 10^{9x} = 10^8$$

$$10^{4x+9x} = 10^8$$

$$10^{13x} = 10^8$$

$$13x = 8$$

$$x = \frac{8}{13}$$

Gabarito: Letra D.

FCC

2.(FCC/ALAP/2020) Se a, b e c são números naturais que satisfazem $2^a.3^b = 18.6^c$, então $b - a$ é igual a

a) 5

b) 2

c) 4

d) 3

e) 1

Comentários:

Temos que:

$$2^a \times 3^b = 18 \times 6^c$$

Vamos decompor os números 18 e 6 em termos de 2 e 3.

$$2^a \times 3^b = 2 \times 9 \times (2 \times 3)^c$$

$$2^a \times 3^b = 2 \times 3^2 \times 2^c \times 3^c$$

Rearranjando o lado direito da equação:

$$2^a \times 3^b = 2^c \times 2 \times 3^c \times 3^2$$

$$\mathbf{2^a \times 3^b = 2^{c+1} \times 3^{c+2}}$$

Para melhor organizar a equação, vamos deixar a base 2 na esquerda e a base 3 na direita:

$$\frac{2^a}{2^{c+1}} = \frac{3^{c+2}}{3^b}$$

$$2^{a-(c+1)} = 3^{c+2-b}$$

Para continuar a questão, **poderíamos aplicar logaritmo dos dois lados da equação** (assunto da próxima aula, caso faça parte do seu edital). Ocorre que <u>**uma solução para a equação ocorre quando os dois expoentes são zero**</u>. Isso porque <u>qualquer base diferente de zero elevado a zero é igual a 1</u>.

$$\mathbf{2^0 = 3^0}$$

Para ambos os expoentes serem zero, temos:

$$\begin{cases} a - (c + 1) = 0 \\ c + 2 - b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 2 \end{cases}$$

A questão pergunta por $b - a$.

$$b - a$$

$$= (c + 2) - (c + 1)$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1$$

Gabarito: Letra E.

3. (FCC/IBMEC/2018) O número de soluções reais da equação exponencial $4^x = 2^{x+1} - 1$ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários:

Temos que:

$$4^x = 2^{x+1} - 1$$

$$(2^2)^x = 2 \times 2^x - 1$$

Note que $(2^2)^x = (2^x)^2$. Portanto:

$$(2^x)^2 = 2 \times 2^x - 1$$

$$(2^x)^2 - 2 \times 2^x + 1 = 0$$

Realizando a substituição de 2^x por y, temos:

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

Aplicando a Fórmula de Bhaskara, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$y = 1$$

Temos, portanto, um único resultado para y. Retornando para a variável x, ficamos com:

$$2^x = 1$$

$$2^x = 2^0$$

$$x = 0$$

Portanto, **a equação exponencial apresenta <u>uma</u> única solução** ($x = 0$).

Gabarito: Letra B.

Vunesp

4.(VUNESP/UNESP/2017) Admita que o número de visitas diárias a um site seja expresso pela potência 4^n, com n sendo o índice de visitas ao site. Se o site S possui o dobro do número de visitas diárias do que um site que tem índice de visitas igual a 6, o índice de visitas ao site S é igual a

a) 12.

b) 9.

c) 8,5.

d) 8.

e) 6,5.

Comentários:

O site que apresenta um índice de visitas $n = 6$ tem um total de:

$$4^n = 4^6 = (2^2)^6 = 2^{2\times 6} = 2^{12} \text{ visitas}$$

O site S possui o <u>**dobro**</u> do número de visitas. Logo, o **total de visitas do site S** é:

$$2 \times 2^{12} = 2^{13} \text{ visitas}$$

Devemos obter o <u>**índice de visitas do site S**</u>. Para tanto, **devemos obter o valor de n tal que** $2^{13} = 4^n$.

$$2^{13} = 4^n$$

$$2^{13} = (2^2)^n$$

$$2^{13} = 2^{2n}$$

$$13 = 2n$$

$$n = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

Portanto, o índice de visitas do site S é igual a 6,5.

Gabarito: Letra E.

Outras Bancas

5.(IDIB/Pref. Jaguaribe/2020) Seja $4^x - 10.2^x + 16 = 0$, uma equação exponencial e seja $x \in R$. Assinale a alternativa que representa corretamente o conjunto solução da equação.

a) S=∅

b) S={1}

c) S={1;3}

d) S={2;3}

Comentários:

Vamos passar todas as potências para a base 2.

$$4^x - 10.2^x + 16 = 0$$

$$(2^2)^x - 10 \times 2^x + 16 = 0$$

Note que $(2^2)^x = (2^x)^2$. Logo:

$$(2^x)^2 - 10 \times 2^x + 16 = 0$$

Realizando a substituição de variável $y = 2^x$, temos:

$$y^2 - 10y + 16 = 0$$

Temos uma equação do segundo grau. Para resolvê-la, vamos utilizar a Fórmula de Bhaskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 16$$

$$\Delta = 100 - 64$$

$$\Delta = 36$$

Temos que:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-10) \pm \sqrt{36}}{2 \times 1}$$

$$y = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$$y = 5 \pm 3$$

$$\boldsymbol{y_1 = 8} \text{ e } \boldsymbol{y_2 = 2}$$

Retornando à variável x, temos:

$\mathbf{2^x} = \mathbf{8} \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$

$\mathbf{2^x} = \mathbf{2} \rightarrow 2^x = 2^1 \rightarrow x = 1$

Logo, o conjunto solução da equação exponencial é $S = \{1; 3\}$.

Gabarito: Letra C.

6.(QUADRIX/CRB 10/2018) A respeito das equações, das operações aritméticas e de suas respectivas propriedades, julgue o item a seguir.

Se $\pi^{\Psi} = \pi^{\Psi^3}$, então $\Psi \in (-\infty, -\pi] \cup [\pi, \infty)$.

Comentários:

Pessoal, essa questão parece ser mais difícil do que ela realmente é.

Primeiramente, temos que π é um número irracional que corresponde a $3{,}1415\ldots$ Para essa questão, é necessário saber que **π é a base das potências**.

Note, também, que **o "tridente" Ψ é uma variável que devemos determinar**. Poderia ser x, mas a banca colocou o "tridente" para assustar o concurseiro.

Note, portanto, que devemos resolver a seguinte equação exponencial:

$$\pi^{\Psi} = \pi^{\Psi^3}$$

Como a base é a mesma em ambos os lados da equação, podemos igualar os expoentes. Ficamos com:

$$\Psi = \Psi^3$$

$$\Psi^3 - \Psi = 0$$

$$\Psi(\Psi^2 - 1) = 0$$

Uma solução dessa equação é $\Psi_1 = 0$. A outra possibilidade é que $(\Psi^2 - 1) = 0$. Logo:

$$\Psi^2 - 1 = 0$$

$$\Psi^2 = 1$$

$$\Psi_2 = -1 \text{ ou } \Psi_3 = 1$$

Temos, portanto, **três possibilidades para Ψ:** $-1, 0$ ou 1. Note que é **ERRADO** dizer que Ψ pertence ao intervalo $(-\infty, -\pi] \cup [\pi, \infty)$, pois as três soluções para a equação não estão nesse intervalo.

Gabarito: ERRADO.

7. (FUNDATEC/Pref. Santa Rosa/2018) A soma das raízes da equação $49^x - 56.7^{x-1} + 7 = 0$ é:

a) 8.

b) 7.

c) 2.

d) 1.

e) 0.

Comentários:

Vamos passar todas as potências para a forma 7^x.

$$49^x - 56 \times 7^{x-1} + 7 = 0$$

$$(7^2)^x - 56 \times 7^{-1} \times 7^x + 7 = 0$$

$$(7^2)^x - \frac{56}{7} \times 7^x + 7 = 0$$

$$(7^2)^x - 8 \times 7^x + 7 = 0$$

Note que $(7^2)^x = (7^x)^2$. Logo:

$$(7^x)^2 - 8 \times 7^x + 7 = 0$$

Realizando a substituição de variável $\boldsymbol{y = 7^x}$, temos:

$$y^2 - 8y + 7 = 0$$

Temos uma equação do segundo grau. Para resolvê-la, vamos utilizar a Fórmula de Bhaskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 7$$

$$\Delta = 64 - 28$$

$$\Delta = 36$$

Temos que:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{36}}{2 \times 1}$$

$$y = \frac{8 \pm 6}{2}$$

$$y = 4 \pm 3$$

$$\boldsymbol{y_1 = 1} \text{ e } \boldsymbol{y_2 = 7}$$

Retornando à variável x, temos:

$\boldsymbol{7^x} = \boldsymbol{1} \ \rightarrow 7^x = 7^0 \rightarrow \boldsymbol{x = 0}$

$\boldsymbol{7^x} = \boldsymbol{7} \ \rightarrow 7^x = 7^1 \rightarrow \boldsymbol{x = 1}$

Portanto, a soma das raízes da equação $49^x \ - \ 56.7^{x-1} \ + \ 7 \ = \ 0$ é:

$$\boldsymbol{0 + 1 = 1}$$

Gabarito: Letra D.

8.(AOCP/BM RS/2009) Assinale a alternativa correta. O(s) valor(es) de x real(is) que satisfaz(em) a equação $2^{2x} + 2.2^x - 8 = 0$ pertence(m) ao intervalo

a) $]-4{,}0[$.

b) $]-5,\frac{1}{2}[$.

c) $]-\frac{1}{2},\frac{5}{4}[$.

d) $[2,+\infty)$.

e) $(-\infty,\frac{4}{5}]$.

Comentários:

Vamos transformar todas as potências para a forma 2^x. Temos:

$$2^{2x} + 2 \times 2^x - 8 = 0$$

Note que $2^{2x} = (2^x)^2$. Logo:

$$(2^x)^2 + 2 \times 2^x - 8 = 0$$

Realizando a substituição de variável $\boldsymbol{y = 2^x}$, temos:

$$y^2 + 2y - 8 = 0$$

Temos uma equação do segundo grau. Para resolvê-la, vamos utilizar a Fórmula de Bhaskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8)$$

$$\Delta = 4 + 32$$

$$\Delta = 36$$

Temos que:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \times 1}$$

$$y = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$y = -1 \pm 3$$

$$\boldsymbol{y_1 = 2} \text{ e } \boldsymbol{y_2 = -4}$$

Retornando à variável x, temos:

$\boldsymbol{2^x} = \boldsymbol{2} \ \rightarrow 2^x = 2^1 \rightarrow x = 1$

$\boldsymbol{2^x} = \boldsymbol{-4} \ \rightarrow$ Não convém, pois $2^x > 0$.

Note, portanto, que a equação tem **solução somente para** $x = 1$. Dentre as alternativas apresentadas, essa solução está somente no intervalo $]-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}[$. O **gabarito**, portanto, é **letra C**.

Gabarito: Letra C.

