Pesquis

Sophia of Nature

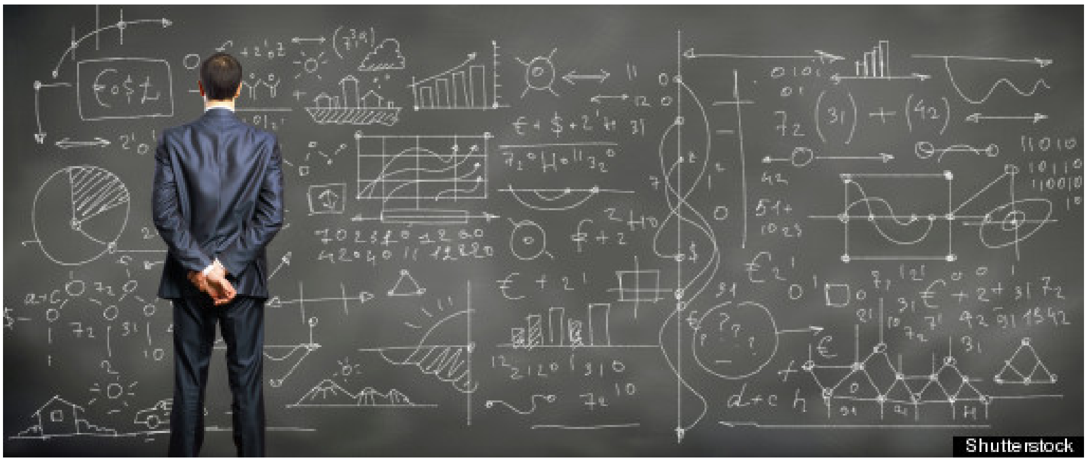
Conhecimento é poder!

Sobre o Blogue Livros Sophia Índice de Artigos Questões & Sugestões Física
Matemática Física Experimental Tecnologia Astronomia Cosmologia
Neurociências Filosofia da Ciência Programação This blog in English

← Anterior Seguinte →

Posted on 30/04/2017 by MarinhoLopes

Os Problemas do Milénio – Parte I



Os Problemas do Milénio, ou os Problemas do Prémio Millennium, são sete problemas de Matemática. A solução de cada um vale um milhão de dólares! A lista de problemas foi definida em 2000 pelo Clay Mathematics Institute (CMI). O instituto foi fundado em 1998 pelo empresário americano Landon Thomas Clay, e trata-se de uma fundação privada sem fins lucrativos que se encontra em Peterborough (New Hampshire, Estados Unidos). O CMI tem o propósito de disseminar e aumentar o conhecimento matemático. Para isso, o instituto oferece vários prémios e providencia financiamento a matemáticos promissores. O prémio em causa serve ambos os propósitos: por um lado a quantia de um milhão de dólares suscita o interesse e a curiosidade do público em geral, por outro fomenta o progresso da Matemática. Adianto que um dos problemas já foi resolvido, mas já lá vamos.

Como o leitor pode imaginar, a maioria destes problemas são tão complexos que só para os compreender é necessário ter conhecimentos muito avançados de Matemática. Neste artigo irei apenas tentar dar uma ideia sobre os problemas, e qual a importância de uma possível resolução. Irei também incluir alguns detalhes técnicos que o leitor pode escolher ignorar, ou requisitar mais informações nos comentários. Faço ainda notar que não é claro que haja solução para todos estes problemas.

Antes de referir quais são esses sete problemas, permitam-me que mencione que a ideia não é original: o matemático David Hilbert já houvera proposto em 1900 uma lista de 23 problemas de Matemática para serem resolvidos durante o século XX. Hilbert não ofereceu dinheiro, mas como foi um matemático proeminente, muitos tentaram resolver os problemas destacados por ele. Citando Ben Yandell, "Resolver um dos problemas de Hilbert tem sido o sonho idílico de muitos matemáticos… Nos últimos 100 anos, soluções e resultados parciais significativos têm surgido por todo o mundo. A lista de Hilbert é algo de belo, e além do seu encanto romanesco e histórico, estes problemas

David Hilbert foi um matemático alemão (1862-1943). Hilbert é particularmente conhecido pela Teoria dos Espaços de Hilbert, que é uma das fundações da Análise Funcional. Foi um dos primeiros a fazer a distinção entre Matemática e Metamatemática, o estudo matemático de teorias matemáticas. É uma disciplina que procura estabelecer as fundações e os axiomas sobre os quais assentam as teorias matemáticas. Vários dos problemas da sua lista podem ser considerados do domínio da Metamatemática. Ele tinha também um fascínio pela noção de infinito, como ilustra o Paradoxo de Hilbert.

