Aula 04

Banco do Brasil - Passo Estratégico de Matemática - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Allan Maux Santana

03 de Janeiro de 2023

Índice

O QUE É O PASSO ESTRATÉGICO?

O Passo Estratégico é um material escrito e enxuto que possui dois objetivos principais:

a) orientar revisões eficientes;

b) destacar os pontos mais importantes e prováveis de serem cobrados em prova.

Assim, o Passo Estratégico pode ser utilizado tanto para **turbinar as revisões dos alunos mais adiantados nas matérias, quanto para maximizar o resultado na reta final de estudos por parte dos alunos que não conseguirão estudar todo o conteúdo do curso regular.**

Em ambas as formas de utilização, como regra, **o aluno precisa utilizar o Passo Estratégico em conjunto com um curso regular completo.**

Isso porque nossa didática é direcionada ao aluno que já possui uma base do conteúdo.

Assim, se você vai utilizar o Passo Estratégico:

a) **como método de revisão**, você precisará de seu curso completo para realizar as leituras indicadas no próprio Passo Estratégico, em complemento ao conteúdo entregue diretamente em nossos relatórios;

b) **como material de reta final**, você precisará de seu curso completo para buscar maiores esclarecimentos sobre alguns pontos do conteúdo que, em nosso relatório, foram eventualmente expostos utilizando uma didática mais avançada que a sua capacidade de compreensão, em razão do seu nível de conhecimento do assunto.

APRESENTAÇÃO

Olá!

Sou o professor ***Allan Maux*** e serei o seu analista do Passo Estratégico nas matérias de ***exatas.***

Para que você conheça um pouco sobre mim, segue um resumo da minha experiência profissional, acadêmica e como concurseiro:

Sou, atualmente, Auditor Fiscal do Município de Petrolina – PE, ***aprovado em 2° lugar*** *no concurso de 2011.*

Sou formado em matemática e tenho ***pós-graduação em direito tributário municipal****.*

Fui, por 05 anos, ***Secretário de Fazenda do Município de Petrolina****, período no qual participei da comissão que elaborou o* ***novo Código Tributário da Cidade, vigente até o momento****, colocando a cidade entre as maiores arrecadações do Estado de Pernambuco.*

Lecionei, também, em cursos preparatórios para ITA.

Fui também aprovado e nomeado no concurso para Analista da Receita Federal, em 2012.

Aprovado e nomeado, em 2007, para o cargo de gestor de tributos da Secretaria da Fazenda do Estado de Minas Gerais.

Nossa carreira como Auditor Fiscal de Petrolina é bastante atraente e me fez refletir bastante por sua manutenção, nosso salário inicial beira aos 15k.

Atualmente, também, leciono matemática para concursos e vestibulares.

Estou extremamente feliz de ter a oportunidade de trabalhar na equipe do "Passo", porque tenho convicção de que nossos relatórios e simulados proporcionarão uma preparação diferenciada aos nossos alunos!

Bem, vamos ao que interessa!!

Prof. Allan Maux

ANÁLISE ESTATÍSTICA

Inicialmente, convém destacar os percentuais de incidência de todos os assuntos previstos em nosso curso – quanto maior o percentual de incidência de um determinado assunto, maior será sua importância para nosso certame.

Nossa análise será executada em concursos realizados pela banca ***CESGRANRIO***, num total de ***163 questões***, de ***Matemática,*** no ***período*** de ***2018*** a ***2022***.

ASSUNTO	*% Incidência*
PORCENTAGEM / OPERAÇÕES C/ NÚMEROS REAIS	*45,40%*
RAZÃO / PROPORÇÃO / REGRA DE TRÊS SIMPLES E COMPOSTA	*15,95%*
PROBLEMAS DE CONTAGEM / TEORIA DOS CONJUNTOS	*12,27%*
LÓGICA PROPOSICIONAL / RACIOCÍNIO SEQUENCIAL	*11,04%*
PROGRESSÃO ARITMÉTICA / GEOMÉTRICA	*9,20%*
MATRIZES / DETERMINANTES / SISTEMAS LINEARES	*6,13%*
TOTAL	*100,00*

Sabemos que a quantidade de questões para o curso do Passo Estratégico é por volta de 5, desde que envolvam todo o conteúdo.

No entanto, para o que material fique mais rico em exercícios para vocês, resolvi elaborar os PDFs com uma quantidade maior de questões de bancas diversas também, assim o candidato poderá usá-lo, também, para concursos elaborados por outras bancas. No entanto, sugiro que o aluno resolva todas as questões propostas, assim irá perceber que as bancas tradicionais, quanto às matérias de exatas, possuem perfis semelhantes.

Vocês perceberão que nos cursos de exatas os perfis das questões das bancas são muito idênticos, portanto, treinem exaustivamente principalmente aquele assunto que possui uma maior incidência em nossa análise e que você tenha mais dificuldade.

A partir de 10/01/23 irei postar em meu Instagram resoluções de questões da CESGRANRIO, sigam:

Prof. Allan Maux

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Sumário

O que é mais cobrado dentro do assunto

Vamos, a seguir, para direcionar melhor o seu estudo, entender como cada assunto é cobrado pela banca.

Análise Combinatória	Incidência
PERMUTAÇÃO SIMPLES	29,0%
PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM	26,0%
COMBINAÇÃO	23,0%
ARRANJO	22,0%
TOTAL	100,0%

Temos uma boa distribuição das questões pelo assunto.

ROTEIRO DE REVISÃO E PONTOS DO ASSUNTO QUE MERECEM DESTAQUE

A ideia desta seção é apresentar um roteiro para que você realize uma revisão completa do assunto e, ao mesmo tempo, destacar aspectos do conteúdo que merecem atenção.

Para revisar e ficar bem preparado no assunto, você precisa, basicamente, seguir os passos a seguir:

Análise Combinatória

O tão temido assunto, ***Análise Combinatória***, dos concurseiros em geral. De fato, algumas questões são bem complicadas de serem interpretadas, mas há uma quantidade bem mais significativa de questões diretas e são essas aí que temos o compromisso com acerto, ok?

Como o próprio nome diz vamos analisar o total de possibilidades de determinado evento acontecer. Existem algumas formas de fazermos essas contagens, veremos a seguir.

A ***primeira*** é pelo método tradicional, necessitando ***memorizar algumas fórmulas*** e aplicá-las às situações que envolvem os agrupamentos.

A ***segunda*** maneira, que por sinal é a que eu uso, não envolve fórmula alguma, basta apenas você conhecer o ***Princípio Fundamental da Contagem*** – PFC – e correr para o abraço.

Estranho, não acham? Mas é isso mesmo. Porém, aqui existe um grave problema, não pelo método, mas sim pela forma que o "camarada" que elabora as questões nos dá nas opções das alternativas a serem marcadas, ao encontrarmos o resultado da questão.

Eu, particularmente, acho um absurdo determinar a forma de reComentários das questões, nas opções das escolhas das alternativas. Apesar de serem poucas questões que cobram esse método tradicional de reComentários, eu irei ensinar a vocês as duas maneiras. É que algumas vezes a resposta vem com a própria fórmula e não como um resultado numérico.

A **terceira** é ***contarmos caso a caso***. Às vezes, até dá para fazermos isso, quando a quantidade de possibilidades é pequena.

Mas vamos lá!

E, finalmente, Allan, o que é Análise Combinatória ou Estratégia de Contagem?

Como o próprio nome do assunto nos diz: deveremos analisar as combinações possíveis de acontecer determinada situação, através da contagem. No entanto, na hora da prova não dá para ficar contando caso a caso e evento por evento, por isso vamos estudar ***estratégias de contagem***, que são formas simples para calcularmos e encontrarmos o total de possibilidades.

Princípio Fundamental da Contagem / Arranjo

Imagine você nesse momento chegando ao banco. Mas, obviamente, você não está sozinho, há mais 06 pessoas num tumulto danado e ninguém sabe quem chegou primeiro.

De repente, chega a gerente do banco querendo organizar a fila de acordo com a ordem de chegada, mas, devido ao grande tumulto, ninguém sabe de ordem alguma.

O que fazer? Como organizar a fila? Hummm!!

A gerente pensa e acha uma Comentários: distribui números de 1 a 6 e, em seguida, faz um sorteio para determinar a ordem.

<u>Pergunto</u>: De quantas formas distintas essa fila poderia ser organizada?

Percebam vocês que para uma situação se diferenciar da outra, basta apenas que uma pessoa troque de lugar, não é?

Caixa do Banco

1°	***2°***	***3°***	***4°***	***5°***	***6°***
Allan	***Abraão***	***Túlio***	***André***	***Ana***	***José***
Abraão	***Allan***	***Túlio***	***André***	***Ana***	***José***

Vejam que apesar de termos as mesmas pessoas, por se tratar de uma fila, que possui ordem, uma simples troca de posição entre duas pessoas implicará em agrupamentos distintos.

Na Análise Combinatória, chamamos esse tipo de agrupamento de ***ARRANJO***. Para calcularmos o total de agrupamentos basta você utilizar os métodos:

Pense comigo, quantas pessoas poderiam o ocupar a 1ª posição da fila, e a 2ª e a 3ª e a 4ª....?

Qualquer uma das 06 pessoas poderia ocupar a 1ª posição, ok?

Já a 2ª posição não haveria um total de 06 possibilidades, visto que 01 pessoa já ocupou a 1ª posição, certo? Seriam 05 possibilidades e assim sucessivamente para as demais posições até chegar na 6ª posição com apenas uma possibilidade, a última pessoa.

Para encontrarmos o total de possibilidades, basta multiplicarmos todos os números acima: 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720.

