Exercício 1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2n-7}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n-2}{7n+6}$ (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n+1}{5n^2-6n+3}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2-4n+3}{3n^2+5n+9}$ (e) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ (f) $\lim_{n\to\infty} n\left(\log\left(3+\frac{1}{n}\right)-\log 3\right)$

(g) $\lim_{n\to\infty} n\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ (h) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ (i) $\lim_{n\to\infty} n\left(\log\left(7+\frac{1}{n}\right)-\log 7\right)$

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+5/n}{2-7/n} = \frac{3}{2}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n-2}{7n+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-2/n}{7+6/n} = \frac{4}{7}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n+1}{5n^2-6n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+5/n+1/n^2}{5-6/n+3/n^2} = \frac{2}{5}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2-4n+3}{3n^2+5n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{7-4/n+3/n^2}{3+5/n+9/n^2} = \frac{7}{3}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 = e^3$

(f) $\lim_{n\to\infty} n\left(\log\left(3+\frac{1}{n}\right)-\log 3\right)$

$= \lim_{n\to\infty} n \log\left(1+\frac{1}{3n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}$

$= \frac{1}{3}\log e = \frac{1}{3}$

(g) $\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \log e$

$= 1$

(h) $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n-1+1}{n-1}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}$$

(i) $$\lim_{n\to\infty} n\left(\log\left(7+\frac{1}{n}\right)-\log 7\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{7n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{7}\log\left(1+\frac{1}{7n}\right)^{7n}$$

$$= \frac{1}{7}\log e = \frac{1}{7}$$

Exercício 2. Calcule as seguinte somas infinitas:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{7^k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{5^k}$ (c) $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty}\frac{5}{6^m}$ (d) $\displaystyle\sum_{m=3}^{\infty}\frac{8}{3^m}$

(a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{7^k}=\frac{3}{7}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^k=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

(b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{5^k}=\frac{8}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k=\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{8}{4}=2$$

(c) $$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{5}{6^m}=\frac{5}{6^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^m=\frac{5}{6^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}$$

(d) $$\sum_{m=3}^{\infty}\frac{8}{3^m}=\frac{8}{3^3}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^m=\frac{8}{3^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{4}{9}$$

Exercício 3. Calcule:

(a) $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ (b) $\lim_{n\to\infty} n \tan \frac{1}{n}$

(a) $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n} = 1$

(b) $\lim_{n\to\infty} n \tan \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n} \cdot \cos \frac{1}{n} = 1$

Exercício 4. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2} + n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

Exercício 5. Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Se $x = 0$,

$$\left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = 1^n = 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow e^0 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n$$

Se $x \neq 0$, temos

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = e^x$$

Exercício 6. Mostre que:

(a) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$ (b) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = 0$

$$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+\tfrac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}\sqrt{n+\tfrac{1}{2}}$$

$$= \frac{\cancel{n}+1 - \cancel{n}}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \cdot \sqrt{n+\tfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1+1/2n}}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

(b) $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} =$

$$= \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)\frac{\left((n+1)^{2/3} + (n+1)^{1/3} n^{1/3} + n^{2/3}\right)}{\left((n+1)^{2/3} + (n+1)^{1/3} n^{1/3} + n^{2/3}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{n}+1 - \cancel{n}}{\left((n+1)^{2/3} + (n+1)^{1/3} n^{1/3} + n^{2/3}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Exercício 7. Prove que $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot n \cdots n \cdot n \cdot n}$$

$$\leq \frac{\cancel{n} \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{n} \cdots \cancel{n} \cdot \cancel{n} \cdot 1}{\cancel{n} \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{n} \cdots \cancel{n} \cdot \cancel{n} \cdot n} = \frac{1}{n}$$

Logo,

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Exercício 8. Mostre que:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\infty$

(d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

(a) $$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n^2}\cdot(1+2+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$=\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$$

(b) $$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\leq\frac{n+1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

(c) $$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\geqslant\frac{n+1}{\sqrt{2n}}\geqslant\frac{n}{\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$$

(d) Note que

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}=1$, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1$

Exercício 9. Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{1,01^n}$.

Seja $a_n = \frac{n^{100}}{1,01^n}$. Temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} \cdot \frac{(1,01)^{n+1}}{(1,01)^n} = \frac{1}{1,01}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1,01}$$

Logo existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ então

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{1,001} < 1 \quad \text{pois} \quad \frac{1}{1,01} < \frac{1}{1,001}$$

$$\Rightarrow 0 < a_{n+1} < \frac{a_n}{1,001} \quad \text{se } n \geq N_0$$

$$\Rightarrow \quad 0 < a_{N_0+k} < \left(\frac{1}{1,001}\right)^k \cdot a_{N_0}$$

Fazendo $k \to \infty$, segue que

$$\lim_{k\to\infty} a_{N_0+k} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{1,01^n} = 0$$

Exercício 10. Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...$ converge e calcule o seu limite.

A sequência é

$$2^{1/2},\ 2^{(1/2+1/4)},\ 2^{1/2+1/4+1/8},\ \ldots$$

Como $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$, temos que a sequência é crescente e limitada por 2^1. Logo, ela converge, e temos que seu limite é

$$2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots} = 2^1 = 2.$$

Exercício 11. Prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{n^2+n} = 1$.

Como $u \longmapsto a^u$ é crescente para $a > 1$, temos que, como $\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$,

$$\sqrt[n^2+n]{n^2+n} \leq \sqrt[2n+1]{n^2+n} \leq \sqrt[2n]{n^2+n}$$

$$\leq \sqrt[2n]{2n^2} = \left(\sqrt[2n]{2n}\right)^2$$

se $n \geq 2$. Como $\lim_{u\to\infty} \sqrt[u]{u} = 1$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2+n]{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n]{2n}\right)^2 = 1,$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{n^2+n} = 1$$

Exercício 12. Prove que o limite da sequência

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

existe e é igual a 2.

Defina $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2}, \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n \geq 1) \end{cases}$

Temos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

De fato, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2+0} = a_1$.

Se $a_n > a_{n-1}$, então

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > \sqrt{2+a_{n-1}} = a_n$$

Assim, prova-se por indução que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

Note que $a_1 = \sqrt{2} < 2$.

Se $a_n < 2$, então

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2$$

Assim, também por indução, prova-se que $a_n < 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Como é monótona e limitada, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Assim, existe

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Como

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n},$$

fazendo $n \to \infty$ vem que

$$a = \sqrt{2+a}$$

$$\Rightarrow a^2 = 2 + a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1 \text{ ou } 2$$

Como $a > 0$, queremos a raiz positiva. Logo,

$$a = 2.$$

Exercício 13. Prove que a sequência

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

converge e que o seu limite está entre $\frac{1}{2}$ e 1.

Temos

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+1+n-1} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$= a_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$

Como

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} < -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = 0,$$

segue que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

Como $a_n > 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, segue que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Por outro lado,

$$\frac{n+1}{2n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \frac{n+1}{n}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 1.$$

Exercício 1. Explique com suas palavras o significado da equação

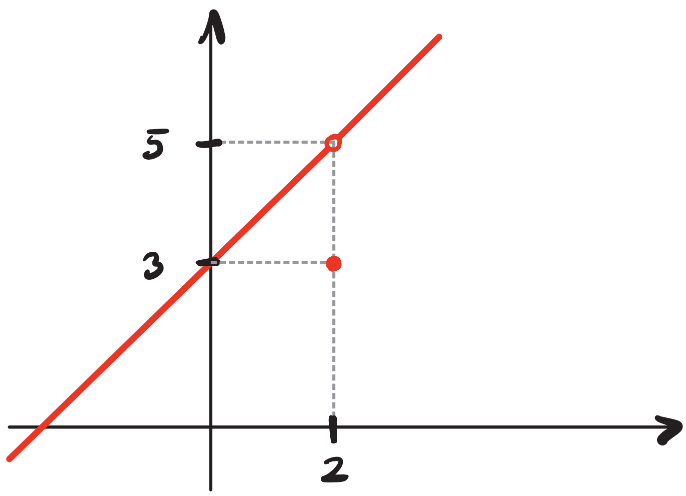
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

Significa que conforme x se aproxima de 2, sem no entanto termos $x=2$, $f(x)$ se aproxima de 5.

Sim, é possível ter $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ e $f(2) = 3$, como é o caso da função

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$



Exercício 2. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x\to 2_-} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2_+} f(x) = 5$$

Nessa situação, é possível que $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista? Explique.

Significa que, conforme x se aproxima de 2 pela esquerda, $f(x)$ se aproxima de 1, e conforme x se aproxima de 2 pela direita, $f(x)$ se aproxima de 5.

Nessa situação, não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$, pois o limite não depende de como nos aproximamos de $x=2$, mas neste caso temos tendências diferentes conforme x se aproxima por baixo ou por cima de 2.

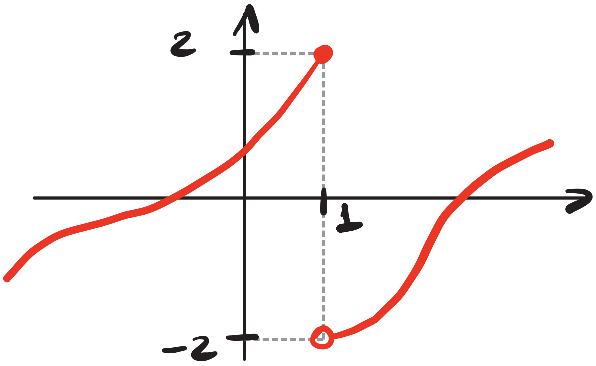
Exercício 3. Esboce o gráfico de um exemplo de uma função que satisfaça a todas as condições dadas:

(a) $\lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = 2,\ \lim\limits_{x \to 1_+} f(x) = -2,\ f(1) = 2$

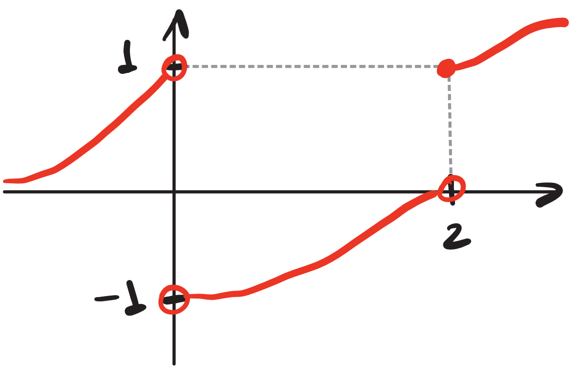
(b) $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -1,\ \lim\limits_{x \to 2_-} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to 2_+} f(x) = 1,\ f(0)$ não definido.

(c) $\lim\limits_{x \to 3_+} f(x) = 4,\ \lim\limits_{x \to 3_-} f(x) = 2,\ \lim\limits_{x \to 2_-} f(x) = 2,\ f(3) = 3,\ f(2) = 1$

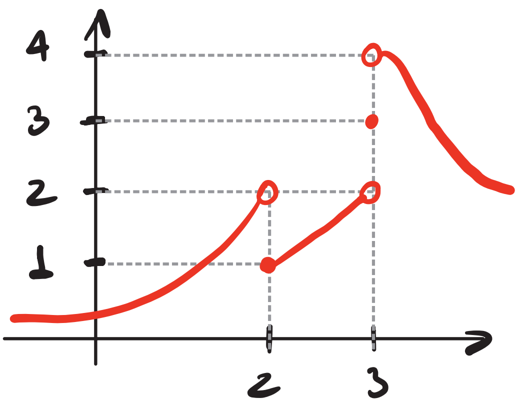
(a)



(b)



(c)



Exercício 4. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 5_-} \frac{x+1}{x-5}$ (b) $\lim_{x\to 5_+} \frac{x+1}{x-5}$ (c) $\lim_{x\to 5_+} \log(x^2-25)$ (d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_+} \frac{\sec x}{x}$

(e) $\lim_{x\to \pi_-} \cot x$ (f) $\lim_{x\to 2_-} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ (g) $\lim_{x\to 0_+} \left(\frac{1}{x} - \log x\right)$

(a) $\lim_{x\to 5_-} \frac{x+1}{x-5} = -\infty$

(b) $\lim_{x\to 5_+} \frac{x+1}{x-5} = +\infty$

(c) $\lim_{x\to 5_+} \log(x^2-25) = -\infty$

(d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_+} \frac{\sec x}{x} = +\infty$

(e) $\lim_{x\to \pi_-} \cot x = +\infty$

(d) $\lim_{x\to 2_-} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2_-} \frac{x\cdot\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{2}}}$

$= \lim_{x\to 2_-} \frac{x}{x-2} = -\infty$

(g) $\lim_{x\to 0_+} \left(\frac{1}{x} - \log x\right) = \lim_{x\to 0_+} \left(\frac{1}{x} + \log \frac{1}{x}\right)$

$= +\infty$

Exercício 5. Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

As assíntotas verticais se originam nos pontos onde o denominador se anula.

$$3x - 2x^2 = x \cdot (3 - 2x) = 0$$

$$\text{se } x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

As assíntotas são as retas verticais

$x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$.

Exercício 6. Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0,$$

encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$ (c) $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3$ (d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

(a) $\lim_{x\to 2} f(x) + 5g(x) = \lim_{x\to 2} f(x) + 5\lim_{x\to 2} g(x)$

$= 4 - 2\cdot 5 = -6$

(b) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to 2} f(x)} = \sqrt{4} = 2$

(c) $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3 = \left[\lim_{x\to 2} g(x)\right]^3 = (-2)^3 = -8$

(d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)} = \dfrac{3\cdot 4}{-2} = -6$

(e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ não existe pois o numerador tende a -2 e o denominador tende a zero. Como $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ cresce indefinidamente conforme $x\to 2$, escrevemos $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{h(x)} = \infty$ para representar esse fato.

(f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)\,h(x)}{f(x)} = 0$

Exercício 7. Calcule os seguintes limites, justificando em cada passagem as propriedades básicas de limites que foram utilizadas:

(a) $\lim_{x\to -2}(3x^4 + 2x^2 - x + 1)$ (b) $\lim_{x\to -1}(x^2 + x)(3x^2 + 6)$ (c) $\lim_{t\to -2}\dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

(d) $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4 + 3u + 6}$ (e) $\lim_{x\to 8}(1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

(a) $\lim_{x\to -2}(3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

$= \lim_{x\to -2} 3x^4 + \lim_{x\to -2} 2x^2 + \lim_{x\to -2}(-x) + \lim_{x\to -2} 1$

$= 3\lim_{x\to -2} x^4 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} x + \lim_{x\to -2} 1$

$= 3\cdot\left(\lim_{x\to -2} x\right)^4 + 2\left(\lim_{x\to -2} x\right)^2 - \lim_{x\to -2} x + \lim_{x\to -2} 1$

$= 3\cdot(-2)^4 + 2\cdot(-2)^2 - (-2) + 1$

$= 48 + 8 + 2 + 1 = 59$

(b) $\lim_{x\to -1}(x^2 + x)(3x^2 + 6)$

$= \left(\lim_{x\to -1} x^2 + x\right)\left(\lim_{x\to -1} 3x^2 + 6\right)$

$= \left[\lim_{x\to -1} x^2 + \lim_{x\to -1} x\right]\cdot\left[\lim_{x\to -1} 3x^2 + \lim_{x\to -1} 6\right]$

$= \left[\lim_{x\to -1} x^2 + \lim_{x\to -1} x\right]\cdot\left[3\lim_{x\to -1} x^2 + \lim_{x\to -1} 6\right]$

$= \left[\left(\lim_{x\to -1} x\right)^2 + \lim_{x\to -1} x\right]\cdot\left[3\left(\lim_{x\to -1} x\right)^2 + \lim_{x\to -1} 6\right]$

$$= \left[(-1)^2 + (-1)\right] \cdot \left[\,3 \cdot (-1)^2 + 6\,\right] = 0$$

(c) $$\lim_{t \to -2} \frac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2} = \frac{\lim\limits_{t \to -2} (t^4 - 2)}{\lim\limits_{t \to -2} (2t^2 - 3t + 2)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{t \to -2} t^4 + \lim\limits_{t \to -2} (-2)}{\lim\limits_{t \to -2} (2t^2) + \lim\limits_{t \to -2} (-3t) + \lim\limits_{t \to -2} 2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{t \to -2} t^4 + \lim\limits_{t \to -2} (-2)}{2 \lim\limits_{t \to -2} t^2 - 3 \cdot \lim\limits_{t \to -2} t + \lim\limits_{t \to -2} 2}$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{t \to -2} t\right)^4 + \lim\limits_{t \to -2} (-2)}{2\left(\lim\limits_{t \to -2} t\right)^2 - 3 \cdot \lim\limits_{t \to -2} t + \lim\limits_{t \to -2} 2}$$

$$= \frac{(-2)^4 - 2}{2 \cdot (-2)^2 - 3(-2) + 2} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