9.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) A equação $5^{x^2-5} - (0,20)^{-4x} = 0$ tem como soluções

a) -2 e -4

b) -2 e 4

c) -1 e 5

d) 2 e 4

e) 2 e 1

Comentários:

A questão apresenta uma equação exponencial. Para resolvê-la, devemos deixar as potências em uma mesma base. Nesse problema, vamos deixá-las em base 5. Temos:

$$5^{x^2-5} - (0{,}20)^{-4x} = 0$$

$$5^{x^2-5} = (0{,}20)^{-4x}$$

$$5^{x^2-5} = \left(\frac{20}{100}\right)^{-4x}$$

$$5^{x^2-5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-4x}$$

$$5^{x^2-5} = (5^{-1})^{-4x}$$

$$5^{x^2-5} = 5^{(-1)\times(-4x)}$$

$$5^{x^2-5} = 5^{4x}$$

Agora que ambos os lados da equação estão em uma mesma base, podemos igualar os expoentes.

$$x^2 - 5 = 4x$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Temos uma equação do segundo grau. Para resolvê-la, vamos utilizar a Fórmula de Bhaskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5)$$

$$\Delta = 16 + 20$$

$$\Delta = 36$$

Temos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x = 2 \pm 3$$

$$x_1 = 5\ ;\ x_2 = -1$$

Note, portanto, que as soluções da equação exponencial são -1 e 5.

Gabarito: Letra C.

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Inequações exponenciais

FCC

1.(FCC/TRF 3/2016) O senhor A investiu a quantia de x em um produto financeiro que apresentou queda constante e sucessiva de 10% ao ano por, pelo menos, 10 anos. Simultaneamente, o senhor B investiu a quantia de 27x (27 vezes a quantia x) em um produto financeiro que apresentou queda constante e sucessiva de 70% ao ano por, pelo menos, 10 anos. A partir do início desses dois investimentos, o número de anos completos necessários para que o montante investido pelo senhor A se tornasse maior que o montante investido pelo senhor B é igual a

a) 2.

b) 4.

c) 6.

d) 3.

e) 5.

Comentários:

O senhor A investiu x reais e o seu investimento apresentou uma **queda de 10% ao ano**. Portanto, **a cada ano,** o seu investimento é **multiplicado por 0,9**, pois $1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Isso significa que, em n anos, o investimento do senhor A será:

$$x \times 0{,}9^n$$

Explicando o raciocínio

Decorrido 1 ano, o senhor A terá um capital de:

$$x - 10\%x$$
$$= x(1 - 10\%)$$
$$= x(1 - 0{,}1)$$
$$= \boldsymbol{x \times 0{,}9}$$

Transcorrido **mais um ano** com relação ao anterior (**total de 2 anos**), temos uma nova queda de 10% **com relação ao ano anterior**. Logo, o capital que resta é:

$$(\boldsymbol{x \times 0{,}9}) - 10\% \times (\boldsymbol{x \times 0{,}9})$$
$$= (\boldsymbol{x \times 0{,}9}) \times (1 - 10\%)$$

$$= (\boldsymbol{x} \times \mathbf{0,9}) \times (1 - 0{,}1)$$

$$= (\boldsymbol{x} \times \mathbf{0,9}) \times 0{,}9$$

$$= \boldsymbol{x} \times \mathbf{0,9^2}$$

Perceba, portanto, que a cada ano transcorrido devemos multiplicar o valor anterior por $0{,}9$, de modo que, passados n anos, teremos:

$$x \times 0{,}9^n$$

O senhor B investiu $27x$ reais e o seu investimento apresentou uma **queda de 70% ao ano**. Portanto, **a cada ano,** o seu investimento é **multiplicado por 0,3**, pois $1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Isso significa que, em n anos, o investimento do senhor B será:

$$27x \times 0{,}3^n$$

A questão pergunta o **número de anos completos** necessários para que o **montante investido pelo senhor A** se torne **maior** que o **montante investido pelo senhor B**.

$$\text{Montante A} > \text{Montante B}$$

$$x \times 0{,}9^n > 27x \times 0{,}3^n$$

Simplificando x (que é um número positivo), temos:

$$0{,}9^n > 27 \times 0{,}3^n$$

$$\frac{0{,}9^n}{0{,}3^n} > 27$$

$$\left(\frac{0{,}9}{0{,}3}\right)^n > 3^3$$

$$3^n > 3^3$$

Como a base das potências são maiores do que 1, mantém-se a desigualdade para os expoentes:

$$n > 3$$

Portanto, para que o **montante investido pelo senhor A** se torne **maior** que o **montante investido pelo senhor B** ($\text{Montante A} > \text{Montante B}$), devemos ter um **número de anos completos maior do que 3** ($n > 3$).

Logo, **precisamos de 4 anos completos** para que o montante de A se torne maior que o de B.

Gabarito: Letra B.

Vunesp

2.(VUNESP/UNESP/2005) Dada a inequação $\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{3}{9}\right)^{x-3}$, o conjunto verdade V, considerando o conjunto universo como sendo o dos reais, é dado por

a) V = {x ∈ R | x ≤ -3 ou x ≥ 2}.

b) V = {x ∈ R | x ≤ -3 e x ≥ 2}.

c) V = {x ∈ R | -3 ≤ x ≤ 2}.

d) V = {x ∈ R | x ≤ -3}.

e) V = {x ∈ R | x ≥ 2}.

Comentários:

Para resolver a inequação exponencial, devemos reduzir os termos da inequação a uma base comum.

$$\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{3}{9}\right)^{x-3}$$

$$\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$$

$$\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} \geq (3^{-1})^{x-3}$$

$$3^{\frac{x}{2}\times(x-1)} \geq 3^{(-1)\times(x-3)}$$

$$3^{\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}} \geq 3^{-x+3}$$

Como a base 3 é maior do que 1, mantém-se a desigualdade para os expoentes:

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2} \geq -x+3$$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+x-3 \geq 0$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-3 \geq 0$$

Para resolver a inequação, vamos obter as raízes de $f(x) = \frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-3$ aplicando a Fórmula de Bhaskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-3)$$

$$= \frac{1}{4} - \left(-\frac{12}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + 6$$

$$= \frac{1 + 24}{4} = \frac{25}{4}$$

Agora que determinamos o Δ, as raízes são:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

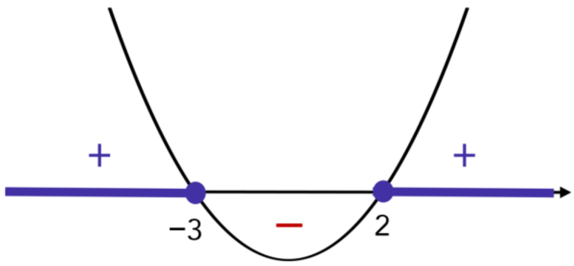
$$x = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{2 \times \frac{1}{2}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{x_2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{6}{2} = \mathbf{-3}$$

Agora que sabemos que as raízes de $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 3$ são $\mathbf{-3}$ e $\mathbf{2}$, **devemos verificar quando $f(x)$ é maior ou igual a zero**, isto é, quando $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 3 \geq 0$



Note, portanto, que devemos ter $x \leq -3$ ou $x \geq 2$. Isso significa que o conjunto-verdade é:

$$V = \{x \in R \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 2\}$$

Gabarito: Letra A.

Outras Bancas

3.(CPCON UEPB/Pref. Alagoinha/2016) Sendo $\mathbf{U = R}$, o conjunto solução da desigualdade $\mathbf{5^{2x+1} - 6.5^x + 1 < 0}$ é igual a

a) $S = \{x \in R / -1 < x < 0\}$

b) $S = \{x \in R / -1 \leq x \leq 0\}$

c) $S = \{x \in R / 0 \leq x \in 1\}$

d) $S = \{x \in R / 0 < x < 1\}$

e) $S = \{x \in R / x \leq 0\}$

Comentários:

Vamos passar todas as potências para a forma 5^x.

$$5^{2x+1} - 6.5^x + 1 < 0$$

$$5^1 \times 5^{2x} - 6.5^x + 1 < 0$$

$$5 \times 5^{2x} - 6.5^x + 1 < 0$$

Note que $5^{2x} = (5^x)^2$. Logo:

$$5 \times (5^x)^2 - 6.5^x + 1 < 0$$

Realizando a substituição de variável $\mathbf{y = 5^x}$, temos:

$$5y^2 - 6y + 1 < 0$$

Vamos determinar as raízes da função $5y^2 - 6y + 1$. Para tanto, vamos utilizar a Fórmula de Bhaskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5$$

$$\Delta = 36 - 20$$

$$\Delta = 16$$

Temos que:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \times 5}$$

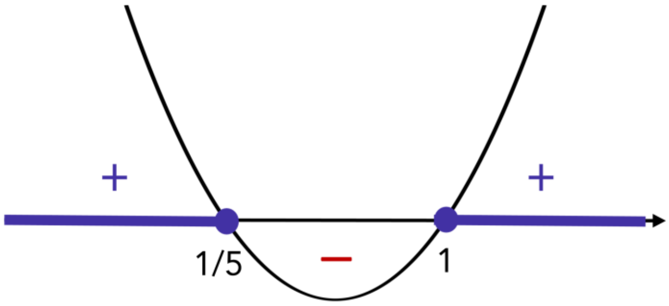
$$y = \frac{6 \pm 4}{10}$$

$$y = \frac{6}{10} \pm \frac{4}{10}$$

$$y = \frac{3}{5} \pm \frac{2}{5}$$

$$\boldsymbol{y_1 = 1} \text{ e } \boldsymbol{y_2 = \frac{1}{5}}$$

Vamos fazer o estudo do sinal da função $5y^2 - 6y + 1$ e verificar para quais valores é ela é menor do que zero.



Note, portanto, que devemos ter:

$$\frac{1}{5} < y < 1$$

Retornando à variável x, temos:

$$\frac{1}{5} < 5^x < 1$$

$$5^{-1} < 5^x < 5^0$$

De $5^x > 5^{-1}$, temos que $x > -1$. De $5^x < 5^0$, temos que $x < 0$. Juntando os resultados obtidos, tem-se:

$$-1 < x < 0$$

Isto é, o conjunto solução da inequação é dado por $S = \{x \in R / -1 < x < 0\}$.

Gabarito: Letra A.

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Função exponencial

FGV

1.(FGV/Pref. Paulínia/2021) Considere a função exponencial $f(t) = 2e^{kt}$, onde k é uma constante positiva. Dado que $f(1) = 5$, o valor de $f(3)$ é

a) 5

b) $\frac{5}{2}$

c) $\frac{15}{2}$

d) $\frac{25}{8}$

e) $\frac{125}{4}$

Comentários:

Sendo e o número de Euler, sabemos que:

$$f(1) = 5$$
$$2e^{k\times 1} = 5$$
$$e^k = \frac{5}{2}$$

Portanto:

$$f(3) = 2e^{k\times 3}$$
$$f(3) = 2 \times (e^k)^3$$
$$f(3) = 2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3$$
$$f(3) = 2 \times \frac{5^3}{2^3}$$
$$f(3) = \frac{5^3}{2^2}$$
$$f(3) = \frac{125}{4}$$

Gabarito: Letra E.

2.(FGV/Pref. Salvador/2019) Uma colônia de bactérias, inicialmente com 10 bactérias, dobra de tamanho a cada hora. A função que expressa o número $N(t)$ de bactérias dessa colônia, t horas após o instante inicial é

a) $N(t) = 10t$

b) $N(t) = 20t$

c) $N(t) = 10 + 2t$

d) $N(t) = 10 \cdot 2^t$

e) $N(t) = 10 \cdot t^2$

Comentários:

Inicialmente temos **10 bactérias**, e esse número **dobra a cada hora**.

