

# · LUGARES GEOMÉTRICOS ·

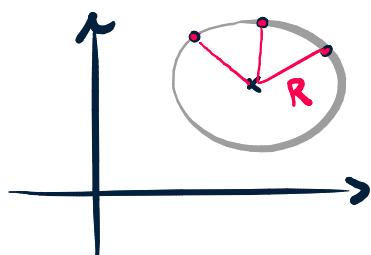
→ Conjunto dos pontos que satisfazem  
certa propriedade.



# CLÁSSICOS

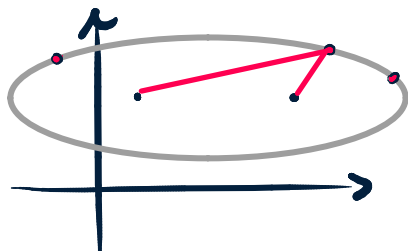
## . CIRCUNFERÊNCIA.

É o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de um ponto dado.



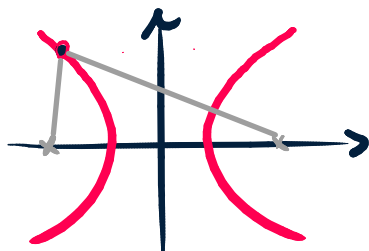
## . ELIPSE.

É o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a 2 pontos distintos dados é constante.



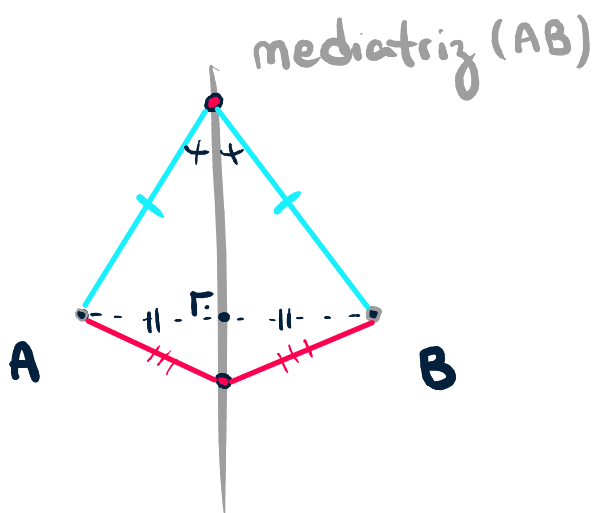
## • HIPÉRBOLE •

É o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a 2 pontos distintos dados é constante.



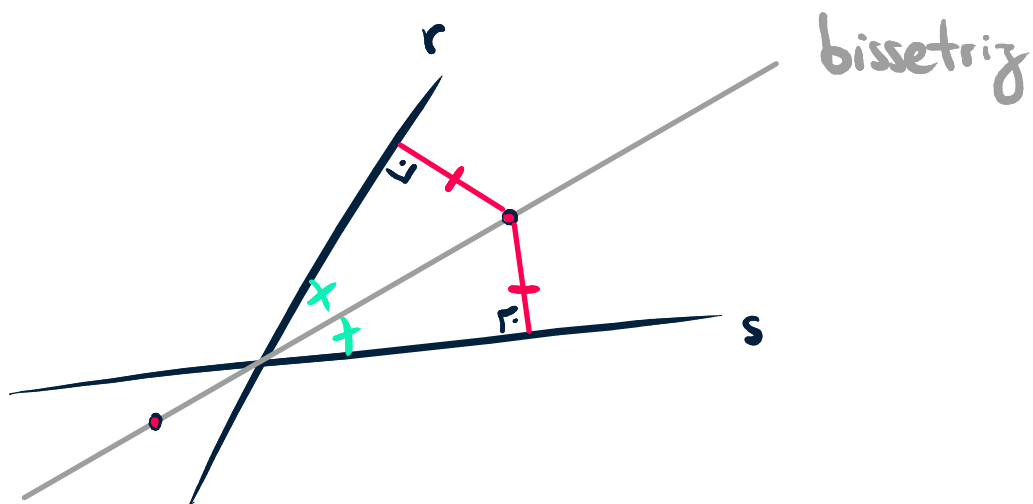
## • MEDIATRIZ •

É o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de dois pontos distintos.