(d) $$\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6} = \sqrt{\lim_{u \to -2} (u^4 + 3u + 6)}$$

$$= \sqrt{\lim_{u \to -2} u^4 + \lim_{u \to -2} (3u) + \lim_{u \to -2} 6}$$

$$= \sqrt{\lim_{u \to -2} u^4 + 3 \cdot \lim_{u \to -2} u + \lim_{u \to -2} 6}$$

$$= \sqrt{\left(\lim_{u\to -2} u\right)^4 + 3\cdot \lim_{u\to -2} u + \lim_{u\to -2} 6}$$

$$= \sqrt{(-2)^4 + 3\cdot(-2) + 6} = 4$$

(e) $$\lim_{x\to 8} (1+\sqrt[3]{x})(2-6x^2+x^3)$$

$$= \left[\lim_{x\to 8} (1+\sqrt[3]{x})\right]\cdot\left[\lim_{x\to 8} (2-6x^2+x^3)\right]$$

$$= \left[\lim_{x\to 8} 1 + \lim_{x\to 8} \sqrt[3]{x}\right]\cdot\left[\lim_{x\to 8} 2 + \lim_{x\to 8} (-6x^2) + \lim_{x\to 8} x^3\right]$$

$$= \left[\lim_{x\to 8} 1 + \lim_{x\to 8} \sqrt[3]{x}\right]\cdot\left[\lim_{x\to 8} 2 - 6\cdot \lim_{x\to 8} x^2 + \lim_{x\to 8} x^3\right]$$

$$= \left[\lim_{x\to 8} 1 + \sqrt[3]{\lim_{x\to 8} x}\right]\cdot\left[\lim_{x\to 8} 2 - 6\left(\lim_{x\to 8} x\right)^2 + \left(\lim_{x\to 8} x\right)^3\right]$$

$$= (1+2)\cdot(2-6\cdot 64+512) = 390$$

Exercício 8. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ (b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+3x}{x^2-x-12}$ (c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-5+h)^2-25}{h}$

(d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3-8}{h}$ (e) $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^4-1}{t^3-1}$ (f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^3-27}$

(g) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h}$ (h) $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$ (i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$

(j) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$ (k) $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{t+1}}-\dfrac{1}{t}\right)$ (l) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(m) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+3)}{\cancel{x-2}} = 5$

(b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+3x}{x^2-x-12} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x-4)} = \dfrac{3}{7}$

(c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-5+h)^2-25}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{25}-10h+h^2-\cancel{25}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} -10+h = -10$

(d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3-8}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{8}+12h+6h^2+h^3-\cancel{8}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} 12+6h+h^2 = 12$

(e) $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^4-1}{t^3-1} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\cancel{(t-1)}\cdot(t^3+t^2+t+1)}{\cancel{(t-1)}\cdot(t^2+t+1)} = \dfrac{4}{3}$

(f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^3-27} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)} = \dfrac{1}{27}$

(g) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{9+h}+3}{\sqrt{9+h}+3}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{9}+h-\cancel{9}}{h(\sqrt{9+h}+3)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{9+h}+3} = \dfrac{1}{6}$

(h) $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2} = \lim\limits_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2} \cdot \dfrac{\sqrt{4u+1}+3}{\sqrt{4u+1}+3}$

$= \lim\limits_{u\to 2} \dfrac{4u+1-9}{(u-2)(\sqrt{4u+1}+3)} = \lim\limits_{u\to 2} \dfrac{4\cdot\cancel{(u-2)}}{\cancel{(u-2)}(\sqrt{4u+1}+3)}$

$= \lim\limits_{u\to 2} \dfrac{4}{\sqrt{4u+1}+3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

(i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{3x(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-\cancel{(x-3)}}{3x\cancel{(x-3)}}$

$= \dfrac{-1}{9}$

(j) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t} \cdot \dfrac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cancel{1}+t-\cancel{1}+t}{t(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}} = 1$

(k) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{t+1}} - 1\right) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+t}}{t\sqrt{1+t}}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1-\sqrt{1+t}}{t\sqrt{1+t}} \cdot \frac{1+\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{1+t}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-t}{t\sqrt{1+t}\,(1+\sqrt{1+t})} = \lim_{t\to 0} \frac{-1}{\sqrt{1+t}\,(1+\sqrt{1+t})}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

(l) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

(m) $$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} - (\cancel{x^2} + 2xh + h^2)}{h x^2 (x+h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Exercício 9. Demonstre que $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cos\dfrac{2}{x} = 0$.

Temos que

$$\left|\cos\frac{2}{x}\right| < 1 \qquad \forall\ x \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \left|x^4 \cos\frac{2}{x}\right| \leq |x|^4 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0} x^4 \cos\frac{2}{x} = 0.$$

Exercício 10. Se $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encontre $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Note que

$$\lim_{x \to 4} 4x - 9 = 7 = \lim_{x \to 4} x^2 - 4x + 7$$

Logo, pelo teorema do sanduíche,

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 7$$

Exercício 11. Calcule $\lim_{x \to 0_+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$.

Temos, para todo $x \neq 0$,

$$e^{-1} \leq e^{\operatorname{sen} \pi/x} \leq e$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot e^{-1} \leq \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen} \pi/x} \leq \sqrt{x} \cdot e$$

Como

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x}\, e^{-1} = \lim_{x \to 0} \sqrt{x}\, e = 0,$$

segue do teorema do sanduíche que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen} \pi/x} = 0$$

Exercício 12. A função sinal é definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites a seguir:

(a) $\lim\limits_{x\to 0_+} \operatorname{sgn} x$ (b) $\lim\limits_{x\to 0_-} \operatorname{sgn} x$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x|$

(e) $\lim\limits_{x\to \pi_+} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)$ (f) $\lim\limits_{x\to \pi_-} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)$ (g) $\lim\limits_{x\to \pi} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)$ (h) $\lim\limits_{x\to \pi} |\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)|$

(a) $\lim\limits_{x\to 0_+} \operatorname{sgn} x = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to 0_-} \operatorname{sgn} x = -1$

(c) Não existe pois os limites laterais são diferentes

(d) $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$

(e) $\lim\limits_{x\to \pi_+} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x) = -1$

(f) $\lim\limits_{x\to \pi_-} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x) = 1$

(g) Não existe pois os limites laterais são diferentes

(h) $\lim\limits_{x\to \pi_-} |\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)| = 1$

Exercício 13. Seja $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{|x-2|}$. Encontre os limites laterais quando $x \to 2$ e diga se $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ existe e calcule seu valor em caso afirmativo.

$$g(x) = \frac{x^2+x-6}{|x-2|} = \frac{(x-2)(x+3)}{|x-2|}$$

$$= \operatorname{sgn}(x-2) \cdot (x+3)$$

Assim,

$$\lim_{x\to 2_-} g(x) = -5$$

$$\lim_{x\to 2_+} g(x) = 5$$

O limite quando $x \to 2$ não existe pois os limites laterais são diferentes.

Exercício 14. Calcule $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$.

Temos, para $x \neq 2$,

$$\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} = \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} \cdot \frac{\sqrt{6-x}+2}{\sqrt{3-x}+1} \cdot \frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2}$$

$$= \frac{6-x-4}{3-x-1} \cdot \frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2} = \frac{\cancel{(2-x)}}{\cancel{(2-x)}} \cdot \frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2}$$

Assim,

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Exercício 15. Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva:

(a) $y = \dfrac{5+4x}{x+3}$ (b) $y = \dfrac{2x^2+1}{2x^2+2x-1}$

(c) $y = \dfrac{x^3-x}{x^2-6x+5}$ (d) $y = \dfrac{2e^x}{e^x-5}$

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5+4x}{x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4+5/x}{1+3/x} = 4$

$\Rightarrow$ Assíntota horizontal: $y=4$

$\displaystyle\lim_{x\to -3} \left|\frac{5+4x}{x+3}\right| = \infty$

$\Rightarrow$ Assíntota vertical: $x=-3$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{2x^2+2x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+1/x^2}{2+2/x-1/x^2} = 1$

$\Rightarrow$ Assíntota horizontal: $y=1$

Raízes do denominador:

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

Como nenhuma delas é raiz do numerador, ambas geram assíntotas.

$\Rightarrow$ Assíntotas verticais:

$x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ e $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

(c) $y = \dfrac{x\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-5)} = \dfrac{x(x+1)}{(x-5)}$

Como $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} |y| = \infty$, não existem assíntotas horizontais.

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 5} |y| = \infty,$$

logo $x = 5$ é assíntota vertical.

(d) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x}{e^x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1 - 5e^{-x}} = 2$$

e

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2e^x}{e^x - 5} = 0$$

$\Rightarrow$ Assíntotas horizontais: $y = 0$ e $y = 2$

Como $e^x - 5 = 0 \iff x = \log 5$, temos que $x = \log 5$ é assíntota vertical.

Exercício 16. Encontre $a \in \mathbb{R}$ tal que exista

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

e calcule o valor do limite nesse caso.

É preciso que -2 seja raiz do numerador, já que ele é raiz do denominador.

$$\Rightarrow 3 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) + a + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 12 - a + 3 = 0 \Rightarrow a = 15$$

Assim, a função é

$$\frac{3x^2 + 15x + 18}{x^2 + x - 2} = \frac{3 \cdot (x^2 + 5x + 6)}{x^2 + x - 2}$$

$$= \frac{3 \cdot \cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{(x+2)}(x-1)} = \frac{3(x+3)}{x-1}$$

Logo,

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + 15x + 18}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to -2} \frac{3(x+3)}{x-1} = -1$$

Exercício 17. Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Temos

$$0 \leq \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \forall\ x > 0$$

Como $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, segue do teorema do sanduíche que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

Exercício 18. Sejam p e q polinômios. Encontre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

se:

(a) o grau de p for menor que o grau de q;

(b) o grau de p for maior que o grau de q.

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_k x^k + \cdots + b_1 x + b_0$$

(a) Se $n < k$, então

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n + a_{n-1} \cdot x^{-1} + \cdots + a_1 \cdot x^{-(n-1)} + a_0 \cdot x^{-n}}{b_k x^{k-n} + \cdots + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

(b) Se $n > k$, então

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^{n-k} + \cdots + a_1 x^{1-k} + a_0 x^{-k}}{b_k + b_{k-1} x^{-1} + \cdots + b_0 x^{-k}},$$

e então

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| = \infty$$

Exercício 19. Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$ (c) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$ (e) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\operatorname{sen}(x-\pi)}{x-\pi}$ (f) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 6x}{\operatorname{sen} 2x}$ (i) $\lim_{x\to 0} \operatorname{cossec} x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

(a) $$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \frac{12}{-4} = -3$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1} \cdot (x+1) = 2$$

pois $$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$$

(c) $$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$ pois

$$-|x| \leq \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

(d) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos^2 x) + \operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = 2$$

(e) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{sen}(x-\pi)}{x-\pi} = \dfrac{\text{sen}(\pi/2)}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$

(f) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{x^{2/3}+x^{1/3}+1}{\sqrt{x}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^{2/3}+x^{1/3}+1}$

$= \lim_{x \to 1} \dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^{2/3}+x^{1/3}+1} = \dfrac{2}{3}$

(g) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{\text{sen}\, \pi x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \dfrac{1}{\frac{\text{sen}\, \pi x}{\pi x}} \cdot \dfrac{1}{\pi}$

$= \dfrac{1}{\pi}$

(h) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 6x}{\text{sen}\, 2x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 6x}{\cos 6x} \cdot \dfrac{1}{\text{sen}\, 2x}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 6x}{6x} \cdot \dfrac{3}{\cos 6x} \cdot \dfrac{1}{\frac{\text{sen}\, 2x}{2x}} = 3$

(i) $\lim_{x \to 0} \text{cossec}\, x \cdot \text{sen}(\text{sen}\, x)$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(\text{sen}\, x)}{\text{sen}\, x} = 1$

Exercício 20. Prove que $\lim_{m\to\infty}(\cos\pi x)^{2m}$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ e vale 1 ou 0 dependendo de x ser inteiro ou não.

Se $x \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos\pi x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty}(\cos\pi x)^{2m} = 1$$

Se $x \notin \mathbb{Z}$, então

$$|\cos\pi x| < 1$$

$$\Rightarrow |\cos\pi x|^{2m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Exercício 1. Demonstre cada afirmação usando a definição ϵ, δ de limite:

(a) $\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{x}{3}\right)=2$ (b) $\lim_{x\to a} x = a$ (c) $\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^4}=\infty$

(d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=5$ (e) $\lim_{x\to a} c = c$ (f) $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$

(g) $\lim_{x\to -6^+}\sqrt[8]{6+x}=0$ (h) $\lim_{x\to 0}|x|=0$ (i) $\lim_{x\to 2}(x^2+2x-7)=1$

(j) $\lim_{x\to -2}(x^2-1)=3$ (k) $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$ (l) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$

(m) $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ se $a>0$

(a) $\left|1+\frac{x}{3}-2\right| = \left|\frac{x}{3}-1\right| = \frac{|x-3|}{3} < \varepsilon$ se

$0<|x-\varepsilon|<\delta = 3\varepsilon$

(b) $|x-a|<\varepsilon$ se $0<|x-a|<\delta=\varepsilon$

(c) $\frac{1}{|x+3|^4} > M > 0$ se $|x+3|^4 < \frac{1}{M}$,

ie, se $0<|x-(-3)|<\frac{1}{\sqrt[4]{M}} = \delta$

(d) $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$

$\Rightarrow \left|\frac{x^2+x-6}{x-2}-5\right| = \left|\frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{x-2}}-5\right|$

$= |x+3-5| = |x-2| < \varepsilon$

se $0<|x-2|<\varepsilon$

(e) $|c-c| = 0 < \varepsilon \ \forall \ \varepsilon > 0$ se
$|x-a| < 1 = \delta$.

(f) $|x^3| < \varepsilon$ se $|x| < \sqrt[3]{\varepsilon} = \delta$

(g) $\sqrt[8]{6+x} < \varepsilon$ se $0 < x-(-6) < \varepsilon^8 = \delta$

(h) $|x| < \varepsilon$ se $0 < |x| < \varepsilon = \delta$

(i) $|x^2 + 2x - 7 - 1| = |x^2 + 2x - 8|$
$= |(x-2)(x+4)| < \varepsilon$
se $0 < |x-2| < \dfrac{\varepsilon}{|x+4|}$

Repare que se $|x-2| < 1$,
$1 < x < 3 \Rightarrow 5 < x+4 < 7$
$\Rightarrow |x+4| < 7$
$\Rightarrow \dfrac{1}{|x+4|} > \dfrac{1}{7}$

Assim, se
$\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$,
temos que se $0 < |x-2| < \delta$ então

$$|x^2+2x-7-1| = |(x-2)(x+4)|$$
$$< \delta \cdot 7 \leq \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon$$

(j) $|x^2-1-3| = |x-2||x+2| < \varepsilon$

se $0 < |x+2| < \dfrac{\varepsilon}{|x-2|}$

Repare que se $|x+2| < 1$, então

$-3 < x < -1 \Rightarrow -5 < x-2 < -3$

$\Rightarrow |x-2| < 5$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|x-2|} > \dfrac{1}{5}$

Assim, se

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\},$$

temos que se $0 < |x-(-2)| < \delta$ então

$$|(x^2-1)-3| = |x-2| \cdot |x+2|$$
$$< 5 \cdot \delta \leq 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

(k) $|x^3-8| = |x^3-2^3| = |x-2|\cdot|x^2+2x+4| < \varepsilon$

se $0<|x-2|< \dfrac{\varepsilon}{|x^2+2x+4|}$

Note que se $|x-2|<1$,

$1<x<3 \Rightarrow |x|<3$

$\Rightarrow |x^2+2x+4| < 9+6+4 = 19$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|x^2+2x+4|} > \dfrac{1}{19}$

Assim, se

$\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{19}\right\}$,

temos que se $0<|x-2|<\delta$ então

$$|x^3-8| = |x-2|\cdot|x^2+2x+4|$$
$$< \delta\cdot 19 \leq \frac{\varepsilon}{19}\cdot 19 = \varepsilon$$

(l) $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{|2-x|}{|2x|} < \varepsilon$ se $|x-2|<2|x|\varepsilon$

Note que se $|x-2|<1$, então

$1<x<3 \Rightarrow |x|>1$

Assim, definindo $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$, se

$0 < |x-2| < \delta$ então

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|2-x|}{|2x|} < \frac{\delta}{2} < \varepsilon$$

(m) $$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \cdot \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|}$$

$$= \frac{|x-a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

Se $0 < |x-a| < \delta = \sqrt{a} \cdot \varepsilon$

Exercício 2. Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostre que não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Repare que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, temos

$$|f(x) - L| = \begin{cases} |L| & (\text{se } x \in \mathbb{Q}) \\ |L-1| & (\text{se } x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Se $L = 0$, então

$$|f(x) - 0| = 1 \quad \text{se } x \notin \mathbb{Q}$$

Assim, como $\frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, para qualquer $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$.