1 hora após o instante inicial, temos o seguinte total de bactérias:

$$\underbrace{10}_{\text{Momento inicial}} \times \underbrace{2}_{\text{Dobrar}}$$

$$= 10 \times 2 \text{ bactérias}$$

Uma hora depois (**2 horas após o instante inicial**), temos:

$$\underbrace{10 \times 2}_{\substack{\text{Bactérias da} \\ \text{hora anterior}}} \times \underbrace{2}_{\text{Dobrar}}$$

$$= 10 \times 2^2 \text{ bactérias}$$

Na hora seguinte (**3 horas após o instante inicial**), temos:

$$\underbrace{10 \times 2^2}_{\substack{\text{Bactérias da} \\ \text{hora anterior}}} \times \underbrace{2}_{\text{Dobrar}}$$

$$= 10 \times 2^3 \text{ bactérias}$$

Passada mais uma hora (**4 horas após o instante inicial**), temos:

$$\underbrace{10 \times 2^3}_{\substack{\text{Bactérias da} \\ \text{hora anterior}}} \times \underbrace{2}_{\text{Dobrar}}$$

$$= 10 \times 2^4 \text{ bactérias}$$

Logo, pode-se observar que, **transcorridas *t* horas**, teremos o seguinte total de bactérias:

$$10 \times 2^t \text{ bactérias}$$

Portanto, a função que expressa o número $N(t)$ de bactérias dessa colônia, t horas após o instante inicial, é $N(t) = 10 \times 2^t$.

Gabarito: Letra D.

3. (FGV/SEDUC AM/2014) Um biólogo realiza em seu laboratório uma experiência com uma cultura de bactérias cuja população dobra a cada dia. No primeiro dia de trabalho o biólogo reuniu 100 bactérias em um ambiente com os nutrientes necessários. No segundo dia havia 200 bactérias, no terceiro 400 bactérias e assim por diante. Como esses números aumentam rapidamente considere que 2^{10} é, aproximadamente, igual a 1000.

O número de bactérias no 20º dia de trabalho é cerca de

a) 200 mil.

b) 5 milhões.

c) 50 milhões.

d) 200 milhões.

e) 1 bilhão.

Comentários:

No **primeiro dia** temos **100 bactérias**, e esse número **dobra a cada dia**.

No **segundo dia**, temos o seguinte total de bactérias:

$$\underbrace{100}_{\text{Primeiro dia}} \times \underbrace{2}_{\text{Dobrar}}$$

$$= 100 \times 2 \text{ bactérias}$$

No dia seguinte (**terceiro dia**), temos:

$$\underbrace{100 \times 2}_{\substack{\text{Bactérias do} \\ \text{dia anterior}}} \times \underbrace{2}_{\text{Dobrar}}$$

$$= 100 \times 2^2 \text{ bactérias}$$

No próximo dia (**quarto dia**), temos:

$$\underbrace{100 \times 2^2}_{\substack{\text{Bactérias do} \\ \text{dia anterior}}} \times \underbrace{2}_{\text{Dobrar}}$$

$$= 100 \times 2^3 \text{ bactérias}$$

Note que, de modo genérico, o número de bactérias pode ser obtido para um **dia d** da seguinte forma:

$$100 \times 10^{d-1} \text{ bactérias}$$

Logo, pode-se observar que **20º dia de trabalho** teremos o seguinte total de bactérias:

$$100 \times 2^{20-1}$$

$$= 100 \times 2^{19} \text{ bactérias}$$

Note que a questão nos apresentou a seguinte aproximação: $2^{10} \approx 1000$. Logo, devemos "fazer aparecer" 2^{10} na expressão anterior.

$$100 \times 2^{19}$$

$$= 100 \times 2^{19} \times 1$$

$$= 100 \times 2^{19} \times \frac{2}{2}$$

$$= \frac{100}{2} \times 2^{19} \times 2^{1}$$

$$= 50 \times 2^{20}$$

$$= 50 \times 2^{10\times 2}$$

$$= 50 \times (2^{10})^{2}$$

Utilizando a aproximação $2^{10} \approx 1000$, ficamos com:

$$= 50 \times (1000)^2$$

$$= 50 \times (10^3)^2$$

$$= 50 \times 10^{3\times 2}$$

$$= 50 \times 10^6$$

$$= 50.000.000$$

Logo, o número de bactérias no 20º dia de trabalho é cerca de 50 milhões.

Gabarito: Letra C.

4. (FGV/SEDUC AM/2014) Uma população de bactérias cresce exponencialmente, de forma que o número P de bactérias t horas após o instante inicial de observação do fenômeno pode ser modelado pela função $P(t) = 15 \times 2^{t+2}$.

De acordo com esse modelo, a cada hora, a população de bactérias

a) cresce 20%.

b) cresce 50%.

c) dobra.

d) triplica.

e) quadruplica.

Comentários:

O número P de bactérias t horas após o instante inicial é modelado por:

$$P(t) = 15 \times 2^{t+2}$$

Note que, 1 hora após o instante inicial, temos:

$$P(1) = 15 \times 2^{1+2} = 15 \times \mathbf{2^3} \text{ bactérias}$$

2 horas após o instante inicial, temos:

$$P(2) = 15 \times 2^{2+2} = 15 \times \mathbf{2^4} \text{ bactérias}$$

3 horas após o instante inicial, temos:

$$P(3) = 15 \times 2^{3+2} = 15 \times \mathbf{2^5} \text{ bactérias}$$

Perceba, portanto, que **a cada hora adicional** o expoente da potência de base 2 aumenta em uma unidade. Isso significa que**, a cada hora**, a população de bactérias dobra.

Gabarito: Letra C.

5. (FGV/ALEMA/2013) Segundo as pesquisas eleitorais semanais em uma determinada cidade, as intenções de voto de dois candidatos a prefeito, A e B, vêm subindo regularmente 10% e 500 votos, respectivamente, aumentos esses considerados sempre em relação aos resultados da pesquisa anterior.

Os resultados da última pesquisa mostraram que os candidatos A e B têm hoje, respectivamente, 10.000 e 15.000 intenções de voto.

Considere que as tendências de crescimento nas pesquisas semanais citadas se mantenham pelas próximas doze semanas e despreze as margens de erro comuns nesse tipo de pesquisa.

Assim, é correto concluir que

a) ao final de dez semanas os dois candidatos estarão empatados.

b) ao final da quarta semana a diferença entre os candidatos será menor que 2.000 votos.

c) ao final da sétima semana o candidato A terá ultrapassado o candidato B.

d) somente ao final das doze semanas o candidato A terá ultrapassado o candidato B.

e) durante as doze semanas o candidato B terá mais intenções de voto do que o candidato A.

Comentários:

Note que, a cada semana, as intenções de voto para o **candidato A** têm um incremento de 10% com relação à semana anterior. Isso significa que, **a cada semana**, as intenções de voto para esse candidato são **multiplicadas por** $1{,}1$, pois $1 + 0{,}1 = 1{,}1$.

Portanto, transcorridas x semanas, as intenções de voto para o candidato A serão:

$$A(x) = (\text{intenções iniciais}) \times 1{,}1^x$$

$$A(x) = 10.000 \times 1{,}1^x$$

Explicando o raciocínio

Decorrida 1 semana, o candidato A terá uma intenção de voto de:

$$10.000 + 10\% \times 10.000$$
$$= 10.000 \times (1 + 10\%)$$
$$= 10.000 \times (1 + 0{,}1)$$
$$= \mathbf{10.000 \times 1,1}$$

Transcorrida **mais uma semana** com relação à anterior (**total de 2 semanas**), temos um novo aumento de 10% **com relação à semana anterior**. Logo, a intenção de voto será:

$$(\mathbf{10.000 \times 1,1}) + 10\% \times (\mathbf{10.000 \times 1,1})$$
$$= (\mathbf{10.000 \times 1,1}) \times (1 + 10\%)$$
$$= (\mathbf{10.000 \times 1,1}) \times (1 + 0{,}1)$$
$$= (\mathbf{10.000 \times 1,1}) \times 1{,}1$$
$$= \mathbf{10.000 \times 1,1^2}$$

Perceba, portanto, que a cada semana transcorrida devemos multiplicar o valor anterior por 1,1, de modo que, passadas x semanas, teremos:

$$A(x) = 10.000 \times 1{,}1^x$$

O **candidato B**, por sua vez, apresenta 15.000 intenções de votos iniciais e, a cada semana, ganha 500 intenções de voto. Logo, transcorridas x semanas, as intenções de voto para o candidato B serão:

$$B(x) = 15.000 + 500x$$

Agora que modelamos as intenções de voto dos dois candidatos, vamos analisar as alternativas.

a) ao final de dez semanas os dois candidatos estarão empatados.

ERRADO. Ao final de 10 semanas, o **candidato B** terá:

$$B(10) = 15.000 + 500 \times 10 = 20.000 \text{ votos}$$

Para o **candidato A** empatar com o candidato B ao final de 10 semanas, ele **precisaria ganhar exatamente 10.000 votos em 10 semanas**.

Note que, **se o incremento de 10% fosse sempre sobre o valor inicial de 10.000**, **teríamos um incremento constante de 1.000 votos**. Nesse caso, de fato A levaria 10 semanas para ganhar esses 10.000 votos.

Ocorre que os incrementos de 10% são sempre com relação à semana anterior, de modo que o **candidato A** ganhará semanalmente um valor superior a 1.000 votos (exceto na primeira semana, em que o ganho é exatamente 1.000). Logo, **A ganhará 10.000 votos antes de 10 semanas**.

b) ao final da quarta semana a diferença entre os candidatos será menor que 2.000 votos.

ERRADO. Ao final da quarta semana, temos:

$$A(4) = 10.000 \times 1{,}1^4 = 10.000 \times 1{,}4641 = 14.641$$

$$B(4) = 15.000 + 500 \times 4 = 17.000$$

Portanto, a diferença será superior a 2.000 votos:

$$17.000 - 14.641 = 2.359$$

c) ao final da sétima semana o candidato A terá ultrapassado o candidato B.

CERTO. Ao final de 7 semanas, o **candidato B** terá:

$$B(7) = 15.000 + 500 \times 7 = 18.500 \text{ votos}$$

Para o **candidato A** ultrapassar o candidato B ao final de 7 semanas, **A deve ter mais do que 18.500 votos em 7 semanas**. Para saber se isso ocorre, deve-se obter o valor de $A(7) = 10.000 \times 1{,}1^7$.

Nesse caso, note que em 4 semanas obtivemos $A(4) = 14.641$. Esse valor corresponde a $10.000 \times 1{,}1^4$. Logo:

$$A(7) = 10.000 \times 1{,}1^7$$

$$= \underbrace{10.000 \times 1{,}1^4}_{A(4)} \times 1{,}1^3$$

$$= 14.641 \times 1{,}331$$

$$\cong 19.487$$

Como $A(7) > B(7)$, temos que ao final da sétima semana o candidato A terá ultrapassado o candidato B.

d) somente ao final das doze semanas o candidato A terá ultrapassado o candidato B.