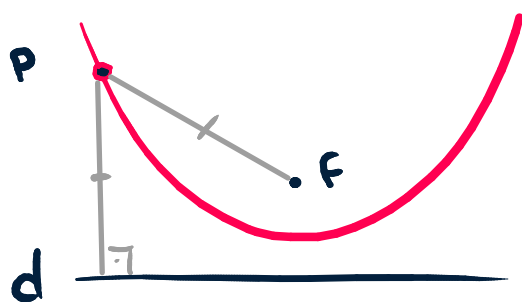
## • BISSETRIZ •

É o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de duas retas secantes.



## • PARÁBOLA •

É o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de um ponto e uma reta.

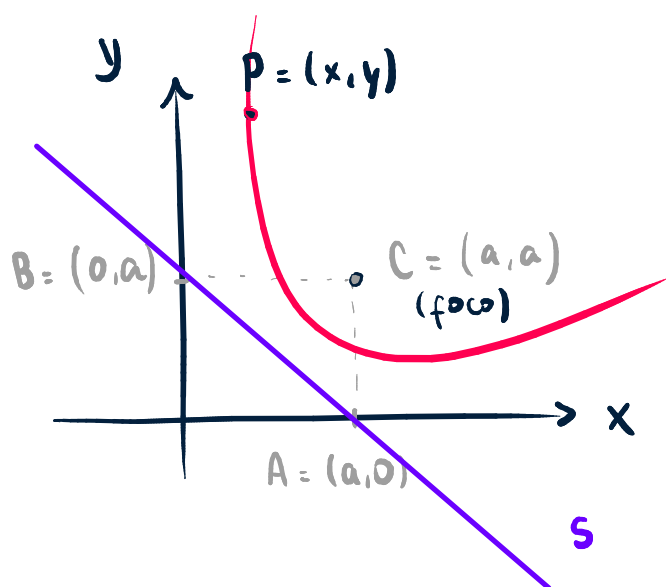


## EXEMPLO 01 (ITA 2007)

Sejam  $A = (a, 0)$ ,  $B = (0, a)$  e  $C = (a, a)$ ,  $a \neq 0$ .

Encontre a equação do lugar geométrico dos pontos  $P = (x, y)$  cuja distância até  $C$  é igual à distância da reta que passa por  $A$  e  $B$ .

R :



$$S: y = mx + n$$

$$(i) \quad n = a$$

$$(ii) \quad y = mx + a \quad | \quad m = -1$$
$$0 = m \cdot a + a$$

$$y = -x + a \quad \therefore \quad |x + y - a| = 0$$
$$Ax + By + C = 0$$

$$d(P, C) = d(P, S) \quad \therefore \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} = \frac{|1 \cdot x + 1 \cdot y - a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = \frac{(x+y-a)^2}{2}$$

$$2(x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2) = (x+y)^2 - 2a(x+y) + a^2$$

$$2x^2 - 4ax + 4a^2 + 2y^2 - 4ay = x^2 + 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2$$

$$2x^2 - 4ax + 4a^2 + 2y^2 - 4ay = x^2 + 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$$



## EXEMPLO 02 (ITA 2009)

Seja  $S$  o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados das distâncias à reta  $t: x=1$  e ao ponto  $A=(3,2)$  é igual a 4. Determine  $S$ .

R :  $t: Ax + By + C = 0$   
 $x + 0 - 1 = 0$

$P = (x, y)$

$$d^2(P, A) + d^2(P, t) = 4$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} + \left( \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \right) = 4$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (x-1)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 + (y-2)^2 = 4$$

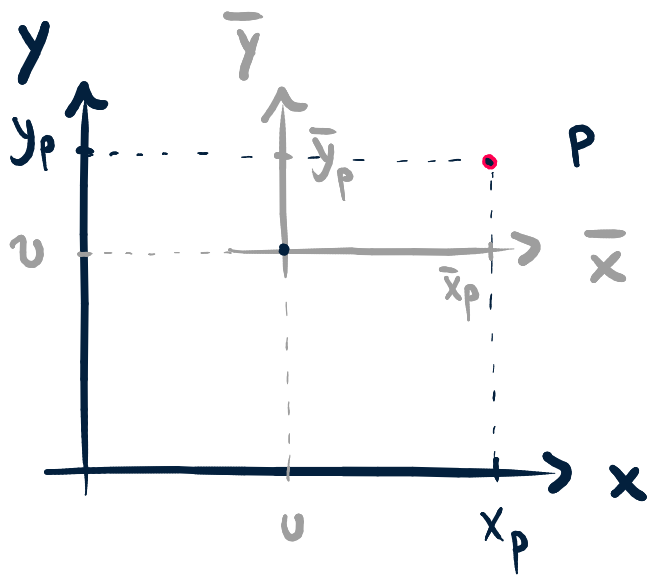
$$2x^2 - 8x + 8 + (y-2)^2 = -6 + 8$$

$$2(\underbrace{x^2 - 4x + 2^2}_{(x-2)^2}) + (y-2)^2 = 2$$

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{1^2} + \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1}$$

Elipse com  
 $C = (2, 2)$

# TRANSLAÇÃO DE EIXOS



$$x = \bar{x} + u$$

$$y = \bar{y} + v$$



## EXEMPLO

Seja a cônica  $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 19 = 0$ .