Daí,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

Logo $L = 0$ não pode ser limite de $f(x)$ quando $x \to 0$.

Por outro lado, se $L \neq 0$, seja $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$. Temos que, $\forall \delta > 0$, existe

$n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \delta$. Apesar disso,

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - L \right| = |L| > \frac{|L|}{2} = \varepsilon .$$

Logo, L não pode ser o limite também quando $L \neq 0$. Assim, o limite não existe.

Exercício 1. Explique por que as seguintes funções são descontínuas no ponto dado a:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ em $a = -2$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases}$ em $a = -2$

(c) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \leqslant -1 \\ 2^x & \text{se } x > -1 \end{cases}$ em $a = -1$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ em $a = 1$

(a) $\lim\limits_{x\to -2} |f(x)| = \infty$

(b) $\lim\limits_{x\to -2} |f(x)| = \infty \neq f(-2) = 1$

(c) $\lim\limits_{x\to (-1)_+} f(x) = \lim\limits_{x\to (-1)_+} x+3 = 2$

$\lim\limits_{x\to (-1)_-} f(x) = \lim\limits_{x\to (-1)_-} 2^x = \dfrac{1}{2}$

Como os limites laterais são diferentes, f é descontínua em $x=2$.

(d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{2} \neq 1 = f(1)$

Exercício 2. Para que valores de x a função abaixo é contínua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

f não é contínua em nenhum ponto, pois em qualquer intervalo $(a-\delta, a+\delta) = I$, para $a \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, sempre haverá um $b \in I$ racional (caso a seja irracional) ou irracional (caso a seja racional).

Daí,

$$|f(b) - f(a)| = 1 > \frac{1}{2}$$

Então não existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}$$

Assim, f não é contínua em nenhum ponto $a \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. Se a e b são números positivos, prove que a equação

$$\frac{a}{x^3+2x^2-1}+\frac{b}{x^3+x-2}=0$$

possui no mínimo uma solução no intervalo $(-1,1)$.

Seja $f(x)=\dfrac{a}{x^3+2x^2-1}+\dfrac{b}{x^3+x-2}$.

Note que -1 é raiz de x^3+2x^2-1

$\Rightarrow$ $x+1$ divide x^3+2x^2-1

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-1 & x+1 \\ \hline -x^3-x^2 & x^2+x-1 \\ \quad x^2-1 & \\ \quad -x^2-x & \\ \quad -(x+1) & \\ \quad\ 0 & \end{array}$$

Como $(-1)^2+(-1)-1=-1<0$, segue que

$$\lim_{x\to(-1)_+}\frac{a}{x^3+2x^2-1}+\frac{b}{x^3+x-2}=-\infty \quad (\mathrm{I})$$

Analogamente 1 é raiz de x^3+x-2.
Logo, $x-1$ divide x^3+x-2:

$$\begin{array}{l|l} x^3+x-2 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x+2 \\ \quad x^2+x-2 & \\ \quad -x^2+x & \\ \quad 2(x-1) & \\ \quad\ e & \end{array}$$

Como $(1)^2 + (1) + 2 = 4 > 0$, segue que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{a}{x^3+2x^2-1} + \frac{b}{x^3+x-2} = +\infty \quad (\text{II})$$

Repare ainda que, como

$$x^3 + 2x^2 - 1 = (x+1)(x^2+x-1),$$

com raízes

$$-1, \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

bem como

$$x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2+x+2),$$

com raiz real apenas $x = 1$ já que $x^2 + x + 2$ não tem raízes reais, segue que $f(x)$ é contínua em $(-1, 1)$.

Assim, por (I) e (II), existem c, d, $-1 < c < d < 1$, tais que

$$f(c) < 0 < f(d).$$

Como f é contínua em $[c, d]$, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $z \in (c, d) \subset (-1, 1)$ tal que $f(z) = 0$.

Exercício 4. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas da noite. Mostre que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.

Suponha que tenhamos ajustado as unidades para que a subida do monge comece na posição $x=0$ e termine em $x=1$. Logo sua decida começa em $x=1$ e termina em $x=0$.

A subida é uma função contínua

$$\begin{aligned} f: [7, 19] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

com

$$f(7) = 0, \quad f(19) = 1,$$

e a descida é uma função contínua

$$\begin{aligned} g: [7, 19] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto g(t) \end{aligned}$$

com

$$g(7) = 1, \quad g(19) = 0.$$

Seja $h: [7, 19] \longrightarrow [-1, 2]$ definida por

$$h(t) = f(t) - g(t)$$

Então h é contínua, com

$$h(7) = -1 < 0 < 1 = h(19)$$

Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t^* \in (7, 19)$ tal que $h(t^*) = 0$. Ou seja, em $t = t^*$,

$$f(t^*) = g(t^*),$$

ou seja, nesse ponto à mesma hora t^* do dia o monge esteve na mesma posição tanto na subida quanto na descida.

Exercício 5. Dada uma função contínua $f : [0,1] \to [0,1]$, mostre que f tem um ponto fixo: existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$. (Sugestão: olhe para $g(x) = f(x) - x$)

Primeiramente, se $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, basta fazer $c = 0$ ou $c = 1$, conforme o caso. Assuma agora que $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$, e seja $g(x) = f(x) - x$. Temos que g é contínua, com

$$g(0) = f(0) - 0 > 0$$

$$g(1) = f(1) - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \quad g(1) < 0 < g(0).$$

Logo, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $c \in (0,1)$ tal que $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c$.

Exercício 6. Seja $f(x) = \tan x$. Embora $f(\pi/4) = 1$ e $f(3\pi/4) = -1$, não existe nenhum $x \in [\pi/4, 3\pi/4]$ para o qual $f(x) = 0$. Por que isso não contraria o Teorema do Valor Intermediário?

Isso não contraria o TVI pois f não é contínua em $[\pi/4, 3\pi/4]$, já que $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$, e $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4}$.

Exercício 7. Mostre que cada uma das funções abaixo é injetora em toda a reta real e determina sua inversa.

(a) $f(x) = x + 1$ (b) $f(x) = 1 - x$

(c) $f(x) = x^3$ (d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ x^2 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{se } x > 4 \end{cases}$

(a) $x < z \Rightarrow x+1 < x+z \Rightarrow f(x) < f(z)$

Logo, f é injetora.

$$y = x + 1 \Rightarrow x = 1 - y = f^{-1}(y)$$

(b) $x < z \Rightarrow -x < -z \Rightarrow 1 - x < 1 - z \Rightarrow f(x) < f(z)$

Logo, f é injetora.

$$y = 1 - x \Rightarrow x = 1 - y = f^{-1}(y)$$

(c) $x^3 = z^3 \Rightarrow x^3 - z^3 = 0$

$\Rightarrow (x-z)(x^2 + xz + z^2) = 0$

Como $x^2 + xz + z^2 = 0 \iff x = z = 0$, visto que

$$x^2 + xz + z^2 = \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{4} + z^2 = \left(z + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4} = 0$$

se e só se $z = 0$ e $x = 0$, temos que é preciso ter $x = z$ para que $x^3 = z^3$. Assim, f é injetora.

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

(d) Como x, x^2 e $8\sqrt{x}$ são crescentes, com $1=1^2$ e $4^2=8\sqrt{4}$, segue que f é injetora. A inversa é

$$f^{-1}(y)=\begin{cases} y, & \text{se } y<1 \\ \sqrt{y}, & \text{se } 1\leq y\leq 16 \\ \dfrac{y^2}{64}, & \text{se } y>16 \end{cases}$$

Exercício 8. Se $f(x)$ é contínua em $x = a$ e $f(a) > 0$, mostre que o domínio de f contém um interalo aberto ao redor de a tal que $f(x) > 0$ para todo x nesse invervalo.

Como f é contínua em $x = a$, para $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta$ então

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{f(a)}{2} < f(x) - f(a) < \frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \text{ se } x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Exercício 9. Se $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ e sua imagem está contida em $\mathbb{Q}$, com $f(1/2) = 1/2$, mostre que $f(x) = 1/2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $f(x) \neq \frac{1}{2}$ para algum $x \in \mathbb{R}$, como f é contínua e entre dois racionais quaisquer, como $\frac{1}{2}$ e $f(x)$, existe um irracional β, segue do teorema do valor intermediário que existe z entre $\frac{1}{2}$ e x tal que $f(z) = \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, absurdo. Assim é preciso que $f(x) = 1/2$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercício 10. Se $f(x)$ satisfaz a relação funcional

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

para todo x, y, encontre $f(x)$ para $x \in \mathbb{Q}$ e prove que se f for contínua então $f(x) = cx$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

Primeiro

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

A partir da relação, temos que se $n \in \mathbb{N}$, então

$$f(nx) = f(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{f(x) + \cdots + f(x)}_{n \text{ vezes}} = nf(x)$$

Assim, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = n \cdot f(1)$$

Se $n \in \mathbb{N}$, temos

$$f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1)$$

Se $p, q \in \mathbb{N}$, então

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = p \cdot f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1)$$

Logo $f(r) = r f(1)$ se $r \in \mathbb{Q}$, $r \geq 0$.

Por fim,

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

Daí,

$$f(r) = r\,f(1) \quad \forall\, r \in \mathbb{Q}.$$

Se f for contínua e $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, existe uma sequência de racionais $r_n \longrightarrow x$. Assim,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n \cdot f(1) = x \cdot f(1).$$

Logo, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = cx, \quad \text{com} \quad c = f(1) \in \mathbb{R}.$$

Exercício 11. Se $f(x) = x^n$, dado $\epsilon > 0$, encontre $\delta > 0$ (que pode depender de a) tal que

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

se

$$|x - a| < \delta$$

Se $a=0$, temos

$$|x^n| < \varepsilon \iff |x| < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

Suponha $a \neq 0$. Temos

$$|x^n - a^n| = |x-a| \cdot |x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \cdots + a^{n-1}|$$

Se $|x-a| < \delta$, então

$$|x| - |a| \leq |x-a| < \delta$$

$$\Rightarrow |x| \leq \delta + |a|$$

Podemos impor $\delta < |a|$

$$\Rightarrow |x| < 2|a|$$

Assim,

$$|x^n - a^n| \leq |x-a| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 2^k |a|^{n-1}$$

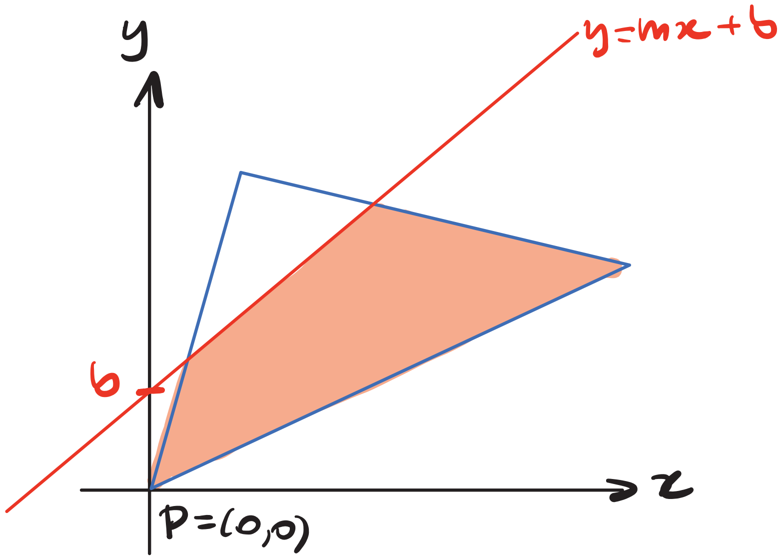
$$< \delta \cdot |a|^{n-1} (2^n - 1) < \delta\, 2^n \cdot |a|^{n-1}$$

$$= \varepsilon$$

se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2^n \cdot |a|^{n-1}}$.

Exercício 12. Considere um triângulo fixado no plano. Mostre que, para cada direção possível, existe uma reta com essa direção que divide o triângulo dado em duas partes de mesma área.

Seja P um dos vértices agudos do triângulo e construa um sistema de coordenadas cartesianas centrado em P tal que o triângulo fique contido no primeiro quadrante. Fixe uma inclinação $m \in (-\infty, \infty)$.



Cada reta de inclinação m tem equação $y = mx + b$, com $b \in \mathbb{R}$, e divide o plano em dois semi-planos.

Seja $f(b)$ o percentual de área do triângulo contido no semiplano da direita determinado pela reta $y = mx + b$. Então como o triângulo tem dimensões limitadas, existem $\alpha < 0 < \beta$ tais que

$$f(\alpha) = 0, \quad f(\beta) = 1$$

Como f é contínua segue do Teorema do valor intermediário que existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $f(\gamma) = \frac{1}{2}$. Assim, a reta

$$y = mx + \gamma$$

divide o triângulo em dois pedaços de mesma área.

Note que, se $m = \infty$, as retas são

$$x = a,$$

e um raciocínio inteiramente análogo também funciona nesse caso.

Exercício 13. Prove que se $f(x)$ é monótona em $[a,b]$ e satisfaz a propriedade do valor intermediário (ou seja, se $f(x) < c < f(y)$ então existe z entre x e y tal que $f(z) = c$), então f é contínua. Podemos concluir a mesma coisa quando f não é monótona?

Sem perda de generalidade suponha que f é crescente.

Sejam $x \in [a,b]$, $\varepsilon > 0$. Queremos descobrir $\delta > 0$ tal que se $|x-y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Seja

$$S = \{ z \in [a,b] \mid z > x \text{ e } f(z) < f(x) + \varepsilon \}$$

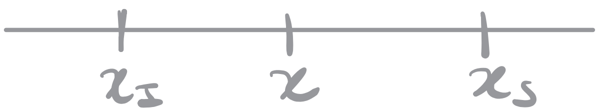
Se $S = \emptyset$, então $x = b$. Seja

$$I = \{ z \in [a,b] \mid z < x \text{ e } f(z) > f(x) - \varepsilon \}$$

Se $I = \emptyset$, então $x = a$. Defina

$$x_S = \begin{cases} \sup S & (S \neq \emptyset) \\ x & (S = \emptyset) \end{cases}$$

$$x_I = \begin{cases} \inf I & (I \neq \emptyset) \\ x & (I = \emptyset) \end{cases}$$



Seja

$$\delta = \min\{ x - x_I, x_S - x \} > 0$$

Se $x_I = x$, tome $\delta = x_S - x > 0$.

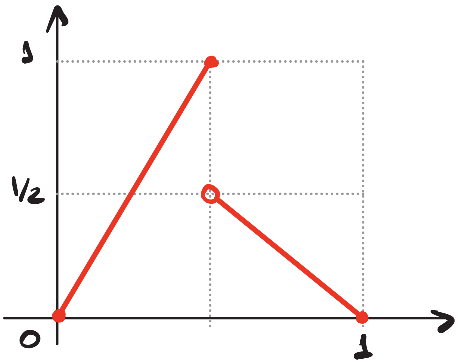
Se $x_S = x$, tome $\delta = x - x_I > 0$.

Logo, se $|x - y| < \delta$ e $y \in [a, b]$, temos que

$$f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon),$$

e então f é contínua.

Quando f não é monótona, a conclusão falha, como mostra o seguinte contra-exemplo:



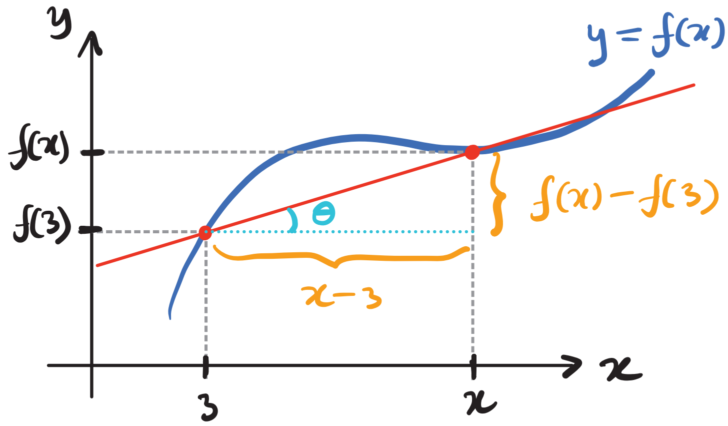
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - x, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Exercício 1. Uma curva tem equação $y = f(x)$.

(a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.

(b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P.

(a)



A inclinação da reta secante é dada por

$$\tan\theta = \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

(b) A inclinação da reta tangente é o limite da inclinação da secante quando $x \to 3$:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3)$$

Exercício 2. Encontre a equação da reta tangente à parábola $y = 4x - x^2$ no ponto $(1, 3)$.