ERRADO. O candidato A terá ultrapassado o candidato B ao final da sétima semana.

e) durante as doze semanas o candidato B terá mais intenções de voto do que o candidato A.

ERRADO. O candidato A terá ultrapassado o candidato B ao final da sétima semana.

Gabarito: Letra C.

6. (FGV/CODEBA/2010) Seja T uma função de $R \to R$ que descreve a temperatura de uma sala a partir do instante em que um aparelho condicionador de ar é posto em funcionamento ($t = 0$). A relação entre T (dada em °C) e t (dado em minutos) é $T(t) = 20 + 8 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$. A temperatura da sala, em °C, no momento em que o aparelho é ligado, vale

a) 24

b) 20

c) 22

d) 28

e) 36

Comentários:

A questão nos diz que o aparelho é **posto em funcionamento** (**ligado**) em $t = 0$. Portanto, a temperatura da sala no momento em que o aparelho é ligado é $T(0)$. Temos que:

$$T(0) = 20 + 8 \times 2^{\frac{0}{3}}$$

$$= 20 + 8 \times 2^0$$

$$= 20 + 8 \times 1$$

$$= 28$$

Gabarito: Letra D.

Cebraspe

Texto para as questões 07 e 08

Para avaliar a resposta dos motoristas a uma campanha educativa promovida pela PRF, foi proposta a função $f(x) = 350 + 150e^{-x}$, que modela a quantidade de acidentes de trânsito com vítimas fatais ocorridos em cada ano. Nessa função, $x \geq 0$ indica o número de anos decorridos após o início da campanha.

Com referência a essa situação hipotética, julgue os itens que se segue.

7. (CESPE/PRF/2019) De acordo com o modelo, no final do primeiro ano da campanha, apesar do decréscimo com relação ao ano anterior, ainda ocorreram mais de 400 acidentes de trânsito com vítimas fatais.

8.(CESPE/PRF/2019) Segundo o modelo apresentado, após dez anos de campanha educativa, haverá, em cada um dos anos seguintes, menos de 300 acidentes de trânsito com vítimas fatais.

Comentários:

Questão 07

Observe que a função que modela a quantidade de acidentes com vítimas fatais é descrita por:

$$f(x) = 350 + 150e^{-x}$$

$$f(x) = 350 + 150\frac{1}{e^x}$$

$$f(x) = 350 + \frac{150}{e^x}$$

Note que e^x é uma função exponencial cuja base é o número de Euler ($e \cong 2{,}72$). No primeiro ano de campanha temos $x = 1$ e, portanto, temos o seguinte número aproximado de acidentes com vítimas fatais:

$$f(1) \cong 350 + \frac{150}{2{,}72^1} \cong 405$$

Logo, de fato teremos mais de 400 acidentes com vítimas fatais. O **gabarito**, portanto, é **CERTO**.

Questão 08

A quantidade de acidentes com vítimas fatais é descrita por:

$$f(x) = 350 + \frac{150}{e^x}$$

Note que e^x é uma função exponencial cuja base é o número de Euler ($e \cong 2{,}72$). Essa função exponencial será sempre um número positivo.

Veja, portanto, que a parcela $\frac{150}{e^x}$ também será sempre um número positivo. No pior dos casos, quando e^x se tornar um número muito grande, $\frac{150}{e^x}$ se tornará um número muito próximo de zero.

Temos então que a função $f(x) = 350 + \frac{150}{e^x}$ corresponde à soma de duas parcelas:

$$f(x) = 350 + \underbrace{\frac{150}{e^x}}_{\substack{\text{Número positivo que,} \\ \text{no pior dos casos,} \\ \text{é muito próximo de zero}}}$$

Isso significa que a função $f(x)$ sempre será maior do que 350 para qualquer valor de x. Logo, é **errado** afirmar que após dez anos de campanha educativa, haverá, em cada um dos anos seguintes, menos de 300 acidentes de trânsito com vítimas fatais.

Gabarito: 07 - CERTO. 08 - ERRADO.

9.(CESPE/PM AL/2012) Às 19 horas de 22/2/2012, um cidadão telefonou para a central de atendimento da polícia da cidade comunicando que sua esposa se encontrava caída no chão da sala, aparentemente morta. Constatada a morte da vítima, os peritos iniciaram, às 20 horas do mesmo dia, os trabalhos de investigação, registrando que, nesse instante, a temperatura ambiente era de 20 °C e a do cadáver, de 30 °C.

De acordo com a Lei do Resfriamento de Newton, a temperatura $\theta(t)$ de um corpo, em graus Celsius, no instante t, em horas, em situações como a descrita acima, é expressa por $\theta(t) = 20 + 10 \times 2^{-t}$, $t \in R$, em que $t = 0$ corresponde ao instante em que a temperatura do corpo é registrada pela primeira vez.

De acordo com as informações do texto, é correto inferir que a temperatura do referido corpo, uma hora após o primeiro registro da temperatura, era igual a:

a) 30°C.

b) 25°C.

c) 24°C.

d) 22°C.

e) 20°C.

Comentários:

Após uma hora do primeiro registro de temperatura, temos $t = 1$. A temperatura do corpo, portanto, é igual a $\theta(1)$.

$$\theta(1) = 20 + 10 \times 2^{-1}$$

$$= 20 + 10 \times \frac{1}{2^1}$$

$$= 25$$

Gabarito: Letra B.

10. (CESPE/BRB/2011) Um estudo constatou que a população de uma comunidade é expressa pela função $\boldsymbol{P(t) = 5.000e^{0,18t}}$, em que $\boldsymbol{P(t)}$ é a população $\boldsymbol{t}$ anos após a contagem inicial, que ocorreu em determinado ano, e considerado $\boldsymbol{t = 0}$. Com referência a esse estudo e considerando 1,2 e 1,8 como os valores aproximados para $\boldsymbol{e^{0,18}}$ e $\boldsymbol{ln\ 6}$, respectivamente, julgue os itens a seguir.

Um ano após a contagem inicial, a população da comunidade aumentou em 20%.

Comentários:

A população inicial da comunidade ocorre em $t = 0$ e é dada por $P(0)$. Já a população após um ano ocorre em $t = 1$ e é dada por $P(1)$.

O aumento percentual da população após um ano é dado pela **razão** entre a **variação da população**, $P(1) - P(0)$, e a **população inicial** $P(0)$:

$$\frac{P(1) - P(0)}{P(0)}$$

$$= \frac{P(1)}{P(0)} - 1$$

$$= \frac{5.000e^{0,18\times1}}{5.000e^{0,18\times0}} - 1$$

$$= \frac{e^{0,18\times1}}{e^{0,18\times0}} - 1$$

$$= \frac{e^{0,18}}{e^{0}} - 1$$

$$= \frac{1,2}{1} - 1$$

$$= 0,2 = 20\%$$

Logo, um ano após a contagem inicial, a população da comunidade aumentou em 20%.

Gabarito: CERTO.

11. (CESPE/PC ES/2011) Em um sítio arqueológico, foram encontrados ossos de animais e um perito foi incumbido de fazer a datação das ossadas. Sabe-se que a quantidade de carbono 14, após a morte do animal, varia segundo a lei $\boldsymbol{Q(t) = Q(0)e^{-0,00012\tau}}$, em que e é a base do logaritmo natural, $\boldsymbol{Q(0)}$ é a quantidade de carbono 14 existente no corpo do animal no instante da morte e $\boldsymbol{Q(t)}$ é a quantidade de

carbono 14 τ anos depois da morte. Com base nessas informações e considerando $-2,4$ e $0,05$ como valores aproximados de $ln\ (0,09)$ e e^{-3}, respectivamente, julgue os itens a seguir.

Suponha que, ao examinar uma ossada, o perito tenha verificado que o animal morreu há 25.000 anos. Nesse caso, a quantidade de carbono 14 existente nessa ossada, no instante do exame, era superior a 4% da quantidade no instante da morte.

Comentários:

Se o animal morreu há 25.000 anos, temos que $\tau = 25.000$ e que a quantidade de carbono 14 existente nessa ossada é de $Q(25.000)$.

$$Q(t) = Q(0)e^{-0{,}00012\tau}$$

$$Q(25.000) = Q(0)e^{-0{,}00012\times 25.000}$$

$$= Q(0)e^{-3}$$

$$= Q(0) \times 0{,}05$$

$$= Q(0) \times \frac{5}{100}$$

$$= 5\% \times Q(0)$$

$$= 5\% \ \textbf{de} \ \mathrm{Q}(0)$$

Isto é, a quantidade de carbono 14 existente no instante do exame era de **5% da quantidade presente no instante da morte $Q(0)$**. Superior, portanto, a 4%.

Gabarito: CERTO.

FCC

12.(FCC/SEDU ES/2016) A diferença entre o maior e o menor número do conjunto imagem da função exponencial $g(x) = 4^x - 1$, com x no intervalo real de -1 a $2,5$, inclusive os extremos, é igual a

a) 14.

b) 31,75.

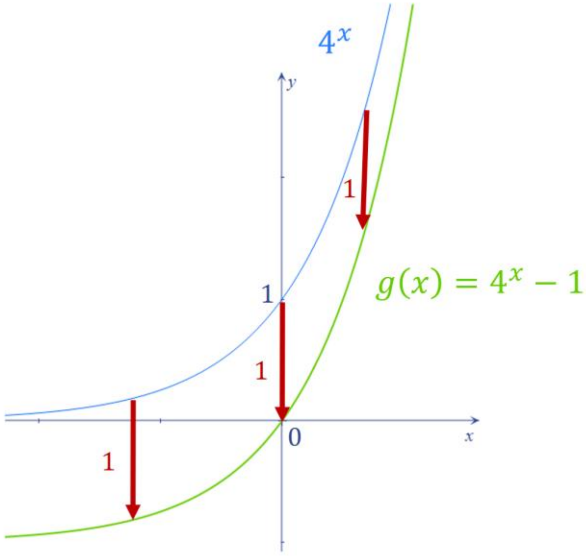
c) 17,5.

d) 8,25.

e) 18.

Comentários:

Note que a função $g(x)$ é uma função **estritamente crescente**. Isso porque 4^x é uma função exponencial básica cuja base é maior do que 1 e $g(x) = 4^x - 1$ é uma translação vertical para baixo dela.



Sendo $g(x)$ uma função **estritamente crescente**, **ao considerarmos somente o intervalo** $[-1; 2{,}5]$, o **maior** número do conjunto imagem é $g(2{,}5)$ e o **menor** valor é $g(-1)$.

Logo, a diferença entre o maior valor e o menor valor é:

$$g(2{,}5) - g(-1)$$

$$= (4^{2{,}5} - 1) - (4^{-1} - 1)$$

$$= 4^{2{,}5} - 1 + 4^{-1} + 1$$

$$= 4^{2{,}5} - 4^{-1}$$

$$= 4^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4^1}$$

$$= (2^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}$$

$$= 2^{2\times\frac{5}{2}} - 0{,}25$$

$$= 2^5 - 0{,}25$$

$$= 32 - 0{,}25$$

$$= 31{,}25$$

Gabarito: Letra B.