Portanto, 720 corresponde ao total de possibilidades de agrupamentos que podem ser feitos com 6 pessoas numa fila de um banco. Pessoal, essa multiplicação entre números consecutivos até o 1 pode ser representada da seguinte forma 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 6! (Seis fatorial).

Agora, se a gerente do banco optasse em sortear apenas ***3 pessoas***, então de quantas maneiras ela poderia organizar essa fila?

Aqui, pessoal, o raciocínio é o mesmo, vejamos:

Para a 1ª posição na fila teríamos qualquer uma das 6 pessoas. Para a 2ª posição só teríamos 5 pessoas e para a 3ª posição 4 pessoas. Então para calcularmos o total de possibilidades, basta você fazer o produto:

= 6 x 5 x 4 =

= 120 possibilidades =

E com fórmulas, como seria?

Pela fórmula de Arranjo:

$$\boxed{A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!}$$

$$= \frac{6x5x4x\cancel{3}!}{\cancel{3}!} =$$

$$= 6 \times 5 \times 4 =$$

$$= 120 =$$

Combinação

Vamos mudar a situação.

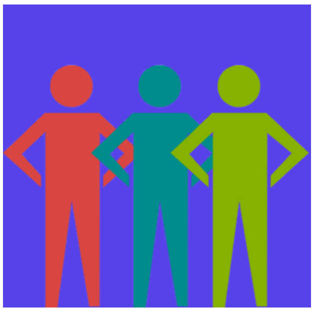
Imagine que você e mais 6 pessoas estão concorrendo para ganhar uma viagem ao exterior, mas que apenas 3 pessoas ganharão esse prêmio no sorteio.

Todos vão para o mesmo lugar. Não importa a ordem do sorteio. Ganhará que for sorteado, apenas isso. De quantas maneiras distinta esse grupo de 3 pessoas poderá ser formado?

Gente, percebam que aqui, nesse agrupamento de pessoas, diferentemente do que ocorreu no exemplo da fila do banco, ***pouco importa a sequência do sorteio***, pois a viagem será feita pelas 3 pessoas sorteadas, pouco importando a ordem, ok? Pensem ai um pouco...! Vocês acham que nesse caso haverá menos possibilidades ou mais, caso a ordem importasse?

Acertou quem respondeu menos possibilidades. Vejam que no caso da fila do banco para que um agrupamento se diferenciasse do outro, bastaria apenas a permuta de posições entre duas pessoas.

Aqui não, pessoal, pois como a ordem do sorteio não determinará um novo agrupamento, logo a simples inversão da ordem dos nomes sorteados não computará como uma nova possibilidade a ser somada no total das possibilidades. Para que tenhamos um novo agrupamento formado, será necessário a inclusão de uma nova pessoa no grupo, ok?



Resolvendo o problema SEM fórmulas:

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$= $ ***35 possibilidades*** $=$

Vamos entender a reComentários:

1° O numerador da fração indica o total de possibilidades caso a ordem de escolha determinasse uma nova situação. Caso fosse uma situação de ARRANJO. Ok?

2° O denominador da fração ***exclui justamente as possibilidades*** que ***não precisam ser contabilizadas***, pois a simples inversão do sorteio não determinará uma nova situação.

Resolvendo o problema COM fórmulas:

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} =$$

$$= \frac{7 \; x \; 6 \; x \; 5 \; x \; \cancel{4}!}{3! \; x \; \cancel{4}!} =$$

$$= \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot 1} =$$

$= $ ***35 possibilidades*** $=$

Comparem as duas soluções, com e sem fórmulas, e vejam que o que destaquei em ***azul*** nas duas situações representam a mesma coisa.

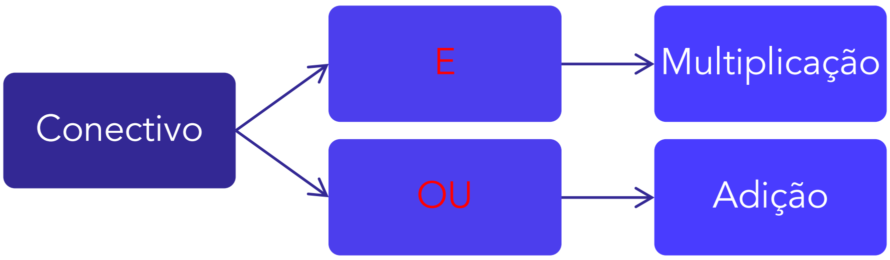
Ai, meus caros, cabe a você escolher a melhor forma de responder as questões. Eu prefiro resolver pelo método mais simples, ou seja, sem fórmulas, pois já vamos direto ao ponto. Porém, como falei antes, faz-se necessário, em alguns casos, saber a fórmula para pode encaixar na alternativa certa.

Antes de começarmos a fazer as questões, fiquem ligados nisso:

Nas questões de ***Análise Combinatória*** e ***Probabilidade*** vale o seguinte:

O uso do conectivo ***"e"*** será substituído por uma operação de ***multiplicação***.

O uso do conectivo ***"ou"*** será substituído por uma operação de ***adição***.



Exemplo 01:

Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Definiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas.

Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por:

Comentários:

Percebam que em momento algum foi dito na questão a quantidade de caracteres da senha antiga, pois será indiferente para resolver a questão. O importante é sabermos que serão incluídos dois novos caracteres – que também será indiferente onde eles serão colocados. Como são 05 vogais e serão diferenciadas as maiúsculas das minúsculas, na verdade teremos ai um total de 2 x 5 = 10 novas opções para cada caractere. Logo, o total de possibilidades será de 10 x 10 = 100.

Lembram da dica? Conectivo "e", devemos multiplicar; será utilizado um caractere e o outro, por isso:

= 10 x 10 =

= 100 =

Exemplo 02:

A senha de acesso a um jogo de computador consiste em quatro caracteres alfabéticos ou numéricos, sendo o primeiro necessariamente alfabético. O número de senhas possíveis será, então de:

Comentários:

Comecemos sempre pela restrição:

1° caractere: necessariamente alfabético, logo 26 possibilidades;

2° caractere: alfabético ou (+) numérico: 10 + 26 = 36 possibilidades;

3° caractere: alfabético ou (+) numérico: 10 + 26 = 36 possibilidades;

4° caractere: alfabético ou (+) numérico: 10 + 26 = 36 possibilidades.

O total de possibilidades será de:

= 26 x 36 x 36 x 36 =

= 26 x 36^3 =

Exemplo 03:

A diretoria de uma empresa é constituída por 7 diretores brasileiros e 4 japoneses. Uma comissão de seis diretores, sendo três brasileiros e três japoneses, será formada para representar a empresa em uma reunião. O número de comissões diferentes que podem ser formadas é igual a:

Comentários:

A comissão será formada por ***brasileiros*** **e (multiplicação)** ***japoneses***, ok?

Percebam que a ordem de escolha não importará na formação de uma nova comissão.

Uma nova comissão será formada se for incluída uma nova pessoa. Logo, teremos um caso de ***COMBINAÇÃO***, que é um tipo de agrupamento em que a disposição dos elementos dentro do grupo não determinará um novo grupo, ok?

Com fórmulas:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!x\,4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35 \text{ (Comissões de brasileiros)}$$

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!x\,1!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4 \text{ (Comissões de japoneses)}$$

Como o grupo será formado por comissões de brasileiros E japoneses, logo deveremos multiplicar os resultados obtidos: 35 x 4 = 140.

Sem fórmulas:

$$= \frac{7 \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{3!}} (\textbf{comissão de brasileiros}) \cdot \frac{4 \times \cancel{3 \times 2}}{\cancel{3!}} (\textbf{comissão de japoneses}) =$$

= 35 x 4 =

= 140 =

Aposta Estratégica

A ideia desta seção é apresentar os pontos do conteúdo que mais possuem chances de serem cobrados em prova, considerando o histórico de questões da banca em provas de nível semelhante à nossa, bem como as inovações no conteúdo, na legislação e nos entendimentos doutrinários e jurisprudenciais1.

Nossa Aposta Estratégica converge exatamente, meus amigos, na sucinta, mas, importante, diferença entre as duas maneiras de agrupar coisas:

Arranjo e Combinação.

Sabemos, muito bem, que algumas questões de Análise Combinatória são bem chatinhas de serem interpretadas, principalmente pelo curto prazo de tempo que temos para respondê-las.

No entanto, veremos que há uma quantidade bem mais significativa de questões que são respondidas diretamente pelo ***Princípio Fundamental da Contagem*** – PFC – ou, simplesmente, com o uso direto das ***Fórmulas*** de ***Arranjo*** e ***Combinação***, portanto:

[1] Vale deixar claro que nem sempre será possível realizar uma aposta estratégica para um determinado assunto, considerando que às vezes não é viável identificar os pontos mais prováveis de serem cobrados a partir de critérios objetivos ou minimamente razoáveis.

Tipos de Agrupamentos	
ARRANJO	*COMBINAÇÃO*
Ordem Importa ***Filas de Bancos, pódios, organização de cadeiras, grupos COM elementos de funções específicas etc.***	***Ordem Não Importa*** ***Sorteios de prêmios, jogos lotéricos, grupos com elementos SEM funções específicas etc.***

PEGADINHAS ESTRATÉGICAS

Querido aluno, cada assertiva abaixo contém uma "casca de banana" – será que você vai escorregar em alguma? (rs)

A ideia aqui é induzi-lo levemente a cometer erros, não com o intuito de desanimá-lo, mas para que você aumente a retenção do conteúdo estudado!

Vamos lá?

1. **Em um determinado tribunal temos 20 analistas e temos que escolher 3 destes para representar a instituição em um workshop sobre gestão administrativa. A melhor maneira de escolher esses 3 analistas é através de um arranjo.**

Aqui queremos passar para vocês as diferenças entre arranjo e combinações.

