ANÁLISE COMBINATÓRIA

Introdução

A Análise Combinatória, ou simplesmente Combinatória, estuda métodos e técnicas relacionados a **contagens** de elementos em conjuntos **finitos**, de modo que não seja necessário enumerar todos os elementos. Esse estudo é base para a **Teoria da Probabilidade**.

Vejamos um exemplo inicial para entender o que isso significa: quantos números de 3 algarismos podemos formar com o conjunto {1, 3, 4}, sem repetir os elementos em um mesmo número?

Bem, as possibilidades são:

i) 134; ii) 143; iii) 314;

iv) 341; v) 413; vi) 431.

Portanto, são 6 números distintos.

Para resolver esse problema, não precisamos de nenhum conhecimento específico. Basta pensarmos e contarmos todas as possibilidades. E se o conjunto de algarismos fosse todos os números de 1 a 9? Perderíamos muito tempo para contarmos todas as possibilidades e talvez nos perderíamos em algum momento.

A análise combinatória facilita justamente a **contagem** das possibilidades em conjuntos finitos. Ela também permite efetuar contagens de **subconjuntos** com determinadas características. Ou seja, considerando o nosso exemplo, poderíamos estar interessados somente nos números pares ou nos números primos, por exemplo.

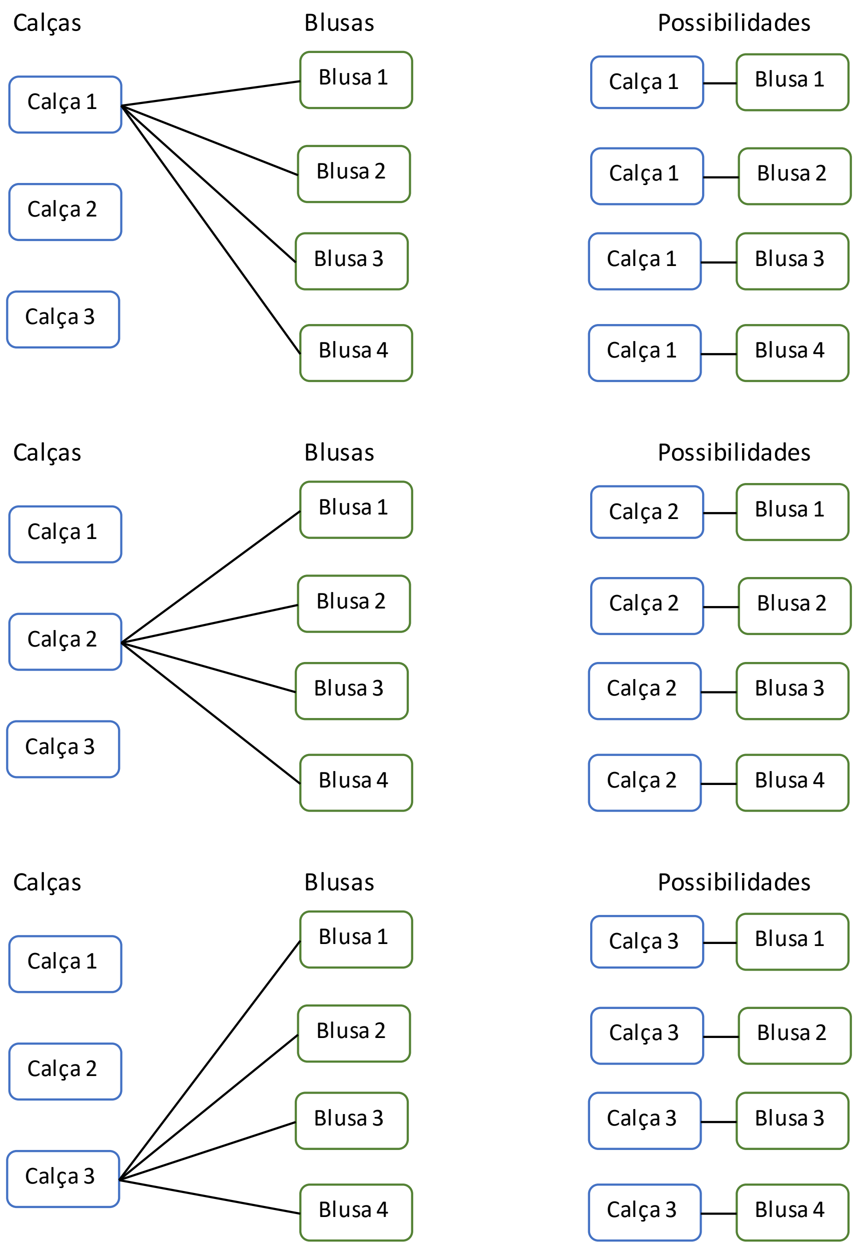
Princípios Fundamentais da Contagem

Princípio Multiplicativo

Vejamos o seguinte princípio fundamental da contagem, chamado de **princípio multiplicativo**:

*Se um evento A ocorre de **m** maneiras diferentes **e** se, para cada uma dessas maneiras, um outro evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de **ambos** os eventos (A **e** B) ocorrerem é **m x n**.*

Para ilustrar esse princípio, vamos considerar que João precisa se vestir com uma calça e uma blusa e que ele tem 3 calças e 4 blusas. Nesse caso, o evento A corresponde a vestir uma calça, com ***m*** = 3 possibilidades, e o evento B corresponde a vestir uma blusa, com ***n*** = 4 possibilidades. Segundo o princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de João se vestir é ***m x n*** = 4 x 3 = 12, conforme ilustrado abaixo.



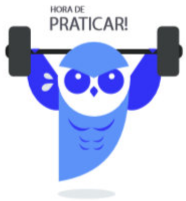
Observe que para cada calça há 4 possibilidades de blusas. Portanto, são 4 blusas possíveis para a calça 1, 4 blusas possíveis para a calça 2 e 4 blusas possíveis para a calça 3. Somando todas essas possibilidades, temos 4 + 4 + 4 = 4 x 3 = 12. (Obtemos o mesmo resultado se pensarmos que há 3 possibilidades de calça para cada blusa.)

Podemos **extrapolar** esse princípio para **qualquer número de eventos**. Ou seja, se tivermos um terceiro evento C que ocorre de **p** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de os eventos A, B e C ocorrerem é **m x n x p**.

No exemplo de João, considerando que ele precisa utilizar um cinto e que ele tem **p** = 2 cintos distintos, então o número de maneiras distintas de João colocar uma calça, uma blusa e um cinto é **m x n x p** = 3 x 4 x 2 = 24.

Generalizando, para n eventos, com $\mathbf{p_1}$ possibilidades para o evento A_1, $\mathbf{p_2}$ possibilidades para o evento A_2, ... e $\mathbf{p_n}$ possibilidades para o evento A_n, então o número de maneiras de **todos** os n eventos ocorrerem é:

$$\mathbf{P(A_1 \text{ e } A_2 \text{ e } \ldots \text{ e } A_n) = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n}$$



(VUNESP/2019 – Prefeitura de dois Córregos/SP) Em um grupo de pessoas, há 12 homens e 13 mulheres. Com essas pessoas, uma dupla será aleatoriamente formada, com um homem e uma mulher, para participar de um concurso. O número total de possibilidades para a formação dessa dupla é igual a

a) 12.

b) 144.

c) 156.

d) 168.

e) 288.

Comentários:

Havendo 12 homens e 13 mulheres, o número de possibilidades de selecionar um homem E uma mulher é, pelo princípio multiplicativo:

12 x 13 = 156

Gabarito: C

(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG) Assinale a alternativa que contém a quantidade de vezes que é possível usar de maneiras diferentes duas blusas, três calças e quatro meias:

a) 24 maneiras diferentes.

b) 28 maneiras diferentes.

c) 32 maneiras diferentes.

d) 36 maneiras diferentes.

Comentários:

Há 2 blusas para cada uma das 3 calças, resultando em 2 x 3 = 6 possibilidades de conjuntos de blusas e calças, pelo princípio multiplicativo. Para cada um desses 6 conjuntos, há 4 possibilidades de meias, resultando em 6 x 4 = 24 maneiras diferentes.

Essa resolução foi dividida em duas etapas para explicar o raciocínio mais lentamente. Porém, poderíamos simplesmente calcular o total de maneiras diferentes em etapa única, multiplicando as possibilidades de cada evento, temos:

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

Gabarito: A

(CESPE/2013 – TRT-ES) Os alunos de uma turma cursam 4 disciplinas que são ministradas por 4 professores diferentes. As avaliações finais dessas disciplinas serão realizadas em uma mesma semana, de segunda a sexta-feira, podendo ou não ocorrerem em um mesmo dia. A respeito dessas avaliações, julgue o item seguinte.

Se cada professor escolher o dia em que aplicará a avaliação final de sua disciplina de modo independente dos demais, haverá mais de 500 maneiras de se organizar o calendário dessas avaliações.

Comentários:

Vamos representar as escolhas dos 4 professores da seguinte forma:

Sabendo que há 5 dias disponíveis, então cada professor terá 5 possibilidades de escolha:

5	5	5	5

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de organizar o calendário para os 4 professores é:

$$\text{Número de maneiras} = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

Ou seja, há mais de 500 maneiras de organizar.

Gabarito: Certo.

(CESPE 2016/FUB) Em um intervalo para descanso, a assistente em administração Marta foi a uma lanchonete cujo cardápio oferecia 7 tipos diferentes de salgados, 4 tipos diferentes de bolos, 3 espécies diferentes de tapioca, sucos de 3 sabores diferentes e 5 tipos diferentes de refrigerantes. A partir dessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Se Marta desejar fazer um lanche com apenas uma opção de comida e apenas uma bebida, ela terá mais de 100 maneiras distintas de organizar seu lanche.

Comentários:

Marta deseja escolher uma comida e uma bebida. As opções de comida são as 7 opções de salgado, as 3 opções de bolo e as 3 opções de tapioca, logo, há 7 + 4 + 3 = 14 opções de comida. As opções de bebida são as 3 opções de suco e as 5 opções de refrigerante, logo, há 3 + 5 = 8 opções de bebida.

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de se escolher uma comida **e** uma bebida é:

$$14 \times 8 = 112$$

Logo, há mais de 100 maneiras.

Gabarito: Certo.

(FGV/2022 – PM-PB) Cada vértice de um quadrado ABCD deverá ser pintado com uma cor. Há 5 cores diferentes disponíveis para essa tarefa. A única restrição é que os vértices que estejam em extremidades opostas de qualquer diagonal do quadrado (AC e BD) sejam pintados com cores diferentes. O número de maneiras diferentes de pintar os vértices desse quadrado é:

a) 18

b) 60

c) 120

d) 240

e) 400

Comentários:

A questão informa que temos 5 cores disponíveis para pintar 4 vértices de um quadrado:

No entanto, a cor do vértice **A** deve ser **diferente** da cor do vértice **C**; e a cor do vértice **B** deve ser **diferente** da cor do vértice **D**.

Assim, há **5** possibilidades para o vértice A e **4** possibilidades para o vértice C.

Similarmente, há **5** possibilidades para o vértice B e **4** possibilidades para o vértice D.

Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades para todos os 4 vértices é:

$$5 \times 5 \times 4 \times 4 = 400$$

Gabarito: E

Contagem de Divisores

Com base no princípio multiplicativo, é possível calcular a **quantidade de divisores** de um número natural. O primeiro passo é **fatorar** o número natural em números **primos**. Para exemplificar, vamos trabalhar com o número 60. Podemos calcular os divisores primos da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, podemos representar o número 60, a partir dos seus divisores primos, da seguinte forma:

$$60 = 2^{2} \times 3^{1} \times 5^{1}$$

Todos os divisores de um número são compostos do produto de um conjunto dos seus divisores primos. Por exemplo, o número 15 é produto de 3 e 5, podendo ser representado da seguinte forma:

$$15 = 2^{0} \times 3^{1} \times 5^{1}$$

De maneira geral, todos os divisores de 60, que podemos denotar por d_{60}, podem ser representados da seguinte forma:

$$d_{60} = 2^{x} \times 3^{y} \times 5^{z}, \qquad sendo\ \boldsymbol{x \leq 2, y \leq 1, z \leq 1}$$

Logo, as possibilidades para cada expoente são:

- x: 0, 1 ou 2 (**3** possibilidades);
- y: 0 ou 1 (**2** possibilidades);
- z: 0 ou 1 (**2** possibilidades).

Pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades desses eventos para encontrar o número de possibilidades, no total:

3 x **2** x **2** = 12

Logo, há 12 divisores de 60.

FIQUE ATENTO!

Observe que os **expoentes dos divisores primos** de 60 eram **2**, **1** e **1**, e os valores multiplicados para encontrar o número de divisores foram **3**, **2** e **2**.

Portanto, basta **somar 1 a cada expoente e multiplicá-los**:

Número de Divisores = (2 **+ 1**) x (1 **+ 1**) x (1 **+ 1**) = 3 x 2 x 2

Isso porque o número de possibilidades que cada expoente pode assumir é igual ao **seu valor**, **mais 1**, correspondente ao **zero**.

(FCC/2016 – Companhia Metropolitana/SP) Uma tabela retangular de 12 linhas por 18 colunas possui 216 campos de preenchimento. Outras tabelas retangulares com combinações diferentes de linhas e colunas também possuem 216 campos de preenchimento. Observando-se que uma tabela de 12 linhas por 18 colunas é diferente de uma tabela de 18 linhas por 12 colunas, o total de tabelas retangulares diferentes com 216 campos de preenchimento é igual a

a) 14

b) 12

c) 10

d) 16

e) 18

Comentários:

A quantidade de tabelas distintas com 216 campos corresponde à quantidade de maneiras de obter 216 com dois fatores, por exemplo, 1 x 216, 2 x 108,... Essa quantidade é igual ao número de divisores de 216.

Para obter o número de divisores de 216, vamos primeiro fatorá-lo em números primos:

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Ou seja:

$$216 = 2^3 \times 3^3$$

Os divisores de 216 podem ser, portanto, representados da seguinte forma:

$$d_{216} = 2^x \times 3^y$$

Nesse caso, x pode assumir 4 possibilidades (0, 1, 2 ou 3), assim como y. Pelo princípio multiplicativo, há o seguinte número de possibilidades:

$$(3 + 1) \text{ x } (3 + 1) = 4 \text{ x } 4 = 16$$

Gabarito: D.

Princípio Aditivo

Agora, veremos outro princípio fundamental de contagem, chamado de **princípio aditivo**:

> *Se o evento A ocorre de **m** maneiras diferentes e o evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, e se A e B são **mutuamente exclusivos*** (ou seja, se um ocorrer o outro **não** ocorre)*, então o número de maneiras de ocorrer **um** dos eventos (A **ou** B) é **m + n**.*

Para ilustrar esse princípio, vamos considerar que João precisa se calçar e que ele possui **3** opções de tênis e **2** opções de sapatos.

Nesse caso, o evento A corresponde a calçar um tênis, com $m = 3$ possibilidades, e o evento B corresponde a calçar um sapato, com $n = 2$ possibilidades.

Note que esses eventos são mutuamente excludentes (João calçará um tênis **ou** um sapato: **não** pode calçar os dois). Assim, o número de maneiras de João se calçar é:

$$m + n = 3 + 2 = 5$$

Podemos extrapolar esse princípio para qualquer número de eventos.

> Havendo n eventos **mutuamente exclusivos**, com $\mathbf{p_1}$ possibilidades para o evento A_1, $\mathbf{p_2}$ possibilidades para o evento A_2, ... e $\mathbf{p_n}$ possibilidades para o evento A_n, então o número de maneiras **um** dos n eventos ocorrer é:
>
> $$\mathbf{P(A_1 \text{ ou } A_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } A_n) = p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Em suma, quando ocorrem **ambos** eventos (A **e** B), **multiplicamos** as possibilidades de cada evento (princípio **multiplicativo**); quando ocorre **somente um** dos eventos (A **ou** B), **somamos** as possibilidades de cada evento (princípio **aditivo**).

Eventos Concomitantes: A **e** B → Princípio Multiplicativo: n(A) **x** n(B)

Eventos Excludentes: A **ou** B → Princípio Aditivo: n(A) **+** n(B)

EXEMPLIFICANDO

Agora, vejamos ver um exemplo combinando esses dois princípios.

Vamos considerar que Maria precisa se vestir e se calçar, dispondo de **4 vestidos**, **2 saias**, **3 blusas e 5 sapatos**. Nesse caso, Maria irá colocar um **vestido (evento A) OU** um conjunto de **saia (evento B)** e **blusa (evento C)**. De uma forma ou de outra, irá colocar **TAMBÉM** um **sapato (evento D)**.

Nessa situação, temos:

i) Os eventos **B (saia)** e **C (blusa)** são **concomitantes** – princípio **multiplicativo**: **2 x 3** = **6** possibilidades;

ii) Os eventos **A (vestido)** e **(i) (saia e blusa)** são **excludentes** – princípio **aditivo**: **4 + 6** = **10** possibilidades;

iii) Os eventos **D (sapato)** e **(iii) (saia e blusa ou vestido)** são **concomitantes** – princípio multiplicativo: **5 x 10** = 50 possibilidades.

HORA DE
PRATICAR!

(2017 – Conselho Regional de Educação Física/CE) Numa estante encontram-se 4 dicionários de inglês, 3 de espanhol e 2 de francês. De quantas maneiras uma pessoa pode escolher dois dicionários dessa estante e que sejam de idiomas diferentes?

a) 22

b) 24

c) 26

d) 28

Comentários:

Selecionando 2 dicionários de idiomas diferentes, podemos encontrar uma das seguintes opções:

i) um livro de inglês **e** um de espanhol; **ou**

ii) um livro de inglês **e** um de francês; **ou**

iii) um livro espanhol **e** um de francês.

Observe que, em cada opção, temos eventos concomitantes (ambos ocorrem), aplicando-se o princípio multiplicativo; enquanto que as opções i, ii e iii se excluem mutuamente (somente uma delas irá ocorrer), aplicando-se o princípio aditivo entre elas.

Portanto, para i (inglês e espanhol), temos 4 x 3 = 12 possibilidades; para ii (inglês e francês), temos 4 x 2 = 8 possibilidades; para iii (espanhol e francês), temos 3 x 2 = 6 possibilidades. No total, temos 12 + 8 + 6 = 26 possibilidades de pegar dois dicionários de idiomas distintos.