Encontre a equação de tal cônica num novo sistema de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  tal que os termos lineares sumam.

$$\underline{R}: \begin{cases} x = \bar{x} + u \\ y = \bar{y} + v \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 - 2x + 4y - 19 = 0$$

$$(\bar{x} + u)^2 - 2(\bar{x} + u) - (\bar{y} + v)^2 + 4(\bar{y} + v) - 19 = 0$$

$$\bar{x}^2 + 2u\bar{x} + u^2 - 2\bar{x} - 2u - \bar{y}^2 - 2v\bar{y} - v^2 + 4\bar{y} + 4v - 19 = 0$$

$$\bar{x}^2 - \bar{y}^2 + \underbrace{(2u-2)}_{u=1} \bar{x} + \underbrace{(4-2v)}_{v=2} \bar{y} + (u^2 - v^2 - 2u + 4v - 19) = 0$$

$$\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 16 \therefore$$

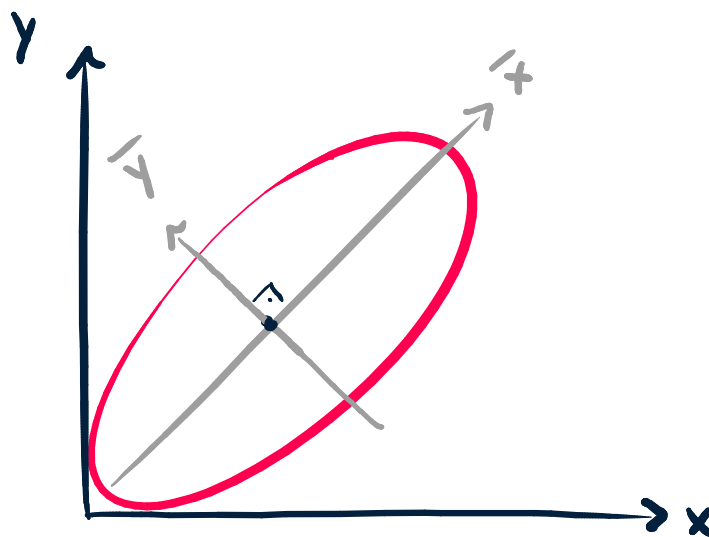
$$\boxed{\frac{\bar{x}^2}{4^2} - \frac{\bar{y}^2}{4^2} = 1}$$