Para resolver questões que envolvam arranjo e combinação temos que ter em mente os seguintes passos:

- ➔ Se os elementos são iguais usamos o Princípio Fundamental da contagem;
- ➔ Se os elementos forem distintos utilizaremos o Arranjo, a combinação ou a permutação;
- ➔ Se a ordem for importante – será arranjo ou permutação (quando o número de elementos (n) é igual ao número de agrupamento (p)).
- ➔ Se a ordem não for importante – será uma combinação.

Para identificar se será um arranjo ou uma combinação termos que fazer os seguintes passos:

1) Achar um resultado possível;

2) inverter a ordem desse resultado

Se nessa inversão não houver diferença, então trata-se de uma combinação. Mas se houver será um arranjo.

Nesse exemplo dado no item, temos 20 analistas e desejamos escolher 3 para participar de um workshop. Vamos imaginar que entre esses analistas Maria, José e Carlos.

1) resultado possível: Maria – José – Carlos.

2) inverte o resultado: Carlos – José – Maria.

Vejam que mesmo invertendo o resultado teremos os mesmos analistas participando do workshop. Logo, como o resultado foi igual temos uma combinação. Teremos uma combinação sempre que estamos falando de grupo, comissão, time $\left(C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}\right)$.

Agora se ao invés de selecionar 3 analistas para ir a um workshop, fossem escolhidos para ganhar prêmios de produtividade, nesse caso teríamos um arranjo.

1) resultado possível: Maria – José – Carlos.

2) inverte o resultado: Carlos – José – Maria.

Aqui teríamos resultados diferentes, pois Maria ganharia o primeiro prêmio na primeira possibilidade e o último na segunda. Logo, trata-se de um arranjo $\left(A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}\right)$.

QUESTÕES ESTRATÉGICAS

Nesta seção, apresentamos e comentamos uma amostra de questões objetivas selecionadas estrategicamente: são questões com nível de dificuldade semelhante ao que você deve esperar para a sua prova e que, em conjunto, abordam os principais pontos do assunto.

A ideia, aqui, não é que você fixe o conteúdo por meio de uma bateria extensa de questões, mas que você faça uma boa revisão global do assunto a partir de, relativamente, poucas questões.

Questões CESGRANRIO

Q.01 (CESGRANRIO / PETROBRAS / Petróleo Júnior / 2018)

Uma arena esportiva possui exatamente 8 portões, numerados de 1 a 8. Essa arena é considerada aberta se, e somente se, pelo menos um dos seus portões estiver aberto. Por exemplo, seguem três maneiras diferentes de se ter essa arena aberta:

- ***Quando apenas o portão 3 está aberto;***
- ***Quando apenas o portão 6 está aberto;***
- ***Quando apenas os portões 3, 7 e 8 estão abertos.***

O número total de maneiras diferentes de se ter essa arena aberta é:

a) 40.320.

b) 40.319.

c) 256.

d) 255.

e) 36.

Comentários:

Pessoal, vejam que temos 8 portões e cada deles pode estar aberto ou fechado. Desta forma, o total de possibilidades de cada um dos portões é apresentada da seguinte forma:

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$$

$$= 2^8 =$$

$$= \mathbf{256} =$$

Sendo que, para que a arena esteja aberta é suficiente que apenas um dos portões esteja aberto. Logo, ela estará fechada em apenas uma hipótese, isto é, quando todos os portões estiverem fechados e isso só irá ***acontecer uma única vez***. Portanto, basta eliminar uma das possibilidades.

$$256 - 1 = \mathbf{255}$$

Uma bela de uma pegadinha aí, hein? Observem que na alternativa "C" tem a opção 256 para o candidato que se esqueceu de excluir a possibilidades de todos os portões estarem fechados.

Gabarito: D

Q.02 (CESGRANRIO - Escriturário (BB) /"Sem Área"/2018)

Um professor elaborou 10 questões diferentes para uma prova, das quais 2 são fáceis, 5 são de dificuldade média, e 3 são difíceis. No momento, o professor está na fase de montagem da prova. A montagem da prova é a ordem segundo a qual as 10 questões serão apresentadas. O professor estabeleceu o seguinte critério de distribuição das dificuldades das questões, para ser seguido na montagem da prova:

Questão	Dificuldade
1	Fácil
2	Fácil
3	Média
4	Média
5	Média
6	Média
7	Média
8	Difícil
9	Difícil
10	Difícil

De quantas formas diferentes o professor pode montar a prova seguindo o critério estabelecido?

a) 2520.

b) 128.

c) 6.

d) 1440.

e) 252.

Comentários:

Pessoal, nessa questão utilizaremos o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Pelo enunciado temos 10 questões distribuídas da seguinte forma:

- 2 fácies
- 5 médias
- 3 difíceis

Aplicando o PFC.

2	1	5	4	3	2	1	3	2	2
Fácies		Médias					Difíceis		

Fazendo as multiplicações teremos o seguinte:

$$= 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 =$$

$$= 2 \times 120 \times 6 =$$

$$= 1440 =$$

Gabarito: D

Q.03 (CESGRANRIO / Geólogo (PETROBRAS) / Júnior/2018)

Uma Organização sem fins lucrativos decidiu construir 3 estações de monitoramento sísmico, idênticas. Sabe-se que cada estação deverá ficar em um terreno diferente e que a Organização possui um total de 20 terrenos atualmente disponíveis.

De quantas formas diferentes essa Organização poderá escolher os 3 terrenos que receberão as estações, dentre os 20 terrenos que possui?

a) 8.000.

b) 6.840.

c) 3.420.

d) 1.140.

e) 60.

Comentários:

Nessa questão como as 3 estações são idênticas não importa a ordem. Desta forma, utilizaremos uma combinação de 20 elementos tomados 3 a 3.

A fórmula da combinação é a seguinte:

$$\boldsymbol{C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

$$C_{20,3} = \frac{20!}{3!\,(20-3)!} = \frac{20!}{3!\,\cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 17!}$$

Fazendo as simplificações ficamos com,

$$C_{20,3} = 10 \cdot 19 \cdot 6$$

$$C_{20,3} = 1.140$$

Gabarito: D

Q.04 (CESGRANRIO / TRANSPETRO / Transporte Marítimo / 2018)

De um quadro de profissionais com quatro engenheiros e cinco técnicos pretende-se formar um grupo de cinco profissionais com, pelo menos, um engenheiro e um técnico.

Nessas condições, quantas possibilidades diferentes existem de formação desse grupo de cinco profissionais?

a) 19.

b) 20.

c) 120.

d) 125.

e) 126.

Comentários:

Pessoal, temos os seguintes dados

- 4 engenheiros;
- 5 técnicos;
- Total de 9 profissionais.

Queremos formar um grupo com 5 profissionais, sendo que temos que ter, pelo mesmo, um engenheiro e um técnico. Fazendo a combinação de 20 tomados 5 a 5 teremos o seguinte:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$C_{9,5} = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = \frac{9!}{5!\ \cdot 4!} = \frac{9\ \cdot\ 8 \cdot\ 7\ \cdot\ 6\ \cdot 5!}{5!\ \cdot\ 4\ \cdot\ 3\ \cdot\ 2\ \cdot\ 1}$$

Fazendo as simplificações teremos o seguinte:

$$C_{9,5} = 9\ \cdot\ \ 2\ \cdot\ \ 7 = 126$$

Com essa combinação total é possível que um dos grupos tenha apenas técnicos, pois temos 5 técnicos. Desta forma, teremos que eliminar um dos grupos ficando com **125**.

Gabarito: D

Q.05 (CESGRANRIO / Administrador Júnior / TRANSPETRO /2018)

Um certo time de vôlei possui 15 jogadores: 4 meios de rede, 5 ponteiros, 3 opostos e 3 levantadores. Desses jogadores, 12 devem ser relacionados para uma partida, sendo que, dentre os jogadores relacionados, deve haver, pelo menos, 1 levantador, 1 oposto, 2 ponteiros e 2 meios de rede para compor o time titular. O treinador deve especificar na súmula quem serão os jogadores titulares e quem serão os reservas.

De quantas formas ele pode fazer isso?

a) 540.

b) 6480.

c) 12960.

d) 45360.

e) 62370.

Comentários:

Nessa questão, temos as seguintes informações:

- Total de jogadores = T = 15
- Meio de rede = MR = 4
- Ponteiros = P = 5
- Opostos = O = 3
- Levantadores = L = 3

Desses jogadores, 12 irão para partida. Sendo que, pelo menos, 1 L, 1 O, 2 P, 2 MR deve compor o time. Logo, podemos fazer a seguinte representação:

L	O	P		MR		Outros					

Vejam que que o Levantador e o Opostos irão ocupar pelo menos uma posição cada e os Ponteiros e Meios de Rede pelo menos duas posições cada. Desta forma, temos que tirar esses jogadores primeiro e só depois fazer a combinação com o restante.

$C_{3,1}$	$C_{3,1}$	$C_{5,2}$		$C_{4,2}$							
L	O	P		MR		Outros					

Vejam que depois que atendemos as condições dadas pela banca irão ficar faltando 6 jogadores para compor os outros. Sendo assim, teremos uma combinação de $C_{9,6}$ (dos 15 jogadores já foram selecionados 6 e restaram 9 para escolher os 6 faltantes).