Não vou expor os 23 problemas, mas posso referir que a maioria já foi resolvido, ainda que nem todas as soluções sejam aceites por todos os matemáticos. Por exemplo, no problema 18, que concerne a forma mais eficiente de empacotar esferas, a prova matemática recorreu ao poder de cálculo de computadores, sendo por isso difícil de verificar a sua veracidade.

Por analogia, os problemas do milénio são considerados os problemas de Hilbert do século XXI. Na verdade, um dos sete problemas já constava na lista de Hilbert: a **Hipótese de Riemann**. Não é de estranhar que o problema ainda não tenha sido resolvido, pois o próprio Hilbert disse: "Se eu acordasse daqui a mil anos, a minha primeira questão seria: A hipótese de Riemann já foi provada?"

A hipótese foi proposta pelo matemático alemão Bernhard Riemann em 1859, e concerne a função zeta de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

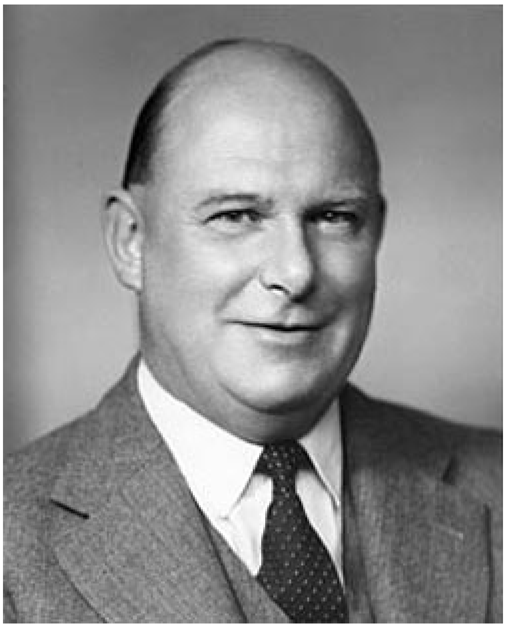
destes, há ainda zeros não triviais complexos. A hipótese de Riemann é que os zeros complexos tenham todos eles parte real igual a 1/2.

Uma verificação ou refutação desta hipótese teria consequências profundas em Teoria de Números, em particular no que concerne à distribuição de números primos. Na verdade, a conexão é tão clara que no problema original de Hilbert, a verificação da hipótese de Riemann vinha acompanhada (no mesmo problema) da verificação da Conjectura de Goldbach (da qual já falei no artigo sobre o Fascínio dos Números). A importância da distribuição dos números primos, por sua vez, é fundamental nas nossas tecnologias de segurança (criptografia), como expliquei também no artigo supracitado. Alguns matemáticos consideram este o problema não resolvido mais importante em Matemática. Aliás, há imensos resultados matemáticos que assumem esta hipótese como verdadeira, e como tal teriam que ser revistos caso se provasse que a hipótese era falsa.

Bernhard Riemann foi um matemático alemão (1826-1866). Fez contribuições importantes nas áreas de análise, teoria de números e geometria diferencial.

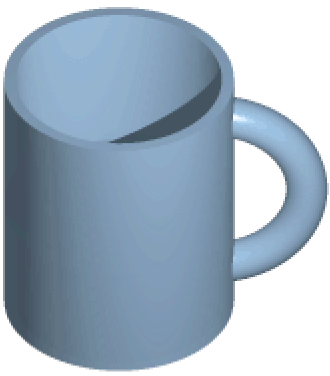
Outro problema da lista é a chamada **Conjectura de Hodge**. Não vou fingir que compreendo este problema, pois não estou familiarizado com nenhuma das áreas envolvidas. A conjectura foi formulada na primeira metade do século XX pelo matemático William Hodge, e tem a ver com topologia, geometria algébrica, e geometria diferencial. Em topologia e geometria tenta-se classificar a forma de "objectos". Para o fazer, um método é tentar criar o mesmo objecto de forma aproximada usando outros objectos mais simples. Este método, porém, torna-se algo obscuro quando se tentam fazer certas generalizações. Por exemplo, o método pode por vezes exigir o uso de objectos sem