Gabarito: C

(CESPE/2013 – TRT-ES) Considerando que, na fruteira da casa de Pedro, haja 10 uvas, 2 maçãs, 3 laranjas, 4 bananas e 1 abacaxi, julgue o próximo item.

Se Pedro desejar comer apenas um tipo de fruta, a quantidade de maneiras de escolher frutas para comer será superior a 100.

Comentários:

Se Pedro deseja comer apenas um tipo de fruta, ele poderá comer uvas OU maçãs OU laranjas OU bananas OU abacaxi:

i) Uvas: há 10 uvas, logo Pedro poderá comer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 uvas. Logo, há 10 maneiras de escolher uvas para comer;

ii) Maçãs: há 2 maçãs, logo há 2 maneiras de escolher maçãs para comer;

iii) Laranjas: com 3 laranjas, há 3 maneiras de comer laranjas;

iv) Bananas: com 4 bananas, há 4 maneiras de comer bananas;

v) Abacaxi: há 1 abacaxi, logo há 1 forma de comer abacaxi.

Como Pedro irá escolher apenas **uma** dessas opções, então devemos aplicar o princípio aditivo:

$$\text{Número de maneiras} = 10 + 2 + 3 + 4 + 1 = 20$$

Que é inferior a 100.

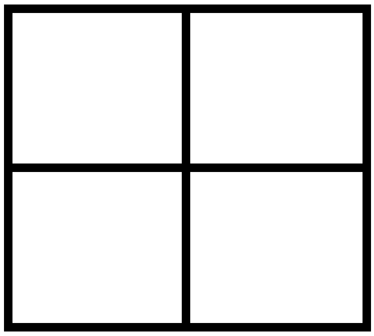
Gabarito: Errado.

Princípio da Casa dos Pombos

Esse princípio pode não estar explícito nos editais, mas ser cobrado dentre os princípios de contagem. O **princípio do pombal** ou **da casa dos pombos** afirma que:

*Se **n** pombos devem se abrigar em **m** casas e se **n > m**, então pelo menos uma casa irá conter **mais de um** pombo.*

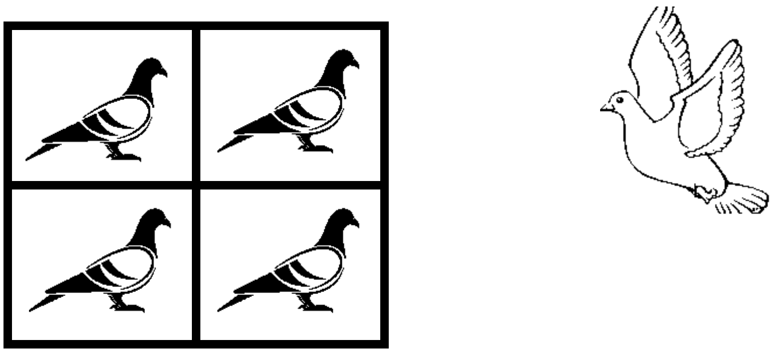
Por exemplo, podemos ter **m** = 4 casas. Nesse caso, se tivermos qualquer número de pombos **maior** do que 4, então pelo menos uma casa conterá **mais de um** pombo.



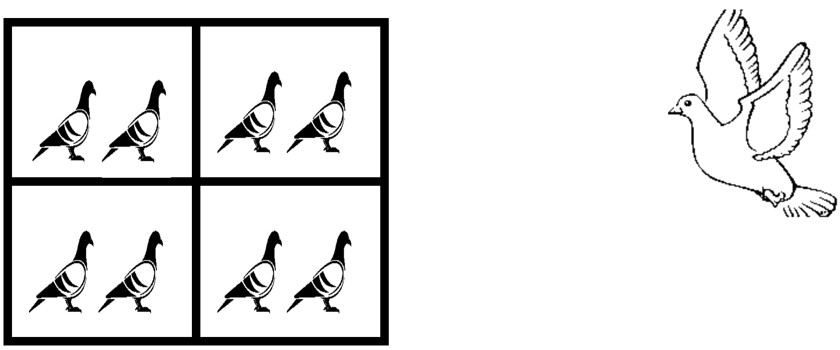
Por que pombos*?* Bem, os pombos são imprevisíveis. Eles podem resolver ficar todos juntos ou todos separados... Nesse sentido, eles representam **eventos aleatórios**, como a seleção de determinados elementos **ao acaso**. Porém, mesmo sendo imprevisíveis, é possível fazer algumas **afirmações** ou **garantias**. Para fazer essas afirmações, precisamos pensar no **pior cenário** possível.

Por exemplo, considerando um total de 4 casas, quantos pombos são necessários para **garantir** que haverá pelo menos 2 pombos em uma casa? Bem, é **possível** que, havendo apenas 2 pombos, ambos escolham a mesma casa. Porém, isso não pode ser **garantido**, pois também é possível que escolham casas distintas. A mesma situação ocorre com 3 e com 4 pombos, pois ainda é possível que todos escolham casas distintas.

Entretanto, com 5 pombos, **necessariamente** haverá **pelo menos** 2 pombos em uma casa. Como há somente 4 casas, ainda que eles tentem se espalhar, o 5º pombo não terá alternativa e terá que ficar com algum outro pombo.



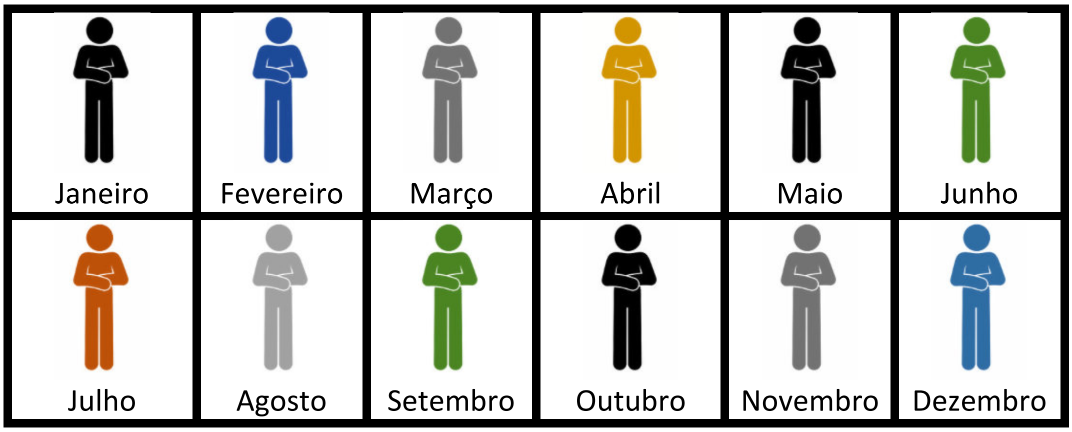
Também podemos encontrar o número de pombos necessários para garantir que haja pelo menos **3 pombos em uma mesma casa**. No **pior cenário**, eles ficarão todos espalhados com 2 pombos por casa, antes de termos 3 pombos em uma mesma casa.



Para que haja 2 pombos em cada uma das 4 casas, serão necessários 2 x 4 = 8 pombos. Portanto, são necessários 8 + 1 = 9 pombos, para **garantir** que haverá **pelo menos** 3 pombos em uma casa.

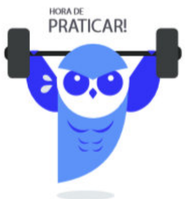
Podemos mencionar outros exemplos, mais próximos à nossa realidade. Por exemplo, qual é o menor número de pessoas necessário para garantir que pelo menos 2 pessoas façam aniversário no mesmo mês?

Para garantir isso, precisamos pensar no pior cenário aquele que em que os aniversariantes ficam todos "espalhados". Assim, em um grupo de 12 pessoas, todas fariam aniversário em meses distintos. Porém, em um grupo de 13 pessoas, como há somente 12 meses, necessariamente alguém fará aniversário no mesmo mês que outra pessoa. Portanto, são necessárias 13 pessoas para garantir que pelo menos 2 façam aniversário no mesmo mês.



*Por que a pergunta é pelo **menor** número de pessoas?*

Note que, se houver mais do que 13 pessoas (ou seja, 14, 15,...), também poderemos garantir que pelo menos 2 pessoas farão aniversário no mesmo mês. Por isso, a questão se interessa pelo **menor** número de pessoas, para o qual temos tal garantia.



(FCC/2017 – Analista Executivo da Secretaria de Gestão/MA) No setor administrativo de uma empresa, há quatro tipos de cargos: estagiários, técnicos, gerentes e diretores. Alguns funcionários desse setor comporão um grupo que será transferido para o setor financeiro da empresa. Compondo-se o grupo com funcionários escolhidos ao acaso, o número mínimo de funcionários que deverá compor o grupo para que se tenha certeza de que nele haverá quatro funcionários de um mesmo cargo é igual a

a) 17

b) 15

c) 13

d) 16

e) 14

Comentários:

O pior cenário (ou seja, o cenário que exige o maior número de funcionários para garantir que 4 terão o mesmo cargo) é aquele em que os funcionários são todos de cargos diferentes. Assim, haverá 3 funcionários para cada um dos 4 tipos de cargo, antes de haver 4 funcionários de algum cargo.

Ou seja, haverá 3 x 4 = 12 funcionários distribuídos por todos os cargos, em 3 funcionários por cargo. Com o 13º funcionário, necessariamente haverá 4 funcionários para algum cargo.

Gabarito: C

(CESPE/2013 – TCE-RO) Considerando que, em uma pesquisa de rua, cada entrevistado responda sim ou não a cada uma de dez perguntas feitas pelos entrevistadores, julgue o item seguinte.

Será necessário entrevistar mais de mil pessoas para se garantir que duas pessoas respondam igualmente a todas as perguntas.

Comentários:

Para **garantir** que duas pessoas respondam igualmente a todas as perguntas, é necessário entrevistar um número de pessoas **maior** que o número de maneiras diferentes de responder ao questionário. Ou seja, essa questão combina o princípio dos pombos com o princípio multiplicativo.

Vamos representar as possibilidades de resposta para as 10 perguntas conforme abaixo:

Sabemos que há 2 respostas distintas possíveis para cada pergunta:

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de responder às 10 perguntas é:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024$$

Assim, precisamos entrevistar 1.025 pessoas para garantir que haverá duas respostas iguais, ou seja, mais de 1.000 pessoas.

Gabarito: Certo.

Fatorial de um número natural

Para resolvermos diversas questões de análise combinatória, utilizamos técnicas que dependem do conceito de fatorial.

O **fatorial de um número natural** (como 0, 1, 2, 3, ...) é representado como:

$$\boldsymbol{n!}$$

O fatorial representa o **produto de todos os números inteiros positivos menores ou iguais àquele número**, conforme indicado a seguir:

$$\boldsymbol{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$$

Por exemplo:

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Note que podemos escrever o fatorial de um número natural em função do fatorial de qualquer outro número natural menor, por exemplo:

$$4! = 4 \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!} = 4 \times 3!$$

$$7! = 7 \times \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!} = 7 \times 6!$$

$$7! = 7 \times 6 \times \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!} = 7 \times 6 \times 5!$$

$$10! = 10 \times 9 \times \underbrace{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{8!} = 10 \times 9 \times 8!$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!$$

Esse tipo de mudança facilita o cálculo de divisões de fatoriais (**muito comuns** em combinatória):

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

$$\frac{15!}{13!} = \frac{15 \times 14 \times 13!}{13!} = \frac{15 \times 14 \times \cancel{13!}}{\cancel{13!}} = 15 \times 14 = 210$$

Nesses exemplos, aplicamos o **fatorial** **antes** de efetuar a **divisão**. Quando for necessário fazer a **divisão antes**, utilizaremos o **parêntesis**:

$$\frac{6!}{3!} \neq \left(\frac{6}{3}\right)!$$

Vimos que $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

Já, em $\left(\frac{6}{3}\right)!$, calculamos o resultado da **divisão** entre parêntesis, **antes** do fatorial:

$$\left(\frac{6}{3}\right)! = 2! = 2 \times 1 = 2$$

Analogamente, em um produto, temos:

$$2 \times 4! \neq (2 \times 4)!$$

Em $2 \times 4!$, calculamos o **fatorial** de 4 **antes** da multiplicação:

$$2 \times 4! = 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$$

Em $(2 \times 4)!$, **multiplicamos** os fatores, **antes** de aplicar o fatorial:

$$(2 \times 4)! = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320$$

O mesmo vale para as demais operações, ou seja:

$$2 + 4! \neq (2+4)!$$

Pois $2 + \mathbf{4}! = 2 + 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 26$; e $(\mathbf{2} + \mathbf{4})! = \mathbf{6}! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

$$8 - 3! \neq (8-3)!$$

Pois $8 - \mathbf{3}! = 8 - \mathbf{3} \times \mathbf{2} \times \mathbf{1} = 2$; e $(\mathbf{8} - \mathbf{3})! = \mathbf{5}! = \mathbf{5} \times \mathbf{4} \times \mathbf{3} \times \mathbf{2} \times \mathbf{1} = 120$.

Agora, vejamos dois **casos especiais** do fatorial. O **fatorial de 1** pode ser entendido pela própria definição de fatorial. Como não há número inteiro positivo menor do que 1, apenas igual, então esse será o único fator:

1! = 1

O segundo caso especial é **0!** Você pode considerar como convenção o seguinte resultado:

0! = 1

Para entender o porquê dos resultados desses casos especiais, precisamos observar que o fatorial de um número n pode ser escrito como o **fatorial do número seguinte**, (n + 1)!, **dividido** por esse **número seguinte**, n + 1. Por exemplo, temos:

4! = 4 x 3 x 2 x 1

5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Observe que 4! pode ser representado por 5! dividido por 5.

$$4! = \frac{5!}{5} = \frac{\cancel{5} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{\cancel{5}} = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Similarmente, o fatorial de 1 pode ser representado por:

$$1! = \frac{2!}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Por fim, o fatorial de 0 por:

$$0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG) O fatorial de um número é extremamente utilizado na análise combinatória. Dessa forma, analise as proposições a seguir:

I. O fatorial n! de um número $n \in \mathbb{N}$ é dado por $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$;

II. 0! = 1;

III. 1! = 0.

Está(ão) CORRETA(S) a(s) proposição(ões):

a) II apenas.

b) I e II apenas.

c) II e III apenas.

d) I e III apenas.

Comentários:

A proposição I indica precisamente a definição de fatorial.

A proposição II também está correta: 0! = 1.

A proposição III está incorreta, pois 1! = 1.

Ou seja, estão corretas apenas as proposições I e II.

Gabarito: B

(2018 – Prefeitura de Uruçuí/PI) A simplificação da expressão a seguir é: $\frac{200!}{198!}$

a) 200

b) 198!

c) 38.800

d) 39.800

Comentários:

Podemos escrever 200! como 200! = 200 x 199 x 198!. Assim, temos:

$$\frac{200!}{198!} = \frac{200 \times 199 \times 198!}{198!} = 200 \times 199 = 39.800$$

Gabarito: D

Permutação

Em linguagem coloquial, podemos dizer que **permutar** significa **trocar de lugar**. Ao trocar elementos de lugar, a **ordem** desses elementos se **modifica**. Por isso, podemos dizer que as técnicas de permutação permitem calcular as **diferentes possibilidades** de se **ordenar** elementos.

Permutação Simples

Em permutações simples, os elementos a serem ordenados são todos **distintos** entre si.

Antes de apresentar a fórmula, vamos entender o raciocínio, que é muito importante. Digamos que 3 alunos (Ana, Beto e Caio), em um grupo de estudo, serão avaliados e, em seguida, ranqueados de acordo com o resultado da sua avaliação. Supondo que não há empates, de quantas formas esses alunos poderão ser ranqueados?

Como o exemplo é pequeno podemos escrever e contar todas as possibilidades, mas vamos experimentar uma outra forma de resolver: encontrando o **número de possibilidades** para **cada posição**:

___	___	___
1º	2º	3º

Quais são os alunos que podem ficar em primeiro lugar? Qualquer um dos alunos (Ana, Beto ou Caio) **pode** ficar em primeiro lugar. Portanto, temos 3 possibilidades para o primeiro lugar.

E para o segundo lugar? Bem, sabendo que alguém ficará em primeiro lugar, restarão 2 possibilidades para o segundo colocado.

E para o terceiro lugar? Sabendo que alguém ficará em primeiro lugar e outro ficará em segundo lugar, restará apenas uma possibilidade para o terceiro lugar.

3	2	1
1º	2º	3º

Como são eventos concomitantes (alguém ficará em primeiro lugar, outra pessoa ficará em segundo **e** outra em terceiro), pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento:

$$3 \times 2 \times 1$$

Poderíamos ter começado o raciocínio por qualquer posição, que o resultado seria o mesmo.

– Só um momento! Como assim "sobrarão" 2 possibilidades para o 2° colocado e 1 possibilidade para o 3° colocado?!?

ESCLARECENDO!

Para a 1ª posição (por onde começamos o nosso raciocínio, mas poderíamos ter começado por qualquer outra), **todos os 3 alunos** estão disponíveis para ocupá-la:

3		
1º	2º	3º

Para cada uma dessas 3 possibilidades, teremos ordenações **diferentes**, **dependendo** de quem ficar em **2°** e em **3°**. Por exemplo, mantendo Ana em 1° lugar, temos Ana, Beto e Caio ou Ana, Caio e Beto. Logo, há **novas possibilidades** de ordenação associadas à **2ª posição**.

Porém, **não** é possível que o mesmo aluno ocupe **mais de uma** posição. Logo, para cada uma das 3 possibilidades para a 1ª posição, há **apenas 2 possibilidades** para a 2ª posição, uma vez que um dos alunos terá necessariamente **ocupado** a 1ª posição. Para isso, dizemos que o aluno da 1ª posição "**já foi escolhido**" e assim **sobrarão apenas** 2 alunos para a 2ª posição:

3	2	
1º	2º	3º

Da mesma forma, só haverá 1 aluno que não terá ocupado nem a primeira nem a segunda posição, logo ele irá ocupar a terceira posição. Ou seja, para cada uma das formas de definir o 1° e o 2° colocado, haverá apenas 1 forma de definir o 3° colocado. Para isso, dizemos que, "**após a escolha**" do 1° e do 2° colocados, **sobrará** apenas 1 aluno para a 3ª posição:

3	2	1
1º	2º	3º

Por fim, **multiplicamos** todas essas possibilidades (princípio multiplicativo) para encontrar a quantidade de maneiras de ordenar todos os 3 elementos.