13. (FCC/BANESE/2012) Uma empresa utiliza a função $y = (1,2)^x - 1$ para estimar o volume de vendas de um produto em um determinado dia. A variável y representa o volume de vendas em milhares de reais. A variável x é um número real e representa a quantidade de horas que a empresa dedicou no dia para vender o produto ($0 \leq x \leq 6$). Em um dia em que o volume de vendas estimado foi de R$ 500,00, o valor utilizado para x, em horas, é tal que

a) 1 < x ≤ 2.

b) 2 < x ≤ 3.

c) 3 < x ≤ 4.

d) 4 < x ≤ 5.

e) 5 < x ≤ 6.

Comentários:

Temos que y **é o volume de vendas** em milhares de reais, e x **é a quantidade de horas** dedicadas para vender o produto.

Como o volume de vendas foi R$ 500,00, temos $y = 0,5$ (**meio milhar de reais**). Portanto, queremos a quantidade de horas x que nos dê como resposta um y igual a 0,5.

$$y = (1{,}2)^x - 1$$

$$0{,}5 = (1{,}2)^x - 1$$

$$0{,}5 + 1 = (1{,}2)^x$$

$$(1{,}2)^x = 1{,}5$$

Observe, portanto, que o x que queremos determinar é aquele em que ocorre a seguinte igualdade:

$$(1{,}2)^x = 1{,}5$$

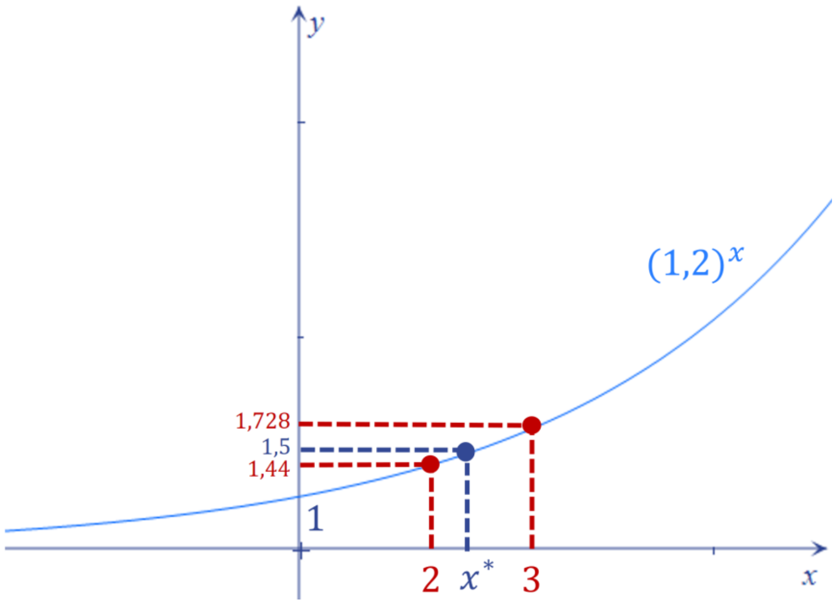
Note que não precisamos determinar exatamente o valor de x, mas sim precisamos saber em qual intervalo ele está.

Para $x = 1$, temos $(1{,}2)^1 = 1$.

Para $x = 2$, temos $(1{,}2)^2 = 1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44$.

Para $x = 3$, temos $(1{,}2)^3 = (1{,}2)^2 \times (1{,}2) = 1{,}44 \times 1{,}2 = 1{,}728$.

Observe, portanto, que o valor de x em que ocorre a igualdade $(1{,}2)^x = 1{,}5$ **está entre 2 e 3**, pois **1,5 está entre 1,44 e 1,728**.



Portanto, o **valor utilizado para x**, em horas, é tal que $\mathbf{2 < x \leq 3}$.

Gabarito: Letra B.

Vunesp

14.(VUNESP/PM SP/2019) No início do ano de 2019, uma rede social de discussões sobre determinado assunto contava com 6 000 pessoas cadastradas. Sabe-se que o número de pessoas cadastradas tem, praticamente, dobrado de ano a ano, desde a sua criação, no início do ano de 2015. Fazendo-se corresponder $t = 0$ ao ano de 2015, $t = 1$ ao ano de 2016, e assim sucessivamente, a representação algébrica da função que melhor representa o número N de pessoas cadastradas nessa rede social, em função de t, enquanto o número de pessoas cadastradas continuar dobrando, ano a ano, é

a) $N(t) = 375 \cdot 2^t$

b) $N(t) = 750 \cdot 2^t$

c) $N(t) = 1\,500 \cdot 2^t$

d) $N(t) = 3\,000 \cdot 2^t$

e) $N(t) = 6\,000 \cdot 2^t$

Comentários:

Temos um total de **6.000 pessoas** cadastradas em **2019**, e esse número de pessoas tem **dobrado a cada ano que passa**. Portanto, a **cada ano que retrocedermos no tempo**, devemos **dividir** o total de pessoas **por 2**.

- Em 2018, tínhamos $6.000/2 = 3.000$ pessoas;
- Em 2017, $3.000/2 = 1.500$ pessoas;
- Em 2016, $1.500/2 = 750$ pessoas;

- em 2015, $750/2 = 375$ pessoas.

Logo, **em 2015 ($t = 0$), temos 375 pessoas cadastradas**. A cada ano que passa a partir de 2015, devemos multiplicar o número de pessoas por 2.

- Em 2015 ($t = 0$), temos 375 pessoas;
- Em 2016 ($t = 1$), 375×2 pessoas;
- Em 2017 ($t = 2$), $(375 \times 2) \times 2 = 375 \times 2^2$ pessoas;
- Em 2018 ($t = 3$), $(375 \times 2^2) \times 2 = 375 \times 2^3$ pessoas;
- Em 2019 ($t = 4$), $(375 \times 2^3) \times 2 = 375 \times 3^4$ pessoas.

Note, portanto, que **transcorridos t anos a partir de 2015**, teremos um total de:

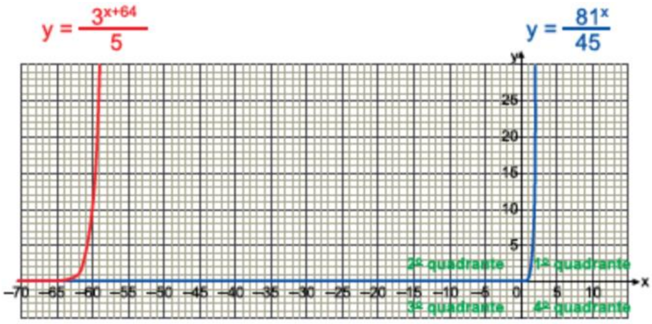
$$\mathbf{375 \times 2^t \text{ pessoas}}$$

Logo, a função que melhor representa o número N de pessoas cadastradas nessa rede social, sendo $t = 0$ o ano de 2015, é:

$$N(t) = 375 \times 2^t$$

Gabarito: Letra A.

15. (VUNESP/UNESP/2018) Observe, no plano cartesiano de eixos ortogonais, o gráfico de duas funções exponenciais de *R* em *R* .



A intersecção desses gráficos ocorrerá em

a) infinitos pontos, localizados no 2º quadrante.

b) um único ponto, localizado no 2º quadrante.

c) um único ponto, localizado no 3º quadrante.

d) um único ponto, localizado no 1º quadrante.

e) um único ponto, localizado no 4º quadrante.

Comentários:

Os gráficos apresentam **intersecção <u>quando as funções se igualam</u>.**

Seja $f(x) = \frac{3^{x+64}}{5}$ e $g(x) = \frac{81^x}{45}$. O **ponto $(x_i; y_i)$** em que ocorre a **intersecção** apresenta a abcissa x_i tal que:

$$f(x_i) = g(x_i)$$

$$\frac{3^{x_i+64}}{5} = \frac{81^{x_i}}{45}$$

Simplificando os denominadores por 5, temos:

$$\frac{3^{x_i+64}}{1} = \frac{81^{x_i}}{9}$$

Para resolver uma equação exponencial, devemos deixar todas as potências em uma mesma base. Vamos deixá-las em base 3.

$$3^{x_i+64} = \frac{(3^4)^{x_i}}{3^2}$$

$$3^{x_i+64} = \frac{3^{4x_i}}{3^2}$$

$$3^{x_i+64} = 3^{4x_i-2}$$

$$x_i + 64 = 4x_i - 2$$

$$64 + 2 = 4x_i - x_i$$

$$66 = 3x_i$$

$$3x_i = 66$$

$$x_i = \frac{66}{3}$$

$$x_i = 22$$

Temos a abcissa x_i do ponto $(x_i; y_i)$. A ordenada y_i pode ser obtida tanto por meio de $f(x)$ quanto por $g(x)$.

$$y_i = f(x_i)$$

$$y_i = \frac{3^{x_i+64}}{5}$$

$$y_i = \frac{3^{22+64}}{5}$$

$$y_i = \frac{3^{86}}{5}$$

Portanto, o **único ponto** de interseção $(x_i; y_i) = \left(22; \frac{3^{86}}{5}\right)$ apresenta **abcissa** x_i e **ordenada** y_i **ambas positivas**. Logo, o ponto está no **primeiro quadrante**.

Gabarito: Letra D.

16. (VUNESP/FAMEMA/2017) Os gráficos das funções $f(x) = 1 + 2^{(x-k)}$ e $g(x) = 2x + b$, com k e b números reais, se intersectam no ponto $(3, 5)$. Sabendo que k e b são as raízes de uma função do 2º grau, a abscissa do vértice do gráfico dessa função é

a) 12

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

Comentários:

Note que o ponto $(3; 5)$ faz parte tanto da função $f(x)$ quanto da função $g(x)$. Temos que:

$$f(3) = 5$$
$$1 + 2^{3-k} = 5$$
$$2^{3-k} = 5 - 1$$
$$2^{3-k} = 4$$
$$2^{3-k} = 2^2$$
$$3 - k = 2$$
$$3 - 2 = k$$
$$k = 1$$

Além disso, temos que:

$$g(3) = 5$$
$$2 \times 3 + b = 5$$
$$6 + b = 5$$
$$b = 5 - 6$$
$$b = -1$$

A questão afirma que k **e** b **são raízes de uma função do 2º grau** e pergunta pela abcissa do vértice (**x do vértice**). Sabe-se da teoria de funções do 2º grau que o **x do vértice** é exatamente a média das raízes. Logo:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{b+k}{2} = \frac{(-1)+1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Gabarito: Letra C.

17. (VUNESP/FAMEMA/2016) Em um plano cartesiano, o ponto $P(a, b)$, com a e b números reais, é o ponto de máximo da função $f(x) = -x^2 + 2x + 8$. Se a função $g(x) = 3^{-2x+k}$, com k um número real, é tal que $g(a) = b$, o valor de k é

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 1.

e) 0.

Comentários:

Da teoria das funções de 2º grau, sabe-se que $f(x)$ apresenta concavidade virada para baixo e, portanto, admite um máximo no seu vértice. Portanto, o ponto $P(a, b)$ é o vértice de $f(x)$, sendo **a** o **x do vértice** e **b** o **y do vértice**.