$y' = 4 - 2x \implies y'(1) = 2$

Reta tangente em $(1, 3)$:

$$y = y'(1)(x-1) + y(1)$$
$$= 2(x-1) + 3$$
$$= 2x + 1$$

Exercício 3. Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto $x = a$.

$$y' = 8x - 6x^2 \Rightarrow y'(a) = 8a - 6a^2$$

Reta tangente em $x = a$:

$$y = y'(a)(x-a) + y(a)$$

$$= (8a - 6a^2)(x-a) + 3 + 4a^2 - 2a^3$$

$$= (8a - 6a^2)x - 8a^2 + 6a^3 + 3 + 4a^2 - 2a^3$$

$$= (8a - 6a^2)x + 3 - 4a^2 + 4a^3$$

Exercício 4. Encontra a inclinação da reta tangente à curva $y = 1/\sqrt{x}$ no ponto $x = a$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

A inclinação da tangente em $x=a$ é

$$y'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Exercício 5. Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com velocidade inicial de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é $H(t) = 10t - 1,86t^2$. Determine a função $V(t)$ da velocidade instantânea da pedra e diga quando ela atinge a superfície e com que velocidade.

$$V(t) = H'(t) = 10 - 3,72t$$

A pedra atinge a supercie em $t>0$ tal que $H(t) = 0$

$$\Rightarrow 0 = H(t) = t \cdot (10 - 1,86t)$$

$$\Rightarrow t = \frac{10}{1,86} s \approx 5,37 s$$

Neste tempo a velocidade é

$$V(t) = 10 - 3,72 \cdot \frac{10}{1,86} = -10 m/s$$

Exercício 6. Encontre $f'(a)$ usando a definição de derivada:

(a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ (b) $f(t) = 2t^3 + t$ (c) $f(t) = \dfrac{2t+1}{t+3}$

(d) $f(x) = x^{-2}$ (e) $f(x) = \sqrt{1-2x}$ (f) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1-x}}$

(g) $f(x) = \dfrac{5x}{1+x^2}$ (h) $f(t) = t^{3/2}$ (i) $f(x) = x^4$

(j) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ (k) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(a)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(a+h)^2 - 4(a+h) + \cancel{1} - 3a^2 + 4a - \cancel{1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3a^2} + 6ah + 3h^2 - \cancel{4a} - 4h - \cancel{3a^2} + \cancel{4a}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 6a + 3h - 4 = 6a - 4$$

(b) $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(a+h)^3 + (a+h) - 2a^3 - a}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2a^3} + 6a^2h + 6ah^2 + 2h^3 + \cancel{a} + h - \cancel{2a^3} - \cancel{a}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 6a^2 + 6ah + 2h^2 + 1$$

$$= 6a^2 + 1$$

(c) $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2(a+h)+1}{a+h+3} - \dfrac{2a+1}{a+3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[2(a+h)+1](a+3) - (2a+1)(a+h+3)}{h(a+h+3)(a+3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2a^2} + \cancel{2ah} + \cancel{6a} + 6h + \cancel{a} + \cancel{3}}{h(a+h+3)(a+3)} - \frac{\cancel{2a^2} + \cancel{2ah} + \cancel{6a} + \cancel{a} + h + \cancel{3}}{h(a+h+3)(a+3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5}{(a+h+3)(a+3)} = \frac{5}{(a+3)^2}$$

(d) $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(a+h)^2} - \dfrac{1}{a^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 - (a^2 + 2ah + h^2)}{ha^2(a+h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2a-h}{a^2(a+h)^2} = \frac{-2a}{a^4} = -\frac{2}{a^3}$$

(e) $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-2a-2h} - \sqrt{1-2a}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-2a-2h} - \sqrt{1-2a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1-2a-2h} + \sqrt{1-2a}}{\sqrt{1-2a-2h} + \sqrt{1-2a}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{2a} - 2h - \cancel{1} + \cancel{2a}}{h\left(\sqrt{1-2a-2h} + \sqrt{1-2a}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{\sqrt{1-2a-2h} + \sqrt{1-2a}} = \frac{-2}{2\sqrt{1-2a}} = \frac{-1}{\sqrt{1-2a}}$$

(f) $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4}{\sqrt{1-a-h}} - \dfrac{4}{\sqrt{1-a}}}{h}$$

$$= 4 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-a} - \sqrt{1-a-h}}{h\sqrt{1-a-h}\sqrt{1-a}}$$

$$= 4 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-a} - \sqrt{1-a-h}}{h\sqrt{1-a-h}\sqrt{1-a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a-h}}{\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a-h}}$$

$$= 4 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{a} - \cancel{1} + \cancel{a} + h}{h\sqrt{1-a-h}\sqrt{1-a}\left(\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a-h}\right)}$$

$$= 4 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-a-h}\sqrt{1-a}\left(\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a-h}\right)}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2(1-a)^{3/2}} = \frac{2}{(1-a)^{3/2}}$$

(g) $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{5(a+h)}{1+(a+h)^2} - \dfrac{5a}{1+a^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5(a+h)(1+a^2) - 5a\cdot[1+(a+h)^2]}{h[1+(a+h)^2]\cdot(1+a^2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{5a} + \cancel{5a^3} + 5h + 5a^2h - \cancel{5a} - \cancel{5a^3} - 10a^2h - 5h^2a}{h[1+(a+h)^2]\cdot(1+a^2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5h - 5a^2h - 5h^2a}{h[1+(a+h)^2]\cdot(1+a^2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5 - 5a^2 - 5ha}{[1+(a+h)^2]\cdot(1+a^2)} = \frac{5-5a^2}{(1+a^2)^2}$$

(h) $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(a+h)^3} - \sqrt{a^3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{(a+h)^3} - \sqrt{a^3}\right)\left(\sqrt{(a+h)^3} + \sqrt{a^3}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{(a+h)^3} + \sqrt{a^3}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h\cdot\left(\sqrt{(a+h)^3} + \sqrt{a^3}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{a^3} + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - \cancel{a^3}}{h\left(\sqrt{(a+h)^3} + \sqrt{a^3}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3a^2+3ah+h^2}{\sqrt{(a+h)^3}+\sqrt{a^3}} = \frac{3a^2}{2\,a^{3/2}} = \frac{3}{2}\sqrt{a}$$

(i) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(a+h)^4 - a^4}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(a+h)^2 - a^2][(a+h)^2 + a^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(\cancel{a}+h) - \cancel{a}][(a+h)+a][(a+h)^2+a^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} [(a+h)+a][(a+h)^2+a^2] = 2a \cdot 2a^2 = 4a^3$$

(j) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\cancel{1} + \frac{1}{a+h} - \cancel{1} - \frac{1}{a}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{a} - \cancel{a} - h}{h(a+h)\,a} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(a+h)\,a} = -\frac{1}{a^2}$$

(k) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt[3]{(a+h)^2} + \sqrt[3]{a+h}\,\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{(a+h)^2} + \sqrt[3]{a+h}\,\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{a}+h-\cancel{a}}{h\left(\sqrt[3]{(a+h)^2} + \sqrt[3]{a+h}\,\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(a+h)^2} + \sqrt[3]{a+h}\,\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3a^{3/2}}$$

Exercício 7. Mostre que:

(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.

(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

(a) Se f é par, então $f(x) = f(-x)$.

Temos

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

$$= -f'(x)$$

Logo, f' é ímpar.

(b) Se f é ímpar, então $f(-x) = -f(x)$.

Temos

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

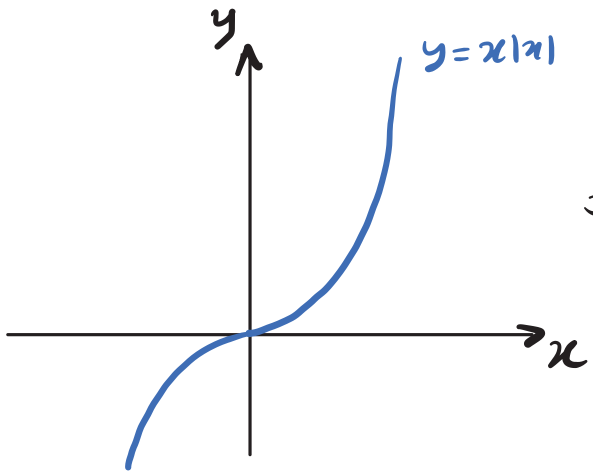
$$= f'(x)$$

Logo, f' é par.

Exercício 8. Esboce o gráfico das seguintes funções, diga onde elas são deriváveis e calcule $f'(x)$:

(a) $f(x) = x|x|$ (b) $f(x) = x + |x|$

(a)



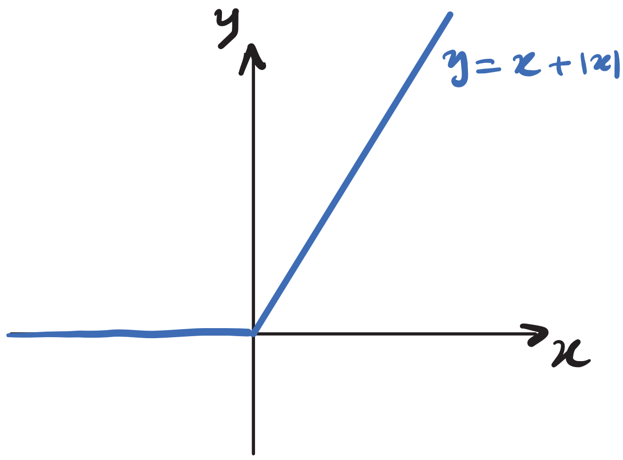
Temos que

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

f é derivável em toda a reta, e

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(b) Temos que



$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

f é derivável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, e temos

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Exercício 9. Suponha que f seja uma função que satisfaça a relação

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Suponha também que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(a) Encontre $f(0)$. (b) Encontre $f'(0)$. (c) Encontre $f'(x)$.

(a) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) + 0^2 \cdot 0 + 0 \cdot 0^2$

$= 2f(0)$

$\Longrightarrow f(0) = 0$

(b) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+0)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) + f(0) + h^2 \cdot 0 + h \cdot 0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 1$

(c) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{f(x)} + f(h) + x^2h + xh^2 - \cancel{f(x)}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} + x^2 + xh = 1 + x^2$

Exercício 10. Seja f definida em toda a reta e tal que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^2$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é constante.

Temos que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x)| = \lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} = 0$$

pois

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \leqslant \frac{|h|^2}{|h|} = |h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Mais tarde veremos que essa condição é suficiente para provar que f é constante, usando o Teorema do Valor Médio. No entanto, até aqui ainda não dispomos desse teorema, por isso vamos usar outro argumento para mostrar que f é constante.

Sejam $a < b \in \mathbb{R}$ quaisquer. Vamos provar que $f(a) = f(b)$.

Seja $\varepsilon > 0$ e defina

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon (x - a)\}$$

Note que $A \neq \emptyset$ pois $a \in A$.

Seja $s = \sup A$. Como f é contínua (pois é derivável!), $s \in A$.

De fato, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = s$. Isso segue do fato de que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A$ tal que $s - x_n < \frac{1}{n}$, já que $s = \sup A$.

Como $x_n \in A$, temos

$$|f(x_n) - f(a)| \leq \varepsilon(x_n - a)$$

Como f é contínua fazendo $n \to \infty$ nos dois lados da desigualdade obtemos que

$$|f(s) - f(a)| \leq \varepsilon(s - a)$$

Logo, $s \in A$.

Suponha que $s < b$. Como $f'(s) = 0$, existe $x \in (s, b)$ tal que

$$|f(x) - f(s)| \leq \varepsilon(s - x)$$

Temos

$$|f(x)-f(a)| \leq |f(x)-f(s)| + |f(s)-f(a)|$$

$$\leq \varepsilon(x-s) + \varepsilon(s-a) = \varepsilon(x-a)$$

Logo, $x \in A$, contradição. Segue que é preciso ter $s=b$.

Assim,

$$|f(b)-f(a)| \leq \varepsilon(b-a)$$

Como $\varepsilon>0$ é arbitrário, segue que $f(b)=f(a)$. Como $a<b$ são arbitrários, segue que f é constante em $\mathbb{R}$.

Exercício 11. Suponha que f seja uma função com a propriedade de que $|f(x)| \leqslant x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(0) = f'(0) = 0$.

$$0 \leq |f(0)| \leq 0^2 = 0 \implies f(0) = 0$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$$

Mas

$$\frac{|f(h)|}{|h|} \leq \frac{|h|^2}{|h|} = |h|$$

Daí,

$$-|h| \leq \frac{f(h)}{h} \leq |h| \quad \forall\, h \neq 0$$

$$\implies 0 = \lim_{h \to 0} -|h| \leq \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} \leq \lim_{h \to 0} |h| = 0$$

Assim, pelo teorema do sanduíche

$$f'(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

Exercício 1. Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x$ (b) $f(x) = x^2(1-2x)$ (c) $y = x^{5/3} - x^{-2/3}$

(d) $f(r) = \dfrac{5}{r^3}$ (e) $s(p) = \sqrt{p} - p$ (f) $G(q) = (1+q^{-1})^2$

(a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 4$

(b) $f(x) = x^2 - 2x^3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 6x^2$

(c) $y' = \frac{5}{3}x^{2/3} + \frac{2}{3}x^{-5/3}$

(d) $f'(r) = -\frac{15}{r^4}$

(e) $s(p) = \frac{1}{2\sqrt{p}} - 1$

(f) $G(q) = 1 + \frac{2}{q} + \frac{1}{q^2}$

$\Rightarrow G'(q) = -\frac{2}{q^2} - \frac{2}{q^3}$

Exercício 2. Encontre uma equação da reta tangente e da reta normal à curva no ponto dado:

(a) $y = 2x^3 - x^2 + 2$ em $(1,3)$ (b) $y = x + \frac{2}{x}$ em $(2,3)$ (c) $y = \sqrt[4]{x} - x$ em $(1,0)$

(d) $y = x - \sqrt{x}$ em $(1,0)$ (e) $y^2 = x^3$ em $(1,1)$

(a) $y' = 6x^2 - 2x \Rightarrow y'(1) = 6 - 2 = 4$

tangente: $y = 4(x-1) + 3$

normal: $y = \frac{-1}{4}(x-1) + 3$

(b) $y' = 1 - \frac{2}{x^2} \Rightarrow y'(2) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

tangente: $y = \frac{1}{2}(x-2) + 3$

normal: $y = -2(x-2) + 3$

(c) $y' = \frac{1}{4} \cdot x^{-3/4} - 1 \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

tangente: $y = -\frac{3}{4}(x-1)$

normal: $y = \frac{4}{3}(x-1)$

(d) $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

tangente: $y = \frac{1}{2}(x-1)$

normal: $y = 2(x-1)$

(e) $y = x^{3/2} \Rightarrow y' = \frac{3}{2} x^{1/2} \Rightarrow y'(1) = \frac{3}{2}$

tangente: $y = \frac{3}{2}(x-1) + 1$

normal: $y = \frac{-2}{3}(x-1) + 1$

Exercício 3. Onde a reta normal à parábola $y = x^2 - 1$ no ponto $(-1, 0)$ intecepta a parábola uma segunda vez?

$$y' = 2x \Rightarrow y'(-1) = -2$$

Logo a reta normal em $(-1,0)$ é

$$y = \frac{1}{2}(x+1)$$

A interseção com a parábola satisfaz

$$\frac{1}{2}(x+1) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = -1 \text{ ou } \frac{3}{2}$$

Logo a outra interseção ocorre em $x = \frac{3}{2}$,

$$y = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

Exercício 4. A equação $y'' + y' - 2y = x^2$ é uma equação diferencial, pois envolve uma função desconhecida y e suas derivadas. Encontre as constantes a, b e c tais que $y = ax^2 + bx + c$ satisfaça essa equação.

Temos

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$

Assim,

$$y'' + y' - 2y = 2a + 2ax + b - 2ax^2 - 2bx - c$$

$$= -2ax^2 + (2a - 2b)x + (2a + b - c) = x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a = 1 \Rightarrow a = -1/2 \\ 2a - 2b = 0 \Rightarrow b = a = -1/2 \\ 2a + b - c = 0 \Rightarrow -1 - \frac{1}{2} = c \Rightarrow c = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$a = -1/2, \quad b = -1/2, \quad c = -3/2$$

Exercício 5. Determinar os valores de a, b, c tais que os gráficos dos dois polinômios $f(x) = x^2 + ax + b$ e $g(x) = x^3 - c$ se intersectem no ponto $(1, 2)$ e admitam a mesma tangente naquele ponto.

$$f(1) = 1 + a + b = 2 \quad (I)$$
$$g(1) = 1 - c = 2 \Rightarrow c = -1$$

Além disso,

$$f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(1) = 2 + a$$
$$g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g'(1) = 3$$

Para que a tangente em $(1,2)$ seja a mesma, devemos ter $f'(1) = g'(1)$. Daí,

$$2 + a = 3 \Rightarrow a = 1$$

Pela equação (I), temos

$$2 = 1 + 1 + b = 2 + b \Rightarrow b = 0$$

Logo,

$$a = 1, \; b = 0 \; \text{e} \; c = -1.$$

Exercício 6. Calcule o limite quando $n \to \infty$ do valor absoluto a n-ésima derivada de $1/x$ no ponto $x = 2$.