$C_{3,1}$	$C_{3,1}$	$C_{5,2}$	$C_{4,2}$	$C_{9,6}$
L	O	P	MR	Outros

Agora que a questão estar estruturada iremos utilizar a fórmula da combinação.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$C_{3,1} = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = \frac{3\cdot 2!}{1\cdot 2!} = 3$$

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 1\cdot 3!} = 5\cdot 2 = 10$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2\cdot 1\cdot 2!} = 2\cdot 3 = 6$$

$$C_{9,6} = \frac{9!}{6!\,(9-6)!} = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84$$

$$= C_{3,1}\cdot C_{3,1}\cdot C_{5,2}\cdot C_{4,2}\cdot C_{9,6} =$$

$$= 3\cdot 3\cdot 10\cdot 6\cdot 84 =$$

= 45.360 =

OBS: Pessoal, essas combinações poderiam ser feitas pelo atalho. Apenas a $C_{9,6}$ que seria melhor pela fórmula.

Quando temos uma combinação de qualquer número por 1 a resposta é o próprio o número.

$$C_{3,1} = 3$$

As outras combinações poderiam ter sido feitas da seguinte forma:

$$C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

$$C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

$$C_{9,6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot 7 =$$

$$= \mathbf{84} =$$

Gabarito: D

Questões FGV

Q.06 (FGV / SEFAZ-ES / CONSULTOR / 2022)

Dois casais irão se sentar em 4 cadeiras consecutivas de uma fila de um cinema.

O número de maneiras de eles sentarem nas 4 cadeiras, de modo que cada casal se sente junto, é igual a

a) 4.

b) 6.

c) 8.

d) 12.

e) 16.

Comentários:

A melhor forma de resolver as questões de Análise Combinatória é se colocar no lugar da situação, pense:

O casal deve se sentar juntos, ok?

Você olha para os quatros inicialmente e consegue enxergar quantas possibilidades de escolha para coloca na primeira cadeira?

4 possibilidades

Agora, quando foi escolher o próximo não haverá como escolher visto que deverá ser necessariamente o cônjuge do primeiro, ok?

1 possibilidade

Na terceira cadeira, você terá duas possibilidades e na última cadeira apenas uma, ok?

Agora, pelo PFC basta multiplicarmos:

$$= 4 \times 1 \times 2 \times 1 =$$

= 8 possibilidades =

Gabarito: C

Q.07 (FGV / SEFAZ-BA / AGENTE DE TRIBUTOS / 2022)

Quatro pessoas deverão fazer um trabalho de pesquisa sobre certo tema. O trabalho pode ser feito individualmente ou em dupla.

O número de modos diferentes que essas 4 pessoas podem se arrumar para fazer o trabalho é

a) *6.*
b) *8.*
c) *9.*
d) *10.*
e) *12.*

Comentários:

O trabalho pode ser feito individualmente OU em dupla.

O número de modos diferentes que essas 4 pessoas podem se arrumar para fazer o trabalho é:

O conectivo ***OU*** deve ser trocado por uma operação de adição, ok?

Parte 1:

INDIVIDUALMENTE:

Só há 04 possibilidades, visto que são 4 pessoas.

Parte 2:

DUPLA:

Como a ordem não implicará em um novo agrupamento, temos uma combinação.

Ou você usa a forma de combinação ou o PFC, mas se lembrem de dividir o resultado por 2!

Assim: 4 x 3 = 12 (se fosse arranjo seria essa a resposta), mas como é combinação vamos dividir por 2!, portanto temos um total de ***06 possibilidades***.

Agora, basta somarmos 06 e 04.

Gabarito: D

Q.08 (FGV / EPE / 2022)

De um grupo composto por cinco homens e cinco mulheres, serão sorteados ao acaso dois homens e duas mulheres para formar um subgrupo representativo do grupo. O número de diferentes subgrupos que podem ser formados é igual a

- ***a) 60.***
- ***b) 80.***
- ***c) 100.***
- ***d) 120.***
- ***e) 160.***

Comentários:

Questão bem simples, ou iremos fazer $C_{5,2}$ x $C_{5,2}$, ou pelo PFC dividindo por 2!.

$C_{5,2}$ = 10, como são dois subgrupos, logo 10 x 10 = 100

Gabarito: C

Q.09 (FGV / Pref. Angra dos Reis / Monitor / 2019)

O número de filas que pode ser formado com três pessoas, X, Y e Z, é

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 5

(e) 6

Comentários:

Uma simples questão do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) que será resolvida apenas por multiplicações, ok?

Não se esqueçam de que o PFC será usado apenas quando a troca interna entre elementos determinará um novo grupo, ok?

Veja que serão formadas FILAS. Nas filas, a simples troca de posição de um elemento com o outro determinará uma nova situação, ok?

Logo, nossa resposta será:

$$= 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= 6 =$$

Gabarito: E

Q.10 (FGV / Assembleia Legislativa de RO / Assistente Legislativo / 2018)

Em um circuito elétrico há 4 disjuntores que podem ficar, cada um deles, independente dos demais, nas posições "ligado" ou "desligado".

O número de maneiras diferentes de se posicionar ("ligado" ou "desligado") esses 4 disjuntores é:

(a) 4

(b) 6

(c) 8

(d) 12

(e) 16

Comentários:

Temos aqui mais uma questão do PFC. Sabemos que são 04 disjuntores e que so existem 02 maneiras para cada um estar. Ou ligado ou desligado.

Logo, nossa resposta é dada por:

$$= 2^4 =$$

$$= 16 =$$

Gabarito: E

Questões CEBRASPE

Q.11 (Cebraspe / Pref. São Cristóvão / Professor / 2019)

Com relação a sistemas lineares e análise combinatória, julgue o próximo item.

***Situação hipotética:* No jogo de basquete, cada um dos cinco jogadores de um time pode ocupar as seguintes posições: armador, ala armador, ala, líbero e pivô. O elenco do time Alfa é formado por 2 armadores, 2 alas armadores, 3 alas, 2 líberos e 3 pivôs.**

***Assertiva:* Nessa situação, sabendo-se que em quadra jogam apenas 5 jogadores por time e que os demais ficam no banco, é correto afirmar que existem 216 formas distintas de montar o time Alfa para iniciar a partida com exatamente um pivô, um armador e um ala.**

- Certo
- Errado

Comentários:

Vamos separar as informações para não gerar confusão e falta de atenção, no momento dos cálculos:

Total de Jogadores em Quadra: 05

Posições: armador, ala armador, ala, líbero e pivô

Elenco do Time: 2 armadores, 2 alas armadores, 3 alas, 2 líberos e 3 pivôs

Quantas formas distintas existem com: um pivô, um armador e um ala

Devem figurar no time, necessariamente, no time:

01 pivô, 01 armador e 01 ala

$$= 03 \cdot 02 \cdot 03 =$$

$$= \mathbf{18} =$$

Como as posições de pivô, armador e ala só podem ter 1 jogador, logo sobram:

2 alas armadores e 2 líberos (4 jogadores).

As opções para completar as duas últimas posições de quadra são:

$$\mathbf{4 \cdot 3 = 12 \text{ formas}}$$

No total, temos $18 \cdot 12 =$

216 formas diferentes para montar o time

Gabarito: Certo

Q.12 (Cebraspe/ Polícia Federal / Escrivão / 2018)

Para cumprimento de um mandado de busca e apreensão serão designados um delegado, 3 agentes (para a segurança da equipe na operação) e um escrivão. O efetivo do órgão que fará a operação conta com 4 delegados, entre eles o delegado Fonseca; 12 agentes, entre eles o agente Paulo; e 6 escrivães, entre eles o escrivão Estêvão.

Em relação a essa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Considerando todo o efetivo do órgão responsável pela operação, há mais de 5.000 maneiras distintas de se formar uma equipe para dar cumprimento ao mandado.

- *Certo.*
- *Errado.*

Comentários:

O problema pede que se calcule o número de maneiras distintas de se formar uma equipe com as condições dadas.

Temos um problema cujo agrupamento é determinado por Combinações, visto que a simples troca interna de posição entre elementos não determinará um grupo distinto do outro, ok?

01 delegado E 03 agentes E 01 escrivão

Vejam que iremos trocar os conectivos **"E"** pela operação de multiplicação, ok?

A questão ate quis enganar o candidato dando os nomes de alguns elementos, mas isso nada muda, ok?

O número total de possibilidades para a formação da equipe é igual a:

$$= C_{4,1} \cdot C_{12,3} \cdot C_{6,1} =$$

Uma Dica para ganhar velocidade:

Quando o ***"p"*** da $C_{n,p}$ for **1**, o resultado será o próprio ***"n".***

Logo: $C_{4,1} = 4$ e $C_{6,1} = 6$

$$= 4 \cdot C_{12,3} \cdot 6 =$$

$$= 4 \cdot 220 \cdot 6 =$$

$$= \mathit{5280} =$$

Gabarito: Certo

Questões Diversas

Q.13 (ENEM / 2017)

Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.
A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.
A opção que mais se adequa às condições da empresa é:

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

Comentários:

Bem, pessoal, essa é aquela questão do tipo "chatinha e trabalhosa".

O cara tem que verificar alternativa por alternativa para ver qual se encaixa na restrição dada pelo enunciado.
Nesses tipos de questões, geralmente, a resposta correta está na alternativa "D" ou "E", a ideia do examinador, nesse tipo de questão, não é somente saber se você detém o conhecimento e a habilidade para reComentários do problemas, ele quer também que você perca tempo fazendo o número máximo possível de cálculos e é por isso que as respostas certas sempre estão nas últimas alternativas.

Vejamos:

$$1.000.000 < Total\ de\ Senhas \leq 2.000.000$$

Vamos resolver a questão observando a ordem inversa das alternativas e a condição imposta pelo enunciado.

A reComentários será feira pelo Princípio Fundamental da Contagem P.F.C.
Temos 26 letras e 10 algarismos disponíveis.