Se descrevermos $f(x)$ como $Ax^2 + Bx + C$, temos que:

$$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{2}{2 \times (-1)} = -\frac{2}{-2} = 1$$

$$y_v = \frac{\Delta}{4A} = \frac{B^2 - 4AC}{4A} = \frac{2^2 - 4 \times (-1) \times 8}{4 \times (-1)} = \frac{4+32}{4} = 9$$

Logo, o ponto $P(a, b)$ é dado por $(x_v; y_v) = (1; 9)$, ou seja, $a = 1$ e $b = 9$.

Temos que:

$$g(a) = b$$

$$3^{-2a+k} = b$$

$$3^{-2\times 1+k} = 9$$

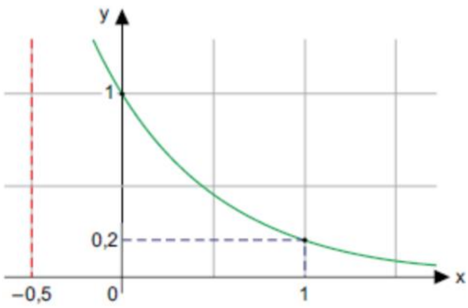
$$3^{-2+k} = 3^2$$

$$-2 + k = 2$$

$$k = 4$$

Gabarito: Letra C.

18. (VUNESP/UNESP/2016) A figura descreve o gráfico de uma função exponencial do tipo $y = a^x$, de R em R.



Nessa função, o valor de y para $x = -0,5$ é igual a

a) $\log 5$

b) $\log_5 2$

c) $\sqrt{5}$

d) $\log_2 5$

e) 2,5

Comentários:

Temos uma função exponencial da forma $y = a^x$. Por meio do gráfico apresentado, temos que, para $x = 1$, $y = 0,2$.

$$y = a^x$$

$$0,2 = a^1$$

$$a = 0,2$$

Portanto, a função exponencial é $y = (0,2)^x$. A questão pergunta o valor de y para $x = -0,5$.

$$y = (0,2)^{-0,5}$$

$$= \left(\frac{2}{10}\right)^{-0,5}$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{-0,5}$$

Para remover o expoente negativo, inverte-se a base:

$$= \left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right)^{0,5}$$

$$= 5^{0,5}$$

$$= 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

Portanto, para $x = -0,5$, temos $y = \sqrt{5}$.

<u>Observação</u>: a questão apresenta nas alternativas o termo "log", que se refere a logaritmos. Essa notação será entendida na aula de **função logarítmica**, caso faça parte do seu edital.

Gabarito: Letra C.

19.(VUNESP/PC SP/2014) Uma população P cresce em função do tempo t (em anos), segundo a sentença $P = 2000.5^{0,1t}$. Hoje, no instante $t = 0$, a população é de 2000 indivíduos. A população será de 50000 indivíduos daqui a

a) 20 anos.

b) 50 anos.

c) 15 anos.

d) 10 anos.

e) 25 anos.

Comentários:

A população P é descrita pela seguinte função:

$$P = 2.000 \times 5^{0,1t}$$

Para obter daqui quantos anos a população será de 50.000, basta obter o valor de t que faça com que P seja igual a 50.000.

$$P = 50.000$$

$$2.000 \times 5^{0,1t} = 50.000$$

$$5^{0,1t} = \frac{50.000}{2.000}$$

$$5^{0,1t} = 25$$

$$5^{0,1t} = 5^2$$

$$0{,}1t = 2$$

$$t = \frac{2}{0{,}1} = 20$$

Portanto, a população será de 50.000 indivíduos daqui a 20 anos.

Gabarito: Letra A.

20. (VUNESP/FAMERP/2014) Certo método de observação da troca de potássio no fluxo sanguíneo utiliza o isótopo do potássio K^{32} como marcador. Sabe-se que esse isótopo perde 5,4% de sua intensidade radioativa a cada hora. Se a intensidade radioativa desse isótopo no início da observação é igual a I_0, ao final de 10 horas será igual a I_0 multiplicado por

a) $1{,}054^{-10}$.

b) $1{,}054^{10}$.

c) $0{,}054^{10}$.

d) $0{,}946^{-10}$.

e) $0{,}946^{10}$.

Comentários:

A queda de intensidade radioativa é de **5,4% por hora**. Portanto, **a cada hora,** a intensidade é **multiplicada por 0,946**, pois $1 - 0{,}054 = 0{,}946$.

Isso significa que, ao final de x horas, a intensidade será:

$$I_0 \times 0{,}946^x$$

Explicando o raciocínio

Inicialmente, temos uma intensidade I_0.

Decorrida **1 hora**, a nova intensidade será:

$$I_0 - 5{,}4\% I_0$$
$$= I_o(1 - 5{,}4\%)$$
$$= I_o(1 - 0{,}054)$$
$$= I_o \times 0{,}946$$

Transcorrida **mais uma hora** com relação à anterior (**total de 2 horas**), temos uma nova queda de 5,4% **com relação à hora anterior**. Logo, a nova intensidade é:

$$(I_o \times 0{,}946) - 5{,}4\% \times (I_o \times 0{,}946)$$
$$= (I_o \times 0{,}946) \times (1 - 5{,}4\%)$$

$$= (I_o \times 0{,}946) \times (1 - 0{,}054)$$

$$= (I_o \times 0{,}946) \times 0{,}946$$

$$= I_o \times 0{,}946^2$$

Perceba, portanto, que a cada hora decorrida devemos multiplicar o valor anterior por $0{,}946$, de modo que, passadas x horas, teremos:

$$I_0 \times 0{,}946^x$$

Logo, ao final de 10 horas ($x = 10$), temos a seguinte intensidade:

$$I_0 \times 0{,}946^{10}$$

Gabarito: Letra E.

21. (VUNESP/MPE ES/2013) Uma experiência realizada nos EUA com 86 indivíduos, e estando esses indivíduos 2 horas sem comer, mostrou que o risco de acidentes automobilísticos cresce exponencialmente com a quantidade de uísque ingerido. Fazendo-se uma analogia com o vinho, construiu-se a seguinte tabela:

Quantidade de vinho ingerido (cálices) x_i	Risco de acidentes R_i (em %)
0	1,00
1	1,32
2	1,65
3	2,06
4	2,90
5	3,30

Os dados da tabela permitem dizer que o risco de acidente R(x) cresce exponencialmente em relação à quantidade de vinho ingerida, isto é: R(x) = ae^{bx} , onde e é a constante de Euler com valor aproximado de 2,72. Uma regressão linear com os dados da tabela nos dá os valores de a e b bem próximos de 1 e de 0,25, respectivamente, de modo que a função R(x) pode ser assim escrita:

$$R(x) = e^{0{,}25x}$$

(Rodney Carlos Bassanezi, Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova energia, de editora Contexto, São Paulo, 2004. Adaptado)

De acordo com a função R(x), é correto afirmar que, comparando-se o risco da pessoa que bebe n cálices de vinho, com o risco da pessoa que bebe o dobro dessa quantidade, ou seja, $2n$ cálices,

a) eleva-se ao quadrado o risco de acidente.

b) dobra-se o risco de acidente.

c) aumenta-se o risco de acidente em 2 pontos percentuais.

d) aumenta-se o risco de acidente em 4 pontos percentuais.

e) praticamente não se altera o risco verificado para n cálices.

Comentários:

O risco da pessoa que bebe n cálices é:

$$R(n) = e^{0,25n}$$

Já o risco da pessoa que bebe $2n$ cálices é:

$$R(2n) = e^{0,25\times 2n}$$

$$R(2n) = e^{0,25n\times 2}$$

$$R(2n) = (e^{0,25n})^2$$

Como $R(n) = e^{0,25n}$, temos:

$$R(2n) = \left(R(n)\right)^2$$

Logo, comparando-se o risco da pessoa que bebe n cálices de vinho com o risco da pessoa que bebe o dobro dessa quantidade, ou seja, $2n$ cálices, **eleva-se ao quadrado o risco de acidente**.

Gabarito: Letra A.

Outras Bancas

22.(FUNDATEC/Pref. Ronda Alta/2019) O conjunto imagem da função real $f(x) = 2^x$ é:

a) [0,+∞)

b) (0,+∞)

c) (−2,+2)

d) (−2,+∞)

e) (−∞,+∞)

Comentários:

Da teoria de funções exponenciais, sabemos que a **imagem da função exponencial** da forma $f(x) = a^x$ é $Im(f) = R_+^*$. Trata-se dos **reais positivos** (**esse conjunto não inclui o zero**).

Uma outra forma de escrever os reais positivos é $(0;\ +\infty)$. O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

Gabarito: Letra B.

23. (FUNDATEC/Pref. Campo Bom/2019) O conjunto imagem da função exponencial $f(x) = 3^x + 1$ é:

a) (1,+∞)

b) [1,+∞)

c) (−1,1)

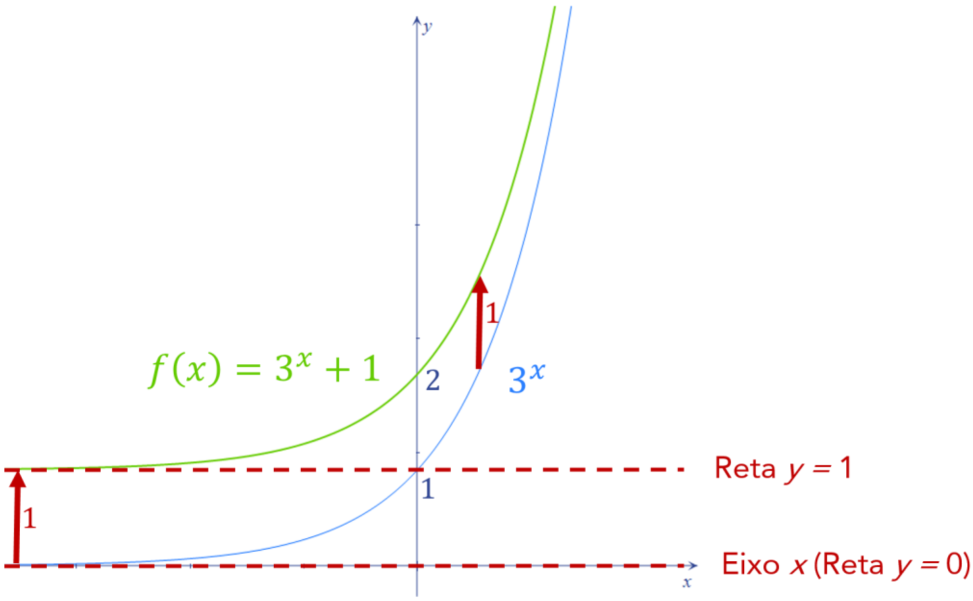
d) (−∞,1)

e) (−∞,+∞)

Comentários:

Da teoria de funções exponenciais, sabemos que a **imagem da função exponencial** da forma $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ é $\boldsymbol{Im(f) = R_+^*}$. Trata-se dos **reais positivos** (**esse conjunto não inclui o zero**).

Note que a questão apresenta a função $f(x) = 3^x + \mathbf{1}$, que é da forma a^x **com um deslocamento vertical de uma unidade para cima**.



Logo, imagem de $f(x) = 3^x + 1$ é dada por $]\mathbf{1}; +\infty[$, que corresponde a $(\mathbf{1}, +\infty)$. O **gabarito**, portanto, é **letra A**.