E se houvesse 4 alunos? Quais seriam as possibilidades de ordenação do primeiro ao quarto lugar? Nesse caso, teríamos 4 possibilidades para o primeiro lugar; 3 para o segundo lugar; 2 para o terceiro e 1 para o quarto:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

E se houvesse 10 alunos? Teríamos 10 possibilidades para o primeiro lugar, 9 para o segundo, depois 8, depois 7... até sobrar 1 possibilidade para o décimo lugar:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

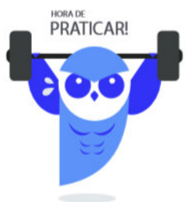
Ou seja, a posição seguinte terá sempre uma possibilidade a menos do que a posição anterior. Para n alunos teríamos:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Lembrou de algo? Essa é a fórmula do **fatorial**!

> Portanto, a **permutação simples** de **n elementos** distintos $\boldsymbol{P_n}$, isto é, o **número de possibilidades de ordenar n elementos distintos**, é dada por:
>
> $$\boldsymbol{P_n = n!}$$

Reforçando, a **permutação simples** pode ser utilizada para calcular todas as possibilidades de se **reordenar** elementos, sejam letras de uma sigla (formando anagramas distintos), algarismos em um número (formando números distintos), etc., desde que os **elementos sejam todos distintos**.



(FGV/2019 – Prefeitura de Salvador/BA) Trocando-se a ordem das letras da sigla PMS de todas as maneiras possíveis, obtêm-se os anagramas dessa sigla. O número desses anagramas é:

a) 16.

b) 12.

c) 9.

d) 8.

e) 6.

Comentários:

Considerando que todas as 3 letras de PMS são distintas, o número de anagramas, ou seja, de formas de se reordenar essas letras é dado por:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Gabarito: E

(VUNESP/2018 – PM/SP) Em um armário, há 5 prateleiras e será preciso colocar 5 caixas, de cores distintas, cada uma em uma prateleira desse armário, sem que haja uma ordem específica. O número total de maneiras de colocar essas caixas nesse armário é

a) 25.

b) 60.

c) 95.

d) 120.

e) 165.

Comentários:

Por se tratarem de caixas distintas a serem alocadas em determinada ordem, temos uma permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: D.

(CESPE 2018/EBSERH) Julgue o próximo item, a respeito de contagem.

Se a enfermaria de um hospital possuir cinco leitos desocupados e se cinco pacientes forem ocupar esses leitos, então haverá mais de 100 formas diferentes de fazer essa ocupação.

Comentários:

Considerando que temos 5 leitos para serem ocupados por 5 pacientes, temos uma permutação de 5 elementos, dada por:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Logo, há mais de 100 formas de fazer essa ocupação.

Gabarito: Certo.

(CESPE 2016/CBM-DF) Para atender uma grave ocorrência, o comando do corpo de bombeiros acionou 15 homens: 3 bombeiros militares condutores de viatura e 12 praças combatentes, que se deslocaram em três viaturas: um caminhão e duas caminhonetes. Cada veículo transporta até 5 pessoas, todas sentadas, incluindo o motorista, e somente os condutores de viatura podem dirigir uma viatura. Com relação a essa situação, julgue o item seguinte.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuir os condutores de viatura para dirigir os veículos é superior a 5.

Comentários:

Considerando que há 3 condutores para 3 veículos, a quantidade de maneiras de organizá-los corresponde a uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Logo, a quantidade de maneiras é superior a 5.

Gabarito: Certo.

Permutação Simples com Restrição

É possível que algumas questões de permutações imponham determinadas **restrições**. Nesses casos, nem todos os elementos poderão permutar livremente, o que exige mais atenção para resolver a questão.

Vejamos alguns exemplos desse tipo de permutação. Primeiro, vamos considerar que há 8 elementos distintos a serem ordenados, por exemplo, os algarismos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Vamos ilustrar as opções de ordenação com os espaços abaixo.

Suponha que o número 1 esteja fixo na primeira posição e o número 8, na oitava posição:

1							8

Sendo assim, restarão os algarismos 2 a 7 (ou seja, um total de **6 algarismos**) para serem ordenados nos **6 espaços** restantes. Dessa forma, teremos uma permutação de 6 elementos em 6 posições:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Poderíamos ter **fixado quaisquer 2 algarismos** em quaisquer 2 posições, que continuaríamos com a **permutação dos 6 algarismos restantes**, nos 6 espaços restantes. Portanto, o número de possibilidades de ordená-los seria o mesmo.

De modo geral, havendo **n elementos**, dos quais **p** estejam **fixos em determinadas posições**, fazemos a **permutação** de **n – p** elementos:

$$P_{n-p} = (n - p)!$$

Um exemplo sutilmente **diferente** seria se esses dois algarismos fossem posicionados nos **extremos**, mas **sem fixar** qual irá ocupar a primeira posição e qual irá ocupar a última posição.

Assim, poderíamos ter o número 1 na primeira posição e o número 8 na oitava ou o número 8 na primeira posição e o número 1 na oitava:

1							8

8							1

Nesse caso, para cada uma das 720 possibilidades de permutar os algarismos de 2 a 7 nas posições intermediárias, calculadas anteriormente, há **2 possibilidades distintas** de posicionar os extremos. Pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar as possibilidades desses dois eventos:

$$2 \times P_6 = 2 \times 720 = 1440$$

Na verdade, essas **2 possibilidades** de alocar esses 2 algarismos, 1 e 8, nas 2 posições extremas correspondem à **permutação** desses 2 elementos.

Portanto, o número de maneiras de se ordenar esses 8 algarismos, de modo que os algarismos 1 e 8 ocupem as posições **extremas**, **sem fixar qual extremo** cada algarismo ocupará, corresponde ao produto das permutações de 2 e de 6 elementos:

$$P_2 \times P_6$$

Em outras palavras, podemos tratar como **duas permutações em separado**: uma dos 2 elementos que ocuparão as posições extremas e a outra dos 6 elementos que ocuparão as posições não extremas. E para ordenar **todos** os 8 elementos, **multiplicamos** esses resultados (princípio multiplicativo).

Com isso, podemos resolver os problemas que designam **determinados elementos a determinadas posições**, mas **sem indicar a posição específica** de cada um.

Por exemplo, vamos supor que os 3 primeiros algarismos tenham que ocupar as 3 primeiras posições, em **qualquer ordem**, e os demais algarismos nas demais posições:

$$\underbrace{\square\ \square\ \square}_{1,\ 2\ e\ 3}\ \underbrace{\square\ \square\ \square\ \square\ \square}_{4,\ 5,\ 6,\ 7\ e\ 8}$$

Nesse caso, temos a **permutação** de **3 elementos** nas 3 primeiras posições e de **5 elementos** nas demais posições. Pelo princípio **multiplicativo**, o número de ordenações possíveis é:

$$P_3 \times P_5 = 3! \times 5! = 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Vejamos outro exemplo similar: suponha que os algarismos ímpares tenham que ocupar posições ímpares e os algarismos pares, posições pares, como ilustrado abaixo:

I	P	I	P	I	P	I	P

Também resolveríamos esse caso com **2 permutações em separado**. Em relação aos **ímpares**, temos 4 algarismos para 4 posições, logo, temos uma permutação de **4 elementos**:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Em relação aos **pares**, temos 4 algarismos para 4 posições, logo, temos outra permutação de **4 elementos**:

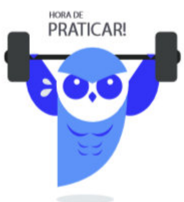
$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Pelo princípio **multiplicativo**, o número de maneiras de ordenar todos esses 8 algarismos é:

$$24 \times 24 = 576$$

De modo geral, havendo **n elementos**, dos quais **p** estejam **designados a determinadas posições**, mas **sem indicar a posição especifica** de cada um, fazemos a **permutação** de **n–p** elementos e **multiplicamos** pela **permutação de p elementos**:

$$P_{n-p} \times P_p = (n-p)! \times p!$$



(FCC/2019 – Analista Judiciário do TRF 3ª Região) Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é

a) 30

b) 4

c) 120

d) 24

e) 6

Comentários:

Trata-se de um problema de permutação. Considerando que um dos candidatos está fixo no município A, restam 4 candidatos para serem alocados em 4 municípios (B, C, D ou E). Portanto:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: D.

(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 8! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o camelo fique na primeira posição e o elefante fique na sexta posição.

Comentários:

A questão pede para organizarmos uma fila de 10 animais, de forma que o camelo (C) fique na primeira posição e o elefante (E), na sexta:

C						E			

Como esses elementos estão **fixos em posições específicas**, basta reordenarmos os **demais elementos**.

Logo, o número de maneira de organizarmos essa fila corresponde à permutação de 10 – 2 = 8 elementos:

$$P_8 = 8!$$

Gabarito: Certo.

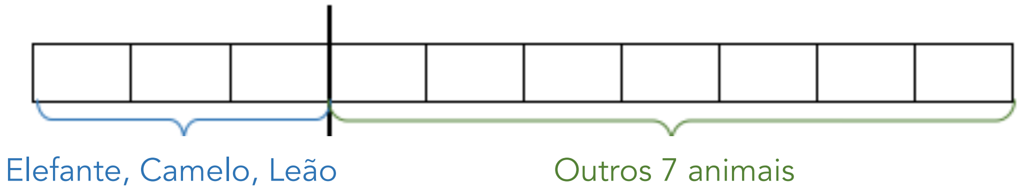
(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem $3 \times 7!$ maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o elefante, o camelo e o leão fiquem nas três primeiras posições, não necessariamente nessa ordem.

Comentários:

Agora, desejamos organizar a fila de forma que os 3 animais (Elefante, Camelo e Leão) fiquem nas 3 primeiras posições, em qualquer ordem. Consequentemente, os outros 10 – 3 = 7 animais ocuparão as outras 7 posições:



O número de formas de organizar os 3 animais corresponde a uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3!$$

O número de formas de organizar os outros 7 animais equivale a uma permutação de 7 elementos:

$$P_7 = 7!$$

Pelo princípio multiplicativo, multiplicamos esses resultados para obter o número de maneiras possíveis de organizar a fila:

$$\text{Número de possibilidades} = 3! \times 7!$$

Note que esse resultado é **diferente** do valor informado no item, qual seja, $3 \times 7!$, logo, o item está errado.

Nota: Como 3! = 3 x 2, o nosso resultado é o **dobro** do que consta no item da questão.

Gabarito: Errado.

Vejamos mais uma ferramenta para resolver problemas de **permutação simples com restrição**.

Vamos supor que os algarismos 1 e 2 tenham que ficar **sempre juntos**, **nessa ordem**. Nesse caso, tratamos esses 2 algarismos como **elemento único**, que podemos chamar de **A**. Assim, em vez de 8 elementos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}, ordenaremos apenas **7 elementos** {A, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

Portanto, a quantidade de maneiras de ordenar 8 elementos, de modo que **2 estejam sempre juntos em uma determinada ordem**, corresponde à **permutação de 7 elementos**.

Se houvesse 3 elementos **juntos** em **determinada ordem**, {1, 2 e 3}, denotaríamos os 3 elementos por A, e calcularíamos a permutação dos **outros 5 elementos acrescido do elementos A**, o que corresponde à permutação de **6 elementos** {A, 4, 5, 6, 7 e 8}.

De modo geral, havendo **n elementos**, dos quais j devam ficar **juntos em determinada ordem**, fazemos a **permutação** de **n – j + 1** elementos:

$$P_{n-j+1} = (n - j + 1)!$$

E se os elementos tivessem que ficar **juntos**, mas em **qualquer ordem**? Nesse caso, o **início** da solução é da mesma forma, isto é, denotamos esses elementos por um **único elemento**, **A**, e fazemos a **permutação** do elemento **A** com os demais elementos.

Por exemplo, se os algarismos {1, 2 e 3} tivessem que ficar juntos, mas em qualquer ordem, faríamos a **permutação dos 6 elementos** {A, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Porém, para **cada uma** dessas 720 possibilidades de ordenar os elementos {A, 4, 5, 6, 7 e 8}, os algarismos {1, 2 e 3} pode aparecer como:

... 1 2 3 ...	... 1 3 2 ...	... 2 1 3 ...
... 2 3 1 ...	... 3 1 2 ...	... 3 2 1 ...

Em outras palavras, para cada uma das possibilidades que calculamos anteriormente, temos diferentes formas de **ordenar os 3 elementos**.

Como calculamos as diferentes formas de **ordenar 3 elementos**? Pela **permutação** de 3 elementos!

Logo, para calcular o número de maneiras de organizar **todos** os 8 elementos nessas condições, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela permutação de **3 elementos** (princípio multiplicativo):

$$P_6 \times P_3 = 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$$

De modo geral, havendo **n elementos**, dos quais **j elementos** devem ficar **juntos em qualquer ordem**, fazemos a permutação de **n – j + 1** elementos e **multiplicamos** pela **permutação de j elementos**:

$$P_{n-j+1} \times P_j = (n - j + 1)! \times j!$$

RESUMINDO

Na permutação simples com restrição, (i) podemos designar **posições** para determinados elementos ou (ii) podemos determinar elementos a permanecerem **juntos**.

i) Quando designamos **posições**, devemos **permutar os demais elementos**.

i.a) Havendo **p elementos fixos** em determinadas posições, dentre n elementos no total, devemos **permutar n – p elementos**:

$$P_{n-p} = (n - p)!$$

i.b) Caso os p elementos possam ser **reordenados** dentre as posições designadas, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela **permutação de p elementos**:

$$P_{n-p} \times P_p = (n - p)! \times p!$$

ii) Quando determinamos elementos a permanecerem **juntos**, devemos considerá-los como **elementos único** e **permutar esse novo elemento junto aos demais**.

ii.a) Havendo **j** elementos que deverão permanecer **juntos em determinada ordem**, dentre n elementos no total, devemos permutar **os demais n – j elementos acrescidos de 1** unidade, a qual corresponde ao conjunto dos j elementos:

$$P_{n-j+1} = (n - j + 1)!$$

i.b) Se os j elementos que deverão permanecer juntos puderem ser **reordenados** entre si, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela **permutação de j elementos**:

$$P_{n-j+1} \times P_j = (n - j + 1)! \times j!$$

(FGV/2017 – Prefeitura de Salvador/BA) Três casais vão ocupar seis cadeiras consecutivas de uma fila do cinema, e os casais não querem sentar separados. Assinale a opção que indica o número de maneiras diferentes em que esses três casais podem ocupar as seis cadeiras.

a) 6.

b) 12.

c) 24.

d) 36.

e) 48.

Comentários:

Primeiro, vamos tratar cada casal como elemento único. Assim, temos a permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Uma vez definida a ordem entre os casais, é necessário que cada casal decida a sua ordem. Assim, para cada uma dessas 6 possibilidades de ordem entre os casais, há $P_2 = 2$ possibilidades de cada um dos três casais se organizarem:

$$6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

Gabarito: E

(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 7 × 7! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o elefante, o camelo e o leão estejam sempre juntos, mantendo-se a seguinte ordem: leão na frente do camelo e camelo na frente do elefante.

Comentários:

Para organizar uma fila de 10 animais, de modo que o leão, o camelo e o elefante apareçam sempre nessa ordem, podemos tratá-lo como elemento único. Assim, o número de formas de organizar os outros 10 – 3 = 7 animais e mais esse trio corresponde a uma permutação de 8 elementos:

$$P_8 = 8! = 8 \times 7!$$

Esse resultado é diferente de **7** x 7!, descrito no item.

Gabarito: Errado.

(CESPE 2018/BNB) Julgue o próximo item, relativo a análise combinatória e probabilidade.

A quantidade de números naturais distintos, de cinco algarismos, que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, de modo que 1 e 2 fiquem sempre juntos e em qualquer ordem, é inferior a 25.

Comentários:

Para encontrar a quantidade de números que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 corresponde a uma permutação desses elementos. Para que os números 1 e 2 fiquem sempre juntos, podemos considerá-lo com elemento único. Assim, temos uma permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Porém, para cada uma dessas 24 maneiras de organizar os algarismos 3, 4, 5 e o elemento 1-2, podemos ter 1 primeiro e depois 2, ou 2 primeiro e depois 1. Logo, pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar esse resultado pela permutação de 2 elementos $P_2 = 2! = 2$:

Quantidade de números possíveis = **24** x 2 = 48

Essa quantidade é **superior** a 25.

Gabarito: Errado.

Permutação com Repetição

Na permutação **simples**, todos os elementos são **distintos**. Nesse caso, se houver, por exemplo, 3 elementos {A, B, C}, há $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades de ordená-los. Vejamos essas ordenações:

i) A B C ii) A C B iii) B A C iv) B C A v) C A B vi) C B A

Suponhamos que, em vez C, seja um **segundo elemento** A. Vamos escrever novamente as 6 possibilidades descritas acima, porém substituindo C por um segundo A:

I) A B A II) A A B III) B A A IV) B A A V) A A B VI) A B A

Observe que a ordem descrita em I é igual à ordem em VI; que a ordem em II é igual à ordem em V; e que a ordem em III é igual à ordem em IV. Portanto, temos apenas 3 possibilidades **distintas** de ordenar os elementos {A, A, B}:

I) A B A II) A A B III) B A A

Podemos observar que, quando há **elementos repetidos**, o número de possibilidades distintas de ordenação se **reduz**.

> *– Mas, por quê? O que aconteceu?*

Bem, a redução ocorreu porque na opção i da **primeira** permutação, os elementos A e C estavam **invertidos** em relação à opção vi, enquanto **todo o restante se manteve igual**. Por isso, na **segunda** permutação, essas opções se tornaram uma **única** opção. O mesmo ocorreu com as opções ii e v; e com as opções iii e iv.

Em outras palavras, precisamos **dividir** o resultado da primeira permutação pelo número de vezes em que **A e C trocam de posição**.