Na opção (E): L L L D D → $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 1.757.600$
Haahah encontramos logo a resposta, pois o número acima satisfaz de imediato a condição imposta. Se você começasse pelo caminho normal de todos os alunos, você demoraria um tempo 4 vezes maior, pois iria testar as alternativas (A), (B), (C), (D) e somente depois iria achar a condição sendo satisfeita na opção (E).
Apenas 42% dos candidatos acertaram essa questão.

Gabarito: E

LISTA DE QUESTÕES ESTRATÉGICAS

Questões CESGRANRIO

Q.01 (CESGRANRIO / PETROBRAS / Petróleo Júnior / 2018)

Uma arena esportiva possui exatamente 8 portões, numerados de 1 a 8. Essa arena é considerada aberta se, e somente se, pelo menos um dos seus portões estiver aberto. Por exemplo, seguem três maneiras diferentes de se ter essa arena aberta:

- ***Quando apenas o portão 3 está aberto;***
- ***Quando apenas o portão 6 está aberto;***
- ***Quando apenas os portões 3, 7 e 8 estão abertos.***

O número total de maneiras diferentes de se ter essa arena aberta é:

a) 40.320.

b) 40.319.

c) 256.

d) 255.

e) 36.

Q.02 (CESGRANRIO - Escriturário (BB) /"Sem Área"/2018)

Um professor elaborou 10 questões diferentes para uma prova, das quais 2 são fáceis, 5 são de dificuldade média, e 3 são difíceis. No momento, o professor está na fase de montagem da prova. A montagem da prova é a ordem segundo a qual as 10 questões serão apresentadas. O professor estabeleceu o seguinte critério de distribuição das dificuldades das questões, para ser seguido na montagem da prova:

Questão	Dificuldade
1	Fácil
2	Fácil
3	Média
4	Média
5	Média
6	Média
7	Média
8	Difícil
9	Difícil
10	Difícil

De quantas formas diferentes o professor pode montar a prova seguindo o critério estabelecido?

a) 2520.

b) 128.

c) 6.

d) 1440.

e) 252.

Q.03 (CESGRANRIO / Geólogo (PETROBRAS) / Júnior/2018)

Uma Organização sem fins lucrativos decidiu construir 3 estações de monitoramento sísmico, idênticas. Sabe-se que cada estação deverá ficar em um terreno diferente e que a Organização possui um total de 20 terrenos atualmente disponíveis.

De quantas formas diferentes essa Organização poderá escolher os 3 terrenos que receberão as estações, dentre os 20 terrenos que possui?

a) 8.000.

b) 6.840.

c) 3.420.

d) 1.140.

e) 60.

Q.04 (CESGRANRIO / TRANSPETRO / Transporte Marítimo / 2018)

De um quadro de profissionais com quatro engenheiros e cinco técnicos pretende-se formar um grupo de cinco profissionais com, pelo menos, um engenheiro e um técnico.

Nessas condições, quantas possibilidades diferentes existem de formação desse grupo de cinco profissionais?

a) 19.

b) 20.

c) 120.

d) 125.

e) 126.

Q.05 (CESGRANRIO / Administrador Júnior / TRANSPETRO /2018)

Um certo time de vôlei possui 15 jogadores: 4 meios de rede, 5 ponteiros, 3 opostos e 3 levantadores. Desses jogadores, 12 devem ser relacionados para uma partida, sendo que, dentre os jogadores relacionados, deve haver, pelo menos, 1 levantador, 1 oposto, 2 ponteiros e 2 meios de rede para compor o time titular. O treinador deve especificar na súmula quem serão os jogadores titulares e quem serão os reservas.

De quantas formas ele pode fazer isso?

a) 540.

b) 6480.

c) 12960.

d) 45360.

e) 62370.

Questões FGV

Q.06 (FGV / SEFAZ-ES / CONSULTOR / 2022)

Dois casais irão se sentar em 4 cadeiras consecutivas de uma fila de um cinema.

O número de maneiras de eles sentarem nas 4 cadeiras, de modo que cada casal se sente junto, é igual a

a) 4.

b) 6.

c) 8.

d) 12.

e) 16.

Q.07 (FGV / SEFAZ-BA / AGENTE DE TRIBUTOS / 2022)

Quatro pessoas deverão fazer um trabalho de pesquisa sobre certo tema. O trabalho pode ser feito individualmente ou em dupla.

O número de modos diferentes que essas 4 pessoas podem se arrumar para fazer o trabalho é

a) 6.

b) 8.

c) 9.

d) 10.

e) 12.

Q.08 (FGV / EPE / 2022)

De um grupo composto por cinco homens e cinco mulheres, serão sorteados ao acaso dois homens e duas mulheres para formar um subgrupo representativo do grupo. O número de diferentes subgrupos que podem ser formados é igual a

a) 60.

b) 80.

c) 100.

d) 120.

e) 160.

Q.09 (FGV / Pref. Angra dos Reis / Monitor / 2019)

O número de filas que pode ser formado com três pessoas, X, Y e Z, é

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

Q.10 (FGV / Assembleia Legislativa de RO / Assistente Legislativo / 2018)

Em um circuito elétrico há 4 disjuntores que podem ficar, cada um deles, independente dos demais, nas posições "ligado" ou "desligado".

O número de maneiras diferentes de se posicionar ("ligado" ou "desligado") esses 4 disjuntores é:

a) 4

b) 6

c) 8

d) 12

e) 16

Questões CEBRASPE

Q.11 (Cebraspe / Pref. São Cristóvão / Professor / 2019)

Com relação a sistemas lineares e análise combinatória, julgue o próximo item.

Situação hipotética: No jogo de basquete, cada um dos cinco jogadores de um time pode ocupar as seguintes posições: armador, ala armador, ala, líbero e pivô. O elenco do time Alfa é formado por 2 armadores, 2 alas armadores, 3 alas, 2 líberos e 3 pivôs.

Assertiva: Nessa situação, sabendo-se que em quadra jogam apenas 5 jogadores por time e que os demais ficam no banco, é correto afirmar que existem 216 formas distintas de montar o time Alfa para iniciar a partida com exatamente um pivô, um armador e um ala.

- Certo
- Errado

Q.12 (Cebraspe/ Polícia Federal / Escrivão / 2018)

Para cumprimento de um mandado de busca e apreensão serão designados um delegado, 3 agentes (para a segurança da equipe na operação) e um escrivão. O efetivo do órgão que fará a operação conta com 4 delegados, entre eles o delegado Fonseca; 12 agentes, entre eles o agente Paulo; e 6 escrivães, entre eles o escrivão Estêvão.

Em relação a essa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Considerando todo o efetivo do órgão responsável pela operação, há mais de 5.000 maneiras distintas de se formar uma equipe para dar cumprimento ao mandado.

- *Certo.*
- *Errado.*

Questões Diversas

Q.13 (ENEM / 2017)

Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.
A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.
A opção que mais se adequa às condições da empresa é:

a) ***I***
b) ***II***
c) ***III***
d) ***IV***
e) ***V***

Gabarito

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	D	D	D	C	D	C	E	E
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
CC	CC	E	*	*	*	*	*	*	*

TEORIA DOS CONJUNTOS

Sumário

O que é mais cobrado dentro do assunto

Teoria dos Conjuntos	Incidência
CONCEITOS INICIAIS / OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS / RELAÇÃO DE INCLUSÃO E DE PERTINÊNCIA	100,00%
TOTAL	100,0%

ROTEIRO DE REVISÃO E PONTOS DO ASSUNTO QUE MERECEM DESTAQUE

A ideia desta seção é apresentar um roteiro para que você realize uma revisão completa do assunto e, ao mesmo tempo, destacar aspectos do conteúdo que merecem atenção.

Para revisar e ficar bem preparado no assunto, você precisa, basicamente, seguir os passos a seguir:

Teoria dos Conjuntos

Um conjunto qualquer pode ser representado por ***extensão*** e, quando isso ocorre, escrevemos todos os elementos que pertencem ao conjunto entre duas chaves, exemplo:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Portanto, dizemos que o elemento $0 \in A$ (zero pertence ao conjunto A). A relação de pertinência apenas deve ser usada para afirmar se um determinado ***elemento*** pertence ou não a um ***conjunto***, portanto, é uma relação de elemento para conjunto, ok?

Agora, se a gente for comparar dois conjuntos quaisquer, usaremos a ***Relação de Inclusão***, exemplo:

Dados os Conjuntos:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e o conjunto } B = \{3, 5\}$$

Dizemos que o conjunto B é ***subconjunto*** de A, pois todo e qualquer elemento de B, também, é de A. Logo, $B \subset A$ (o conjunto "B" está contido no conjunto "A")

NÃO PODEMOS DIZER QUE O CONJUNTO "***B***" ~~***PERTENCE***~~ AO CONJUNTO "***A***".

A relação entre conjuntos é a de está contido, não está contido, contém e não contém, chamada de ***Relação de Inclusão***.