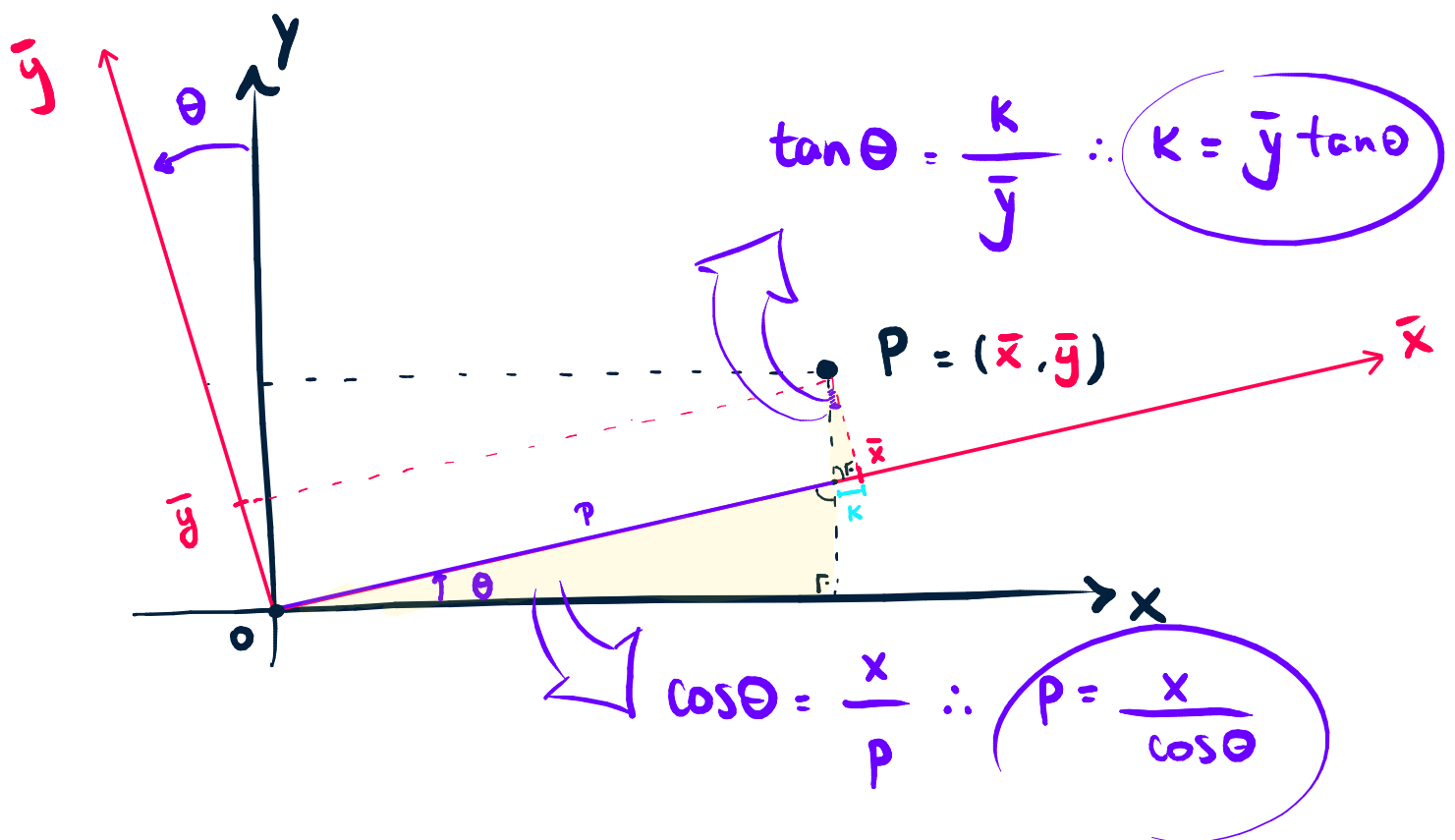
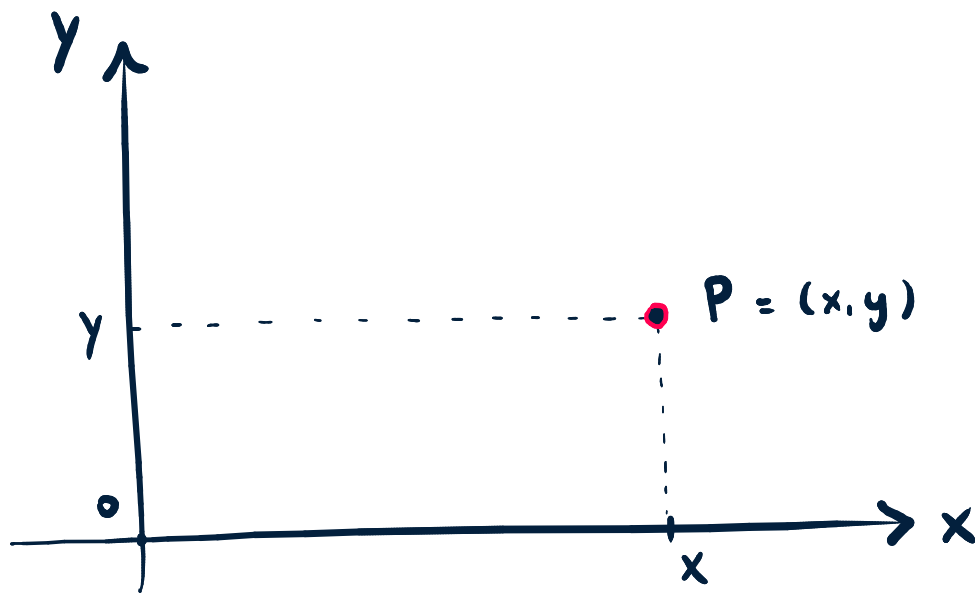
$$\begin{cases} x = \bar{x} + 1 \\ y = \bar{y} + 2 \end{cases}$$