E como calculamos a quantidade de maneiras em que elementos trocam de posição? Pela **permutação**!

Em outras palavras, na **permutação com repetição**, **dividimos** a **permutação simples** pela **permutação dos elementos repetidos**. Indicamos essa permutação de 3 elementos com repetição de 2 elementos por P_3^2:

$$P_3^2 = \frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times \mathbf{2!}}{\mathbf{2!}} = \frac{3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3$$

Assim, se tivéssemos 5 elementos distintos para permutar, teríamos $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Havendo 3 elementos iguais, dividimos esse resultado pela permutação dos 3 elementos $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$:

$$P_5^3 = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \mathbf{3!}}{\mathbf{3!}} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 5 \times 4 = 20$$

E se além de um elemento repetido, tivéssemos **outro elemento repetido**? Por exemplo, {A, A, B, B, B, C, D}.

Vamos pensar em etapas: primeiro calculamos a permutação simples dos 7 elementos, como se fossem distintos: $P_7 = 7!$. Em seguida, consideramos que o elemento A está repetido 2 vezes e dividimos pela permutação de 2 elementos: $P_2 = 2!$. Por fim, consideramos que o elemento B está repetido 3 vezes e dividimos novamente pela permutação de 3 elementos: $P_3 = 3!$:

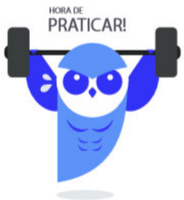
$$P_7^{2,3} = \frac{P_7}{P_2 \times P_3} = \frac{7!}{2! \times 3!}$$

$$P_7^{2,3} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \mathbf{3!}}{2 \times \mathbf{3!}} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2 \times \cancel{3!}} = 7 \times 3 \times 5 \times 4 = 420$$

Ou seja, na permutação com mais de um elemento repetido, **dividimos a permutação simples** pelas **permutações dos elementos repetidos**.

De modo geral, sendo n elementos **totais**, com $m_1, m_2, \dots, m_k$ elementos distintos **repetidos**, a permutação desses elementos é dada por:

$$P_n^{m_1, m_2, \dots, m_k} = \frac{n!}{m_1! \times m_2! \times \dots \times m_k!}$$



(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Com as letras, A, B e C, é possível fazer seis agrupamentos diferentes de três letras: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Se as três letras fossem A, A e B, só poderiam ser feitos três desses agrupamentos diferentes: AAB, ABA, BAA. Com as letras F, F, G e G, o número de agrupamentos diferentes de quatro letras é

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 16.

Comentários:

A quantidade de agrupamentos com as letras F, F, G e G corresponde à permutação de 4 elementos, com 2 repetições de F e 2 repetições de G:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Gabarito: A.

(FGV/2018 – ALE-RO) Assinale a opção que indica o número de permutações das letras da palavra SUSSURRO

a) 1680

b) 1560

c) 1440

d) 1320

e) 1260

Comentários:

A palavra SUSSURRO contém 8 letras, sendo o S repetido 3 vezes, o U repetido 2 vezes e o R repetido 2 vezes. Assim, temos a permutação de 8 elementos com repetição de 2, 2 e 3 elementos:

$$P_8^{2,2,3} = \frac{8!}{2! \times 2! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 2 \times 3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

Gabarito: A

(FCC/2015 – Professor da Secretaria de Educação/ES) O número de anagramas que podem ser obtidos utilizando as letras da palavra VITÓRIA, e que terminam com uma consoante é igual a

a) 2520

b) 1080

c) 840

d) 5040

e) 1980

Comentários:

Na palavra VITÓRIA, há **7 letras**:

___	___	___	___	___	___	___
1	2	3	4	5	6	7

i) Para terminar com uma consoante, há 3 possibilidades para essa posição, todas distintas:

___	___	___	___	___	___	3
1	2	3	4	5	6	7

ii) As outras 6 letras podem permutar livremente pelas 6 posições restantes. Considerando que dessas 6, há 2 elementos repetidos (letra I), temos:

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

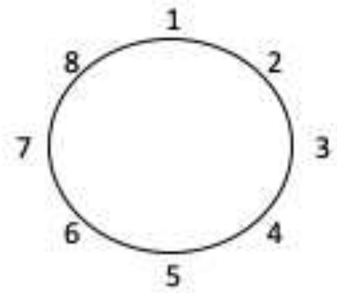
Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades, no total, é:

3 x 360 = 1080

Gabarito: B.

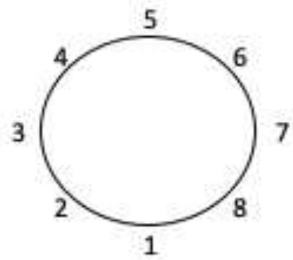
Permutação Circular

Na permutação circular, considera-se que os elementos estão dispostos em um **círculo**.

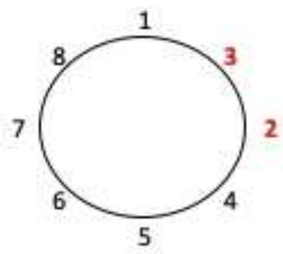


No círculo, considera-se que **não há posições fixas** (primeiro lugar, segundo, terceiro, ..., ou tampouco referências como acima, abaixo, à direita ou à esquerda).

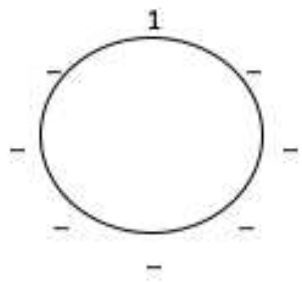
A figura abaixo representa **a mesma disposição** daquela indicada na figura acima, como se tivéssemos **girado** o círculo 180º, mantendo todos os elementos na **mesma posição**:



A disposição varia somente com a mudança da **posição de algum elemento em relação aos demais.** A figura abaixo representa uma disposição **diferente**, haja vista a **troca** dos elementos 2 e 3.



Para calcular a quantidade de disposições distintas, podemos **fixar** (qualquer) **um** dos elementos, por exemplo, o elemento 1, em qualquer posição:



Agora sim, as posições de **todos** os outros elementos irá **importar** porque elas serão **relativas** ao elemento 1 fixado. Portanto, calculamos a **permutação simples para os demais elementos** (7):

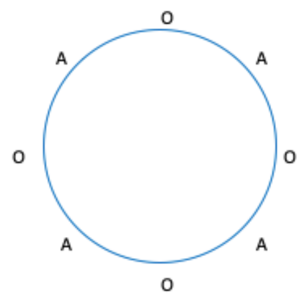
$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

Em geral, como **fixamos um** dos elementos, a permutação circular de n elementos, indicada por PC_n, é:

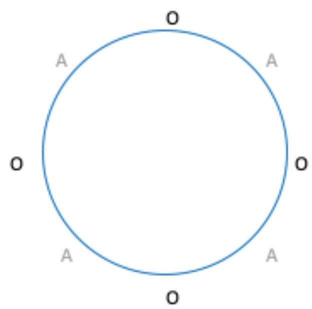
$$PC_n = (n-1)!$$

Permutação Circular com Restrições

É possível que uma permutação **circular** apresente **restrições**. Por exemplo, suponha que haja 4 meninos (O) e 4 meninas (A) para se sentarem à mesa, de forma que todo menino esteja entre duas meninas (e, portanto, toda menina esteja entre dois meninos), como indicado abaixo.



Nesse tipo de situação, resolvemos o problema em **2 etapas**: primeiro sentamos os meninos e, depois, as meninas (ou vice-versa). Para sentarmos os 4 meninos, há 4 posições possíveis:



Nessa **primeira** etapa, temos uma permutação circular, em que **fixamos** a posição de **um** deles e calculamos a **permutação dos demais**:

$$PC_n = (n-1)!$$

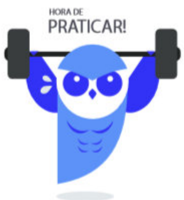
$$PC_4 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Na **segunda** etapa, vamos sentar as 4 meninas. Nesse caso, **todas as posições são diferentes**, pois já temos **meninos sentados**, de modo que a **posição de todas as meninas importa**. Assim, temos a permutação simples de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Portanto, para cada uma das 6 possibilidades de se posicionar os meninos, há 24 possibilidades de posicionar as meninas. Pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar as possibilidades desses eventos:

$$6 \times 24 = 144$$



(2019 – Prefeitura de Ibiaçá/RS) O número máximo de maneiras distintas que um grupo de cinco amigos pode se sentar ao redor de uma mesa circular para realizar um lanche coletivo é:

a) 120

b) 50

c) 24

d) 12

e) 1

Comentários:

A permutação circular de n = 5 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: C

(2016 – Prefeitura de Ouricuri/PE) De quantas maneiras possíveis podemos dispor nove crianças em um círculo em que todas brincam de mãos dadas?

a) 9!

b) 8!

c) 7!

d) 6!

e) 5!

Comentários:

A permutação circular de n = 9 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_9 = 8!$$

Gabarito: B

(2017 – Companhia de Desenvolvimento Habitacional/DF)

Bruno, Carlos, Davi, Eduardo e Flávio são amigos e jantam em uma churrascaria. Na mesa circular em que se encontram, há 5 cadeiras idênticas, equidistantes duas a duas, e 5 espaços entre cada par de cadeiras para os garçons servirem carnes: acém; costela; fraldinha; linguiça; e maminha. A figura acima ilustra uma possível configuração da mesa, com os 5 amigos e as 5 carnes do rodízio. Sabe-se que as carnes preferidas de Bruno são costela e acém e Davi prefere fraldinha.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

O número possível de configurações da mesa, contando que os 5 amigos estejam sentados e as 5 carnes estejam entre cada par de cadeiras, é maior que 3.000.

Comentários:

Para resolver essa questão, podemos sentar primeiramente os 5 amigos e, em seguida, colocar as 5 carnes (ou vice-versa). Para sentar os 5 amigos em uma mesa redonda, podemos sentar um amigo em qualquer posição e, em seguida, permutar os demais:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Ao colocarmos as 5 carnes, a posição de todas elas importam, pois elas estarão entre amigos distintos. Portanto, temos a permutação simples de 5 elementos:

$$P_n = n!$$

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Portanto, para cada 24 possibilidades de sentar os amigos, há 120 possibilidades de colocar as carnes. Pelo princípio multiplicativo, as possibilidades desses eventos devem ser multiplicadas:

$$24 \times 120 = 2.880$$

Como 2.880 é menor que 3.000, o item está errado.

Gabarito: Errado

OUTROS TIPOS DE PERMUTAÇÃO

Nesta seção, veremos tipos de permutação mais complexos e menos frequentes em prova, quais sejam, a **permutação com elementos ordenados** e a **permutação caótica** (ou **desarranjo**).

Permutação com Elementos Ordenados

Na permutação com elementos ordenados, determinados elementos devem **seguir uma ordem** definida, não podendo ser permutados livremente.

Vamos considerar o exemplo do grupo de estudo dos 3 alunos Ana, Beto e Caio. De quantas maneiras, podemos ordená-los, de acordo com as suas notas (sem empates), sabendo que a **nota da Ana foi maior do que a nota do Beto**?

Para responder, vamos primeiro relacionar todas as possibilidades, ignorando essa restrição (sabemos que são $P_3 = 3! = 6$ possibilidades):

i) Ana, Beto, Caio	ii) Ana, Caio, Beto	iii) Beto, Ana, Caio
iv) Beto, Caio, Ana	v) Caio, Ana, Beto	vi) Caio, Beto, Ana

Agora vamos eliminar as possibilidades em que Beto está à frente de Ana (ordem incorreta):

i) Ana, Beto, Caio	ii) Ana, Caio, Beto	~~iii) Beto, Ana, Caio~~
~~iv) Beto, Caio, Ana~~	v) Caio, Ana, Beto	~~vi) Caio, Beto, Ana~~

Claramente, há uma **redução** das ordenações possíveis, em relação à permutação simples. Mas por quê?

Na permutação simples, se mantivermos constantes as posições dos **demais** elementos, haverá sempre uma opção em que Ana fica à frente de Beto e outra em que Beto ficará à frente de Ana. Entretanto, apenas uma dessas opções atende à restrição de ordenação.

Por esse motivo, precisamos **dividir** o resultado pelo número de vezes em que os elementos ordenados **trocam de posição**.

Já sabemos como fazemos isso, né? Dividindo pela **permutação dos elementos ordenados**! Nesse exemplo, por $P_2 = 2! = 2$:

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3$$

De maneira geral, havendo n elementos, dos quais k elementos devem respeitar uma **ordem específica**, o número de possibilidades de ordená-los é:

$$\frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

Esta fórmula é **igual** à da **permutação com repetição**!

FIQUE ATENTO!

Na **permutação com elementos ordenados**, os elementos **não devem ser necessariamente consecutivos**.

No exemplo anterior, em que a ordenação foi Ana > Beto, aceitamos a opção ii (Ana, Caio, Beto), sem que Ana e Beto estivessem em posições consecutivas.

Se o problema apontar que dois elementos estejam **em determinada ordem e consecutivos**, então será necessário tratá-lo como elemento **único**.

Havendo k_1 elementos que devam seguir uma ordem e outros k_2 elementos que devam seguir outra ordem, dividimos a permutação dos n elementos pela permutação de k_1 e de k_2 (o que também é similar à permutação com repetição):

$$\frac{P_n}{P_{k_1} \times P_{k_2}} = \frac{n!}{k_1! \times k_2!}$$

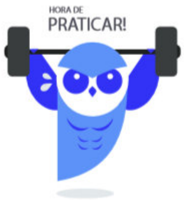
Por exemplo, vamos supor a palavra ORDEM. O número de anagramas que podem ser formados de modo que as letras ORD estejam sempre nesta ordem, assim como as letras EM, corresponde a uma permutação de 5 elementos, de modo que 3 elementos sigam uma ordem e outros 2 elementos sigam uma ordem:

$$\frac{P_5}{P_3 \times P_2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Para ilustrar, vejamos quais são essas 10 possibilidades:

i. ORDEM
ii. OREDM
iii. OERDM
iv. EORDM
v. OREMD
vi. OERMD
vii. EORMD
viii. OEMRD
ix. EOMRD
x. EMORD

Essa fórmula pode ser estendida para qualquer número de ordenações necessárias.



(FCC/2014 – TRF 3ª Região) Álvaro, Benedito, Cléber e outros dois amigos participam de uma corrida. Se apenas os cinco participaram dessa corrida, o número de possibilidades diferentes de maneira que Álvaro chegue antes que Benedito e este, por sua vez, chegue antes de Cléber é igual a:

a) 20

b) 24

c) 18

d) 22

e) 26

Comentários:

Há n = 5 elementos, dos quais k = 3 elementos estão ordenados: Álvaro > Benedito > Cléber. Portanto, temos:

$$\frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

$$\frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Gabarito: A.

Permutação Caótica ou Desarranjo

Na **permutação caótica** ou **desarranjo**, considera-se que os elementos estão originalmente ordenados de certa maneira e que **nenhum deles pode retornar para a sua posição original.**

Vamos supor que 3 elementos {A, B, C} estejam originalmente posicionados nesta ordem, isto é, A em primeiro lugar, B em segundo lugar e C em terceiro lugar. Agora, vamos reordenar esses elementos, de modo que nenhum deles retorne à sua posição original.

Como o elemento A estava em primeiro lugar, ele poderá ocupar o 2º ou o 3º lugar:

- **A em 2º lugar: __ A __**
  - Como o elemento **C** estava em 3º lugar originalmente, ele terá que ocupar o **1º lugar**
  - Assim, resta a **1ª posição** para o elemento **B**

  Possível ordenação: C A B

- **A em 3º lugar: __ __ A**
  - Como o elemento **B** estava em 2º lugar originalmente, ele terá que ocupar o **1º lugar**
  - Assim, resta a **2ª posição** para o elemento **C**

  Possível ordenação: B C A

Portanto, há **2 possibilidades** de permutação caótica para esse exemplo.

Para calcular o número de possibilidades em uma permutação caótica (ou desarranjo) de $\boldsymbol{n}$ elementos, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{D_n} = \boldsymbol{n}! \times \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}!} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}!} + \cdots + \frac{(\mathbf{-1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!}\right]$$

Calma! Vamos juntos tentar digerir essa fórmula.

Observe que os denominadores das frações são **fatoriais** de 0 até $\boldsymbol{n}$ (total de elementos) e que os sinais das frações vão se alternando: quando o denominador é o fatorial de um número **par**, o sinal é **positivo**, quando o denominador é o fatorial de um número **ímpar**, o sinal é **negativo**.

Como não sabemos se $\boldsymbol{n}$ é par ou ímpar, utilizamos a expressão $(-1)^n$**.** Assim, quando $\boldsymbol{n}$ é par, $(-1)^n = +1$, e o sinal da fração é positivo; quando $\boldsymbol{n}$ é ímpar, $(-1)^n = -1$, e o sinal da fração é negativo. Em outras palavras, não precisamos calcular uma função exponencial, apenas nos atentar para o sinal de n.

Ademais, considerando que 0! = 1 e que 1! = 1, os resultados da primeira e da segunda fração são:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}!} = \mathbf{1}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!} = \mathbf{1}$$

Como o sinal da primeira fração é positivo e o sinal da segunda é negativo, essas frações se **anulam** (1 – 1 = 0), logo, podemos retirá-las da fórmula:

$$\boldsymbol{D_n} = \boldsymbol{n}! \times \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}!} + \cdots + \frac{(\mathbf{-1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!}\right]$$

No nosso exemplo, tivemos n = 3, portanto:

$$D_3 = 3! \times \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}!}\right] = \frac{3!}{2!} - \frac{3!}{3!} = 3 - 1 = 2$$

Que foi o resultado que obtivemos anteriormente.

(CESPE/2014 – TER-GO – *Adaptada*) As prestações de contas das campanhas dos 3 candidatos a governador de determinado estado foram analisadas por 3 servidores do TRE desse estado. Considerando que um servidor deve analisar exatamente prestação de contas e que, por coincidência, cada um dos 3 candidatos é parente de um dos 3 servidores, julgue o item que se segue.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuírem as prestações de contas entre os 3 servidores de modo que nenhum deles analise as contas de um parente é inferior a 5.