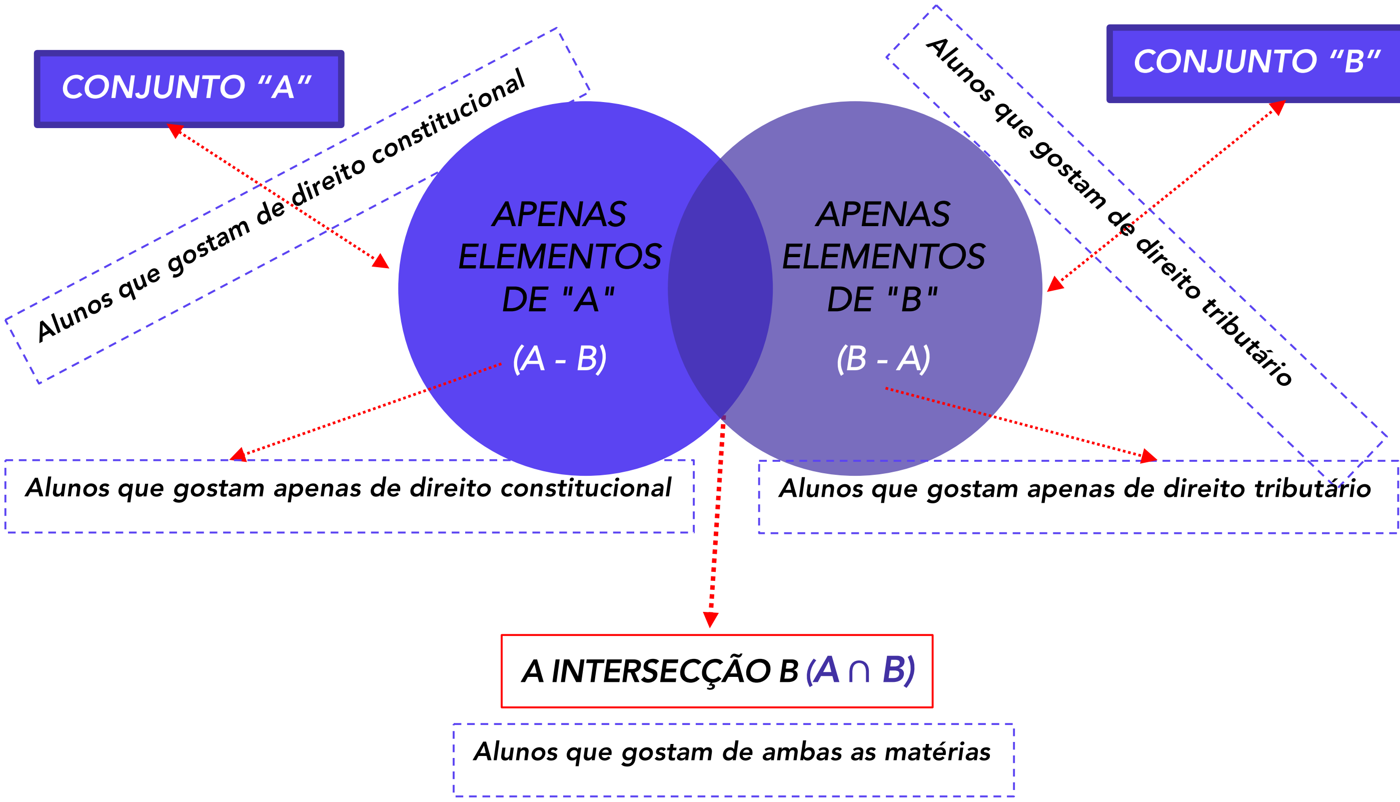
RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA	***RELAÇÃO DE INCLUSÃO***
DE ELEMENTO P/ CONJUNTO	***DE CONJUNTO P/ CONJUNTO***
Pertence $\in$ ***/ Não Pertence*** $\notin$	***Está Contido*** $\subset$ ***/ Não Está Contido*** $\not\subset$ ***Contém*** $\supset$ ***/ Não Contém*** $\not\supset$

Operações Entre Conjuntos

<u>União, Intersecção E Diferença</u>

Diagramas de Venn Euler

Eles servem para enxergamos as questões de forma mais simples e, consequentemente, termos os resultados mais rápidos. Analisem o diagrama a seguir:



OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS			
A – B	**B – A**	**A ∩ B**	**A ∪ B**
Elementos que estão em **A**, mas não em **B**. Ou seja: Apenas em ***"A"***	Elementos que estão em **B**, mas não em **A**. Ou seja: Apenas em ***"B"***	Elementos ***comuns*** aos dois conjuntos.	A reunião de elementos de todos os conjuntos. Elementos de ***A ou B***.

Pessoal, fiquem atentos ao seguinte:

Sempre que foram resolver questões com o Diagrama de Venn Eular, comecem a preencher, obrigatoriamente, pela região que envolver a maior quantidade de conjuntos.

Exemplo:

Questões com 02 conjuntos, comecem por ***A ∩ B.***

Questões com 03 conjuntos, comecem por ***A ∩ B ∩ C***, depois pelas intersecções que envolvem os conjuntos dois a dois.

E fiquem bem atentos a essa fórmula, ela resolve grande parte das questões sobre esse assunto, ok?

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Vamos resolver uma questão cobrada pela ***Cebraspe***, em ***2018***, no concurso para ***Técnico Tributário da Receita Estadual - SEFAZ - RS***:

Em determinado dia, os órgãos responsáveis atenderam 50 contribuintes para resolver pendências relativas ao IPTU, ao IPVA e a outros tributos. Sabe-se que foram atendidos:

- ✓ ***18 contribuintes com pendências de IPTU;***
- ✓ ***23 contribuintes com pendências de IPVA;***
- ✓ ***8 contribuintes com pendências de IPTU e IPVA.***

Nesse caso, a quantidade de contribuintes atendidos cujas pendências não se referiam a IPTU nem a IPVA foi igual a:

a) 15.
b) 17.
c) 25.
d) 9.
e) 10.

Comentários:

Inicialmente, a questão nos informou que ***50 contribuintes*** foram atendidos. Dentre eles, alguns sobre pendências do IPTU, uns com pendências no IPVA, outros com pendências em ambos os tributos e, por último, alguns com pendências diversas.

n (IPTU) = 18
n (IPVA) = 23
n (IPTU e IPVA) = 8, sabemos que esse conjunto se referente a intersecção entre aqueles com pendências nos dois tributos ao mesmo tempo e pode ser assim representado:

n (IPTU ∩ IPVA) = 08

Jogando na fórmula, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

n (IPTU U IPVA) = n (IPTU) + n (IPVA) - n (IPTU e IPVA)

n (IPTU U IPVA) = 18 + 23 – 8 = 33

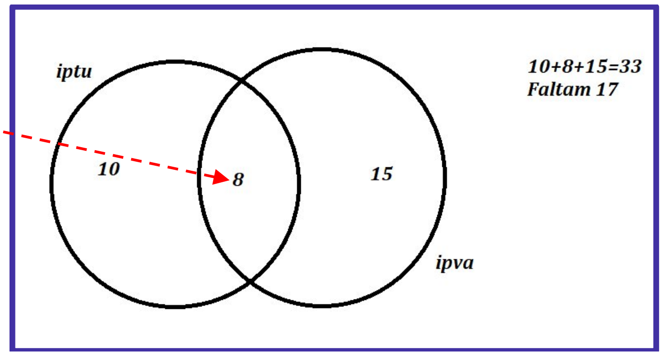
Vejam que, dentre os 50 contribuintes atendidos, 33 foram resolver problemas envolvendo IPTU ou IPVA, portanto, aqueles que foram resolver problemas diversos será dado por:

= 50 – 33 =

= 17 contribuintes =

Essa solução também poderia ser feita pelo ***Diagrama de Venn***:

Devemos começar sempre pelo conjunto intersecção



Gabarito: B

Agora, vamos às questões.

QUESTÕES ESTRATÉGICAS

Nesta seção, apresentamos e comentamos uma amostra de questões objetivas selecionadas estrategicamente: são questões com nível de dificuldade semelhante ao que você deve esperar para a sua prova e que, em conjunto, abordam os principais pontos do assunto.

A ideia, aqui, não é que você fixe o conteúdo por meio de uma bateria extensa de questões, mas que você faça uma boa revisão global do assunto a partir de, relativamente, poucas questões.

Q.01 (CESGRANRIO / (TRANSPETRO) /2012)

Um grupo de 100 jovens forneceu informações sobre as três redes sociais mais utilizadas no País: Facebook, MSN e Twitter. Os resultados encontrados foram os seguintes:

- ***20 não utilizam nenhuma rede social.***
- ***32 só utilizam o Facebook.***
- ***65 utilizam o Facebook.***
- ***20 só utilizam o Twitter.***
- ***2 utilizam o Facebook, o Twitter e o MSN.***
- ***51 utilizam apenas dois dos três meios de comunicação.***

Um jovem desse grupo é selecionado ao acaso. Dado que ele utiliza, pelo menos, uma das três redes sociais, a probabilidade de ele utilizar apenas o Twitter e o MSN é

a) 0,16

b) 0,20

c) 0,25

d) 0,30

e) 0,35

Comentários:

Pessoal, essa é uma questão clássica de conjuntos. Temos as seguintes informações:

• 20 não utilizam nenhuma rede social.

• 32 só utilizam o Facebook.

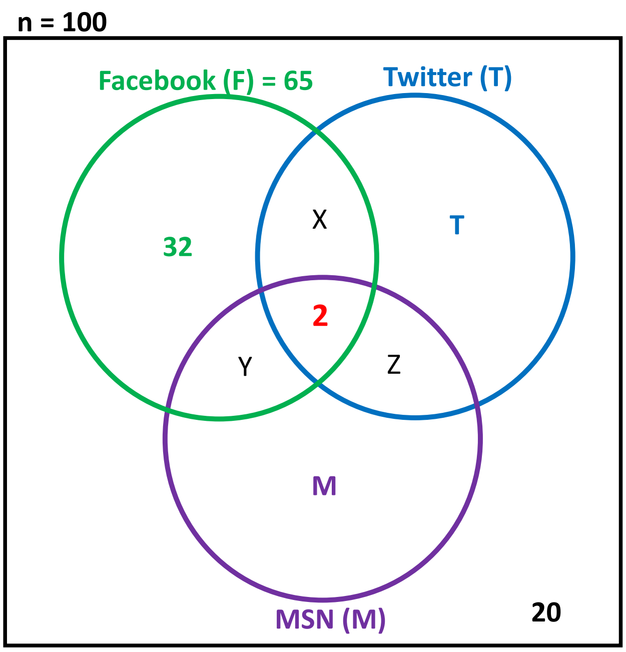
• 65 utilizam o Facebook.