dimensão inferior a 4, mas mantém-se um problema em aberto no caso geral. A importância desta conjectura reside na sua utilidade: permite a transformação de certos problemas matemáticos noutros mais simples de resolver. De um ponto de vista metamatemático, a conjectura cria uma ligação profunda entre áreas aparentemente distintas da Matemática.



William Hodge foi um matemático escocês (1903-1975).

Para concluir esta primeira parte, refiro ainda o problema que já foi resolvido: a **Conjectura de Poincaré.** A conjectura envolve alguns conceitos de topologia que é importante esclarecer antes de a enunciar. A topologia é a área da Matemática que estuda as propriedades invariantes de formas e espaços quando estes são deformados (sem a ocorrência de cortes ou colagens). Dois objectos dizem-se homeomórficos se for possível deformar um no outro. Por exemplo, as formas de uma caneca e de um donut são homeomórficas, visto ser possível transformar uma forma na outra através de um contínuo de deformações, isto é, sem recorrer aos tais cortes e colagens:



Simplificando, uma forma sem buracos diz-se *simply connected* (simplesmente conexa). As formas podem também ser fechadas ou abertas, dependendo se têm fronteira ou não. Por exemplo, a superfície de uma esfera é fechada porque a superfície em si não tem fronteira. Fazendo a analogia com a superfície da Terra: não importa que caminho façamos sobre ela, nunca encontraremos um "fim".

Em topologia define-se ainda um *manifold* como um espaço que localmente se assemelha a um espaço Euclidiano (o espaço planar clássico). Ou seja, em cada ponto, um *manifold* é homeomórfico de um espaço Euclidiano (de igual dimensão).

Posso agora apresentar a conjectura de Poincaré:

"Qualquer *manifold* tridimensional fechado e simplesmente conexo é homeomórfico a uma esfera tridimensional."

Se o leitor compreendeu os conceitos de cima, a conjectura pode-lhe parecer evidente, contudo a sua demonstração não é trivial, tendo demorado quase um século a ser provada. A conjectura foi proposta em 1904, mas a sua demonstração só surgiu em 2002-2003, pelo matemático russo Grigori Perelman. O que ele fez foi provar uma outra conjectura mais geral, a conjectura da geometrização de Thurston, da qual resulta como consequência esta conjectura. Nos anos seguintes outros matemáticos tentaram compreender a solução de Perelman, e em 2006 conseguiram determinar que a demonstração estava correcta. Assim, a conjectura passou a teorema. Curiosamente, em 2010, Perelman rejeitou o prémio de um milhão de dólares da CMI, pois considerou que era injusto recebê-lo, dado que o seu trabalho se fundamentou no de outros matemáticos, como Richard Hamilton. Já em 2006 lhe tinham tentado oferecer a Fields Medal (o equivalente ao Prémio Nobel da Matemática), mas também então ele rejeitara.

Adiciono ainda que antes da conjectura de Poincaré ter sido verificada, já a sua análoga para dimensões superiores a três tinha sido demonstrada.

Por que razão fazia este problema parte da lista dos sete problemas? Porque era um problema fundamental de Matemática pura. Trata-se de um resultado estrutural que permite compreender melhor a natureza das formas e das suas relações. A sua resolução trouxe consigo também novas ferramentas matemáticas que irão permitir trabalhar em muitos outros problemas.

Um maior conhecimento matemático representa um maior conhecimento da lógica e da razão. Diria mais, a Matemática é por ventura a melhor representação sumária de todo o

Henri Poincaré (à esquerda) foi um brilhante matemático e físico teórico francês (1854-1912). Grigori Perelman (à direita) é um matemático russo (1966-). Além da conjectura de Poincaré, Perelman já houvera provado uma outra conjectura matemática em 1994 no domínio da geometria de Riemann.

Na segunda parte falar-vos-ei dos outros quatro problemas.