# ROTAÇÃO DE EIXOS

## MOTIVAÇÃO





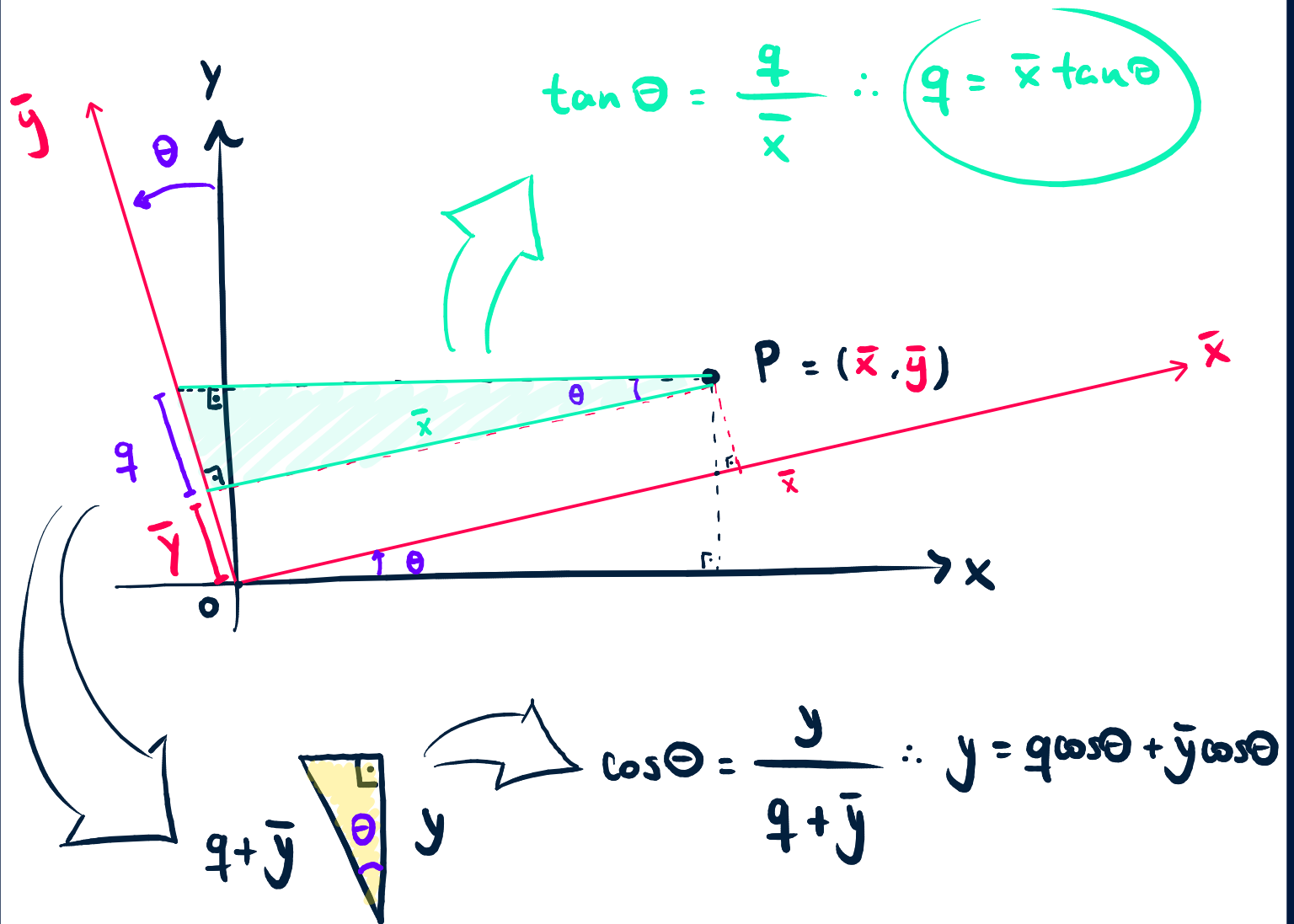
$$(i) \quad \bar{x} = p + k = \frac{x}{\cos \theta} + \bar{y} \tan \theta$$

$$\bar{x} = p + k = \frac{x}{\cos \theta} + \bar{y} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta$$



(ii)