• 20 só utilizam o Twitter.

• 2 utilizam o Facebook, o Twitter e o MSN.

• 51 utilizam apenas dois dos três meios de comunicação.

A banca quer saber a probabilidade de utilizar apenas o Twitter e o MSN, isto é, a região Z do diagrama abaixo.



O Facebook tem 65, desse 32 só usam o Facebook. Logo,

$65 = 32 + X + Y + 2$

$X + Y = 31$

Outra informação dada foi a seguinte: 51 utilizam apenas dois dos três meios de comunicação. Portanto,

X + Y + Z = 51

Onde,

X + Y = 31

31 + Z = 51

Z = 51 + 31

Z = 20

Agora basta saber a probabilidade de utilizar Twitter e MSN. Sabemos que apenas 80 pessoas utilizam alguma rede social. Logo, esse 80 será o total e a região Z o que queremos.

$$P = \frac{Z}{total} = \frac{20}{80} = 0{,}25$$

Gabarito: C

Q.02 (CESGRANRIO / Profissional Júnior (BR) /2015)

Dados três conjuntos M, N e P, tem-se que o conjunto M∩(N∪P) é igual ao conjunto

a) M∩N∩P

b) (M∩N)∪P

c) M∪(N∩P)

d) (M∩N)∪(M∩P)

e) (M∪N)∩(M∪P)

Comentários:

Nessa questão, podemos utilizar as propriedades distributivas conjuntos:

$$(\mathbf{1}) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(\mathbf{2}) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Vejam, que utilizando a propriedade **2** chegamos à resposta da questão.

$$M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$$

Gabarito: D

Q.03 (CESGRANRIO / Técnico Científico (BASA) / 2014)

O conjunto diferença X - Y, entre dois subconjuntos X e Y de um mesmo conjunto universo U, é definido por:

X - Y = {u ∈ U / u ∈ X e u ∉ Y}

Considere três subconjuntos, A, B e C, do mesmo conjunto Universo U.

O conjunto A−(B∩C) é igual ao conjunto

a) (A − B) ∩ (A − C)

b) (A − B) ∪ (A − C)

c) (A − B) ∩ C

d) (A − B) ∪ C

e) (A − B) − C

Comentários:

Vamos supor que os valores dos conjuntos A, B e C sejam os seguintes:

A = {1,2,3,4,5}

B = {1,3,5,7,9}

C = {2,3,8,10}

A questão que saber qual conjunto é igual ao conjunto ***A − (B ∩ C):***

$$A - (B \cap C) = \{1,2,3,4,5\} - (\{1,3,5,7,9\} \cap \{2,3,8,10\})$$

$$A - (B \cap C) = \{1,2,3,4,5\} - \{3\}$$

$$A - (B \cap C) = \{1,2,4,5\}$$

Desta forma, teremos que encontrar uma alternativa que der um conjunto igual a esse.

Letra A – *(A − B) ∩ (A − C)*

$$(A - B) \cap (A - C) = (\{1,2,3,4,5\} - \{1,3,5,7,9\}) \cap (\{1,2,3,4,5\} - \{2,3,8,10\})$$

$$(A - B) \cap (A - C) = (\{2,4\}) \cap (\{1,4,5\})$$

$$(A - B) \cap (A - C) = \{4\}$$

Errada.

Letra B – *(A − B) ∪ (A − C)*

$$(A - B) \cup (A - C) = (\{1,2,3,4,5\} - \{1,3,5,7,9\}) \cup (\{1,2,3,4,5\} - \{2,3,8,10\})$$

$$(A - B) \cup (A - C) = \{2,4\} \cup \{1,4,5\}$$

$$(A - B) \cup (A - C) = \{1,2,4,5\}$$

Correta. Vejam que os conjuntos são iguais. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) = \{1,2,4,5\}$

Letra C – *(A − B) ∩ C*

$$(A - B) \cap C = (\{1,2,3,4,5\} - \{1,3,5,7,9\}) \cap \{2,3,8,10\}$$

$$(A - B) \cap C = \{2,4\} \cap \{2,3,8,10\}$$

$$(A - B) \cap C = \{2\}$$

Errada.

Letra D – *(A − B) U C*

$$(A - B) \cap C = (\{1,2,3,4,5\} - \{1,3,5,7,9\}) \cup \{2,3,8,10\}$$

$$(A - B) \cap C = \{2,4\} \cup \{2,3,8,10\}$$

$$(A - B) \cap C = \{2,3,4,8,10\}$$

Errada.

Letra E – *(A − B) − C*

$$(A - B) - C = (\{1,2,3,4,5\} - \{1,3,5,7,9\}) - \{2,3,8,10\}$$

$$(A - B) - C = \{2,4\} - \{2,3,8,10\}$$

$$(A - B) - C = \{4\}$$

Errada.

Gabarito: B

Q.04 (CESGRANRIO / PETROBRAS / Júnior / 2012)

Numa certa comunidade, 35% de seus habitantes são leitores do jornal M; 40% são leitores do jornal N; 30% são leitores do jornal P; 25% leem os jornais M e N; 15% leem os jornais M e P; 20% leem os jornais N e P; e 10% leem os três jornais.

Se o contingente de habitantes dessa comunidade que não leem nenhum dos três jornais está entre 270 e 360, então o contingente de leitores exclusivos do jornal M se situa entre

a) 30 e 50

b) 20 e 40

c) 30 e 40

d) 200 e 300

e) 210 e 280

Comentários:

Pessoal, a primeira coisa a ser feita é organizar as informações dada pela banca.

Jornal M = 35%

Jornal N = 40%

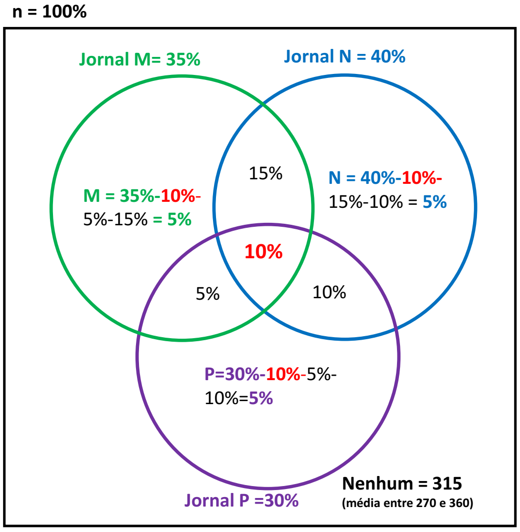
Jornal M e N = 25%

Jornal M e P = 15%

Jornal N e P = 20%

Jornal M, N e P = 10%.

Agora é só montar o diagrama. Primeiro começa pela informação das 3 intersecções, depois de 2 e por último apenas uma informação. A diagrama ficará da seguinte forma:



A banca informou que entre 270 e 360 não leem nenhum jornal. Logo, em média 315 não leem nenhum dos jornais. A primeira coisa a ser feita é saber o quanto esses 315 corresponde em porcentagem e com isso encontra quantos leitores em média leem apenas o jornal M.

Para isso, iremos fazer o somatório de todas as porcentagens que estão no diagrama.

10% + 15% +10% + 5% + 5% + 5% + 5% = 55%

Desta forma, para completar os 100% faltam 45%. Esse 45% é exatamente os leitores que não leem nenhum dos 3 jornais.

315 ------- 45%

X ----------100%

$$\frac{315}{X} = \frac{45\%}{100\%}$$

$$X = 700$$

Logo, em média temos 700 leitores. Os leitores que leem apenas o jornal M corresponde a 5% desse total, isto é 35.

700 ------- 100%

M ---------- 5%

$$\frac{700}{M} = \frac{100\%}{5\%}$$

$$M = 35$$

Analisando as alternativas podemos observar que a **letra C** é a resposta. Pois, se for feita a média entre 30 e 40, chega-se a 35.

Gabarito: C

Q.05 (CESGRANRIO / TRANSPETRO / 2018)

Um grupo de fornecedores foi dividido em três conjuntos, de acordo com o atendimento a três critérios de qualidade, denominados critérios A, B e C. Após uma análise, observou- se que apenas quatro empresas atendem aos três critérios; seis empresas atendem aos critérios B e C; dez empresas atendem ao critério C, mas não atendem ao A; doze empresas atendem ao critério B, mas não atendem ao A, e vinte e três empresas atendem a, pelo menos, um dos critérios A ou B.

Considerando-se que nesse grupo de fornecedores não existe empresa que não atenda a, pelo menos, um dos três critérios, o número total de empresas desse grupo, isto é, n(AUBUC), é igual a

a) 21

b) 25

c) 27

d) 29

e) 31

Comentários:

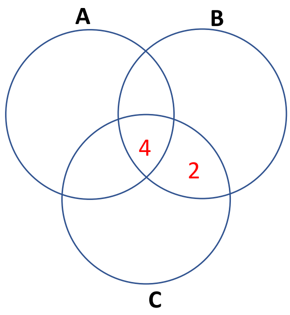
Pessoal, tempos as seguintes informações:

- Temos 3 critérios (A, B e C);
- 4 empresas atendem aos critérios A, B e C;
- 6 empresas atendem aos critérios B e C;
- 10 empresas atendem ao critério C, mas não atendem ao critério A;
- 12 empresas atendem ao critério B, mas não atendem ao critério A;
- 23 empresas a, pelo menos, um dos critérios A ou B.