Importante destacar que $f(x)$ nunca será igual a 1, pois ela apresenta **assíntota em** $y = 1$. Isso significa que o **intervalo é aberto em 1**.

Gabarito: Letra A.

24. (Com. Org. IFSP/IFSP/2012) Assinale a alternativa correta.

a) A função $f(x) = 2^{-x}$ é crescente.

b) A função $f(x) = (-2)^x$ é decrescente.

c) A função $f(x) = (1/2)^{-x}$ é decrescente.

d) A função $f\ (x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$ é crescente.

e) A função $f(x) = (1/2)^x$ é crescente.

Comentários:

Da teoria de funções exponenciais, temos que, considerando uma função exponencial da forma $f(x) = a^x$:

- **Para $a > 1$, a função exponencial é estritamente crescente** (e, portanto, é **crescente**); e
- **Para $0 < a < 1$, a função exponencial é estritamente decrescente** (e, portanto, é **decrescente**).

Considerando essa base teórica, vamos analisar cada alternativa.

a) A função $f(x) = 2^{-x}$ é crescente.

ERRADO. Note que:

$$2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Logo, a função apresentada é da forma $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$. Trata-se de uma função **estritamente decrescente**.

b) A função $f(x) = (-2)^x$ é decrescente.

ERRADO. Temos um caso de base $a < 0$. Nesse caso, **não se trata de uma função exponencial**. Essa função apresentada **não pode ser definida para todo o x real**, pois alguns valores racionais de x fariam com que a função retornasse um valor que não pertence ao conjunto dos números reais.

Exemplo: para $x = \frac{1}{2}$, temos $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$. Trata-se de um número complexo, que não pertence ao conjunto dos números reais.

c) A função $f(x) = (1/2)^{-x}$ é decrescente.

ERRADO. Note que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^x = (2)^x$$

Logo, a função apresentada é da forma $f(x) = a^x$ com $a > 1$. Trata-se de uma função **estritamente crescente**.

d) A função $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x}) = \left(\sqrt{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{x}}$ é crescente.

CERTO. A função apresentada é da forma $f(x) = a^x$ com $a > 1$. Trata-se de uma função **estritamente crescente** que, portanto, é uma função **crescente**. Este é o gabarito.

e) A função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{1}/\mathbf{2})^{\boldsymbol{x}}$ é crescente.

ERRADO. A função apresentada é da forma $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$. Trata-se de uma função **estritamente decrescente**.

Gabarito: Letra D.

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Equações exponenciais

FGV

1.(FGV/ALERO/2018) Se $100^{2x} \times 1000^{3x} = 100^4$, então o valor de x é

a) $\frac{4}{5}$.

b) $\frac{4}{9}$.

c) $\frac{8}{11}$.

d) $\frac{8}{13}$.

e) $\frac{8}{15}$.

FCC

2.(FCC/ALAP/2020) Se a, b e c são números naturais que satisfazem $2^a.3^b = 18.6^c$, então $b - a$ é igual a

a) 5

b) 2

c) 4

d) 3

e) 1

3. (FCC/IBMEC/2018) O número de soluções reais da equação exponencial $4^x = 2^{x+1} - 1$ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Vunesp

4.(VUNESP/UNESP/2017) Admita que o número de visitas diárias a um site seja expresso pela potência 4^n, com n sendo o índice de visitas ao site. Se o site S possui o dobro do número de visitas diárias do que um site que tem índice de visitas igual a 6, o índice de visitas ao site S é igual a

a) 12.

b) 9.

c) 8,5.

d) 8.

e) 6,5.

Outras Bancas

5.(IDIB/Pref. Jaguaribe/2020) Seja $4^x - 10.2^x + 16 = 0$, uma equação exponencial e seja $x \in R$. Assinale a alternativa que representa corretamente o conjunto solução da equação.

a) S=∅

b) S={1}

c) S={1;3}

d) S={2;3}

6.(QUADRIX/CRB 10/2018) A respeito das equações, das operações aritméticas e de suas respectivas propriedades, julgue o item a seguir.

Se $\pi^{\Psi} = \pi^{\Psi^3}$, então $\Psi \in (-\infty, -\pi] \cup [\pi, \infty)$.

7. (FUNDATEC/Pref. Santa Rosa/2018) A soma das raízes da equação $49^x - 56.7^{x-1} + 7 = 0$ é:

a) 8.

b) 7.

c) 2.

d) 1.

e) 0.

8.(AOCP/BM RS/2009) Assinale a alternativa correta. O(s) valor(es) de x real(is) que satisfaz(em) a equação $2^{2x} + 2.2^{x} - 8 = 0$ pertence(m) ao intervalo

a) $]-4,0[$.

b) $]-5,\frac{1}{2}[$.

c) $]-\frac{1}{2},\frac{5}{4}[$.

d) $[2,+\infty)$.

e) $(-\infty,\frac{4}{5}]$.

9.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) A equação $5^{x^2-5} - (0,20)^{-4x} = 0$ tem como soluções

a) -2 e -4

b) -2 e 4

c) -1 e 5

d) 2 e 4

e) 2 e 1

GABARITO – MULTIBANCAS

Equações exponenciais

1. LETRA D
2. LETRA E
3. LETRA B
4. LETRA E
5. LETRA C
6. ERRADO
7. LETRA D
8. LETRA C
9. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Inequações exponenciais

FCC

1.(FCC/TRF 3/2016) O senhor A investiu a quantia de x em um produto financeiro que apresentou queda constante e sucessiva de 10% ao ano por, pelo menos, 10 anos. Simultaneamente, o senhor B investiu a quantia de 27x (27 vezes a quantia x) em um produto financeiro que apresentou queda constante e sucessiva de 70% ao ano por, pelo menos, 10 anos. A partir do início desses dois investimentos, o número de anos completos necessários para que o montante investido pelo senhor A se tornasse maior que o montante investido pelo senhor B é igual a

a) 2.

b) 4.

c) 6.

d) 3.

e) 5.

Vunesp

2.(VUNESP/UNESP/2005) Dada a inequação $\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{3}{9}\right)^{x-3}$, o conjunto verdade V, considerando o conjunto universo como sendo o dos reais, é dado por

a) V = {x ∈ R | x ≤ -3 ou x ≥ 2}.

b) V = {x ∈ R | x ≤ -3 e x ≥ 2}.

c) V = {x ∈ R | -3 ≤ x ≤ 2}.

d) V = {x ∈ R | x ≤ -3}.

e) V = {x ∈ R | x ≥ 2}.

Outras Bancas

3.(CPCON UEPB/Pref. Alagoinha/2016) Sendo $\mathbf{U} = \mathbf{R}$, o conjunto solução da desigualdade $\mathbf{5^{2x+1} - 6.5^x + 1 < 0}$ é igual a

a) $S = \{x \in R/-1 < x < 0\}$

b) $S = \{x \in R/-1 \leq x \leq 0\}$

c) $S = \{x \in R/0 \leq x \in 1\}$

d) $S = \{x \in R/0 < x < 1\}$

e) $S = \{x \in R/x \leq 0\}$

GABARITO – MULTIBANCAS

Inequações exponenciais

1. LETRA B
2. LETRA A
3. LETRA A

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Função exponencial

FGV

1.(FGV/Pref. Paulínia/2021) Considere a função exponencial $f(t) = 2e^{kt}$, onde k é uma constante positiva. Dado que $f(1) = 5$, o valor de $f(3)$ é

a) 5

b) $\frac{5}{2}$

c) $\frac{15}{2}$

d) $\frac{25}{8}$

e) $\frac{125}{4}$

2.(FGV/Pref. Salvador/2019) Uma colônia de bactérias, inicialmente com 10 bactérias, dobra de tamanho a cada hora. A função que expressa o número $N(t)$ de bactérias dessa colônia, t horas após o instante inicial é

a) $N(t) = 10t$

b) $N(t) = 20t$

c) $N(t) = 10 + 2t$

d) $N(t) = 10 \cdot 2^t$

e) $N(t) = 10 \cdot t^2$

3. (FGV/SEDUC AM/2014) Um biólogo realiza em seu laboratório uma experiência com uma cultura de bactérias cuja população dobra a cada dia. No primeiro dia de trabalho o biólogo reuniu 100 bactérias em um ambiente com os nutrientes necessários. No segundo dia havia 200 bactérias, no terceiro 400 bactérias e assim por diante. Como esses números aumentam rapidamente considere que 2^{10} é, aproximadamente, igual a 1000.

O número de bactérias no 20º dia de trabalho é cerca de

a) 200 mil.

b) 5 milhões.

c) 50 milhões.

d) 200 milhões.

e) 1 bilhão.

4. (FGV/SEDUC AM/2014) Uma população de bactérias cresce exponencialmente, de forma que o número P de bactérias t horas após o instante inicial de observação do fenômeno pode ser modelado pela função $P(t) = 15 \times 2^{t+2}$.

De acordo com esse modelo, a cada hora, a população de bactérias

a) cresce 20%.

b) cresce 50%.

c) dobra.

d) triplica.

e) quadruplica.

5. (FGV/ALEMA/2013) Segundo as pesquisas eleitorais semanais em uma determinada cidade, as intenções de voto de dois candidatos a prefeito, A e B, vêm subindo regularmente 10% e 500 votos, respectivamente, aumentos esses considerados sempre em relação aos resultados da pesquisa anterior.

Os resultados da última pesquisa mostraram que os candidatos A e B têm hoje, respectivamente, 10.000 e 15.000 intenções de voto.

Considere que as tendências de crescimento nas pesquisas semanais citadas se mantenham pelas próximas doze semanas e despreze as margens de erro comuns nesse tipo de pesquisa.

Assim, é correto concluir que

a) ao final de dez semanas os dois candidatos estarão empatados.

b) ao final da quarta semana a diferença entre os candidatos será menor que 2.000 votos.

c) ao final da sétima semana o candidato A terá ultrapassado o candidato B.

d) somente ao final das doze semanas o candidato A terá ultrapassado o candidato B.

e) durante as doze semanas o candidato B terá mais intenções de voto do que o candidato A.

6. (FGV/CODEBA/2010) Seja T uma função de *R*→*R* que descreve a temperatura de uma sala a partir do instante em que um aparelho condicionador de ar é posto em funcionamento ($t = 0$). A relação entre T (dada em °C) e t (dado em minutos) é $T(t) = 20 + 8 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$. A temperatura da sala, em °C, no momento em que o aparelho é ligado, vale

a) 24

b) 20

c) 22

d) 28

e) 36

Cebraspe

Texto para as questões 07 e 08

Para avaliar a resposta dos motoristas a uma campanha educativa promovida pela PRF, foi proposta a função $f(x) = 350 + 150e^{-x}$, que modela a quantidade de acidentes de trânsito com vítimas fatais ocorridos em cada ano. Nessa função, $x \geq 0$ indica o número de anos decorridos após o início da campanha.

Com referência a essa situação hipotética, julgue os itens que se segue.

7. (CESPE/PRF/2019) De acordo com o modelo, no final do primeiro ano da campanha, apesar do decréscimo com relação ao ano anterior, ainda ocorreram mais de 400 acidentes de trânsito com vítimas fatais.