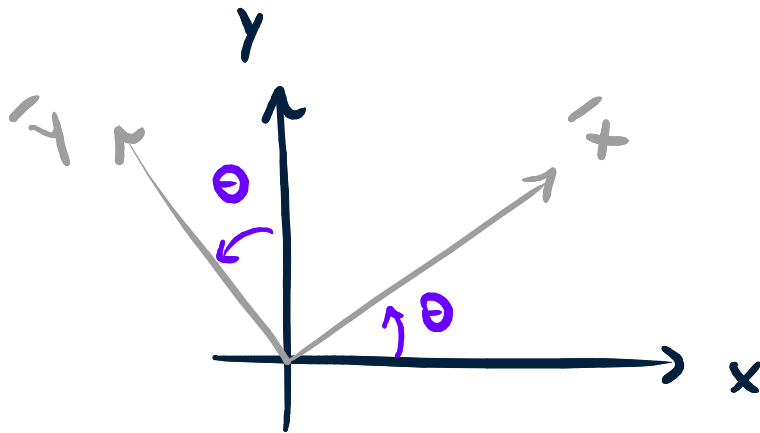


$$y = q \cos \theta + \bar{y} \cos \theta = \bar{x} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos \theta + \bar{y} \cos \theta$$

$$y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta$$



Resumindo :



$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \Theta - \bar{y} \sin \Theta \\ y = \bar{x} \sin \Theta + \bar{y} \cos \Theta \end{cases}$$

Em notação matricial :  $X = R \bar{X}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad e \quad R = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

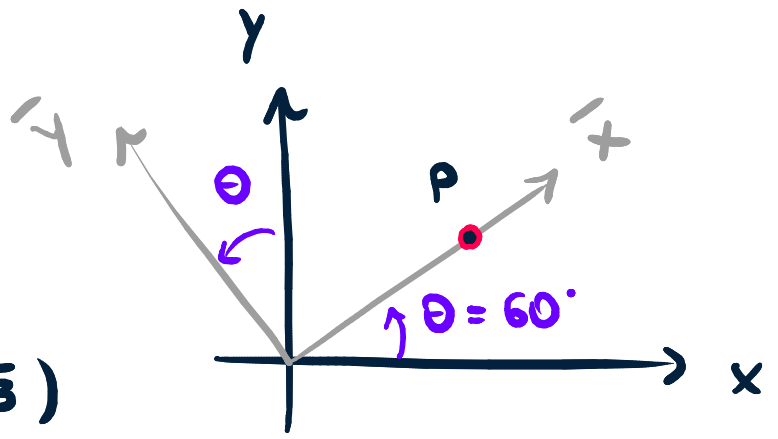
$$X = R \cdot \bar{X}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$



## EXEMPLO

Quais são as coordenadas do ponto  $P = (x, y) = (5, 5\sqrt{3})$  no sistema de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ ?



R:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \\ y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = \bar{x} \cdot \frac{1}{2} - \bar{y} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 5\sqrt{3} = \bar{x} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \bar{y} \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\times \sqrt{3}} \begin{cases} 5 = \bar{x} \cdot \frac{1}{2} - \bar{y} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 15 = \bar{x} \cdot \frac{3}{2} + \bar{y} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$+ \quad 2\bar{x} = 20 \therefore \boxed{\bar{x} = 10}$$

$$5 = \bar{x} \cdot \frac{1}{2} - \bar{y} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \cancel{5} = \cancel{10} \cdot \frac{1}{2} - \bar{y} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 = -\bar{y} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \boxed{\bar{y} = 0}$$

$$\boxed{P = (\bar{x}, \bar{y}) = (10, 0)}$$

# ~~ROTAÇÃO DE CÔNICAS~~

Seja a cônica

$$Ax^2 + By^2 + Cx \cdot y + Dx + Ey + F = 0.$$

Queremos encontrar um sistema de coordenadas tal que eliminemos:

✓(i) Os termos lineares ( $D' = E' = 0$ ) → translação

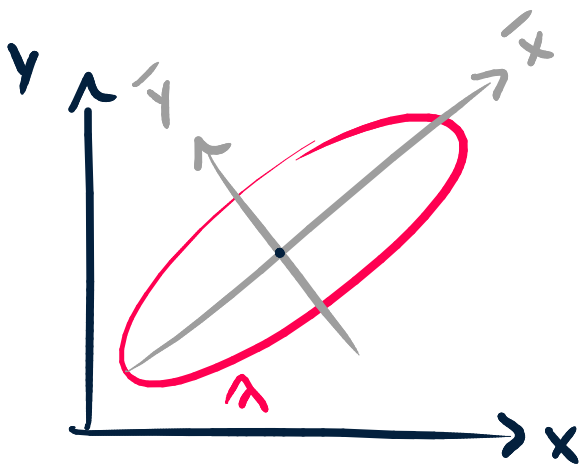
(ii) O termo cruzado  $xy$  ( $C' = 0$ )