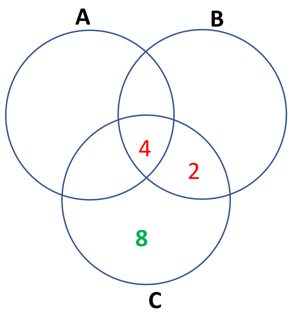
A banca quer saber o total de empresas nesse grupo. Iremos fazer construir o diagrama pouco a pouco. E como não tem empresas que não atenda a pelo menos a um dos critérios, não teremos empresas fora do diagrama.

- 4 empresas atendem aos critérios A, B e C;

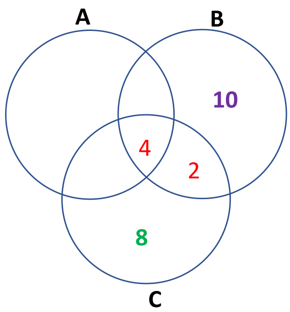
- 6 empresas atendem aos critérios B e C;



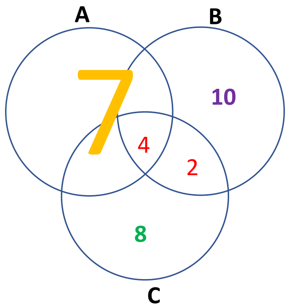
- 10 empresas atendem ao critério C, mas não atendem ao critério A;



- 12 empresas atendem ao critério B, mas não atendem ao critério A;



- 23 empresas a, pelo menos, um dos critérios A ou B.



Nessa última informação, temos o seguinte: 23 – 10 – 4 – 2 =7

Agora é só fazer o somatório para saber o número de empresas.

7+10+4+2+8=31

Gabarito: E

Q.06 (FGV / Prefeitura de Osasco / Médico / 2014)

Certo dia um posto de saúde possuía as vacinas A, B e C e as 100 crianças que compareceram nesse dia tomaram pelo menos uma dessas vacinas. Sabe-se, entretanto, que a criança que toma a vacina C não pode tomar nem ter tomado nenhuma das outras duas vacinas nesse dia.

Nesse dia, 62 crianças tomaram a vacina A, 48 tomaram a vacina B e 24 crianças tomaram a vacina C.

O número de crianças que tomaram apenas a vacina A é

a) 14

b) 22

c) 28

d) 34

e) 38

Solução:

Percebam que n (A U B U C) = 100 (total de crianças), logo:

n (A U B) = 100 – n(C)

n (A U B) = 100 - 24 = 76

62 crianças tomaram a vacina A e 48 tomaram a vacina B:
n (A U B) = n (A) + n (B) – n (A ∩ B)

$$76 = 62 + 48 - n(A \cap B)$$

$$n\ (A \cap B) = 34$$

O número de crianças que tomaram apenas a vacina A é:

$$\text{Só } A = 62 - 34 =$$

28 crianças

Sugiro que vocês resolvam a questão agora pelo Diagrama, ok?

Gabarito: C

Q.07 (CESPE / Analista do Seguro Social / 2016)

Uma população de 1.000 pessoas acima de 60 anos de idade foi dividida nos seguintes dois grupos:

A: aqueles que já sofreram infarto (totalizando 400 pessoas); e

B: aqueles que nunca sofreram infarto (totalizando 600 pessoas).

Cada uma das 400 pessoas do grupo A é ou diabética ou fumante ou ambos (diabética e fumante).

A população do grupo B é constituída por três conjuntos de indivíduos: fumantes, ex-fumantes e pessoas que nunca fumaram (não fumantes).

Com base nessas informações, julgue o item.

Se, das pessoas do grupo A, 280 são fumantes e 195 são diabéticas, então 120 pessoas desse grupo são diabéticas e não são fumantes.

CC – CERTO

EE – ERRADO

Comentários:

Vejam que o examinador só nos pede que trabalhemos com as informações do grupo A.

n (A) =400

Destas 400 pessoas, 280 são fumantes e 195 diabéticas.

Então, temos que ***75 pessoas*** são diabéticas e fumantes (475 – 400).

Agora, para acharmos apenas as pessoas que são diabéticas, basta diminuirmos das 195 diabéticas as 75 pessoas que também são fumantes.

195 – 75 = 120

Essas 120 pessoas são apenas diabéticas.

Podemos responder essa questão dessa forma:

$$n\,(F \cup D) = n\,(F) + n\,(D) - n\,(F \cap D)$$

n (F U D) = 400 (total de pessoas do grupo A)

n (F) = 280 (total de fumantes)

n (D) = 195 (total de diabéticos)

Chegaremos ao mesmo caminho. Ainda, podemos resolvê-la por Diagrama de Venn.

Gabarito: Certo

LISTA DE QUESTÕES ESTRATÉGICAS

Q.01 (CESGRANRIO / (TRANSPETRO) /2012)

Um grupo de 100 jovens forneceu informações sobre as três redes sociais mais utilizadas no País: Facebook, MSN e Twitter. Os resultados encontrados foram os seguintes:

• 20 não utilizam nenhuma rede social.

• 32 só utilizam o Facebook.

• 65 utilizam o Facebook.

• 20 só utilizam o Twitter.

• 2 utilizam o Facebook, o Twitter e o MSN.

• 51 utilizam apenas dois dos três meios de comunicação.

Um jovem desse grupo é selecionado ao acaso. Dado que ele utiliza, pelo menos, uma das três redes sociais, a probabilidade de ele utilizar apenas o Twitter e o MSN é

a) 0,16

b) 0,20

c) 0,25

d) 0,30

e) 0,35

Q.02 (CESGRANRIO / Profissional Júnior (BR) /2015)

Dados três conjuntos M, N e P, tem-se que o conjunto $M \cap (N \cup P)$ é igual ao conjunto

a) $M \cap N \cap P$

b) $(M \cap N) \cup P$

c) $M \cup (N \cap P)$

d) $(M \cap N) \cup (M \cap P)$

e) $(M \cup N) \cap (M \cup P)$

Q.03 (CESGRANRIO / Técnico Científico (BASA) / 2014)

O conjunto diferença X - Y, entre dois subconjuntos X e Y de um mesmo conjunto universo U, é definido por:

$X - Y = \{u \in U / u \in X \text{ e } u \notin Y\}$

Considere três subconjuntos, A, B e C, do mesmo conjunto Universo U.

O conjunto $A-(B\cap C)$ é igual ao conjunto

a) $(A - B) \cap (A - C)$

b) $(A - B) \cup (A - C)$

c) $(A - B) \cap C$

d) $(A - B) \cup C$

e) $(A - B) - C$

Q.04 (CESGRANRIO / PETROBRAS / Júnior / 2012)

Numa certa comunidade, 35% de seus habitantes são leitores do jornal M; 40% são leitores do jornal N; 30% são leitores do jornal P; 25% leem os jornais M e N; 15% leem os jornais M e P; 20% leem os jornais N e P; e 10% leem os três jornais.

Se o contingente de habitantes dessa comunidade que não leem nenhum dos três jornais está entre 270 e 360, então o contingente de leitores exclusivos do jornal M se situa entre

a) 30 e 50

b) 20 e 40

c) 30 e 40

d) 200 e 300

e) 210 e 280

Q.05 (CESGRANRIO / TRANSPETRO / 2018)

Um grupo de fornecedores foi dividido em três conjuntos, de acordo com o atendimento a três critérios de qualidade, denominados critérios A, B e C. Após uma análise, observou- se que apenas quatro empresas atendem aos três critérios; seis empresas atendem aos critérios B e C; dez empresas atendem ao critério C, mas não atendem ao A; doze empresas atendem ao critério B, mas não atendem ao A, e vinte e três empresas atendem a, pelo menos, um dos critérios A ou B.

Considerando-se que nesse grupo de fornecedores não existe empresa que não atenda a, pelo menos, um dos três critérios, o número total de empresas desse grupo, isto é, n(AUBUC), é igual a

a) 21

b) 25

c) 27

d) 29

e) 31

Q.06 (FGV / Prefeitura de Osasco / Médico / 2014)

Certo dia um posto de saúde possuía as vacinas A, B e C e as 100 crianças que compareceram nesse dia tomaram pelo menos uma dessas vacinas. Sabe-se, entretanto, que a criança que toma a vacina C não pode tomar nem ter tomado nenhuma das outras duas vacinas nesse dia.

Nesse dia, 62 crianças tomaram a vacina A, 48 tomaram a vacina B e 24 crianças tomaram a vacina C.

O número de crianças que tomaram apenas a vacina A é

a) 14

b) 22

c) 28

d) 34

e) 38

Q.07 (CESPE / Analista do Seguro Social / 2016)

Uma população de 1.000 pessoas acima de 60 anos de idade foi dividida nos seguintes dois grupos:

A: aqueles que já sofreram infarto (totalizando 400 pessoas); e

B: aqueles que nunca sofreram infarto (totalizando 600 pessoas).

Cada uma das 400 pessoas do grupo A é ou diabética ou fumante ou ambos (diabética e fumante).

A população do grupo B é constituída por três conjuntos de indivíduos: fumantes, ex-fumantes e pessoas que nunca fumaram (não fumantes).

Com base nessas informações, julgue o item.

Se, das pessoas do grupo A, 280 são fumantes e 195 são diabéticas, então 120 pessoas desse grupo são diabéticas e não são fumantes.

CC – CERTO

EE – ERRADO

Gabarito

1	2	3	4	5	6	7
C	D	B	C	E	C	CC

CC – CERTO

EE – ERRADO

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.