Comentários:

O enunciado informa que há 3 servidores que irão analisar as contas de 3 candidatos e que cada candidato é parente de um servidor:

Candidato	A	B	C
Servidor	a	b	c

Para que nenhum candidato seja avaliado pelo seu parente, devemos reordenar os candidatos de modo que nenhum deles retorne à posição original, indicada acima. Assim, temos uma permutação caótica (ou desarranjo) de 3 elementos.

Como há poucos elementos, podemos contar as possibilidades, como fizemos anteriormente:

- O candidato A pode ser analisado pelo servidor b:

Candidato		A	
Servidor	a	b	c

- Nessa situação, o candidato C terá que ser analisado pelo servidor a;
- E restará o servidor c para o candidato B, resultando na seguinte possibilidade:

Candidato	C	A	B
Servidor	a	b	c

- O candidato A pode ser analisado pelo servidor c:

Candidato			A
Servidor	a	b	c

- Nessa situação, o candidato B terá que ser analisado pelo servidor a;
- E restará o servidor b para o candidato C, resultando na seguinte possibilidade:

Candidato	B	C	A
Servidor	a	b	c

Portanto, há 2 possibilidades.

Alternativamente, podemos aplicar a fórmula de desarranjo que aprendemos:

$$D_n = n! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

$$D_4 = 3! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right] = \frac{3!}{2!} - \frac{3!}{3!} = 3 - 1 = 2$$

Logo, o número de maneiras é inferior a 5.

Resposta: Certo.

(FCC/2019 – Prefeitura de Recife/PE) Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação.

a) de 4 maneiras diferentes.

b) de 24 maneiras diferentes.

c) de 9 maneiras diferentes.

d) de 6 maneiras diferentes.

e) de 12 maneiras diferentes.

Comentários:

Novamente, temos uma permutação caótica (ou desarranjo), mas agora com 4 elementos. Por haver uma maior quantidade de elementos, vamos direto para a fórmula:

$$D_n = n! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

$$D_4 = 4! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 4 \times 3 - 4 + 1 = 9$$

Gabarito: C

ARRANJO E COMBINAÇÃO

As técnicas que veremos nesta seção (arranjo e combinação) trabalham com a **seleção** de um **subconjunto** dos elementos. A **ordem** dos elementos selecionados será **relevante** para o **arranjo**, mas **não** para a **combinação**. Em outras palavras, selecionar os elementos A e B ou os elementos B e A são possibilidades **distintas** para o **arranjo**, porém **equivalentes** para a **combinação**.

Arranjo Simples

O arranjo de um conjunto finito de elementos é um **subconjunto** desses elementos, de tal maneira que a sua **ordenação seja relevante**. Por exemplo, em um sorteio, em que o primeiro sorteado ganha um carro, e o segundo sorteado ganha uma bicicleta, a ordem, com certeza, será relevante. Em outras palavras, o cenário em que Ana é sorteada primeiro e Beto é sorteado segundo será diferente daquele em que Beto é sorteado primeiro e Ana é sorteada segundo.

Suponha que existam 6 pessoas em um sorteio, em que 3 delas serão sorteadas, não sendo possível sortear a mesma pessoa mais de uma vez. Considerando a ordem relevante, de quantas formas 3 pessoas poderão ser sorteadas?

Como a ordem importa, vamos sortear uma pessoa por vez, preenchendo os seguintes **espaços** com o número de possibilidades de cada sorteio:

$$\underset{1}{\underline{\qquad}} \quad \underset{2}{\underline{\qquad}} \quad \underset{3}{\underline{\qquad}}$$

Havendo 6 pessoas no total, há 6 possibilidades para sortearmos a primeira pessoa. Assim, restarão 5 pessoas para o segundo sorteio. Em seguida, haverá 4 possibilidades para o terceiro e último sorteio:

$$\underset{1}{\underline{\quad 6 \quad}} \quad \underset{2}{\underline{\quad 5 \quad}} \quad \underset{3}{\underline{\quad 4 \quad}}$$

Como ocorrerão os três sorteios, pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento. Dessa forma, o resultado desse arranjo é:

$$6 \times 5 \times 4$$

E se houvesse 10 pessoas para 4 sorteios?

Para o primeiro sorteio, haveria 10 possibilidades; para o segundo, 9 possibilidades; para o terceiro, 8 possibilidades; e para o quarto, 7 possibilidades:

10 x 9 x 8 x 7

Parece um pouco a fórmula do fatorial, certo? Na verdade, é o início do fatorial do total de $\boldsymbol{n}$ elementos, "estancado" após $\boldsymbol{k}$ fatores, sendo $\boldsymbol{k}$ o número de **elementos sorteados**.

E como fazemos para "estancar" um fatorial? **Dividindo por um fatorial menor**!

No caso de $\boldsymbol{k = 4}$ sorteios para um conjunto de $\boldsymbol{n = 10}$ pessoas, fazemos:

$$\frac{\mathbf{10}!}{(\mathbf{10}-\mathbf{4})!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$$

> Para o caso geral de um arranjo **sem reposição** de $\boldsymbol{k}$ elementos, em um conjunto de $\boldsymbol{n}$ elementos distintos, temos:
>
> $$\boldsymbol{A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$
>
> Outra notação possível para o arranjo é A_n^k.

Por exemplo, o número de maneiras de sortear 5 pessoas, dentre um total de 8, para prêmios **distintos** corresponde ao **arranjo** de 5 elementos, dentre 8:

$$\boldsymbol{A_{8,5}} = \frac{\mathbf{8}!}{(\mathbf{8}-\mathbf{5})!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6.720$$

Nem sempre a **importância da ordem** da seleção será fácil de visualizar. Vamos supor que, dentre um grupo de 10 funcionários de uma empresa, tivermos que selecionar **1 supervisor**, **1 coordenador** e **1 técnico**. Nesse caso, selecionar um funcionário como supervisor é **diferente** de selecionar esse mesmo funcionário como coordenador ou como técnico.

Imagine que a **seleção** desses cargos ocorre em uma **sequência**, por exemplo, primeiro supervisor, depois coordenador e depois técnico. Assim, há diferença entre ser chamado primeiro, segundo ou terceiro. Logo, a **ordem da seleção** é, de fato, **importante**, motivo pelo temos um **arranjo**.

FIQUE ATENTO!

A fórmula de arranjo que acabamos de ver serve para casos **sem reposição**, ou seja, quando um mesmo elemento **não** puder ser selecionado **mais de uma vez**.

Caso haja reposição, o **número de elementos disponíveis** para cada sorteio é sempre o **mesmo**. Por exemplo, em uma seleção, cuja ordem importe, de 3 elementos, dentre 6 elementos disponíveis no total, **com reposição**, o número de possibilidades é:

$$6 \times 6 \times 6 = 6^3$$

De modo geral, o arranjo **com reposição** (ou **repetição**) de k elementos dentre n elementos no total é dado por:

$$A_{n,k} = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{k \text{ vezes}} = n^k$$

HORA DE PRATICAR!

(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Na bilheteria de um teatro há apenas 5 ingressos à venda para a seção de uma peça. Se 4 amigos comprarem ingressos para essa seção, então o número total de posições distintas em que esses amigos poderão se acomodar no teatro é

a) 120.

b) 80.

c) 60.

d) 20.

e) 5.

Comentários:

Temos uma seleção de 4 lugares, dentre 5 disponíveis, com importância de ordem, pois cada lugar é distinto do outro. Assim, temos o arranjo de 4 elementos, dentre 5:

$$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: A.

(VUNESP/2018 – PM/SP) Utilizando-se os algarismos 2, 3, 5, 6, 7 e 9, a quantidade de números múltiplos de 5 e que tenham três algarismos distintos que podem ser formados é

a) 25.

b) 20.

c) 15.

d) 10.

Comentários:

Para que o número formado pelos 6 algarismos indicados no enunciado seja múltiplo de 5, é necessário que o algarismo 5 seja o último algarismo. Assim, os diferentes números que podem ser formados com 3 algarismos correspondem a um arranjo de 2 elementos, dentre 5:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Gabarito: B.

(CESPE 2019/COGE-CE) Em determinado órgão, sete servidores foram designados para implantar novo programa de atendimento ao público. Um desses servidores será o coordenador do programa, outro será o subcoordenador, e os demais serão agentes operacionais.

Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de distribuir esses sete servidores nessas funções é igual a

a) 21.

b) 42.

c) 256.

d) 862.

e) 5.040.

Comentários:

Nessa questão, devemos definir o número de maneiras distintas de distribuir 7 servidores em funções distintas: 1 será coordenador, 1 será subcoordenador e os demais serão agentes. Note que, após a definição do coordenador e do subcoordenador, os que **sobrarem** serão **necessariamente** agentes. Por isso, não precisamos nos preocupar com eles, apenas com o **coordenador** o **subcoordenador**.

Para a escolha do coordenador, há 7 servidores, ou seja, 7 possibilidades:

7	

Após a escolha do coordenador, restarão 6 possibilidades para o subcoordenador:

7	6

Como devemos escolher o coordenador E o subcoordenador, devemos multiplicar as possibilidades (princípio multiplicativo):

Número de Possibilidades = 7 x 6 = 42

Alternativamente, poderia ser feito o arranjo de 2 elementos, dentre 7:

$$A_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

Gabarito: B

(CESPE 2020/TJ-PA) Em um sistema de acesso a uma rede de computadores, os usuários devem cadastrar uma senha de 6 dígitos, que deve ser formada da seguinte maneira:

• os 2 primeiros dígitos devem ser letras minúsculas distintas, escolhidas entre as 26 letras do alfabeto;

• os demais 4 dígitos da senha devem ser números inteiros entre 0 e 9, admitindo-se repetição.

Nessa situação, a quantidade de senhas diferentes que podem ser formadas é igual a

a) 3.674.

b) 5.690.

c) 1.965.600.

d) 3.276.000.

e) 6.500.000.

Comentários:

Nessa questão, temos os dois tipos de arranjo, com e sem reposição. Isso porque as letras devem ser distintas (não podem repetir) e os números podem ser repetir.

Vamos representar a senha de 6 dígitos por 6 espaços:

Os dois primeiros dígitos admitem as 26 letras do alfabeto, sem repetição. Logo, temos 26 possibilidades para o primeiro espaço e 25 possibilidades para o segundo espaço (uma vez que a letra escolhida para o primeiro espaço não pode se repetir):

26	25				

Os demais 4 dígitos admitem os 10 números (de 0 a 9), podendo haver repetição. Logo, há 10 possibilidades para cada espaço:

26	25	10	10	10	10

Como a senha é formada por todos os 6 dígitos, então devemos multiplicar as possibilidades (princípio multiplicativo):

Número de Senhas Possíveis = 26 x 25 x 10 x 10 x 10 x 10 = 6.500.000

Gabarito: E

Combinação Simples

Assim como no caso do arranjo, a combinação é uma **seleção** de elementos de um conjunto finito. Entretanto, para a combinação, a **ordem não importa**. Por exemplo, em um sorteio de participantes para um **grupo** de estudo, a ordem do sorteio de cada participante é irrelevante.

Nessa situação, algumas possibilidades identificadas no **arranjo** são **equivalentes**. Por exemplo, suponha que, de 6 pessoas, entre elas Ana, Beto e Caio, serão sorteadas 3. Se os prêmios para os sorteados forem **distintos** (isto é, se a ordem do sorteio **importar**), então as seguintes possibilidades são possibilidades **distintas**:

i) Ana, Beto, Caio   ii) Ana, Caio, Beto   iii) Beto, Ana, Caio

iv) Beto, Caio, Ana   v) Caio, Ana, Beto   vi) Caio, Beto, Ana

Porém, se os sorteados tiverem a mesma função dentro de um grupo (isto é, se a ordem do sorteio **não importar**), então todas essas possibilidades correspondem a **um mesmo resultado**. Consequentemente, a **combinação** de determinados elementos resulta em um **número menor do que o arranjo** dos mesmos elementos.

- Menor, quanto?

Bem, todas as possibilidades de sorteio das **mesmas pessoas**, em que elas apenas **mudam de lugar**, são consideradas o **mesmo resultado**. Logo, precisamos **dividir** as possibilidades do arranjo pelo número de possibilidades em que os elementos selecionados **trocam de posição**, isto é, pela **permutação dos elementos selecionados**!

No caso de um sorteio de 3 pessoas, dividimos **o número de possibilidades do arranjo por P_3**:

$$C_{6,3} = \frac{A_{6,3}}{P_3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!}$$

De maneira geral, a combinação **sem reposição** de k elementos, de um total de n elementos, é dada por:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Outras notações comuns para a combinação são C_n^k ou $\binom{n}{k}$.

(FGV/2019 – Pref. Angra dos Reis/RJ) Maria possui em casa quatro tipos de frutas: banana, mamão, abacate e manga. Ela decidiu fazer uma vitamina com duas dessas frutas, batendo-as juntas com leite no liquidificador. O número de vitaminas diferentes que Maria poderá fazer é

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

e) 12.

Comentários:

O número de vitaminas diferentes corresponde ao número de maneiras diferentes de Maria escolher 2, das 4 frutas, sem que a ordem importe, logo, temos uma combinação de 2 elementos, dentre 4:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4!}{2! \times 2} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Gabarito: D

(FGV/2022 – PC-RJ) Do grupo dos 6 novos policiais de uma delegacia, 2 deles serão escolhidos para um treinamento especial. O número de pares diferentes de policiais que podem ser enviados para o treinamento especial é:

a) 10

b) 12.

c) 15.

d) 16.

e) 18.

Comentários:

O número de pares de policiais que podem ser escolhidos, dentre 6, corresponde ao número de maneiras de escolher 2 elementos, dentre 6. Como a ordem dos escolhidos não importa, temos a combinação de 2 elementos dentre 6:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$$

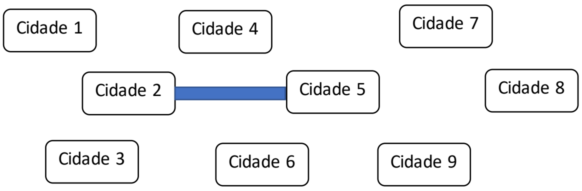
$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Gabarito: C

(CESPE 2018/BNB) Julgue o próximo item, relativo a análise combinatória e probabilidade. Se 9 cidades forem interligadas por rodovias, de forma que entre quaisquer duas dessas cidades haja apenas uma rodovia interligando-as e essa rodovia não passe por nenhuma outra cidade, então essa malha viária será composta de 72 rodovias.

Comentários:

A ilustração abaixo representa as 9 cidades e 1 das rodovias possíveis.



Considerando que há exatamente 1 rodovia entre cada 2 cidades, então o número de rodovias é igual ao número de maneiras de selecionar 2 cidades, sem importância de ordem. Considerando que há 9 cidades, o número de maneiras de escolher 2 cidades é:

$$C_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)! \times 2!} = \frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Gabarito: Errado.

É comum que a questão imponha restrições às possibilidades de seleção, da forma "**pelo menos um**". Por exemplo, suponha um conjunto de 5 mulheres e de 4 homens. Quantos grupos distintos de 3 pessoas podem ser formados com **pelo menos 1** mulher?

Você pode resolver esse tipo de questão calculando **todas as possibilidades** de grupos, **desconsiderando-se** a restrição imposta, e, em seguida, **subtrair** o número de possibilidades que não atendem à restrição. Para o nosso exemplo, o número de maneiras possíveis de selecionar 3 pessoas, de um total de 4 + 5 = 9 pessoas, é:

$$C_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

Desses, **não** servem as possibilidades em que **apenas** homens são selecionados. A quantidade de maneiras possíveis de selecionar 3 homens, sabendo que há 4 homens, é:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 4$$

Logo, o número de maneiras de formar grupos de 3 pessoas com pelo menos 1 mulher é:

84 – 4 = 80

Casos Particulares de Combinação

Nessa seção, veremos alguns casos particulares da combinação simples. Você **não** precisa decorá-los, mas conhecê-los pode ajudar a resolver alguns problemas com mais **rapidez**.

i) Combinação de n elementos em n elementos ($C_{n,n}$).

De quantas formas é possível selecionar 5 jogadores dentre 5 jogadores? Só **uma**, certo? Selecionando todos os jogadores! De todo modo, vamos às contas:

$$C_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{(0)!\,n!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_{n,n} = 1}}$$

ii) Combinação de 0 elemento em n elementos ($C_{n,0}$).

De quantas formas é possível selecionar 0 jogador dentre 5? Só **uma** também, certo? Não selecionando jogador algum! Vejamos como ficam as contas:

$$C_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n! \times 1} = 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_{n,0} = 1}}$$

iii) Combinação de 1 elemento em n elementos ($C_{n,1}$).

Considerando 5 jogadores (A, B, C, D, E), quantas são as possibilidades de selecionar 1 jogador? 5, certo? Podemos selecionar A, ou B, ou C, ou D ou E:

$$C_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n}{1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_{n,1} = n}}$$

iv) Combinação de $n-1$ elementos em n elementos ($C_{n,n-1}$).

Considerando os 5 jogadores (A, B, C, D, E), quantas são as possibilidades de selecionar 4 jogadores? Podemos responder a essa pergunta, pensando em quem fica de fora em cada seleção. Ou seja, podemos selecionar todos exceto A; ou todos exceto B; ou todos exceto C; ou todos exceto D; ou todos exceto E. Assim, temos 5 possibilidades!

$$C_{n,n-1} = \frac{n!}{[n-(n-1)]!\,(n-1)!} = \frac{n}{[n-n+1]!} = \frac{n}{1}$$

$$\boldsymbol{C_{n,n-1} = n}$$

v) A combinação de k elementos em n é igual à combinação de $n-k$ em n ($C_{n,k} = C_{n,n-k}$).

No item anterior, construímos o raciocínio de que selecionar 4 jogadores dentre 5 é o mesmo que deixar 1 jogador. Além disso, deixar 1 jogador é o mesmo que selecionar 1 jogador. Em outras palavras, de um total de 5 jogadores, selecionar 4 jogadores é o mesmo que selecionar 1 jogador.