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = \frac{-1}{x^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}(x^{-1}) = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{d^3}{dx^3}(x^{-1}) = -\frac{3!}{x^4}$$

Vamos provar por indução que

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{-1}) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$$

Já vimos que vale para $n = 1, 2, 3$. Assuma que vale para n como hipótese indutiva.

Temos

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{-1}) = \frac{d}{dx} \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}},$$

completando a indução.

Assim, devemos avaliar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^n}{dx^n}(x^{-1})\bigg|_{x=2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}}$$

Repare que

$$\frac{n!}{2^{n-1}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} \geqslant 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{2^{n+1}} \geqslant \frac{n}{8} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^n}{dx^n}(x^{-1})\bigg|_{x=2} = \infty$$

Exercício 7. Como é definido o número e?

A definição que usamos foi

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Uma caracterização equivalente e que também poderia servir como definição é

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Exercício 8. Derive:

(a) $f(x) = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$ (b) $f(v) = \dfrac{\sqrt[3]{v} - 2ve^v}{v}$ (c) $y = e^{x+1} + 1$

(d) $f(x) = (3x^2 + 5x)e^x$ (e) $g(x) = (x + 2\sqrt{x})e^x$ (f) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

(g) $g(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$ (h) $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$ (i) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2+x}$

(j) $y = (z^2 + e^z)\sqrt{z}$ (k) $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{t-3}$

(a) $f'(x) = 3e^x - \dfrac{4}{3}x^{-4/3}$

(b) $f(v) = v^{-2/3} - 2e^v \Rightarrow f'(v) = -\dfrac{2}{3}v^{-5/3} - 2e^v$

(c) $y = e \cdot e^x + 1 \Rightarrow y' = e \cdot e^x = e^{x+1}$

(d) $f'(x) = (6x + 5 + 3x^2 + 5x)e^x$
$= (3x^2 + 11x + 5)e^x$

(e) $g'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x + 2\sqrt{x}\right)e^x$

(f) $y' = \dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{2e^x}{x^3} = \dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$

(g) $g'(x) = \dfrac{3(2x+1) - 2\cdot(3x-1)}{(2x+1)^2} = \dfrac{5}{(2x+1)^2}$

(h) $F(y) = \dfrac{1}{y} + 5y - \dfrac{3}{y^3} - \dfrac{15}{y} = 5y - \dfrac{3}{y^3} - \dfrac{14}{y}$

$\Rightarrow F'(y) = 5 + \dfrac{9}{y^4} + \dfrac{14}{y^2}$

(i) $$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(2+x) - \sqrt{x}}{(2+x)^2}$$

$$= \frac{2+x-2x}{2\sqrt{x}\,(2+x)^2} = \frac{2-x}{2\sqrt{x}\,(2+x)^2}$$

(j) $$y = z^{5/2} + \sqrt{z}\,e^z$$

$$\Rightarrow y' = \frac{5}{2}z^{3/2} + \left(\frac{1}{2\sqrt{z}} + \sqrt{z}\right)e^z$$

(k) $$f'(t) = \frac{\frac{1}{3}t^{-2/3}(t-3) - t^{1/3}}{(t-3)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\,t^{1/3} - t^{-2/3} - t^{1/3}}{(t-3)^2} = -\frac{\left(3t^{-2/3} + 2t^{1/3}\right)}{3\,(t-3)^2}$$

Exercício 9. Encontre f' e f'':

(a) $f(x) = (x^3+1)e^x$ (b) $f(x) = \sqrt{x}e^x$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+e^x}$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

(a) $f'(x) = (3x^2 + x^3 + 1)e^x$

$$\Rightarrow f''(x) = (6x + 3x^2 + 3x^2 + x^3 + 1)e^x$$

$$= (x^3 + 6x^2 + 6x + 1)e^x$$

(b) $f'(x) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)e^x$

$$\Rightarrow f''(x) = \left(\frac{-1}{4x^{3/2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)e^x$$

$$= \left(\frac{-1}{4x^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)e^x$$

(c) $f'(x) = \dfrac{2x(1+e^x) - e^x \cdot x^2}{(1+e^x)^2}$

$$= \frac{2x + (2x - x^2)e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{[2 + (2 - \cancel{2x} + \cancel{2x} - x^2)e^x] \cdot \cancel{(1+e^x)}\, e^x}{(1+e^x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$- \frac{2\cancel{(1+e^x)} \cdot e^x[2x + (2x - x^2)e^x]}{(1+e^x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2e^x + (2 - x^2)e^{2x} - 4xe^x - (4x - 2x^2)e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$

$$= \frac{(2-4x)e^{x} + (2-x^2-4x+2x^2)e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$

$$= \frac{(2-4x)e^{x} + (2-4x+x^2)e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$

(d) $f'(x) = \dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

$$\Rightarrow f''(x) = -\left[\frac{2x\cancel{(x^2-1)} - 2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x\cdot(x^2+1)}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}\right]$$

$$= -\left[\frac{2x-4x-4x^3}{(x^2-1)^3}\right] = \frac{4x^3+2x}{(x^2-1)^3}$$

Exercício 10. Se $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$, encontre $g^{(n)}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$g(x) = x e^{-x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = (1 - x) e^{-x} = -(x-1) e^{-x}$$

$$\Rightarrow g''(x) = (-1 + x - 1) e^{-x} = (x-2) e^{-x}$$

$$\Rightarrow g'''(x) = (1 - x + 2) = -(x-3) e^{-x}$$

Vamos provar por indução que

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n (x-n) e^{-x} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Suponha que assim seja para um certo $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left[(-1)^n (x-n) e^{-x}\right]$$

$$= \left[(-1)^n - (-1)^n (x-n)\right] e^{-x}$$

$$= (-1)^n [1 - x + n] e^{-x} = (-1)^n (-x + n+1) e^{-x}$$

$$= (-1)^{n+1} [x - (n+1)] e^{-x},$$

completando a indução.

Exercício 11. Se $h(2) = 4$ e $h'(2) = -3$, encontre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2} = \frac{h'(x)\cdot x - h(x)}{x^2}\bigg|_{x=2}$$

$$= \frac{h'(2)\cdot 2 - h(2)}{2^2} = \frac{-3\cdot 2 - 4}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

Exercício 12. Encontre as equações de retas tangentes à curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que sejam paralelas à reta $x - 2y = 2$.

$$y' = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

A reta de referência é

$$x - 2y = 2 \iff y = \frac{1}{2}x - 1$$

Assim, a tangente é paralela a ela quando

$$\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x = -1 \pm 2$$
$$\Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 1$$

Como $y(-3) = \frac{-4}{-2} = 2$, $y(1) = 0$, as retas tangentes procuradas são

$$y = \frac{1}{2}(x+3) + 2 = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

e

$$y = \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Exercício 13. Encontre uma expressão para $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^k e^x\right)$, onde $n \leqslant k$.

Pela Regra de Leibniz,

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^k e^x) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \frac{d^l}{dx^l} x^k \cdot \frac{d^{n-l}}{dx^{n-l}} e^x$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \frac{k!}{(k-l)!} x^{k-l} e^x$$

Exercício 1. Derive:

(a) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$
(b) $f(x) = e^x \cos x$
(c) $f(x) = x\cos x + 2\tan x$
(d) $g(t) = t^3 \cos t$
(e) $h(x) = \operatorname{cossec} x + e^x \cot x$
(f) $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$
(g) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$
(h) $y = \dfrac{t \operatorname{sen} t}{1 + t}$
(i) $f(x) = x \cos x \operatorname{sen} x$
(j) $y = 2\sec x - \operatorname{cossec} x$
(k) $g(t) = 4\sec t + \tan t$
(l) $f(t) = te^t \cot t$
(m) $f(x) = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

(a) $f'(x) = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$ $\qquad \left(\dfrac{1}{c}\right)' = \dfrac{\cdot 5}{c^2}$

(b) $f'(x) = (\cos x - \operatorname{sen} x)\, e^x$

(c) $f'(x) = \cos x - x\operatorname{sen} x + 2\sec^2 x$

(d) $g'(t) = 3t^2 \cos t - t^3 \operatorname{sen} t$

(e) $h'(x) = -\operatorname{cossec} x \cdot \cot x + (\cot x - \operatorname{cossec}^2 x)\, e^x$

(f) $y' = \dfrac{2 - \tan x + x \cdot \sec^2 x}{(2 - \tan x)^2}$

(g) $f'(x) = \dfrac{\cos x(1 + \cos x) + \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \dfrac{1}{1 + \cos x}$

(h) $y' = \dfrac{t\cos t}{1+t} + \dfrac{1+t-t}{(1+t)^2} \cdot \operatorname{sen} t$

$= \dfrac{t\cos t}{1+t} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{(1+t)^2}$

(i) $f(x) = \frac{x}{2} \operatorname{sen} 2x$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + x \cos 2x$

(j) $y' = 2 \sec x \tan x + \operatorname{cossec} x \cdot \cot x$

(k) $g'(t) = 4 \sec t \cdot \tan t + \sec^2 t$

(ℓ) $f'(t) = \left[\frac{d}{dt}(t \cot)\right] e^t + t \cot \cdot e^t$

$= \left(-t \operatorname{cossec}^2 t + \cot + t \cot\right) e^t$

(m) $f'(x) = \dfrac{\sec^3 x - (\tan x - 1) \sec x \tan x}{\sec^2 x}$

$= \dfrac{\sec^3 x - \sec x . \tan^2 x + \sec x \cdot \tan x}{\sec^2 x}$

$= \dfrac{\sec x (1 + \tan^2 x) - \sec x \cdot \tan^2 x + \sec x \tan x}{\sec^2 x}$

$= \dfrac{\sec x (1 + \tan x)}{\sec^2 x} = \dfrac{1 + \tan x}{\sec x}$

Exercício 2. Encontre:

(a) $\dfrac{d^{99}}{dx^{99}} \operatorname{sen} x$ (b) $\dfrac{d^{35}}{dx^{35}} (x \operatorname{sen} x)$

(a) Temos

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \cos x \qquad \frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sen}x = -\operatorname{sen}x$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\operatorname{sen}x = -\cos x \qquad \frac{d^4}{dx^4}\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}x.$$

Daí, como $99 = 4\cdot(24) + 3$, temos

$$\frac{d^{99}}{dx^{99}}\operatorname{sen}x = \frac{d^3}{dx^3}\operatorname{sen}x = -\cos x$$

(b) Temos, pela regra de Leibniz,

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Logo,

$$\frac{d^n}{dx^n}(x\operatorname{sen}x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}\operatorname{sen}x \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}x$$

Como $\dfrac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}x = 0$ se $k < n-1$,

$$\frac{d^n}{dx^n}(x\operatorname{sen}x) = n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\operatorname{sen}x + x\cdot\frac{d^n}{dx^n}\operatorname{sen}x$$

Assim, para $n = 35$, como

$35 = 4 \cdot 8 + 3$ e $34 = 4 \cdot 8 + 2$,

segue pela ideia do item (a) que

$$\frac{d^{35}}{dx^{35}}(x \operatorname{sen} x) = 35 \cdot \frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sen} x + x \cdot \frac{d^3}{dx^3}\operatorname{sen} x$$

$$= -35 \operatorname{sen} x - x \cos x$$

Exercício 3. Derive:

(a) $y = \operatorname{sen} 4x$

(b) $y = \tan(\operatorname{sen} x)$

(c) $y = \sqrt{4+3x}$

(d) $y = e^{\sqrt{x}}$

(e) $y = (1+x+x^2)^{99}$

(f) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

(g) $y = \cos^2 x$

(h) $y = \cos(x^2)$

(i) $f(t) = e^{at} \operatorname{sen} bt$

(j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

(k) $s(t) = \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} t}{1+\cos t}}$

(l) $y = e^{\tan x}$

(m) $g(u) = \left(\dfrac{u^3-1}{u^3+1}\right)^8$

(n) $g(\theta) = \sec^2(m\theta)$

(o) $y = \cot^2(\operatorname{sen}\theta)$

(p) $y = \tan(\sec(\cos t))$

(q) $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$

(r) $y = 2^{3^{4^x}}$

(s) $y = \sqrt{1+xe^{-2x}}$

(t) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

(u) $y = \dfrac{1}{(1+\tan x)^2}$

(a) $y' = 4\cos 4x$

(b) $y' = \sec^2(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$

(c) $y' = \dfrac{3}{2\sqrt{4+3x}}$

(d) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

(e) $y' = 99(1+x+x^2)^{98} \cdot (2x+1)$

(f) $y' = -\dfrac{1}{3}(x^2-1)^{-4/3} \cdot 2x$

(g) $y' = -2\cos x \operatorname{sen} x$

(h) $y' = -\operatorname{sen}(x^2) \cdot 2x$

(i) $f'(t) = (a \cdot \operatorname{sen} bt + b\cos bt)\, e^{at}$

(j) $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)^{3/2}}$

(k) $s'(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos t}{1+\operatorname{sen} t}} \cdot \frac{\cos t(1+\cos t)+\operatorname{sen} t\,(1+\operatorname{sen} t)}{(1+\cos t)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos t}{1+\operatorname{sen} t}} \cdot \frac{\operatorname{sen} t+\cos t+1}{(1+\cos t)^2}$

$= \frac{1+\operatorname{sen} t+\cos t}{2\sqrt{1+\operatorname{sen} t}\,(1+\cos t)^{3/2}}$

(l) $y' = \sec^2 x\, e^{\tan x}$

(m) $g'(u) = 8\left(\frac{u^3-1}{u^3+1}\right)^7 \cdot \frac{3u^2(u^3+1)-3u^2(u^3-1)}{(u^3+1)^2}$

$= 8\left(\frac{u^3-1}{u^3+1}\right)^7 \cdot \frac{6u^2}{(u^3+1)^2}$

$= \frac{48u^2(u^3-1)^7}{(u^3+1)^9}$

(n) $g'(\theta) = 2m\sec^2(m\theta)\cdot\tan(m\theta)$

(o) $y' = -2\cot(\operatorname{sen}\theta)\cdot\operatorname{cossec}(\operatorname{sen}\theta)\cdot\cos\theta$

(p)

$$y' = -\sec^2(\sec(\cos t)) \cdot \sec(\cos t) \cdot \tan(\cos t) \cdot \operatorname{sen} t$$

(q) $f'(t) = e^t \sec^2(e^t) + \sec^2 t \, e^{\tan t}$

(r) $y' = \log 2 \cdot \log 3 \cdot \log 4 \cdot 4^x \cdot 3^{4^x} \cdot 2^{3^{4^x}}$

(s) $y' = \dfrac{(1-2x)e^{-2x}}{2\sqrt{1+xe^{-2x}}}$

(t) $y' = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$

(u) $y' = \dfrac{-2\sec^2 x}{(1+\tan^2 x)^2}$

Exercício 4. A equação do movimento harmônico simples é dada por $s(t) = A\cos(\omega t + \delta)$. Quando a velocidade é zero?

$$v(t) = s'(t) = -\omega A \,\mathrm{sen}(\omega t + \delta) = 0$$

se $\omega t + \delta = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{k\pi - \delta}{\omega}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exercício 5. Escreva $|x| = \sqrt{x^2}$ e use a regra da cadeia para mostrar que, para todo $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0)$$

Exercício 6. Calcule as derivadas das seguintes funções e diga onde elas não existem:

(a) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ (b) $g(x) = \operatorname{sen}|x|$

(a) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|} \cdot \cos x \quad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

(b) $g'(x) = \cos|x| \cdot \dfrac{x}{|x|} \quad (x \neq 0)$

Exercício 7. Mostre que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cot x}+\frac{\cos^2 x}{1+\tan x}\right) = -\cos 2x$$

Temos que

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cot x}+\frac{\cos^2 x}{1+\tan x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 \tan x + \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \cot x}{1+\cot x \cdot \tan x + \cot x + \tan x}$$

$$= \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}^3}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}}{2 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen} x \cos x + \cos^4 x}{2 \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Analogamente $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$= \frac{\left(\frac{1-\cos 2x}{4}\right)^2 + \frac{2}{4}\operatorname{sen} 2x + \left(\frac{1+\cos 2x}{4}\right)^2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1 - \cancel{2\cos 2x} + \cos^2 2x + 2\operatorname{sen} 2x + 1 + \cancel{2\cos 2x} + \cos^2 2x}{4(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1 + \cos^2 2x + \operatorname{sen} 2x}{2(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

$$1 + \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x$$
$$= (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$$

$$= \frac{1 + \operatorname{sen} 2x + 1 - \operatorname{sen}^2 2x}{2 \cdot (1 + \operatorname{sen} 2x)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{(1 - \operatorname{sen} 2x)\cancel{(1 + \operatorname{sen} 2x)}}{\cancel{1 + \operatorname{sen} 2x}} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \operatorname{sen} 2x\right) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}\right] = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\right)$$

$$= -\cos 2x$$

Exercício 8. Se $n \in \mathbb{N}$, mostre que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^n x \cos nx) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^n x \cos nx) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x \cdot \cos nx - n \operatorname{sen}^n x \operatorname{sen} nx$$

$$= n \operatorname{sen}^{n-1} x \cdot (\cos x \cdot \cos nx - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} nx)$$

$$= n \operatorname{sen}^{n-1} x \cdot \cos(n+1)$$

Exercício 9. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1}\cos(4x + n\pi/2)$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^4 x = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}$$

$$\cos^4 x = \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{1 + \cos^2 2x}{2}$$

Mas

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{1 + \frac{1 + \cos 4x}{2}}{2}$$

$$= \frac{3 + \cos 4x}{4}$$

Assim, para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) = \frac{1}{4}\frac{d^n}{dx^n}\cos(4x) \quad (\mathrm{I})$$

Vamos provar por indução que

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos 4x = 4^n\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Repare que, para $n=1$,

$$\frac{d}{dx}\cos 4x = -4\,\text{sen}\,4x = 4\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$$

Suponha como hipótese de indução que

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos 4x = 4^n\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

Então

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\cos 4x = \frac{d}{dx}\frac{d^n}{dx^n}\cos 4x = \frac{d}{dx}4^n\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= -4^{n+1}\,\text{sen}\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right) = 4^{n+1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 4^{n+1}\cos\left(4x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

completando a indução. Assim,

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos 4x = 4^n\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, pela equação (I), segue que

$$\frac{d^n}{dx^n}(\text{sen}^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

Exercício 10. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx) = r^n e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx + n\theta),$$

onde $a, b > 0$, $r^2 = a^2 + b^2$ e $\theta = \arctan(b/a)$.