8.(CESPE/PRF/2019) Segundo o modelo apresentado, após dez anos de campanha educativa, haverá, em cada um dos anos seguintes, menos de 300 acidentes de trânsito com vítimas fatais.

9.(CESPE/PM AL/2012) Às 19 horas de 22/2/2012, um cidadão telefonou para a central de atendimento da polícia da cidade comunicando que sua esposa se encontrava caída no chão da sala, aparentemente morta. Constatada a morte da vítima, os peritos iniciaram, às 20 horas do mesmo dia, os trabalhos de investigação, registrando que, nesse instante, a temperatura ambiente era de 20 °C e a do cadáver, de 30 °C.

De acordo com a Lei do Resfriamento de Newton, a temperatura $\theta(t)$ de um corpo, em graus Celsius, no instante t, em horas, em situações como a descrita acima, é expressa por $\theta(t) = 20 + 10 \times 2^{-t}$, $t \in R$, em que $t = 0$ corresponde ao instante em que a temperatura do corpo é registrada pela primeira vez.

De acordo com as informações do texto, é correto inferir que a temperatura do referido corpo, uma hora após o primeiro registro da temperatura, era igual a:

a) 30°C.

b) 25°C.

c) 24°C.

d) 22°C.

e) 20°C.

10. (CESPE/BRB/2011) Um estudo constatou que a população de uma comunidade é expressa pela função $P(t) = 5.000e^{0,18t}$, em que $P(t)$ é a população t anos após a contagem inicial, que ocorreu em determinado ano, e considerado $t = 0$. Com referência a esse estudo e considerando 1,2 e 1,8 como os valores aproximados para $e^{0,18}$ e $ln\ 6$, respectivamente, julgue os itens a seguir.

Um ano após a contagem inicial, a população da comunidade aumentou em 20%.

11. (CESPE/PC ES/2011) Em um sítio arqueológico, foram encontrados ossos de animais e um perito foi incumbido de fazer a datação das ossadas. Sabe-se que a quantidade de carbono 14, após a morte do animal, varia segundo a lei $Q(t) = Q(0)e^{-0,00012\tau}$, em que e é a base do logaritmo natural, $Q(0)$ é a quantidade de carbono 14 existente no corpo do animal no instante da morte e $Q(t)$ é a quantidade de carbono 14 τ anos depois da morte. Com base nessas informações e considerando $-2,4$ e $0,05$ como valores aproximados de $ln\ (0,09)$ e e^{-3}, respectivamente, julgue os itens a seguir.

Suponha que, ao examinar uma ossada, o perito tenha verificado que o animal morreu há 25.000 anos. Nesse caso, a quantidade de carbono 14 existente nessa ossada, no instante do exame, era superior a 4% da quantidade no instante da morte.

FCC

12.(FCC/SEDU ES/2016) A diferença entre o maior e o menor número do conjunto imagem da função exponencial $g(x) = 4^x - 1$, com x no intervalo real de -1 a $2,5$, inclusive os extremos, é igual a

a) 14.

b) 31,75.

c) 17,5.

d) 8,25.

e) 18.

13.(FCC/BANESE/2012) Uma empresa utiliza a função $y = (1,2)^x - 1$ para estimar o volume de vendas de um produto em um determinado dia. A variável y representa o volume de vendas em milhares de reais. A variável x é um número real e representa a quantidade de horas que a empresa dedicou no dia para vender o produto ($0 \leq x \leq 6$). Em um dia em que o volume de vendas estimado foi de R$ 500,00, o valor utilizado para x, em horas, é tal que

a) $1 < x \leq 2$.

b) $2 < x \leq 3$.

c) $3 < x \leq 4$.

d) 4 < x ≤ 5.

e) 5 < x ≤ 6.

Vunesp

14.(VUNESP/PM SP/2019) No início do ano de 2019, uma rede social de discussões sobre determinado assunto contava com 6 000 pessoas cadastradas. Sabe-se que o número de pessoas cadastradas tem, praticamente, dobrado de ano a ano, desde a sua criação, no início do ano de 2015. Fazendo-se corresponder $t = 0$ ao ano de 2015, $t = 1$ ao ano de 2016, e assim sucessivamente, a representação algébrica da função que melhor representa o número N de pessoas cadastradas nessa rede social, em função de t, enquanto o número de pessoas cadastradas continuar dobrando, ano a ano, é

a) $N(t) = 375 \cdot 2^t$

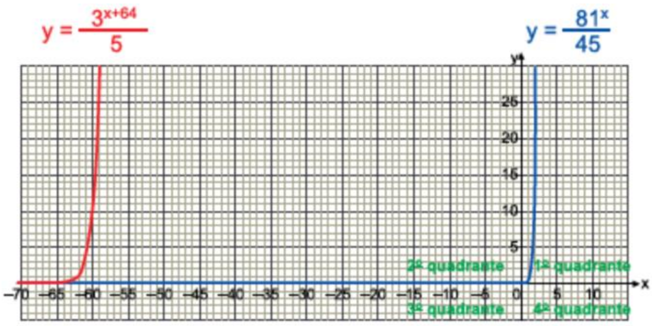
b) $N(t) = 750 \cdot 2^t$

c) $N(t) = 1\,500 \cdot 2^t$

d) $N(t) = 3\,000 \cdot 2^t$

e) $N(t) = 6\,000 \cdot 2^t$

15. (VUNESP/UNESP/2018) Observe, no plano cartesiano de eixos ortogonais, o gráfico de duas funções exponenciais de *R* em *R* .



A intersecção desses gráficos ocorrerá em

a) infinitos pontos, localizados no 2º quadrante.

b) um único ponto, localizado no 2º quadrante.

c) um único ponto, localizado no 3º quadrante.

d) um único ponto, localizado no 1º quadrante.

e) um único ponto, localizado no 4º quadrante.

16. (VUNESP/FAMEMA/2017) Os gráficos das funções $f(x) = 1 + 2^{(x-k)}$ e $g(x) = 2x + b$, com k e b números reais, se intersectam no ponto $(3, 5)$. Sabendo que k e b são as raízes de uma função do 2º grau, a abscissa do vértice do gráfico dessa função é

a) 12

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

17. (VUNESP/FAMEMA/2016) Em um plano cartesiano, o ponto $P(a, b)$, com a e b números reais, é o ponto de máximo da função $f(x) = -x^2 + 2x + 8$. Se a função $g(x) = 3^{-2x+k}$, com k um número real, é tal que $g(a) = b$, o valor de k é

a) 2.

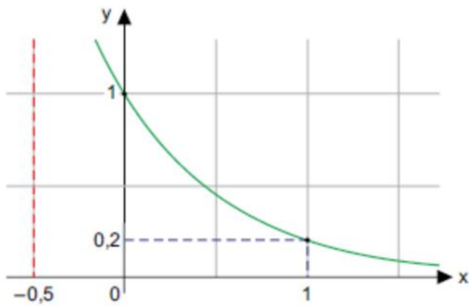
b) 3.

c) 4.

d) 1.

e) 0.

18. (VUNESP/UNESP/2016) A figura descreve o gráfico de uma função exponencial do tipo $y = a^x$, de R em R.



Nessa função, o valor de y para $x = -0,5$ é igual a

a) $\log 5$

b) $\log_5 2$

c) $\sqrt{5}$

d) $\log_2 5$

e) 2,5

19.(VUNESP/PC SP/2014) Uma população P cresce em função do tempo t (em anos), segundo a sentença $P = 2000.5^{0,1t}$. Hoje, no instante $t = 0$, a população é de 2000 indivíduos. A população será de 50000 indivíduos daqui a

a) 20 anos.

b) 50 anos.

c) 15 anos.

d) 10 anos.

e) 25 anos.

20. (VUNESP/FAMERP/2014) Certo método de observação da troca de potássio no fluxo sanguíneo utiliza o isótopo do potássio K^{32} como marcador. Sabe-se que esse isótopo perde 5,4% de sua intensidade radioativa a cada hora. Se a intensidade radioativa desse isótopo no início da observação é igual a I_0, ao final de 10 horas será igual a I_0 multiplicado por

a) $1{,}054^{-10}$.

b) $1{,}054^{10}$.

c) $0{,}054^{10}$.

d) $0{,}946^{-10}$.

e) $0{,}946^{10}$.

21. (VUNESP/MPE ES/2013) Uma experiência realizada nos EUA com 86 indivíduos, e estando esses indivíduos 2 horas sem comer, mostrou que o risco de acidentes automobilísticos cresce exponencialmente com a quantidade de uísque ingerido. Fazendo-se uma analogia com o vinho, construiu-se a seguinte tabela:

Quantidade de vinho ingerido (cálices) x_i	Risco de acidentes R_i (em %)
0	1,00
1	1,32
2	1,65
3	2,06
4	2,90
5	3,30

Os dados da tabela permitem dizer que o risco de acidente R(x) cresce exponencialmente em relação à quantidade de vinho ingerida, isto é: R(x) = ae^{bx} , onde e é a constante de Euler com valor aproximado de 2,72. Uma regressão linear com os dados da tabela nos dá os valores de a e b bem próximos de 1 e de 0,25, respectivamente, de modo que a função R(x) pode ser assim escrita:

$$R(x) = e^{0,25x}$$

(Rodney Carlos Bassanezi, Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova energia, de editora Contexto, São Paulo, 2004. Adaptado)

De acordo com a função R(x), é correto afirmar que, comparando-se o risco da pessoa que bebe n cálices de vinho, com o risco da pessoa que bebe o dobro dessa quantidade, ou seja, $2n$ cálices,

a) eleva-se ao quadrado o risco de acidente.

b) dobra-se o risco de acidente.

c) aumenta-se o risco de acidente em 2 pontos percentuais.

d) aumenta-se o risco de acidente em 4 pontos percentuais.

e) praticamente não se altera o risco verificado para n cálices.

Outras Bancas

22.(FUNDATEC/Pref. Ronda Alta/2019) O conjunto imagem da função real $f(x) = 2^x$ é:

a) [0,+∞)

b) (0,+∞)

c) (−2,+2)

d) (−2,+∞)

e) (−∞,+∞)

23.(FUNDATEC/Pref. Campo Bom/2019) O conjunto imagem da função exponencial $f(x) = 3^x + 1$ é:

a) (1,+∞)

b) [1,+∞)

c) (−1,1)

d) (−∞,1)

e) (−∞,+∞)

24. (Com. Org. IFSP/IFSP/2012) Assinale a alternativa correta.

a) A função $f(x) = 2^{-x}$ é crescente.

b) A função $f(x) = (-2)^x$ é decrescente.

c) A função $f(x) = (1/2)^{-x}$ é decrescente.

d) A função $f\ (x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$ é crescente.

e) A função $f(x) = (1/2)^x$ é crescente.

GABARITO – MULTIBANCAS

Função exponencial

1. LETRA E
2. LETRA D
3. LETRA C
4. LETRA C
5. LETRA C
6. LETRA D
7. CERTO
8. ERRADO
9. LETRA B
10. CERTO
11. CERTO
12. LETRA B
13. LETRA B
14. LETRA A
15. LETRA D
16. LETRA C
17. LETRA C
18. LETRA C
19. LETRA A
20. LETRA E
21. LETRA A
22. LETRA B
23. LETRA A
24. LETRA D

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.