De maneira geral, de um total de n elementos, selecionar k elementos é o mesmo que selecionar $n-k$ elementos:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{n,n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!\,(n-k)!} = \frac{n!}{[n-n+k]!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\boldsymbol{C_{n,k} = C_{n,n-k}}$$

Vamos a mais um "facilitador de contas":

O **somatório** de **todas** as **combinações possíveis** de n **elementos** é $\boldsymbol{2^n}$

$$\boldsymbol{C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n-1} + C_{n,0} = 2^n}$$

Ou seja, o somatório de todas as possibilidades de combinações distintas de um total de n elementos, ou seja, a combinação com 0 elemento, as combinações com 1 elemento, combinações com 2 elementos, etc., até a combinação com n elementos, é igual a 2^n.

(2019 – Prefeitura de Colômbia/SP) Em uma pequena escola de música os estudantes são especializados em instrumentos conforme tabela a seguir:

Instrumentos	Número de estudantes
Guitarra	6
Contrabaixo	2
Bateria	4
Teclado	3

O número de bandas diferentes que poderão ser formadas com os estudantes desta escola de música com a seguinte constituição: 2 guitarristas, 1 contrabaixista, 1 baterista e 1 tecladista está compreendido entre:

a) 1 e 300

b) 301 e 400

c) 401 e 600

d) 601 e 800

Comentários:

Para selecionar 2 guitarristas, dentre 6, temos:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!\,2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Para as demais combinações, basta conhecer o caso especial $C_{n,1} = n$.

Para selecionar contrabaixistas, temos n = 2: $C_{2,1} = 2$.

Para selecionar bateristas, temos n = 4: $C_{4,1} = 4$.

Para selecionar tecladistas, temos n = 3: $C_{3,1} = 3$.

Como a banda terá todos esses instrumentistas, pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar todas essas possibilidades:

$$C_{guitarristas} \times C_{contrabaixistas} \times C_{bateristas} \times C_{tecladistas}$$

15 x 2 x 4 x 3 = 360

Gabarito: B

(CESPE 2018/PF) Para cumprimento de um mandado de busca e apreensão serão designados um delegado, 3 agentes (para a segurança da equipe na operação) e um escrivão. O efetivo do órgão que fará a operação conta com 4 delegados, entre eles o delegado Fonseca; 12 agentes, entre eles o agente Paulo; e 6 escrivães, entre eles o escrivão Estêvão.

Em relação a essa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Considerando todo o efetivo do órgão responsável pela operação, há mais de 5.000 maneiras distintas de se formar uma equipe para dar cumprimento ao mandado.

Comentários:

A questão pede o número de maneiras de escolher 1 delegado (dentre 4), 3 agentes (dentre 12) e 1 escrivão (dentre 6):

- O número de formas de escolher 1 delegado, dentre 4, é igual a 4 – caso especial $C_{4,1} = 4$;

- O número de formas de escolher 3 agentes, dentre 12, é igual a:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{9!\,3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 2 \times 11 \times 10 = 220$$

- O número de formas de escolher 1 escrivão, dentre 6, é igual a 6 – caso especial $C_{6,1} = 6$.

Para formar toda a equipe, multiplicamos esses resultado (princípio multiplicativo):

Número de possibilidades = 4 x 220 x 6 = 5280

Logo, há mais de 5.000 maneiras de formar a equipe.

Gabarito: Certo.

(FCC/2018 – Analista Judiciário do TRT 15ª Região) Dez pastas diferentes devem ser guardadas em duas caixas diferentes. Se a única regra é que cada uma das caixas contenha pelo menos uma pasta, então a quantidade de maneiras distintas como se pode guardar essas pastas nas caixas é

a) 510

b) 1.022

c) 126.

d) 2.048

e) 256

Comentários:

Como a ordem dentro das caixas não importa, utilizaremos combinação. Além disso, é importante notar que ao selecionarmos as pastas para uma das caixas, estaremos definindo as pastas que serão guardadas na outra caixa. Por isso, podemos pensar na combinação para **uma das caixas** apenas.

Assim, podemos selecionar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 pastas para a primeira caixa. Não podemos selecionar 10 pastas porque não sobraria pastas para a segunda caixa, o que não é permitido (cada caixa deve conter pelo menos 1 pasta). Pelo mesmo motivo, não podemos selecionar 0 pasta para a primeira caixa.

Devemos, portanto, calcular as possibilidades de combinação $C_{10,1}$, $C_{10,2}$, $C_{10,3}$, $C_{10,4}$, $C_{10,5}$, $C_{10,6}$, $C_{10,7}$, $C_{10,8}$ e $C_{10,9}$. Esses eventos são mutuamente exclusivos (selecionamos 1 OU 2 OU 3 OU ... OU 9 pastas para a primeira caixa). Portanto, as possibilidades desses eventos devem ser **somadas** **(princípio aditivo)**.

Para facilitar as contas, utilizaremos a propriedade de combinação que vimos:

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n-1} + C_{n,n} = 2^n$$

$$C_{10,0} + C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} + C_{10,10} = 2^{10}$$

Porém, não é exatamente essa soma que estamos buscando, pois não temos nem $C_{10,0}$ nem $C_{10,10}$. Por isso, devemos subtrair os valores dessas combinações do resultado:

$$C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} = 2^{10} - C_{10,0} - C_{10,10}$$

Sabemos, ainda, que $C_{n,0} = 1$, logo, $C_{10,0} = 1$; e $C_{n,n} = 1$, logo, $C_{10,10} = 1$:

$$C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} = 1024 - 1 - 1 = 1022$$

Gabarito: B

Combinação Completa

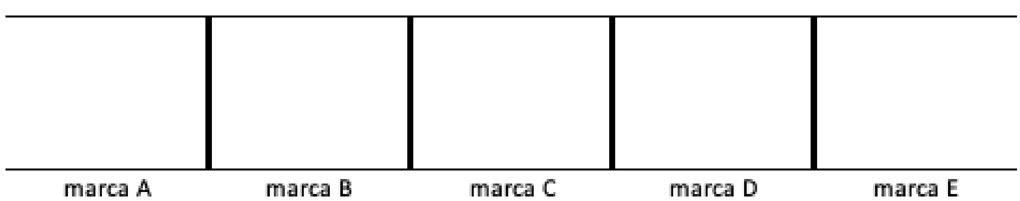
Os problemas de combinação completa (ou combinação com repetição) envolvem um conjunto de **n tipos** de elementos **diferentes**, dos quais serão escolhidos **k** elementos **iguais ou diferentes**. Uma boa forma de pensar a combinação completa é imaginar que será selecionado um número **k** de **objetos**, **iguais ou diferentes**, dentre **n tipos diferentes**.

Por exemplo, escolher k = 3 potes de sorvete havendo um total de n = 5 marcas distintas (os potes podem ser de uma mesma marca ou de marcas distintas).

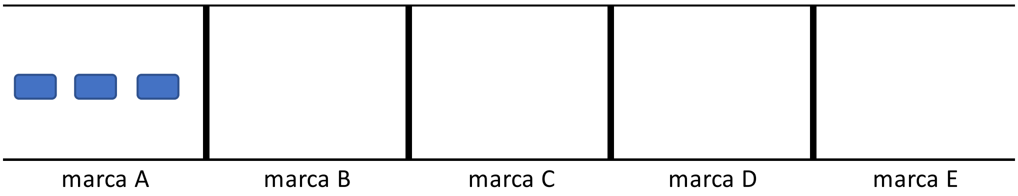
Observe que essa situação é diferente da escolha de 3 potes de sorvete dentre 5 potes, o que seria a combinação simples de 3 elementos, dentre 5 ($C_{5,3}$ = 10). Essa também seria a combinação para escolher 3 marcas dentre 5 marcas.

Porém, nesse caso temos que escolher 3 **potes** de 5 **marcas**. O número de possibilidades é muito **maior** do que a combinação simples de 3 dentre 5 elementos.

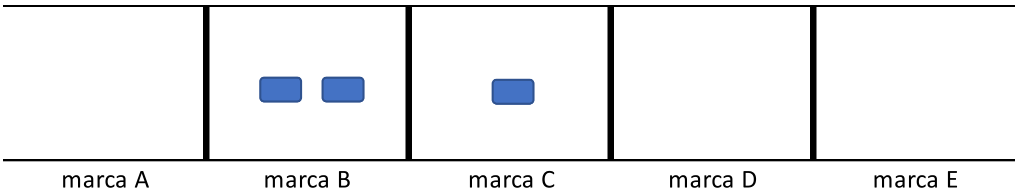
Para calcular todas as possibilidades, vamos imaginar que cada marca de sorvete esteja em uma **seção** separada do congelador:



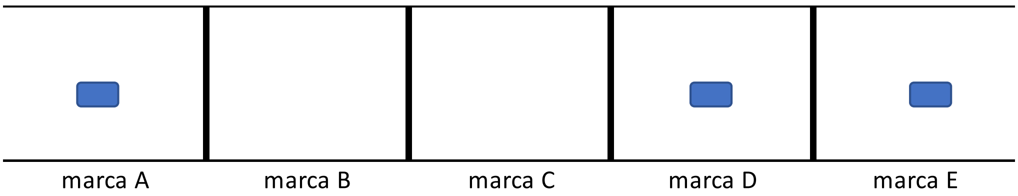
Podemos escolher, por exemplo, 3 potes da marca A.



Ou, por exemplo, 2 potes da marca B e 1 da marca C:



Ou, ainda, 1 da marca A, outro da D e outro da E, por exemplo:



Repare que podemos considerar esse problema como **permutação** dos **objetos** (potes de sorvetes) e das **divisórias** que separam as diferentes **marcas**.

Nesse caso, temos 3 potes de sorvete e 4 divisórias – o **número de divisórias** é sempre o **número de marcas menos 1**. Dessa forma, temos a permutação de 7 elementos, sendo 3 repetições de um mesmo elementos (potes) e 4 repetições de outro elemento (divisórias).

Portanto, a **combinação completa** de 3 objetos de 5 marcas, indicada por CR_5^3, é igual à **permutação** de 7 elementos, com repetição de 3 e 4 elementos:

$$CR_5^3 = P_7^{3,4} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$$

De maneira geral, a combinação de $\boldsymbol{p}$ **objetos** de $\boldsymbol{n}$ **tipos** (ou marcas), equivale à permutação de $\boldsymbol{n-1}$ **divisórias** com $\boldsymbol{p}$ **objetos**, ou seja, a permutação de $\boldsymbol{n-1+p}$ elementos, com repetição de $\boldsymbol{n-1}$ e $\boldsymbol{p}$ elementos:

$$\boldsymbol{CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}}$$

Também devemos utilizar a **combinação completa** em problemas de **distribuição** de objetos entre pessoas (ou lugares). Por exemplo, a distribuição de 3 cestas básicas para 5 famílias segue o mesmo raciocínio.

INDO MAIS FUNDO!

A **combinação completa** de p **objetos** de n **tipos** equivale à **combinação simples** de p **elementos**, dentre $n - 1 + p$ **elementos disponíveis**:

$$CR_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!\times p!} = C_{n-1+p,p}$$

No nosso exemplo, a combinação completa de p = 3 potes de sorvete, havendo um total de n = 5 marcas distintas, corresponde à combinação de 3 elementos, dentre 5 – 1 + 3 = 8 elementos no total.

HORA DE PRATICAR!

(FGV/2018 – ALE-RO) Helena entra em uma sorveteria que oferece sorvetes de 8 sabores diferentes. Helena deseja escolher uma casquinha com duas bolas de sorvete não necessariamente de sabores diferentes. A ordem em que as bolas forem colocadas na casquinha não fará a escolha de Helena ser diferente.

O número de maneiras de Helena escolher sua casquinha é

a) 64.

b) 56.

c) 36.

d) 28.

e) 16.

Comentários:

Nessa questão, temos um exemplo de combinação com reposição, também chamada de combinação completa. Trata-se de uma combinação porque a ordem não importa, como o próprio enunciado esclareceu. E há reposição pelo fato de Helena poder escolher sabores não necessariamente diferentes. A fórmula da combinação completa é (se preferir, associe que é uma permutação com repetição de p objetos e n – 1 divisórias):

$$CR_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!\times p!}$$

Sabendo que há 8 sabores disponíveis (n = 8) e que Helena irá escolher 2 bolas de sorvete (p = 2):

$$CR_8^2 = C_{8+2-1,2} = \frac{(8+2-1)!}{(8-1)! \times 2!} = \frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Gabarito: C

(2019 – Conselho Regional de Medicina/AC) O pai de 3 filhos, com idades diferentes, distribuiu 9 balas idênticas entre eles, de forma que o mais velho recebeu o dobro de balas do caçula e o filho do meio recebeu mais balas que o caçula e menos balas que o mais velho. O filho caçula recebeu X balas e o filho do meio recebeu Y balas.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Se alguém deseja distribuir 9 balas idênticas entre 3 pessoas, sem qualquer critério de distribuição, com cada uma delas recebendo pelo menos uma bala, então existem 28 maneiras de se fazer a distribuição.

Comentários:

Esse também é um caso de combinação completa, em que as balas correspondem aos objetos e as pessoas correspondem às seções. Porém, o problema apontou para uma restrição: todas as pessoas receberão pelo menos uma bala. Após distribuir uma bala por pessoa, totalizando 3 balas, sobrarão 9 – 3 = 6 balas a serem distribuídas, sem critério, para as 3 pessoas. Portanto, temos a combinação completa de k = 6 objetos para n = 3 pessoas, ou seja, n – 1 = 2 divisórias:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

$$CR_3^6 = P_8^{2,6} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

Gabarito: Certo

(CESPE 2018/SEFAZ-RS) Se 7 kg de feijão forem distribuídos para até quatro famílias, de modo que cada uma delas receba um número inteiro de quilos, então, nesse caso, a quantidade de maneiras distintas de se distribuírem esses 7 kg de feijão para essas famílias será igual a

a) 30.

b) 120.

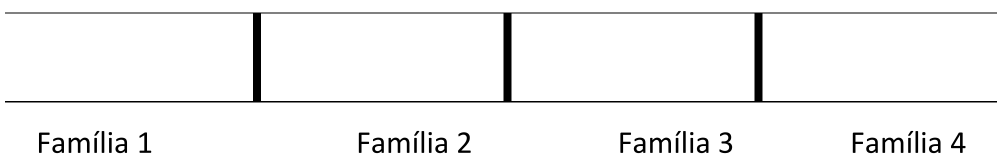
c) 330.

d) 820.

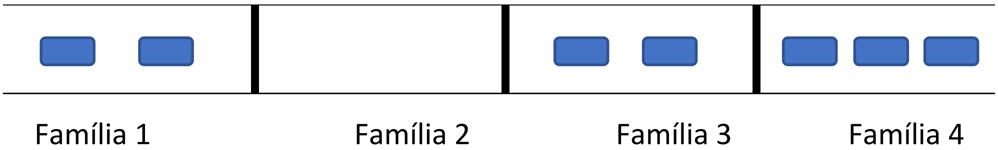
e) 1.320.

Comentários:

Podemos representar os quilos de feijão como  e as 4 famílias como seções separadas por uma barra:



Podemos distribuir os 7 quilos de feijão da seguinte forma, por exemplo:



O enunciado permite que alguma(s) família(s) fique sem quilos de feijão porque menciona que a distribuição será para "até" 4 famílias. Assim, há 7 quilos de feijão (p = 7) a serem distribuídos para 4 famílias (n = 4).

Essa distribuição pode ser vista como a permutação dos 7  e das 3 barras que separam as famílias, isto é, uma permutação de 10 elementos, com repetição de 7 e de 3 elementos:

$$CR_4^7 = P_{10}^{3,7} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

Gabarito: B.

(FGV/2021 – Pref. Paulínia) Eva tem 9 maçãs indistinguíveis e deseja distribuí-las a 3 amigos de forma que cada um deles fique com, ao menos, 2 maçãs. O número de maneiras distintas de Eva distribuir as maçãs é

a) 12

b) 10

c) 9

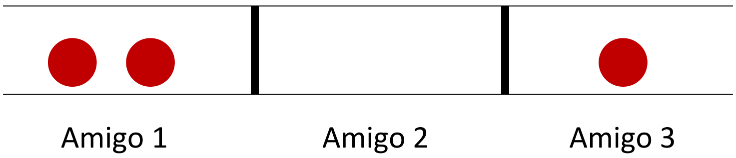
d) 8

e) 6

Comentários:

Essa questão trabalha com combinação completa, em que precisamos distribuir 9 maçãs para 3 amigos. Primeiro, distribuímos as maçãs obrigatórias, quais sejam, 2 para cada amigo. Após a distribuição das 6 maçãs, restarão 3 a serem distribuídas livremente.

A figura a seguir ilustra uma forma de distribuir as 3 maçãs:



A combinação completa, entre $n = 3$ amigos e $p = 3$ objetos, pode ser vista como a permutação dos 3 objetos e das 2 barras que separam os amigos, que corresponde a permutação de 5 elementos no total, com repetição de 3 e de 2 elementos:

$$CR_3^3 = P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Gabarito: B

Número de Soluções Inteiras de Equações

Os problemas de combinação completa podem ser analisados de **outra perspectiva**.

Vamos considerar o mesmo exemplo da compra de 3 potes de sorvete, dentre 5 marcas distintas. Podemos representá-lo por uma **equação**, em que x_A representa a quantidade de potes de sorvete adquiridos da marca A; x_B representa a quantidade de potes de sorvete da marca B; x_C, a quantidade de potes da marca C; x_D, a quantidade de potes da marca D; e x_E, a quantidade de potes da marca E.

Sabendo que o total de potes de sorvete adquiridos é igual a 3, então a soma dos potes adquiridos de todas as marcas é igual a 3:

$$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 3$$

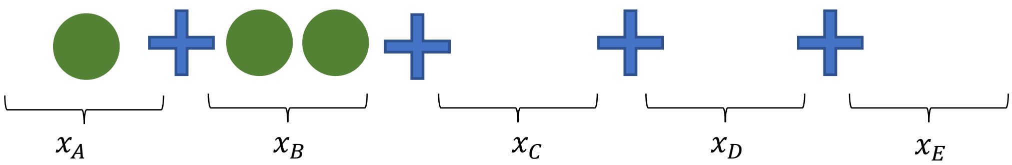
Já sabemos que o número de maneiras de escolher os 3 potes de sorvete, nessa situação equivale à **combinação completa** de p = 3 objetos, em n = 5 seções.