Temos que, para $\theta = \arctan \frac{b}{a}$,

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}\mathrm{sen}\,bx) = (a\,\mathrm{sen}\,bx + b\cos bx)e^{ax}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{sen}\,bx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos bx\right)e^{ax}$$

$$= r\cdot(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,bx + \mathrm{sen}\,\theta\cos bx)e^{ax}$$

$$= r\cos(bx+\theta)e^{ax}$$

Logo, a fórmula vale para $n=1$. Provaremos os demais casos por indução. Assuma que valha para algum $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}\mathrm{sen}\,bx) = r^n e^{ax}\mathrm{sen}(bx+n\theta)$$

Temos

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{ax}\mathrm{sen}\,bx) = \frac{d}{dx}\left[r^n e^{ax}\mathrm{sen}(bx+n\theta)\right]$$

$$= r^n \left[a \,\text{sen}(bx + n\theta) + b \cos(bx + n\theta) \right] e^{ax}$$

$$= r^{n+1} \left[\frac{a}{r} \,\text{sen}(bx + n\theta) + \frac{b}{r} \cos(bx + n\theta) \right] e^{ax}$$

$$= r^{n+1} \left[\cos\theta \,\text{sen}(bx + n\theta) + \text{sen}\,\theta \cos(bx + n\theta) \right] e^{ax}$$

$$= r^{n+1} \cdot \text{sen}(bx + n\theta + \theta)\, e^{ax}$$

$$= r^{n+1} \cdot \text{sen}\left[bx + (n+1)\theta \right] e^{ax},$$

completando a prova por indução.

Exercício 11. Calcule a segunda derivada de $f[g\{h(x)\}]$.

$$\frac{d}{dx}f[g\{h(x)\}] = f'[g\{h(x)\}]\cdot g'\{h(x)\}\cdot h'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}f[g\{h(x)\}] = f''[g\{h(x)\}]\cdot\left[g'\{h(x)\}\cdot h'(x)\right]^2$$

$$+ f'[g\{h(x)\}]\cdot g''\{h(x)\}\{h'(x)\}^2$$

$$+ f'[g\{h(x)\}]\cdot g'\{h(x)\}\cdot h''(x)$$

Exercício 12. Que condições os coeficientes α, β, a, b, c devem satisfazer para que

$$\frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

tenha derivada finita em toda a reta e que jamais se anula?

$$y' = \frac{\alpha\sqrt{ax^2+bx+c} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot(\alpha x+\beta)}{ax^2+bx+c}$$

$$= \frac{2\alpha(\cancel{ax^2}+bx+c) - [\cancel{2a\alpha x^2}+(2a\beta+b\alpha)x+b\beta]}{2(ax^2+bx+c)^{3/2}}$$

$$= \frac{(2\alpha b-2a\beta-b\alpha)x+(2\alpha c-b\beta)}{2(ax^2+bx+c)^{3/2}}$$

Para ter y' finita, é preciso que o denominador não tenha raízes reais. Assim,

$$b^2-4ac<0 \Rightarrow \boxed{b^2<4ac}$$

Para que y' nunca se anule, o numerador não deve ter raízes. Assim, é necessário que o coeficiente de x seja nulo e o termo constante seja diferente de zero:

$$\begin{cases} 2\alpha b-2a\beta-b\alpha=0 \Rightarrow \boxed{2\alpha b=2a\beta+b\alpha} \\ 2\alpha c-b\beta\neq 0 \Rightarrow \boxed{2\alpha c\neq b\beta} \end{cases}$$

Exercício 13. Mostre que $\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{x^2/2}\right) = u_n(x)e^{x^2/2}$, onde u_n é um polinômio de grau n. Mostre a relação de recorrência

$$u_{n+1} = xu_n + u_n'$$

Temos

$$\frac{d}{dx} e^{x^2/2} = x e^{x^2/2},$$

que atende ao enunciado para $n=1$.

Vamos provar por indução que

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{x^2/2} = u_n(x) e^{x^2/2},$$

onde u_n é polinômio de grau n.

Suponha, como hipótese de indução, que valha para n. Temos

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{x^2/2} = \frac{d}{dx}\left(u_n(x) e^{x^2/2}\right)$$

$$= \left[u_n'(x) + x u_n(x)\right] e^{x^2/2}$$

$$= u_{n+1}(x) e^{x^2/2},$$

onde u_{n+1} é polinômio de grau $n+1$.

Isso conclui a indução e ainda mostra que

$$u_{n+1} = u_n' + x u_{n+1}.$$

Exercício 14. Usando a regra de Leibniz aplicada a

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2/2}\right) = xe^{x^2/2},$$

conclua que

$$u_{n+1} = xu_n + nu_{n-1}$$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(e^{x^2/2}\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(xe^{x^2/2}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x \cdot \frac{d^k}{dx^k} e^{x^2/2}$$

$$= n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{x^2/2} + x \frac{d^n}{dx^n} e^{x^2/2}$$

pela regra de Leibniz. Usando o exercício anterior, segue que

$$u_{n+1}(x) e^{x^2/2} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{x^2/2} = n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{x^2/2} + x \frac{d^n}{dx^n} e^{x^2/2}$$

$$= [n\, u_{n-1}(x) + x\, u_n(x)]\, e^{x^2/2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = n u_{n-1} + x u_n$$

Exercício 15. Com base nos dois últimos exercícios, obtenha a equação diferencial

$$u_n'' + xu_n' - nu_n = 0$$

satisfeita por $u_n(x)$.

$$\begin{cases} u_{n+1} = xu_n + u_n' & (\mathrm{I}) \\ u_{n+1} = xu_n + nu_{n-1} & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

De $(\mathrm{I}) = (\mathrm{II})$, obtemos

$$u_n' = nu_{n-1}$$

Derivando,

por (I) c/ n-1

$$u_n'' = nu_{n-1}' = n\cdot(u_n - xu_{n-1})$$

$$= nu_n - xnu_{n-1}$$

por (II)

$$= nu_n - x(u_{n+1} - xu_n)$$

por (I)

$$= nu_n - x(\cancel{xu_n} + u_n' - \cancel{xu_n})$$

$$= nu_n - xu_n'$$

$$\Longrightarrow \quad u_n'' + xu_n' - nu_n = 0$$

Exercício 16. A função f definida sobre a reta satisfaz à relação

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Asssumindo que f é diferenciável, prove que ou $f(x) = 0$ para todo x ou $f(x) = e^{ax}$.

Temos que

$f(0) = f(0+0) = f(0)^2 \Rightarrow f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Além disso,

$$f(x) = f(x+0) = f(x) \cdot f(0)$$

Se $f(0) = 0$, então $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Suponha então que $f(0) = 1$. Temos que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\left(\frac{f(h) - 1}{h}\right) = f(x) \cdot \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Logo,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= f(x) \cdot f'(0).$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot f'(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Note que

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\, e^{-f'(0)x}\right) = \left(f'(x) - f'(0)f(x)\right) e^{-f'(0)x} = 0$$

$$\Rightarrow f(x)\, e^{-f'(0)x} = C = \text{constante}.$$

Fazendo $x=0$, vemos que $c=1$.

Logo,

$$f(x) = e^{f'(0)\cdot x}$$

Exercício 1. Encontre $\dfrac{dx}{dy}$ derivando implicitamente:

(a) $x^2 - 4xy + y^2 = 4$
(b) $x^4 + x^2y^2 - y^3 = 5$
(c) $\dfrac{x^2}{x+y} = y^2 + 1$
(d) $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$
(e) $e^{x/y} = x - y$
(f) $\arctan(x^2y) = x + xy^2$
(g) $\operatorname{sen}(xy) = \cos(x+y)$
(h) $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$
(i) $xy = \sqrt{x^2+y^2}$
(j) $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$
(k) $\tan(x-y) = \dfrac{y}{1+x^2}$
(l) $x \sec y = y \tan x$

(a) $2x - 4y - 4xy' + 2yy' = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x-4y}{4x-2y} = \frac{x-2y}{2x-y}$$

(b) $4x^3 + 2xy^2 + 2x^2yy' - 3y^2y' = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{4x^3+2xy^2}{3y^2-2x^2y}$$

(c) $x^2 = (x+y)(y^2+1) = xy^2 + x + y^3 + y$

$$\Rightarrow 2x = y^2 + 2xyy' + 1 + 3y^2y' + y'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x-y^2-1}{2xy+3y^2+1}$$

(d) $2xy^2 + 2x^2yy' + \operatorname{sen} y + x\cos y \cdot y' = 0$

$$\Rightarrow y' = -\frac{(2xy^2+\operatorname{sen} y)}{2x^2y + x\cos y}$$

(e) $\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\cdot y'\right)e^{\frac{x}{y}} = 1 - y'$

$$\Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}} - 1}{\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} - 1} = \frac{y e^{x/y} - y^2}{x e^{x/y} - y^2}$$

(f) $\dfrac{2xy + x^2y'}{1 + x^4y^2} = 1 + y^2 + 2xyy'$

$$\Rightarrow 2xy + x^2y' = (1+y^2)(1+x^4y^2) + 2xy(1+x^4y^2)y'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2xy - (1+y^2)(1+x^4y^2)}{2xy(1+x^4y^2) - x^2}$$

(g) $\cos(xy)\cdot(y + xy') = -\operatorname{sen}(x+y)(1+y')$

$$\Rightarrow y' = -\frac{\left[\operatorname{sen}(x+y) + y\cos(xy)\right]}{\operatorname{sen}(x+y) + x\cos(xy)}$$

(h) $(y'\operatorname{sen}x + \cos x)e^y = 1 + y + xy'$

$$\Rightarrow y' = \frac{1 + y - \cos x\, e^y}{\operatorname{sen}x\, e^y - x}$$

(i) $y + xy' = \dfrac{\cancel{2}x + \cancel{2}yy'}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\Rightarrow y - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x\right]y'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - x}{y - x\sqrt{x^2+y^2}}$$

(j) $\operatorname{sen} y + x\cos y \cdot y' + y' \operatorname{sen} x + y\cos x = 0$

$$\Rightarrow y' = -\frac{(\operatorname{sen} y + y\cos x)}{\operatorname{sen} x + x\cos y}$$

(k) $(1-y')\sec^2(x-y) = \dfrac{y'}{1+x^2} - \dfrac{2xy}{(1+x^2)^2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sec^2(x-y) + \dfrac{2xy}{(1+x^2)^2}}{\sec^2(x-y) + \dfrac{1}{(1+x^2)}}$$

(l) $\sec y + x\sec y \cdot \tan y \cdot y' = \tan x \cdot y' + y\sec^2 x$

$$\Rightarrow y' = \frac{y\sec^2 x - \sec y}{x\sec y \tan y - \tan x}$$

Exercício 2. Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ e $f(1) = 2$, encontre $f'(1)$.

Derivando implicitamente, temos

$$f'(x) + 2x[f(x)]^3 + 3x^2[f(x)]^2 \cdot f'(x) = 0$$

Fazendo $x = 1$, vem

$$f'(1) + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot f'(1) = 0$$

$$\Rightarrow f'(1) = -\frac{16}{13}$$

Exercício 3. Se $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, encontre $g'(0)$.

Fazendo $x=0$ na expressão, vemos que

$$g(0)=0$$

Derivando implicitamente vem

$$g'(x) + \operatorname{sen} g(x) + x \cos g(x) \cdot g'(x) = 2x$$

Fazendo $x=0$:

$$g'(0) = 0$$

Exercício 4. Use derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado:

(a) $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y$, $(\pi/2, \pi/4)$
(b) $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$
(c) $x^2 - xy - y^2 = 1$, $(2, 1)$
(d) $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$, $(0, 1/2)$
(e) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, $(-3\sqrt{3}, 1)$
(f) $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, $(3, 1)$

(a) $y' \operatorname{sen} 2x + 2y \cos 2x = \cos 2y - 2x \operatorname{sen} 2y \cdot y'$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cos 2y - 2y \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x + 2x \operatorname{sen} 2y}$$

Em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, temos

$$y' = \frac{0 + \frac{\pi}{2}}{0 + \pi} = \frac{1}{2}$$

Logo, a reta tangente é

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$$

(b) $2x + y + xy' + 2yy' = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{-(2x + y)}{x + 2y}$$

Em $(1, 1)$:

$$y' = -1$$

Logo, a reta tangente é

$$y = -(x - 1) + 1 = -x + 2$$

(c) $2x - y - xy' - 2y\,y' = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x-y}{2y+x}$$

Em $(2,1)$:

$$y' = \frac{3}{4}$$

Logo, a reta tangente é

$$y = \frac{3}{4}(x-2) + 1$$

(d) $2x + 2yy' =$

$$= 2(2x^2 + 2y^2 - x)\cdot(4x + 4yy' - 1)$$

Substituindo direto na equação para o ponto $(0, 1/2)$, obtemos

$$y' = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(2y' - 1)$$

$$\Rightarrow y' = 1$$

Logo, a reta tangente é

$$y = x + \frac{1}{2}$$

(e) $\frac{2}{3}\,\frac{1}{x^{1/3}} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{y^{1/3}}\cdot y' = 0$

Em $(-3\sqrt{3}, 1) = (-3^{3/2}, 1)$, obtemos

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}y'=0$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Logo, a reta tangente é

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+3\sqrt{3})+1=\frac{1}{\sqrt{3}}x+4$$

(f) $4(x^2+y^2)(2x+2yy')=25(2x-2yy')$

Em $(3,1)$, temos

$$4\cdot\cancel{10}\cdot(6+2y')=\overset{5}{\cancel{50}}(3-2y')$$

$$24+8y'=15-10y'$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-9}{18}=-\frac{1}{2}$$

Logo, a reta tangente é

$$y=-\frac{1}{2}(x-3)+1=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$$

Exercício 5. A equação $x \operatorname{sen} xy + 2x^2 = 0$ define y implicitamente como uma função de x. Admitindo que a derivada y' exite, mostre que ela satisfaz a equação $y'x^2 \cos xy + xy \cos xy + \operatorname{sen} xy + 4x = 0$.

Derivando implicitamente temos

$$\operatorname{sen} xy + x \cos xy\,(y + x \cdot y') + 4x = 0$$

$$\Rightarrow y'x^2 \cos xy + xy \cos xy + \operatorname{sen} xy + 4x = 0$$

Exercício 6. Encontre y'' por derivação implícita.