Em  $(x, y)$  a equação de  $\lambda e'$ :

$$Ax^2 + By^2 + Cx \cdot y + Dx + Ey + F = 0$$

Em  $(\bar{x}, \bar{y})$  a equação de  $\lambda e'$ :

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$



No sistema  $(x, y)$  temos a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cx \cdot y + Dx + Ey + F = 0$$

Seja 
$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \\ y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases}$$

logo, a equação no sistema  $(\bar{x}, \bar{y})$  será:

$$A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 + \underbrace{C\bar{x} \cdot \bar{y}}_{\text{zero}} + D\bar{x} + E\bar{y} + F = 0$$

---

Desenvolvendo:

$$Ax^2 + By^2 + Cx \cdot y + Dx + Ey + F = 0$$

$$\begin{aligned} & A(\bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta)^2 + B(\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta)^2 + \\ & + C(\bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta) \cdot (\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta) + \\ & + D \cdot (\bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta) + E \cdot (\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta) + F = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& A \cdot \bar{x}^2 \cos^2 \theta - 2A \bar{x} \bar{y} \sin \theta \cos \theta + A \cdot \bar{y}^2 \sin^2 \theta \\
& + B \cdot \bar{x}^2 \sin^2 \theta + 2B \bar{x} \bar{y} \sin \theta \cos \theta + B \cdot \bar{y}^2 \cos^2 \theta + \\
& + C \cdot \bar{x}^2 \sin \theta \cos \theta + C \cdot \bar{x} \bar{y} \cdot \cos(2\theta) - C \bar{y}^2 \sin \theta \cos \theta \\
& + D \bar{x} \cos \theta - D \bar{y} \sin \theta + E \bar{x} \sin \theta + E \bar{y} \cos \theta + F = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \hookrightarrow (A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta + C \cdot \sin \theta \cos \theta) \bar{x}^2 + \\
& + (A \sin^2 \theta + B \cos^2 \theta - C \cdot \sin \theta \cos \theta) \bar{y}^2 + \\
& + [2 \sin \theta \cos \theta (B - A) + C \cdot \cos(2\theta)] \bar{x} \bar{y} + \\
& + (D \cos \theta + E \sin \theta) \bar{x} + \\
& + (-D \cdot \sin \theta + E \cdot \cos \theta) \bar{y} + \\
& + F = 0
\end{aligned}$$



$$A'\bar{x}^2 + B'\bar{y}^2 + \underbrace{C'\bar{x}\bar{y}}_{\text{zero}} + D'\bar{x} + E'\bar{y} + F' = 0$$

$$A' = (A\cos^2\theta + B\sin^2\theta + C\sin\theta\cos\theta)$$

$$B' = (A\sin^2\theta + B\cos^2\theta - C\sin\theta\cos\theta)$$

$$C' = [2\sin\theta\cos\theta(B-A) + C\cos(2\theta)]$$

$$D' = (D\cos\theta + E\sin\theta)$$

$$E' = (-D\sin\theta + E\cos\theta)$$

$$F' = F$$

$$\hookrightarrow C' = 0 \quad \therefore 2\sin\theta\cos\theta(B-A) + C\cos(2\theta) = 0$$

$$\sin(2\theta)(B-A) = -C\cos(2\theta) \quad \therefore \tan(2\theta) = \frac{C}{(A-B)}$$



$$A' = (A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta + C \cdot \sin \theta \cos \theta)$$

(+)

$$B' = (A \sin^2 \theta + B \cos^2 \theta - C \cdot \sin \theta \cos \theta)$$

$$A' + B' = A(\overbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}^1) + B(\overbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}^1)$$

$$A' + B' = A + B \quad \text{invariante}$$

$$A' = (A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta + C \cdot \sin \theta \cos \theta)$$