- E o que isso tem a ver com a equação?

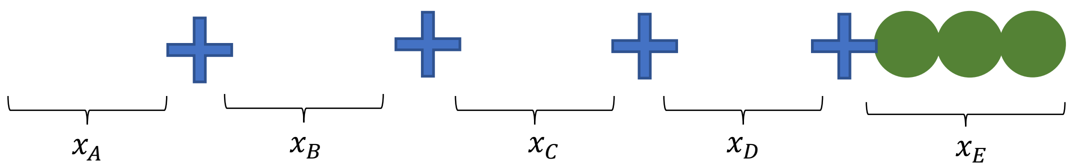
Bem, os valores de x representam as quantidades de potes adquiridos de cada uma das 5 marcas, de modo que o total de potes seja igual a 3. Ou seja, o número de maneiras de escolher os 3 potes de sorvete corresponde ao número de maneiras de encontrar **os valores de x que resolvem essa equação**.

Por isso, dizemos que o **número de soluções possíveis** para essa equação é uma **combinação completa** de p = 3 objetos, em n = 5 seções.

Isso porque podemos representar as **3** unidades (**somatório da equação**) como entre os $n - 1 = 4$ símbolos de da equação. Nessa representação, os $n = 5$ espaços deixados pelos símbolos de correspondem aos respectivos valores de x. Um exemplo dessa representação é:



Essa ilustração representa $x_A = 1, x_B = 2, x_C = 0, \ x_D = 0, \ x_E = 0$. Outra opção seria:



Essa ilustração representa $x_A = 0, x_B = 0, x_C = 0, \ x_D = 0$ e $x_E = 3$.

Ou seja, o número de maneiras de encontrar **os valores de x** (isto é, o números de soluções possíveis para a equação) corresponde a uma permutação de p = 3 com n – 1 = 4 símbolos de

$$CR_5^3 = P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \times 3!}$$

Em outras palavras, a combinação completa CR_5^3 também indica o **número de soluções possíveis** para a equação $x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 3$.

De modo geral, o **número de soluções possíveis** para a equação:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p}$$

é:

$$\boldsymbol{CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p}}$$

O **resultado** da equação corresponde ao número de objetos: $\boldsymbol{p}$

O **número de variáveis** corresponde ao número de seções: $\boldsymbol{n}$

Mais precisamente, a combinação completa CR_n^p indica o **número de soluções inteiras e não-negativas possíveis** para a referida equação.

Por que somente **soluções inteiras e não-negativas**?

Se pudéssemos escolher números **negativos**, poderíamos sempre diminuir uma unidade de uma variável e aumentar uma unidade de outra para manter a soma constante (no nosso exemplo, igual a 3). Ou seja, poderíamos ter $x_A = 4$ e $x_B = -1$ (e as demais variáveis nulas), $x_A = 5$ e $x_B = -2$, $x_A = 6$ e $x_B = -3$, etc. O número de soluções seria **infinita**!

O mesmo vale para números **decimais**. Há **infinitos** números decimais entre quaisquer números inteiros. Por exemplo, entre 2 e 3, há 2,1; 2,11; 2,111; 2,1111;... Portanto, se as incógnitas pudessem assumir quaisquer valores reais, sempre poderíamos aumentar uma incógnita um "pouquinho" e diminuir outra esse mesmo "pouquinho" e manter a soma constante.

Portanto, somente o conjunto das soluções **inteiras** e **não-negativas** da equação é um conjunto **finito**.

FIQUE ATENTO!

Como vimos, são **permitidas** soluções **nulas** para as incógnitas (desde que o somatório seja atendido).

Caso o problema traga alguma situação especial diferente dessa, como exigir que as soluções sejam **positivas** (ou seja, **não** permitir soluções **nulas**), precisamos fazer as adaptações necessárias.

Por exemplo, considere a seguinte equação, em que os valores de x precisam ser **positivos**:

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 6, com\ x > 0$$

Nesse caso, precisamos primeiro distribuir 1 unidade para cada x. Assim, sobrarão 6 – 4 = 2 unidades a serem **livremente** distribuídas, o que pode ser representado pela seguinte equação (em que x **pode** assumir valores **nulos**):

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 2, com\ x \geq 0$$

Sabemos que o número de soluções possíveis para essa equação é:

$$CR_4^2 = P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \times 2!}$$

HORA DE PRATICAR!

(CESPE/2011 – SEDUC/AM) A equação $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} = \mathbf{18}$ possui mais de 200 soluções inteiras e não negativas.

Comentários:

O número de soluções inteiras e não-negativas para essa equação é o número de combinações completas com p = 18 objetos em n = 3 seções, ou seja:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p}$$

$$CR_3^{18} = P_{20}^{2,18} = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$$

O resultado (190) é inferior a 200.

Gabarito: Errado.

(2015 – Prefeitura de Mangaratiba/RJ) Considerando o conjunto universo dos números inteiros não negativos, podemos afirmar que a equação x + y + z – 5 = 0:

a) possui uma única solução.

b) possui infinitas soluções.

c) possui 21 soluções.

d) possui 35 soluções.

e) possui 42 soluções.

Comentários:

Primeiro fazemos o seguinte ajuste na equação:

$$x + y + z = 5$$

O número de soluções inteiras e não-negativas para essa equação é o número de combinações completas com p = 5 objetos em n = 3 seções, ou seja:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p}$$

$$CR_3^5 = P_7^{2,5} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

Gabarito: C.

PARTIÇÕES

O conceito de partição em matemática é bastante similar ao que utilizamos no dia-a-dia. Se vamos partir uma pizza, iremos dividi-la em algumas fatias (não necessariamente iguais). Seja qual for o número ou tamanho das fatias, se juntarmos todas elas (antes de comê-las, é claro!), teremos a pizza completa.

Com a partição em matemática, temos uma situação muito semelhante. A pizza inteira corresponderia a um conjunto de elementos, que seria particionado (fatiado) em alguma quantidade de subconjuntos (fatias), que podem **ser ou não iguais**.

Por exemplo, podemos particionar um grupo de 9 trabalhadores em 3 grupos (um com 5 trabalhadores, outro com 2 trabalhadores e outro com 1). Atente-se que a **soma** dos trabalhadores de todos os grupos (subconjuntos) **equivale ao total** de trabalhadores.

O fato de a soma dos elementos nos grupos ser equivalente ao total de elementos é a característica que **diferencia** as **partições** dos problemas de **combinação** que vimos até agora. Ou seja, é possível resolver problemas de partição com as técnicas de **combinação** que conhecemos. Porém, conhecer o cálculo específico para a partição é importante, tanto para acelerar a resolução do problema quanto para reduzir as chances de erros.

Há dois tipos de partição: a partição ordenada e a partição não-ordenada. Na **partição ordenada**, os **subconjuntos são distintos** (por exemplo, há um subconjunto dos coordenadores, outro dos supervisores e outro dos trabalhadores de uma linha de montagem). Assim, participar do primeiro grupo é **diferente** de participar do segundo ou do terceiro. Portanto, **a ordem entre os grupos importa**.

Na **partição não-ordenada**, os **subconjuntos são iguais** (por exemplo, as equipes formadas terão que fazer um mesmo trabalho). Assim, se um mesmo subconjunto de pessoas é selecionado para o primeiro grupo ou para o segundo grupo, não haverá diferença. Portanto, **a ordem entre os grupo não importa**.

Partição Ordenada

A partição ordenada representa a separação de um conjunto de elementos em **subconjuntos distintos** entre si (de modo que a soma dos elementos dos subconjuntos seja equivalente ao total de elementos do conjunto original). Por exemplo, podemos particionar um conjunto de 10 profissionais entre os subconjuntos de 1 gerente, 2 coordenadores, e 7 trabalhadores de linha de frente.

Como os subconjuntos são **distintos**, ser chamado para o primeiro grupo é diferente de ser chamado para o segundo, terceiro ou quarto grupos. Nesse caso, temos uma partição ordenada, em que a **ordem dos subconjuntos importa**. Mais especificamente, dentro de um mesmo subconjunto, a ordem dos participantes não importa. O que **importa** é a ordem **entre os subconjuntos**.

Vamos resolver esse exemplo com as técnicas de combinação que conhecemos. Podemos começar calculando as possibilidades de se escolher o único gerente (k = 1, n = 10). Esse é um caso especial de combinação $C_{n,1} = n$:

$$C_{10,1} = 10$$

Para a escolha de k = 2 coordenadores, dentre as n = 9 opções que restaram após a escolha do gerente, temos:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{9,2} = \frac{9!}{7!\,2!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Por fim, temos uma única opção para escolher k = 7 trabalhadores, dentre as n = 7 opções que restaram (outro caso especial $C_{n,n} = 1$).

Pelo princípio multiplicativo, temos 10 x 36 x 1 = 360 possibilidades de formar esses três subconjuntos. O resultado seria o mesmo se começássemos por qualquer outro subconjunto.

Esse problema poderia ser resolvido com a seguinte fórmula de partição:

$$\binom{10}{1,2,7} = \frac{10!}{1!\,2!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{2 \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{2} = 10 \times 9 \times 4 = 360$$

Bem mais simples, certo?

Por que esses resultados são iguais? Deseja entender essa "coincidência"?

Então, vamos voltar à resolução do problema por meio das combinações, mas sem os cálculos das fórmulas.

Para a escolha de k = 1 gerente, dentre todas as n = 10 opções, temos:

$$C_{10,1} = \frac{10!}{(10-1)!1!}$$

Para a escolha de k = 2 coordenadores, dentre as n = 10 – 1 opções que sobraram após a escolha do gerente, temos:

$$C_{10-1,2} = \frac{(10-1)!}{(10-1-2)!2!}$$

Para a escolha de k = 7 trabalhadores, dentre as n = 10 – 1 – 2 opções que sobraram após a escolha do gerente e dos coordenadores, temos:

$$C_{10-1-2,7} = \frac{(10-1-2)!}{(10-1-2-7)!7!}$$

Agora, precisamos multiplicar todos esses resultados:

$$C_{10,1} \times C_{10-1,2} \times C_{10-1-2,7}$$

$$= \frac{10!}{(10-1)!1!} \times \frac{(10-1)!}{(10-1-2)!2!} \times \frac{(10-1-2)!}{(10-1-2-7)!7!}$$

Veja que nessa expressão, podemos simplificar $\frac{(10-1)!}{(10-1)!}$ e também $\frac{(10-1-2)!}{(10-1-2)!}$:

$$= \frac{10!}{\cancel{(10-1)!}1!} \times \frac{\cancel{(10-1)!}}{\cancel{(10-1-2)!}2!} \times \frac{\cancel{(10-1-2)!}}{(10-1-2-7)!7!}$$

Além disso, $(10 - 1 - 2 - 7)! = 0! = 1$. Portanto, conforme vimos antes, temos:

$$= \frac{10!}{1!2!7!}$$

No caso geral, com n elementos no total, particionados (com ordenação) em m subconjuntos com $p_1, p_2, \dots, p_m$ elementos cada, temos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!p_2!\dots p_m!}$$

(CESPE/2011 – STF) O colegiado do Supremo Tribunal Federal (STF) é composto por 11 ministros, responsáveis por decisões que repercutem em toda a sociedade brasileira. No julgamento de determinados processos, os ministros votam pela absolvição ou pela condenação dos réus de forma independente uns dos outros. A partir dessas informações e considerando que, em determinado julgamento, a probabilidade de qualquer um dos ministros decidir pela condenação ou pela absolvição do réu seja a mesma, julgue o item seguinte.

Se, no julgamento de determinado réu, 8 ministros votarem pela absolvição e 3 ministros votarem pela condenação, a quantidade de maneiras distintas de se atribuir os votos aos diferentes ministros será inferior a 170.

Comentários:

Temos uma partição de 11 elementos em dois subconjuntos com 8 e 3 elementos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\, p_2! \dots p_m!}$$

$$\binom{11}{8,3} = \frac{11!}{8!\,3!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 3 \times 2} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = 11 \times 5 \times 3 = 165$$

Como 165 é menor do que 170, portanto o item está certo.

Gabarito: Certo

(FCC/2015 – Julgador Administrativo Tributário da SEFAZ/PE) A tabela a seguir mostra a pontuação obtida pelas cinco empresas que participaram da concorrência pública para a construção das dez estações de uma linha de metrô.

Empresa	Pontuação
I	500
II	300
III	200
IV	120
V	80

De acordo com as regras do edital da concorrência, somente as empresas com mais de 150 pontos seriam consideradas aprovadas. Além disso, o edital determinava que as dez estações seriam distribuídas entre as empresas aprovadas proporcionalmente ao número de pontos que cada uma delas obteve. Sabendo que as dez estações são iguais, o número de maneiras diferentes de distribuí-las entre as empresas aprovadas, de acordo com as regras do edital, é igual a

a) 3780.

b) 2520.

c) 7560.

d) 1260.

e) 5040.

Comentários:

Pela regra da pontuação mínima, apenas as empresas I, II e III são aprovadas. As 10 estações serão divididas entre elas proporcionalmente ao número de pontos. Podemos chamar de x a quantidade de estações por ponto, que é constante para todas as empresas. Assim, temos:

$$500x + 300x + 200x = 10$$

$$1000x = 10$$

$$x = 1/100$$

Portanto, cada empresa irá receber 1/100 estação por ponto:

I) A empresa I irá receber: 500 x 1/100 = 5

II) A empresa II irá receber 300 x 1/100 = 3

III) A empresa III irá receber 200 x 1/100 = 2

Agora, vamos calcular o número de possibilidades de distribuição. Podemos calcular as combinações para cada empresa e, em seguida, multiplicar os resultados, tendo em vista o princípio multiplicativo.

Porém, a solução será muito mais rápida se considerarmos que as 10 estações serão particionadas entre as 3 empresas (não sobrará nenhuma estação), com $n = 10$, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$ e $p_3 = 2$.

$$\binom{n}{p_1, p_2, \ldots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_m!}$$

$$\binom{10}{5,3,2} = \frac{10!}{5!\,3!\,2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 2} = 10 \times 9 \times 4 \times 7 = 2520$$

Gabarito: B

Partição Não-Ordenada

A partição não-ordenada representa a separação de um conjunto de elementos em **subconjuntos equivalentes** entre si. Por exemplo, podemos particionar um conjunto de 6 profissionais em 3 duplas (subconjuntos), que deverão realizar um **mesmo trabalho**.

Como os subconjuntos são equivalentes, se duas determinadas pessoas são chamadas para a primeira dupla ou para a segunda, a situação será a **mesma**. Ou seja, a **ordem entre os subconjuntos não importa**.

Repare que a ordem **dentro** do subconjunto **não importa**, como **também não importava** para a **partição ordenada**. A diferença é que, na partição não-ordenada, a ordem **entre** os subconjuntos **também não importa**.

Se esse exemplo de 3 duplas de profissionais, dentre 6, fosse uma partição **ordenada**, teríamos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\, p_2! \dots p_m!}$$

$$\binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 6 \times 5 \times 3 = 90$$

Sendo uma partição **não-ordenada**, então, as possibilidades que se diferenciam apenas pela forma de **reorganizar as duplas** nos diferentes grupos representam **um mesmo resultado**.

Por exemplo, suponha que os 6 profissionais sejam Ana, Beto, Caio, Dedé, Eduardo e Fátima e que as duplas formadas sejam Ana e Beto, Caio e Dedé, Eduardo e Fátima. Em uma **partição ordenada**, em que os grupos são **distintos** entre si, teríamos as seguintes possibilidades **distintas**, com exatamente essas duplas:

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**
1.	Ana e Beto	Caio e Dedé	Eduardo e Fátima
2.	Ana e Beto	Eduardo e Fátima	Caio e Dedé
3.	Caio e Dedé	Ana e Beto	Eduardo e Fátima
4.	Caio e Dedé	Eduardo e Fátima	Ana e Beto
5.	Eduardo e Fátima	Ana e Beto	Caio e Dedé
6.	Eduardo e Fátima	Caio e Dedé	Ana e Beto

Porém, em uma partição não ordenada, em que os grupos são iguais, então todas essas 6 possibilidades representam o mesmo resultado, qual seja, a definição das duplas Ana e Beto, Caio e Dedé, Eduardo e Fátima.

Assim, **uma vez definidas as duplas**, há **6 possibilidades distintas de reordená-las** nos 3 grupos. Assim, para calcular a **permutação não ordenada**, precisamos **dividir** as 90 possibilidades da permutação ordenada por **6**.

$$\frac{90}{6} = 15$$

E por que 6 possibilidades? Porque esse é o número de maneiras de **reordenar** as 3 duplas, ou seja, corresponde à **permutação** dos 3 elementos:

$$\frac{\binom{6}{2,2,2}}{P_3} = \frac{\binom{6}{2,2,2}}{3!}$$

Assim, de maneira geral, na **partição não ordenada**, precisamos dividir o resultado da partição ordenada pelo número de maneiras de **permutar os $\boldsymbol{m}$ grupos**, como indicado abaixo.

$$\frac{\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m}}{P_m} = \frac{\frac{n!}{p_1!\,p_2!\dots p_m!}}{m!}$$

A fórmula da partição não ordenada é praticamente essa, porém com alguns ajustes. Para que sejam iguais, os grupos devem possuir o **mesmo tamanho**, então chamamos $p_1, p_2, \dots, p_m$ de $\boldsymbol{p}$. Logo, substituímos $p_1!\,p_2! \dots p_m!$ por:

$$\underbrace{\boldsymbol{p}!\,\boldsymbol{p}! \dots \boldsymbol{p}!}_{\boldsymbol{m} \text{ vezes}} = (\boldsymbol{p}!)^{\boldsymbol{m}}$$

Além disso, sabendo que há $\boldsymbol{m}$ subconjuntos com p elementos cada, então há um total de $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$ elementos. Então, substituímos n por $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$.