(a) $x^2 + 4y^2 = 4$ (b) $\operatorname{sen} y + \cos x = 1$ (c) $xy + e^y = e$

(a) Derivando implicitamente temos

$$2x + 8yy' = 0 \quad (\mathrm{I})$$

Derivando outra vez, vem

$$2 + 8y(y')^2 + 8yy'' = 0$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{\left[2 + 8y(y')^2\right]}{8y} = -\frac{\left[1 + 4y(y')^2\right]}{4y}$$

Note que, da equação (I), temos

$$y' = -\frac{x}{4y}$$

Logo,

$$y'' = -\left[\frac{1}{4y} + \frac{x^2}{(4y)^2}\right]$$

(b) $\cos y \cdot y' - \operatorname{sen} x = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos y} = \operatorname{sen} x \cdot \sec y$$

$$\Rightarrow y'' = \cos x \cdot \sec y + \operatorname{sen} x \cdot \sec y \cdot \tan y \cdot y'$$

$$= \sec y \left[\cos x + \operatorname{sen} x^2 \cdot \tan y \cdot \sec y\right]$$

(c) $y + xy' + e^y \cdot y' = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{-y}{x+e^y}$$

$$\Rightarrow y'' = -\left[\frac{y' \cdot (x+e^y) - y \cdot (1 + e^y \cdot y')}{(x+e^y)^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{\cancel{y} - \cancel{y} + \frac{y^2 e^y}{x+e^y}}{(x+e^y)^2}\right] = \frac{-y^2 e^y}{(x+e^y)^3}$$

Exercício 7. Encontre uma equação da reta tangente às seguintes curvas no ponto (x_0, y_0):

(a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (elipse) (b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (hipérbole)

(a) Derivando implicitamente, temos

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

Logo, a tangente em (x_0, y_0) $(y_0 \neq 0)$ é

$$(y - y_0) = -\frac{b^2}{a^2}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow a^2(y - y_0) + b^2(x - x_0) = 0,$$

que abarca também o caso $y_0 = 0$.

(b) Derivando implicitamente, temos

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

Logo, a tangente em (x_0, y_0) $(y_0 \neq 0)$ é

$$(y - y_0) = \frac{b^2}{a^2}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow a^2(y - y_0) - b^2(x - x_0) = 0,$$

que abarca também o caso $y_0 = 0$.

Exercício 8. Mostre que a soma das coordenadas das interseções com os eixos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

Derivando implicitamente temos

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

A reta tangente em (x_0, y_0) é

$$y = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + y_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_0}(y - y_0) + \sqrt{y_0}(x - x_0) = 0,$$

válida também para $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$.

A interseção com o eixo x diz que

$$\sqrt{x_0}(y - y_0) = \sqrt{y_0}\, x_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_0}\, y = \sqrt{y_0}\, x_0 + \sqrt{x_0}\, y_0$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{y_0}\sqrt{x_0} + y_0$$

A interseção com o eixo y diz que

$$\sqrt{x_0}\, y_0 = \sqrt{y_0}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{y_0}\, x = \sqrt{y_0}\, x_0 + \sqrt{x_0}\, y_0$$

$$\Rightarrow x = x_0 + \sqrt{x_0}\sqrt{y_0}$$

Assim,

$$x + y = x_0 + 2\sqrt{x_0}\sqrt{y_0} + y_0$$

$$= \left(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0}\right)^2 = \left(\sqrt{c}\right)^2 = c \, .$$

Nas nossas contas, supusemos $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$. Quando um deles é zero (por exemplo, $x_0 = 0$), temos $\sqrt{y_0} = \sqrt{c}$ $\Rightarrow$ $y_0 = c$ e a tangente é

$$\sqrt{c}\, x = 0 \Rightarrow x = 0,$$

que é o próprio eixo y. Assim, a pergunta do enunciado deve se restringir a $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

Exercício 9. Usando derivação implícita, mostre que qualquer reta tangente em um ponto P a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP.

Considere o círculo representado por

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Assim, $O = (0,0)$. Derivando, temos

$$2x + 2yy' = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

A equação da tangente em $P(x_0, y_0)$ é

$$y = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0$$

Por outro lado, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ tem equação

$$(y - 0) = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0}(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{y_0}{x_0} \cdot x$$

Como $\frac{y_0}{x_0} = -\frac{1}{(x_0/y_0)}$, vemos que as retas são perpendiculares.

Exercício 10. Encontre a derivada da função e simplifique quando possível:

(a) $y = \arctan\sqrt{x}$

(b) $y = \operatorname{arcsen}(2x+1)$

(c) $f(x) = x\operatorname{arcsec}(x^3)$

(d) $y = \arctan(x - \sqrt{1+x^2})$

(e) $h(t) = \operatorname{arccot}(t) + \operatorname{arccot}\dfrac{1}{t}$

(f) $g(x) = \arccos\sqrt{x}$

(g) $y = \arccos\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right)$

(h) $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(i) $y = \arccos(\operatorname{arcsen} t)$

(a) $$y' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(b) $$y' = \frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$$

(c) $$f'(x) = \operatorname{arcsen} x^3 + \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^6}}$$

(d) $$y' = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}\left(1 + x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{2\sqrt{1+x^2}\left(1 + x^2 - x\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{1+x^2} - x}}{2(1+x^2)\left(\cancel{\sqrt{1+x^2} - x}\right)} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

(e) $\cot u = t$

$$\Rightarrow -\operatorname{cossec}^2 u \; u' = 1$$

$$\Rightarrow u' = \frac{-1}{\operatorname{cossec}^2 u} = \frac{-1}{\cot^2 u + 1} = \frac{-1}{1+t^2} = \frac{d}{dt} \operatorname{arccot} t$$

Logo,

$$h'(t) = \frac{-1}{1+t^2} + \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} = 0$$

(f) $g'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(g) $$y' = \frac{(-1)\left[-a\,\operatorname{sen}x\,(a+b\cos x) + b\,\operatorname{sen}x\,(b+a\cos x)\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)^2}}$$

$$= \frac{a^2\operatorname{sen}x + b^2\operatorname{sen}x}{\dfrac{\sqrt{a^2+\cancel{2ab\cos x}+b^2\cos^2 x - b^2 - \cancel{2ab\cos x} - a^2\cos^2 x}}{a+b\cos x}}$$

$$= \frac{(a^2\operatorname{sen}x + b^2\operatorname{sen}x)(a+b\cos x)}{\sqrt{(a^2-b^2)(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{(a^2 \operatorname{sen} x + b^2 \operatorname{sen} x)(a + b\cos x)}{\sqrt{(a^2 - b^2)}\ \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)(a + b\cos x)}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$$

(h) $$y' = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{1+x}}{4} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{(-2)}{(1+x)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

(i) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{arcsen} t)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exercício 1. Derive:

(a) $f(x) = x\log x - x$ (b) $f(x) = \text{sen}(\log x)$ (c) $\sqrt[5]{\log x}$

(d) $f(x) = \log_{10}(1+\cos x)$ (e) $F(t) = (\log t)^2 \,\text{sen}\, t$ (f) $y = \log(\text{cossec}\, x - \cot x)$

(g) $g(t) = \sqrt{1+\log t}$ (h) $y = \dfrac{\log x}{1+\log x}$ (i) $y = \log|\sec x|$

(j) $y = \log(\log(\log x))$ (k) $y = \log(x + \log x)$ (l) $f(z) = \log\sqrt{\dfrac{a^2-z^2}{a^2+z^2}}$

(a) $f'(x) = \log x - 1 - 1 = \log x - 2$

(b) $f'(x) = \dfrac{\cos(\log x)}{x}$

(c) $y' = \frac{1}{5}(\log x)^{-4/5} \cdot \frac{1}{x}$

(d) $f'(x) = \dfrac{1}{\log 10} \cdot \dfrac{-\text{sen}\, x}{1+\cos x}$

(e) $F'(t) = 2\log t \cdot \dfrac{\text{sen}\, t}{t} + (\log t)^2 \cdot \cos t$

(f) $y' = \dfrac{-\text{cossec}\, x \cdot \cot x + \text{cossec}^2 x}{\text{cossec}\, x - \cot x}$

$= \text{cossec}\, x$

(g) $g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\log t}} \cdot \dfrac{1}{t}$

(h) $y = \dfrac{\log x + 1 - 1}{\log x + 1} = 1 - \dfrac{1}{\log x + 1}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{(1+\log x)^2} \cdot \dfrac{1}{x}$

(i) $y' = \dfrac{1}{|\sec x|} \cdot \sec x \cdot \tan x = \text{sinal}(\sec x) \cdot \tan x$

(j) $y' = \dfrac{1}{\log(\log x)} \cdot \dfrac{1}{\log x} \cdot \dfrac{1}{x}$

(k) $y' = \dfrac{1}{x + \log x} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

(l) $f(z) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\log a^2 - z^2 - \log a^2 + z^2\right)$

$\Rightarrow f'(z) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-2z}{a^2 - z^2} - \dfrac{2z}{a^2 + z^2}\right)$

$= \dfrac{z}{a^2 + z^2} - \dfrac{z}{a^2 - z^2}$

Exercício 2. Use a derivação logaritmica para encontrar a derivada da função:

(a) $y = (2x+1)^5(x^4-3)^6$ (b) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+1}}$ (c) $y = x^x$ (d) $y = (\cos x)^x$

(e) $y = x^{\operatorname{sen} x}$ (f) $y = (\operatorname{sen} x)^{\log x}$ (g) $y = (\sqrt{x})^x$ (h) $y = (\tan x)^{1/x}$

(i) $y = \sqrt{x}e^{x^2-x}(x+1)^{2/3}$

(a)

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}\left[5\log(2x+1) + 6\log(x^4-3)\right]$$

$$= \frac{10}{2x+1} + \frac{24x^3}{x^4-3}$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{10}{2x+1} + \frac{24x^3}{x^4-3}\right)(2x+1)^5(x^4-3)^6$$

(b)

$$\frac{y'}{y} = \frac{d\log y}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\left[\log(x-1) - \log(x^4+1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+1}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+1}\right)\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$$

(c)

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}(x\log x) = \log x + 1$$

$$\Rightarrow y' = (1 + \log x)\,x^x$$

(d)

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}\, x \log \cos x$$

$$= \log(\cos x) - \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \left(\log x - \frac{\tan x}{x}\right)(\cos x)^{x}$$

(e)

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}\, \operatorname{sen} x \log x$$

$$= \cos x \log x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \left(\cos x \log x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) x^{\operatorname{sen} x}$$

(f)

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}\left[\log x \log(\operatorname{sen} x)\right]$$

$$= \frac{1}{x}\log \operatorname{sen} x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cdot \log x$$

$$\Rightarrow \quad y' = \left(\frac{1}{x}\log \operatorname{sen} x + \cot x \log x\right) \operatorname{sen} x^{\log x}$$

(g)

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\log x\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\right)(\sqrt{x})^{x}$$

(h) $\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\tan x\right)$

$= \left(\frac{-1}{x^2}\tan x + \frac{\sec^2 x}{x}\right)$

$\Rightarrow y' = \left(\frac{-1}{x^2}\tan x + \frac{\sec^2 x}{x}\right)(\tan x)^{1/x}$

(i) $\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\log y =$

$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\log x + (x^2 - x) + \frac{2}{3}\log(x+1)\right]$

$= \frac{1}{2x} + 2x - 1 + \frac{2}{3(x+1)}$

$\Rightarrow y' = \left[\frac{1}{2x} + 2x - 1 + \frac{2}{3(x+1)}\right]\sqrt{x}\, e^{x^2 - x}(x+1)^{2/3}$

Exercício 3. Calcule y':

(a) $y = \log(x^2 + y^2)$ (b) $x^y = y^x$

(a) $y = \log(x^2 + y^2) \Rightarrow e^y = x^2 + y^2$

Derivando os dois lados da equação em relação a x considerando $y = y(x)$, vem

$$y' e^y = 2x + 2y \cdot y'$$

$$\Rightarrow y'(2y - e^y) = 2x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x}{2y - e^y}$$

(b) $x^y = y^x \Rightarrow y \log x = x \log y$

$$\Rightarrow y' \log x + \frac{y}{x} = \log y + \frac{x}{y} \cdot y'$$

$$\Rightarrow y' \cdot \left(\frac{x}{y} - \log x\right) = \left(\frac{y}{x} - \log y\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\left(\frac{y}{x} - \log y\right)}{\left(\frac{x}{y} - \log x\right)}$$

Exercício 4. Encontre:

(a) $\operatorname{senh} 0$ (b) $\cosh 0$ (c) $\tanh 0$ (d) $\cosh(\log 5)$ (e) $\operatorname{senh}(\log 4)$
(f) $\operatorname{ar\,senh} 1$ (g) $\operatorname{ar\,cosh} 1$

(a) $\operatorname{senh} 0 = 0$

(b) $\cosh 0 = 1$

(c) $\tanh 0 = 0$

(d) $\cosh(\log 5) = \dfrac{e^{\log 5} + e^{-\log 5}}{2}$

$$= \frac{5 + \frac{1}{5}}{2} = \frac{13}{5}$$

(e) $\operatorname{senh}(\log 4) = \dfrac{4 - \frac{1}{4}}{2} = \dfrac{15}{8}$

(f) $\operatorname{senh} y = \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \dfrac{e^{2y} - 1}{2e^{y}} = x$

$\Rightarrow (e^{y})^2 - 2x e^{y} - 1 = 0$

$\Rightarrow e^{y} = x + \sqrt{x^2 + 1}$

$\Rightarrow y = \operatorname{arsenh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

$\Rightarrow \operatorname{ar\,senh} 1 = \log(1 + \sqrt{2})$

(g) $\cosh y = x \Rightarrow \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = x$

$\Rightarrow \dfrac{e^{2y}+1}{2e^y} = x$

$\Rightarrow (e^y)^2 - 2x\, e^y + 1$

$\Rightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$

$\Rightarrow y = \log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$

Como $x - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$, temos

$y = \pm \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

Escolhemos $y \geq 0$. Daí,

$\operatorname{arcosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$\Rightarrow \operatorname{arcosh} 1 = \log 1 = 0$

Exercício 5. Mostre que $\cosh x$ é par e $\operatorname{senh} x$ é ímpar.

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$$

$\Rightarrow$ $\cosh x$ é par.

$$\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = -\operatorname{senh} x$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{senh} x$ é ímpar.

Exercício 6. Mostre as seguintes identidades:

(a) $\coth^2 x - 1 = \operatorname{cossech}^2 x$ (b) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

(c) $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$ (d) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

(e) $\tanh(\log x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ (f) $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^\alpha = \cosh \alpha x + \operatorname{senh} \alpha y \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$

(a) $\coth^2 x - 1 = \dfrac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\operatorname{senh}^2 x}$

$= \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x} = \operatorname{cossech}^2 x$

(b) $\tanh(x+y) = \dfrac{\operatorname{senh}(x+y)}{\cosh(x+y)}$

$= \dfrac{\operatorname{senh} x \cdot \cosh y + \operatorname{senh} y \cdot \cosh x}{\cosh x \cdot \cosh y + \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{senh} y}$

$= \dfrac{\cancel{\cosh x \cdot \cosh y}\left(\dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} + \dfrac{\operatorname{senh} y}{\cosh y}\right)}{\cancel{\cosh x \cdot \cosh y}\left(1 + \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \cdot \dfrac{\operatorname{senh} y}{\cosh y}\right)}$

$= \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}$

(c) $\operatorname{senh} 2x = \operatorname{senh}(x+x)$

$= \operatorname{senh} x \cosh x + \operatorname{senh} x \cosh x$

$= 2 \operatorname{senh} x \cdot \cosh x$

(d) $\cosh 2x = \cosh(x+x)$

$= \cosh x \cdot \cosh x + \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{senh} x$

$= \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

(e) $\tanh(\log x) = \dfrac{e^{\log x} - e^{-\log x}}{e^{\log x} + e^{-\log x}}$

$$= \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

(f) Temos

$$\cosh x + \operatorname{senh} x = \frac{e^x + \cancel{e^{-x}} + e^x - \cancel{e^{-x}}}{2} = e^x$$

$$\Rightarrow (\cosh x + \operatorname{senh} x)^\alpha = e^{\alpha x}$$

Usando a mesma identidade, com αx no lugar de x vemos que

$$\cosh \alpha x + \operatorname{senh} \alpha x = e^{\alpha x}$$

Logo

$$(\cosh x + \operatorname{senh} x)^\alpha = \cosh \alpha x + \operatorname{senh} \alpha x$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 7. Mostre que

$$\operatorname{senh} a + \operatorname{senh} b = 2 \operatorname{senh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{senh} a = \operatorname{senh}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right)$$

$$= \operatorname{senh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right) + \operatorname{senh}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Além disso,

$$\operatorname{senh} b = \operatorname{senh}\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)$$

$$= \operatorname{senh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Logo,

$$\operatorname{senh} a + \operatorname{senh} b = 2 \operatorname{senh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Exercício 8. Encontre os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh x$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{senh} x}{e^x}$