(-)

$$B' = (A \sin^2 \theta + B \cos^2 \theta - C \cdot \sin \theta \cos \theta)$$

$$A' - B' = A \cdot \cos(2\theta) - B \cos(2\theta) + C \cdot \sin(2\theta)$$

$$A' + B' = A + B$$

$$A' - B' = (A - B) \cos(2\theta) + C \cdot \sin(2\theta)$$



## EXEMPLO 01

Qual é a cônica descrita pela equação

$$4x^2 - \sqrt{3}xy + 5y^2 - 9 = 0 \quad ?$$

R :  $4x^2 + 5y^2 - \sqrt{3}xy - 9 = 0 \quad ?$

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + 0 \cdot x + 0 \cdot y + F = 0$$

$$(i) \quad \tan(2\theta) = \frac{C}{(A - B)} = \frac{-\sqrt{3}}{4 - 5} = \sqrt{3}$$

$$\tan(2\theta) = \sqrt{3} \quad \therefore 2\theta = 60^\circ \quad \therefore \boxed{\theta = 30^\circ}$$

$$(ii) \quad A'\bar{x}^2 + B'\bar{y}^2 + \underbrace{C'\bar{x} \cdot \bar{y}}_{\text{zero}} + D'\bar{x} + E'\bar{y} + F' = 0$$

$$D' = (\cancel{D} \cos \theta + \cancel{E} \sin \theta) = 0$$

$$E' = (-\cancel{D} \sin \theta + \cancel{E} \cos \theta) = 0$$

$$F' = F = -9$$



$$\begin{cases} A' + B' = A + B = 4 + 5 \\ A' - B' = (A - B) \cos(2\theta) + C \cdot \sin(2\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A' + B' = 9 \\ A' - B' = -1 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \therefore \begin{cases} A' + B' = 9 \\ A' - B' = -2 \end{cases}$$

$$A' = 7/2$$

$$B' = 11/2$$

$$(iii) \quad A' \bar{x}^2 + B' \bar{y}^2 + \underbrace{C' \bar{x} \cdot \bar{y}}_{\text{zero}} + \cancel{D' \bar{x}} + \cancel{E' \bar{y}} + \overset{-9}{F'} = 0$$

$$\frac{7}{2} \bar{x}^2 + \frac{11}{2} \bar{y}^2 = 9$$

$$\frac{\bar{x}^2}{(18/7)} + \frac{\bar{y}^2}{(18/11)} = 1$$

↳ ellipse



## EXEMPLO 02 (ITA 2003)

Calcule a área do polígono - situado no primeiro quadrante - que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}.$$

R :

$$3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0$$

$$3x^2 + 2y^2 + 3xy + 2xy - 3x - 6x - 6y - 2y + 6 = 0$$

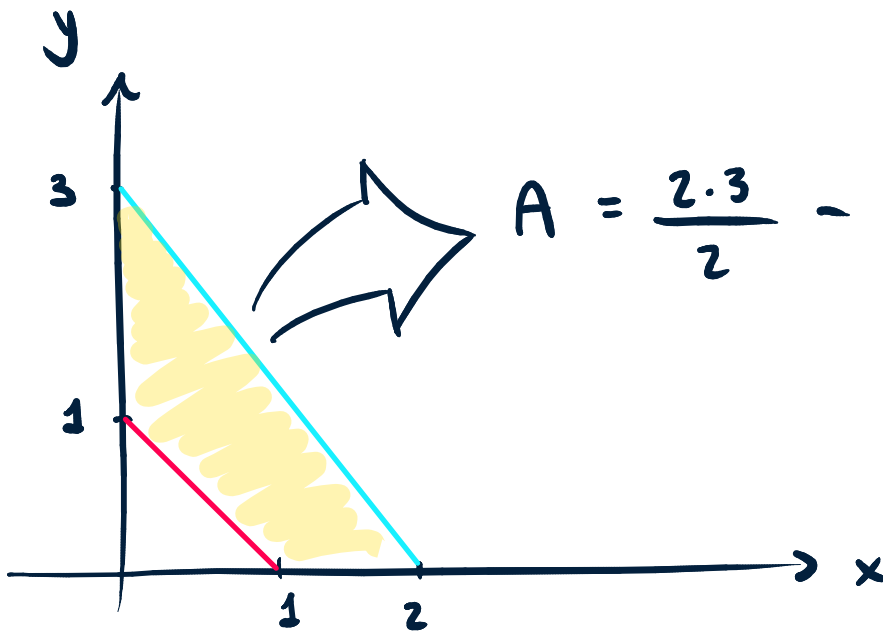
$$3x(x + y - 1) + 2y(y + x - 1) - 6(x + y - 1) = 0$$

$$(x + y - 1) \cdot (3x + 2y - 6) = 0$$

$$\text{i) } x + y - 1 = 0 \therefore \boxed{y = -x + 1}$$

$$\text{ii) } 3x + 2y - 6 = 0 \therefore \boxed{y = -\frac{3}{2}x + 3}$$





$$A = \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} = \left( \frac{5}{2} \right)$$