Assim, a partição em **$\boldsymbol{m}$ subconjuntos** de **$\boldsymbol{p}$ elementos** cada (ou seja, o conjunto original possui $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$ elementos, no total), então o número de possibilidades distintas da **partição não-ordenada** é:

$$\frac{\binom{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{m}!} = \frac{(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p})!}{\boldsymbol{m}!(\boldsymbol{p}!)^{\boldsymbol{m}}}$$

(2016 – Prefeitura de São José da Coroa Grande/PE) De quantos modos podemos dividir 10 pessoas em dois grupos de 5 pessoas?

a) 96

b) 108

c) 120

d) 126

e) 132

Comentários:

Considerando que os grupos são equivalentes, temos uma partição não-ordenada de m = 2 subconjuntos de p = 5 elementos cada:

$$\frac{\binom{m \times p}{p, p, \dots, p}}{m!} = \frac{(m \times p)!}{m!\,(p!)^m}$$

$$\frac{\binom{10}{5,5}}{2!} = \frac{10!}{2!\,(5!)^2} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 2 \times 9 \times 7 = 126$$

Gabarito: D

(2006 – TCE/PR) De quantas maneiras diferentes 12 estudantes podem ser divididos em 3 equipes, sendo que cada uma das equipes deve ser composta de quatro estudantes?

a) 8425

b) 3260

c) 12640

d) 5775

e) 34650

Comentários:

Considerando que as equipes são equivalentes, temos uma partição não-ordenada de m = 3 subconjuntos de p = 4 elementos cada:

$$\frac{\binom{m \times p}{p, p, \ldots, p}}{m!} = \frac{(m \times p)!}{m!\,(p!)^m}$$

$$\frac{\binom{12}{4,4,4}}{3!} = \frac{12!}{3!\,(4!)^3} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2} = 11 \times 5 \times 3 \times 7 \times 5 = 5.775$$

Gabarito: D

LEMAS DE KAPLANSKY

Nesta seção, veremos o **primeiro lema** e o **segundo lema de Kaplansky**. Ambos os lemas trabalham com a **seleção** de um subconjunto de elementos, a partir de um conjunto de elementos dispostos em determinada ordem, de modo que elementos **consecutivos** (**vizinhos**) do conjunto original **não** sejam **selecionados**.

A diferença entre os lemas é que, para o **primeiro lema**, os elementos **extremos** do conjunto original **não** são considerados **consecutivos** (**vizinhos**), enquanto que para o **segundo lema**, tais elementos **são** considerados **consecutivos** (**vizinhos**), como se os elementos do conjunto original estivessem dispostos em um círculo.

Primeiro Lema de Kaplansky

O **primeiro lema de Kaplansky** considera que os elementos estão originalmente dispostos em determinada ordem, como em uma **fila**, e que serão **selecionados** alguns desses elementos (sem que a ordem dessa seleção importe). Porém, dentre os elementos selecionados, **não** pode haver **elementos consecutivos** (**vizinhos**) da fila original.

Suponha um conjunto de 8 algarismos ordenados {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Quantas são as possibilidades de selecionar 2 elementos que **não sejam consecutivos** do conjunto original?

Podemos resolver esse problema, calculando o número de maneiras de selecionar 2 elementos no total (combinação de 2 elementos, dentre 8) e subtrair o número de maneiras de selecionar 2 elementos consecutivos. A combinação de 2 elementos, dentre 8, é dada por:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2} = 4 \times 7 = 28$$

Para escolher 2 elementos consecutivos, podemos escolher os seguintes subconjuntos {1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 5}, {5, 6}, {6, 7} e {7, 8}, ou seja, há 7 possibilidades. Portanto, o número de maneiras de escolher 2 elementos não consecutivos, dentre 8 no total, é:

$$28 - 7 = 21$$

E se quiséssemos escolher 3 elementos não consecutivos? Aí, teríamos um pouco mais de trabalho.

Para facilitar a resolução de problemas desse tipo, podemos utilizar o raciocínio de Kaplansky.

Primeiro, vamos representar cada elemento do conjunto original por um **S**, caso ele pertença ao subconjunto selecionado, ou por um **N**, caso ele não pertença ao subconjunto selecionado. Por exemplo, a seleção do **2º** e do **4º** elemento do conjunto original de 8 elementos é representada por **N S N S N N N N**.

Para formar um subconjunto de 3 elementos, sem elementos consecutivos, vamos começar representando os 8 – 3 = 5 elementos que **não** serão selecionados. Como não sabemos em quais posições esses 5 elementos estarão, vamos prever **possíveis espaços antes e depois** desses elementos.

__ N __ N __ N __ N __ N __

Esses espaços correspondem **aos possíveis lugares dos elementos selecionados**. Como não há espaços consecutivos, não será possível escolher elementos consecutivos. Assim, o número de maneiras de selecionar 3 elementos não consecutivos do conjunto original corresponde ao número de maneiras de **selecionar 3 dentre esses 6 espaços** (combinação de 3 elementos, dentre 6):

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

É mais importante entender o raciocínio do que memorizar a fórmula.

De modo geral, para a seleção de um subconjunto de $\boldsymbol{p}$ elementos, dentre $\boldsymbol{n}$ elementos no total, teremos $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}$ elementos **não selecionados (N)** e, portanto, $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p} + \mathbf{1}$ **espaços**, para que haja espaços antes e depois de cada elemento não selecionado.

Desses $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p} + \mathbf{1}$ **espaços**, selecionaremos os lugares dos $\boldsymbol{p}$ elementos (combinação de $\boldsymbol{p}$ elementos dentre $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p} + \mathbf{1}$).

> **O 1º lema de Kaplansky**, indicado por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$, é dado por:
>
> $$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}+\mathbf{1}, \boldsymbol{p}}$$

Para o exemplo que calculamos antes de conhecer o primeiro lema de Kaplansky, tivemos n = 8 e p = 2. Assim, tivemos 8 – 2 = 6 elementos não selecionados e 6 + 1 = 7 espaços. Dentre esses 7 espaços, devemos escolher a posição de 2 elementos:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{8}, \mathbf{2}) = C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!\,2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2} = 7 \times 3 = 21$$

Que foi o resultado que obtivemos anteriormente.

(FGV/2019 – MPE/RJ) Valdo é estagiário em um escritório de advocacia e, na semana que vem, deverá escolher para trabalhar três dias de segunda a sábado. O escritório não permite que um estagiário trabalhe dois dias consecutivos. O número de possibilidades que Valdo tem para escolher seus dias de trabalho é:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

Comentários:

Como o conjunto original é formado pelos dias da semana de segunda a sábado, os extremos não são dias consecutivos. Assim, temos o primeiro lema de Kaplansky com n = 6 e p = 3.

Primeiro representamos os 6 – 3 = 3 dias em que Valdo não irá trabalhar, com os espaços antes e depois de cada dia não trabalhado, totalizando n – p + 1 = 4 espaços, os quais representam os **possíveis** dias de trabalho:

_ N _ N _ N _

Desses n – p + 1 = 4 espaços, devem ser escolhidos p = 3 elementos:

$$\boldsymbol{f(n,p) = C_{n-p+1,p}}$$

$$f(6,3) = C_{4,3}$$

Para facilitar as contas, lembre-se que a seleção de n – 1 elementos, dentre n, é um caso particular de combinação: $C_{n,n-1} = n$:

$$C_{4,3} = 4$$

Gabarito: C

(CESPE/2019 – Prefeitura de São Cristóvão/SE) Situação hipotética: As 5 lâmpadas tubulares de uma sala de aula foram instaladas formando uma única fileira. Por motivo de economia, 2 lâmpadas adjacentes nunca poderão ficar acesas ao mesmo tempo.

Assertiva: Nessa situação, há exatamente 13 configurações distintas, incluindo todas as lâmpadas desligadas, que atendem à exigência de economia.

Comentários:

Essa questão é um pouco mais trabalhosa. Precisamos tratar distintamente das situações (i) em que nenhuma lâmpada está acesa; (ii) em que há 1 lâmpada acesa; (iii) em que há 2 lâmpadas acesas; e (iv) em que há 3 lâmpadas acesas. Observe que se houvesse 4 lâmpadas acesas, dentre 5, necessariamente teríamos lâmpadas adjacentes acesas. Portanto, as opções de acender 4 lâmpadas ou mais (5) não atendem às restrições do problema.

i) Nenhuma lâmpada acesa: $\mathbf{C_{5,0} = 1}$ (caso especial de combinação $C_{n,0} = 1$). Não há que se falar em lema de Kaplansky, porque quando não selecionamos lâmpada alguma, não é possível selecionar lâmpadas adjacentes.

ii) 1 lâmpada acesa: $\mathbf{C_{5,1} = 5}$ (outro caso especial de combinação $C_{n,1} = n$). Nesse caso, também não há que se falar em lema de Kaplansky, porque quando selecionamos uma única lâmpada, também não é possível selecionar lâmpadas adjacentes.

iii) 2 lâmpadas acesas: agora sim, podemos utilizar o 1° lema de Kaplansky para garantir que as 2 lâmpadas selecionadas não sejam adjacentes. Com p = 2 elementos, dentre n = 5 elementos no total, temos n – p = 5 – 2 = 3 elementos não selecionados e n – p + 1 = 4 espaços. Desses 4 espaços, devemos escolher p = 2:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = \mathbf{6}$$

iv) 3 lâmpadas acesas: conseguimos selecionar 3 lâmpadas não adjacentes de uma **única** forma (SNSNS). De todo modo, vamos utilizar o lema de Kaplansky para chegar a essa conclusão. Com p = 3 elementos, dentre n = 5, temos n – p = 5 – 3 = 2 elementos não selecionados e n – p + 1 = 3 espaços. Desses 3 espaços, devemos escolher p = 3: $C_{3,3} = 1$ (caso especial de combinação $C_{n,n} = 1$).

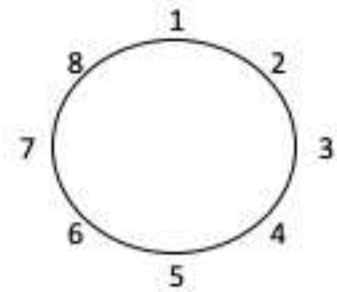
Como as possibilidades dos eventos de i a iv são excludentes, isto é, temos a possibilidade de i OU as possibilidades de ii OU as possibilidades de iii OU a possibilidade de iv, então, pelo princípio **aditivo**, devemos somar esses resultados: 1 + 5 + 6 + 1 = 13

Gabarito: Certo.

Segundo Lema de Kaplansky

O **segundo lema de Kaplansky** também trabalha com a **seleção** de um subconjunto de elementos, de modo que elementos **consecutivos** (**vizinhos**) do conjunto original **não** sejam selecionados. Porém, neste caso, os elementos **extremos** do conjunto original **são** considerados **consecutivos** (**vizinhos**). Assim, havendo n elementos, os elementos 1 e n são considerados vizinhos.

Supondo um conjunto de 8 elementos, os elementos 1 e 8 são consecutivos, como se os elementos estivessem dispostos em um círculo:



Exemplos desse tipo de situação são os dias da semana, de segunda a domingo, ou os meses do ano, de Janeiro a Dezembro, etc.

O n **2º lema de Kaplansky**, indicado por $\boldsymbol{g(n,p)}$, é dado por:

$$\boldsymbol{g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}}$$

No caso de $n = 8$, como indicado na figura acima, se tivéssemos que selecionar $p = 3$ elementos não consecutivos, teríamos:

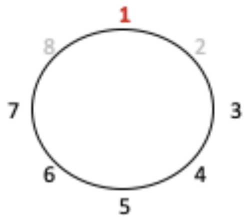
$$g(8,3) = \frac{8}{8-3} C_{8-3,3} = \frac{8}{5} C_{5,3}$$

$$g(8,3) = \frac{8}{5} \times \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = \frac{8}{5} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = \frac{8}{5} \times \frac{5 \times 4}{2} = 16$$

Vamos **entender o raciocínio** por trás do 2º lema.

Com 8 elementos dispostos em um círculo, precisamos **separar** o problema em 2: (i) o elemento 1 é selecionado; e (ii) o elemento 1 não é selecionado (poderíamos substituir o elemento 1 por qualquer outro elemento)

i) Ao **selecionarmos o elemento 1**, **não** podemos selecionar os elementos 2 ou 8, pois ambos são vizinhos.

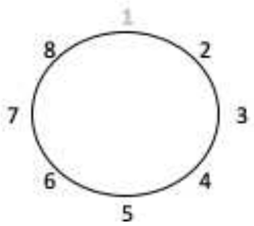


Assim, restam os elementos 3 a 7 (isto é, 5 elementos), dos quais devemos selecionar 2 elementos não consecutivos.

Observe que os extremos 3 e 7 **não são consecutivos**. Portanto, podemos utilizar o **1° lema de Kaplansky**, com um total de n = 5 elementos, dos quais devemos selecionar p = 2 elementos. Assim, temos n – p = 3 elementos não selecionados e n – p + 1 = 4 espaços, dos quais devemos selecionar p = 2:

$$f(5,2) = C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times 3}{2} = 6$$

ii) **Se não selecionarmos o elemento 1**, então iremos selecionar 3 elementos não consecutivos, dentre os elementos 2 a 8.



Novamente, os extremos 2 e 8 **não são consecutivos**. Então, utilizamos o **1° lema de Kaplansky**, com n = 7 elementos e p = 3, ou seja, n – p = 4 elementos não selecionados e n – p + 1 = 5 espaços:

$$f(7,3) = C_{5,3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times 4}{2} = 10$$

Como as possibilidades de i e ii são excludentes, ou seja, temos as 6 possibilidades de i OU as 10 possibilidades de ii, pelo princípio aditivo, temos:

6 + 10 = 16

Esse é o resultado que obtivemos pela fórmula do 2° lema de Kaplansky!

(2018 – Câmara de Cambé/PR) Um auxiliar administrativo vai organizar um calendário para a supervisão de uma praça de 2ª feira até domingo. Essa praça tem que ser supervisionada exatamente duas vezes por semana e nos mesmos dias de cada semana. A praça nunca deve ser supervisionada dois dias consecutivos. Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o número de possibilidades diferentes que o auxiliar administrativo tem para organizar esse calendário.

a) 14

b) 16

c) 18

d) 24

e) 28

Comentários:

Temos um exemplo do segundo lema de Kaplansky, pois engloba todos os dias da semana (domingo e segunda-feira são consecutivos). Assim, temos n = 7, p = 2:

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}$$

$$g(7,2) = \frac{7}{5} C_{5,2}$$

$$g(7,2) = \frac{7}{5} \times \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{7}{5} \times \frac{5 \times 4}{2} = 14$$

Caso **não lembre** essa fórmula, podemos dividir a resolução desse problema em duas situações.

i) A segunda-feira é selecionada. Assim, restarão os dias de quarta a sábado (4 dias) para selecionar 1 dia. Usando o 1° lema de Kaplansky, com n = 4 e p = 1, temos n – p = 3 dias não selecionados e n – p + 1 = 4 espaços, dos quais devemos selecionar 1:

$$f(4,1) = C_{4,1} = 4$$

ii) A segunda-feira não é selecionada. Assim, restarão os dias de terça a domingo (6 dias) para selecionar 2 dias. Usando o 1° lema de Kaplansky, com n = 6 e p = 2, temos n – p = 4 dias não selecionados e n – p + 1 = 5 espaços, dos quais devemos selecionar 2:

$$f(6,2) = C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Como são situações excludentes (ou seja, alternativas), pelo princípio da adição devemos somar os resultados:

$$g(7,2) = f(4,1) + f(6,2) = 4 + 10 = 14$$

Gabarito: A

Resumo da Aula

Princípios de Contagem

- **Princípio Multiplicativo** (multiplicação): Eventos concomitantes (ocorre um E outro)
- **Princípio Aditivo** (soma): Eventos mutuamente exclusivos (ocorre um OU outro)
- **Princípio do Pombo**: Considerar o pior cenário para **garantir** a situação desejada

Fatorial: **produto** de um número com todos os números menores que ele:

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Permutação – reordenação de elementos

- **Permutação simples**: Número de maneiras de **reordenar** elementos **distintos**:

$$P_n = n!$$

- **Permutação com repetição**: Número de maneiras de reordenar n elementos, dos quais k elementos são **repetidos**:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!}$$

- **Permutação circular**: Número de maneiras de reordenar elementos dispostos em **círculo**:

$$PC_n = (n-1)!$$

- **Permutação com elementos ordenados**: reordenação de n elementos, dos quais k elementos devem respeitar uma **ordem específica**, não necessariamente consecutivos:

$$\frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

- **Permutação caótica**: número de maneiras de reordenar elementos, de modo **nenhum** deles retorne para a sua **posição original**:

$$D_n = n! \times \left[+\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Arranjo – seleção de elementos **com importância de ordem**

- **Arranjo sem repetição**: Número de maneiras de sortear, k elementos, **sem repetição**, dentre n elementos, de modo que a **ordem do sorteio importe**:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Arranjo com repetição**: Número de maneiras de sortear, k elementos, permitindo-se a **repetição**, dentre n elementos, de modo que a **ordem do sorteio importe**:

$$A_{n,k} = n^k$$

Combinação – seleção de elementos **sem importância de ordem**

- **Combinação simples**: Número de maneiras de sortear, k elementos, **sem repetição**, dentre n elementos, de modo que a **ordem do sorteio não importe**:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

- **Combinação completa**: Número de maneiras de sortear, **sem importância de ordem**, p objetos (ex: potes de sorvete), quando há n **tipos** diferentes (ex: marcas de sorvete):

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

Esse também é o **número de soluções inteiras não-negativas** para a equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

Partição – separação de elementos em **subconjuntos**

- **Partição ordenada**: Número de maneiras de separar n elementos em m **subconjuntos distintos** entre si, com $\boldsymbol{p_1, p_2, \dots, p_m}$ elementos cada, temos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\,p_2! \dots p_m!}$$

- **Partição não ordenada**: Número de maneiras de separar elementos em m subconjuntos de p elementos cada (total de $m \times p$ elementos):

$$\frac{\binom{m \times p}{p, p, \dots, p}}{m!} = \frac{(m \times p)!}{m!\,(p!)^m}$$

Lemas de Kaplansky – seleção de elementos **não vizinhos**

- **1° Lema**: Número de maneiras de selecionar p elementos **não vizinhos**, dentre n, em que os **extremos** do conjunto original **não** são considerados **vizinhos**: $f(n,p) = C_{n-p+1,p}$

- **2° Lema**: Número de maneiras de selecionar p elementos **não vizinhos**, dentre n, em que os **extremos** do conjunto original **são** considerados **vizinhos**: $g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}$