(a) $$\lim_{x\to\infty} \tanh x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{senh} x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(1-e^{-2x}\right) = \frac{1}{2}$$

Exercício 9. Derive e simplifique:

(a) $f(x) = e^x \cosh x$ (b) $f(x) = \operatorname{senh}^2 x$ (c) $f(x) = \log(\cosh x)$

(d) $f(x) = \operatorname{sech} x(1 + \log \operatorname{sech} x)$ (e) $f(t) = \dfrac{1 + \operatorname{senh} t}{1 - \operatorname{senh} t}$ (f) $y = \operatorname{senh}(\cosh x)$

(g) $y = x \operatorname{ar}\tanh x + \log \sqrt{1 - x^2}$ (h) $y = \operatorname{ar}\operatorname{sech}(e^{-x})$

(a) $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{2} \Rightarrow f'(x) = e^{2x}$

(b) $f'(x) = 2\operatorname{senh} x \cosh x = \operatorname{senh}(2x)$

(c) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \tanh x$

(d) $f'(x) = -\operatorname{sech} x \tanh x (1 + \log \operatorname{sech} x)$

$+ \cancel{\operatorname{sech} x} \cdot \dfrac{(-\operatorname{sech} x \cdot \tanh x)}{\cancel{\operatorname{sech} x}}$

$= -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x \left(2 + \log \operatorname{sech} x\right)$

(e) $f'(t) = \dfrac{\cosh t(1 - \operatorname{senh} t) + \cosh t(1 + \operatorname{senh} t)}{(1 - \operatorname{senh} t)^2}$

$= \dfrac{2\cosh t}{(1 - \operatorname{senh} t)^2}$

(f) $y' = \cosh(\cosh x) \cdot \operatorname{senh} x$

(g) $\tanh u = x \Rightarrow \dfrac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} = x$

$$\Rightarrow \quad e^{2u} - 1 = x e^{2u} + x$$

$$\Rightarrow (1-x) e^{2u} = 1 + x$$

$$\Rightarrow \operatorname{artanh} x = u = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

Então, se

$$y = x \operatorname{artanh} x + \log \sqrt{1-x^2},$$

temos

$$y = \frac{x}{2} \log(1+x) - \frac{x}{2} \log(1-x)$$

$$+ \frac{1}{2} \log(1+x) + \frac{1}{2} \log(1-x)$$

$$= \frac{x+1}{2} \log(1+x) + \frac{1-x}{2} \log(1-x)$$

Como

$$\frac{d}{dt} t \log t = \log t + 1,$$

temos

$$y' = \frac{1}{2} \left[\log(1+x) \cancel{+1} - \log(1-x) \cancel{-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{artanh} x$$

(h) $\operatorname{sech} u = x$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cosh u} = x \Rightarrow \cosh u = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arsech} x = u = \operatorname{arcosh} \frac{1}{x}$$

$$= \log\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$$

Assim,

$$y = \operatorname{arsech}(e^{-x}) = \log\left(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{e^x + \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}}{e^x + \sqrt{e^{2x}-1}}$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} \cdot \frac{\cancel{\left(\sqrt{e^{2x}-1} + e^x\right)}}{\cancel{\sqrt{e^{2x}-1} + e^x}}$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

Exercício 10. Demonstre as seguintes identidades:

(a) $\dfrac{d}{dx}\sqrt[4]{\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}} = \dfrac{e^{x/2}}{2}$

(b) $\dfrac{d}{dx}\arctan(\tanh x) = \operatorname{sech} 2x$

(a) $$\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = \frac{1+\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1-\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}} =$$

$$= \frac{e^{2x}+\cancel{1}+e^{2x}-\cancel{1}}{\cancel{e^{2x}}+1-\cancel{e^{2x}}+1} = e^{2x}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}} = e^{2x/4} = e^{x/2}$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}\sqrt[4]{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}} = \frac{d}{dx}e^{x/2} = \frac{e^{x/2}}{2}$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\arctan(\tanh x) = \frac{\operatorname{sech}^2 x}{1+\tanh^2 x}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cancel{\cosh^2 x}}}{\dfrac{\cosh^2 x+\operatorname{senh}^2 x}{\cancel{\cosh^2 x}}} = \frac{1}{\cosh 2x} = \operatorname{sech} 2x$$

Exercício 1. Se V for o volume de um cubo com aresta de comprimento x e, à medida que o tempo passa, o cubo se expandir, encontre dV/dt em termos de dx/dt.

$$V(x) = x^3$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

Exercício 2. Suponha que petróleo vaze por uma ruptura e espalhe-se em um padrão circular. Se o raio do petróleo derramado crescer a uma taxa constante de 1 m/s, quão rápido a área do vazamento está crescendo quando o raio é igual a 30 m?

Em função do raio r, a área do vazamento é

$$A(r) = \pi r^2$$

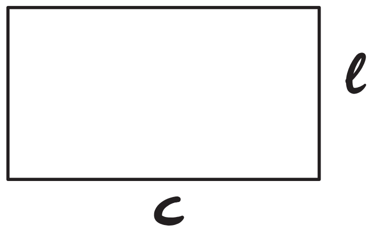
Temos que $\frac{dr}{dt} = 1$. Logo,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r$$

Quando $r = 30$, o vazamento cresce a uma taxa de

$$\frac{dA}{dt} = 60\pi \ m^2/s$$

Exercício 3. O comprimento de um retângulo está aumentando a uma taxa de 8 cm/s e sua largura está aumentando numa taxa de 3 cm/s. Quando o comprimento for 20 cm e a largura for 10 cm, quão rápido a área do retângulo está aumentando?



Temos

$$\frac{dc}{dt} = 8 \quad , \quad \frac{d\ell}{dt} = 3$$

A área é

$$A = c \cdot \ell$$

Logo,

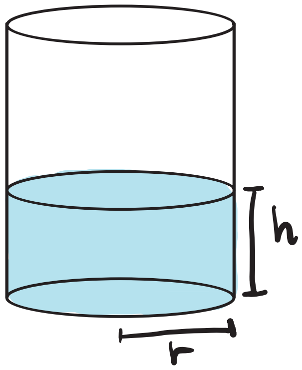
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dt} + \frac{\partial A}{\partial \ell} \frac{d\ell}{dt}$$

$$= \ell \cdot 8 + c \cdot 3$$

Quando $\ell = 10$ e $c = 20$, a área estará crescendo a uma taxa de

$$\frac{dA}{dt} = 80 + 60 = 140 \text{ cm}^2/\text{s}$$

Exercício 4. Um tanque cilíndrico com raio 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m^3/min. Quão rápido a altura da água está aumentando?



O volume de água é

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{25\pi}{3} h$$

A vazão é

$$\frac{dV}{dt} = 3.$$

Logo,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad 3 = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{9}{25\pi} \text{ m/min}$$

Exercício 5. Se $y = \sqrt{x+1}$, onde x e y são funções de t, encontre dy/dt quando $x = 4$ sabendo que $dx/dt = 3$.

Derivando

$$y = \sqrt{x+1}$$

dos dois lados em relação a t, vem

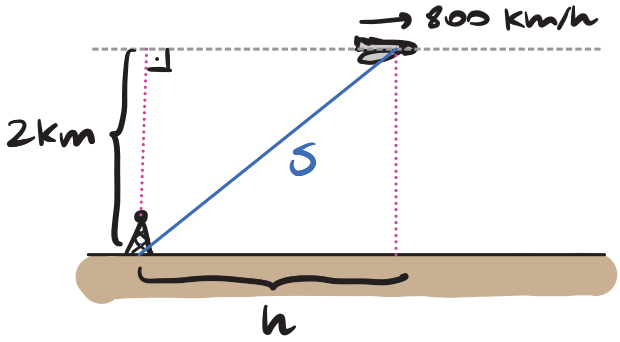
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dx}\sqrt{x+1} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \frac{dx}{dt}$$

Fazendo $x = 4$, $\frac{dx}{dt} = 3$, vem

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

Exercício 6. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 2 km, a 800 km/h, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta quando ele está a 3 km além da estação.



A distância horizontal h e a distância total s satisfazem

$$s^2 = h^2 + 4$$
$$\Rightarrow s = \sqrt{h^2+4}$$

A velocidade do avião corresponde a

$$800 = \frac{dh}{dt}.$$

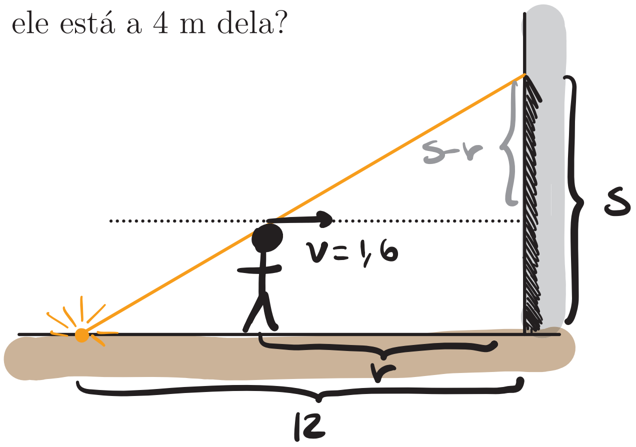
Assim,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{h}{\sqrt{h^2+4}} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

Quando $h = 3$, temos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 800 = \frac{2400}{\sqrt{13}} \approx 665 \text{ km/h}$$

Exercício 7. Um holofote sobre o solo ilumina uma parede a 12 m de distância. Se um homem de 2 m de altura anda do holofote em direção à parede a uma velocidade de 1,6 m/s, quão rápido o comprimento de sua sombra diminui sobre a parede quando ele está a 4 m dela?



Seja s o tamanho da sombra, r a distância do homem à parede.

Temos que

$$\frac{dr}{dt} = -1{,}6$$

Por semelhança de triângulos,

$$\frac{s-r}{r} = \frac{s}{12} \Rightarrow 12s - 12r = rs$$

$$\Rightarrow (12-r)s = 12r \Rightarrow s = \frac{12r}{12-r}.$$

Temos

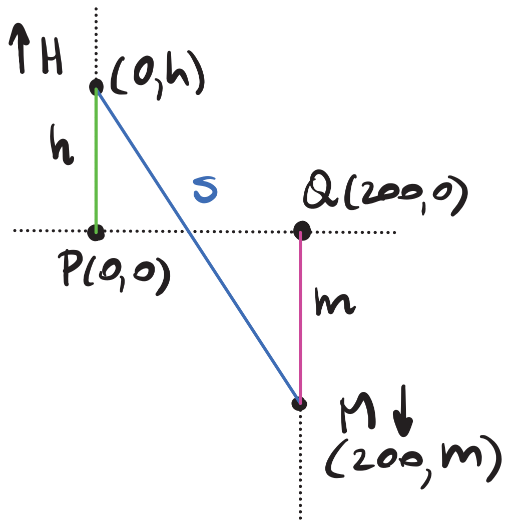
$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{12(12-r)+12r}{(12-r)^2}\cdot(-1{,}6)$$

$$= \frac{-1{,}6\cdot 144}{(12-r)^2}$$

Se $r = 4$,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-1{,}6\cdot 144}{64} = -\frac{14{,}4}{4} = -3{,}6 \text{ m/s}$$

Exercício 8. Um homem começa a andar para o norte a 1,2 m/s a partir de um ponto P. Cinco minutos depois uma mulher começa a andar para o sul a 1,6 m/s de um ponto 200 m a leste de P. A que taxa as pessoas estão se distanciando 15 min após a mulher começar a andar?



Quando a mulher começa a andar, o homem já está em $h = 1{,}2 \cdot 5 \cdot 60 = 360\,m$.
A partir daí, após t minutos,

$$h(t) = 360 + 72 \cdot t$$
$$m(t) = -96 \cdot t,$$

já que x m/s $= 60x$ m/min.

Temos

$$s^2 = (h-m)^2 + 200^2$$

$$\Rightarrow s(t) = \sqrt{(h(t) - m(t))^2 + 200^2}$$

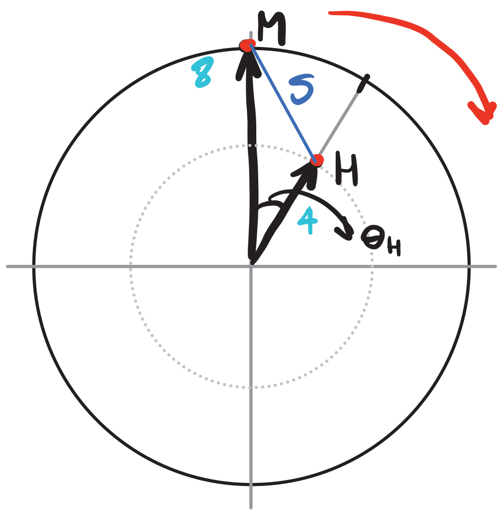
$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{(h(t) - m(t))(h'(t) - m'(t))}{\sqrt{(h(t) - m(t))^2 + 200^2}}$$

$$= \frac{(360 + 168t) \cdot 168}{\sqrt{(360 + 168t)^2 + 200^2}}$$

Substituindo $t = 15$, segue que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2880 \cdot 168}{\sqrt{2880^2 + 200^2}} = \frac{2880 \cdot 168}{\sqrt{8.334.400}} \approx 167{,}6\,m/min \approx 2{,}8\,m/s$$

Exercício 9. O ponteiro dos minutos de um relógio mede 8 mm, enquanto o das horas tem 4 mm de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre a ponta dos ponteiros à 1 hora?



O ângulo θ_M do ponteiro dos minutos com a vertical no sentido horário é dado por

$$\theta_M = 2\pi \cdot t,$$

onde t é o tempo em horas.

Já o ponteiro das horas forma um ângulo θ_H com a vertical dado por

$$\theta_H = \frac{2\pi}{12} \cdot t = \frac{\pi}{6} \cdot t.$$

Assim, as posições M e H das ponteiros dos minutos e das horas ao tempo t (em horas) é

$$M = 8(\operatorname{sen}\theta_M, \cos\theta_M)$$

$$H = 4(\operatorname{sen}\theta_H, \cos\theta_H)$$

A distância S entre eles é

$$S = 4 \cdot \sqrt{(2\operatorname{sen}\theta_M - \operatorname{sen}\theta_H)^2 + (2\cos\theta_M - \cos\theta_H)^2}$$

$$= 4\sqrt{5 - 4\cdot(\operatorname{sen}\theta_M \cdot \operatorname{sen}\theta_H + \cos\theta_M \cdot \cos\theta_H)}$$

$$= 4\sqrt{5 - 4\cdot\cos(\theta_M - \theta_H)}$$

$$= 4\sqrt{5 - 4\cdot\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{6}t\right)}$$

$$= 4\sqrt{5 - 4\cos\left(\frac{11\pi}{6}t\right)}$$

Daí,

$$\frac{ds}{dt} = 2\cdot\frac{4\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}t\right)}{\sqrt{5 - 4\cos\left(\frac{11\pi}{6}t\right)}}$$

Quando $t = 1$, temos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{8\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\sqrt{5 - 4\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)}}$$

Note que $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, em $t = 1$, $\frac{ds}{dt} = \frac{-4}{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$

Exercício 10. Encontre a linearização (aproximação linear) no ponto $x = a$ das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 - x^2 + 3$, $a = -2$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ (c) $f(x) = 2^x$, $a = 0$

(a) $f'(x) = 3x^2 - 2x$

Aproximação linear:

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$\Rightarrow y = 16(x+2) - 9 = 16x + 23$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Aproximação linear:

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{4}(x-4) + 2 = \dfrac{1}{4}x + 1$

(c) $f'(x) = \log 2 \cdot 2^x$

Aproximação linear:

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$\Rightarrow y = x \log 2 + 1$

Exercício 11. Encontre a diferencial das seguintes funções:

(a) $y = xe^{-4x}$ (b) $y = \dfrac{1+2u}{1+3u}$ (c) $y = \tan\sqrt{t}$

(d) $y = \log(\operatorname{sen}\theta)$ (e) $y = \theta^2 \operatorname{sen} 2\theta$ (f) $y = \dfrac{e^x}{1-e^x}$

(a) $dy = y'(x)\cdot dx$
$$= (1-4x)\,e^{-4x}\,dx$$

(b) $$dy = \frac{2(1+3u) - 3(1+2u)}{(1+3u)^2}\,du$$
$$= \frac{-1}{(1+3u)^2}\,du$$

(c) $$dy = \frac{1}{2\sqrt{t}}\sec^2\sqrt{t}\;dt$$

(d) $$dy = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$$

(e) $$dy = \left(2\theta\operatorname{sen}2\theta + 2\theta^2\cos 2\theta\right)d\theta$$

(f) $$dy = \frac{e^x(1-e^x) + e^x\cdot e^x}{(1-e^x)^2}\,dx$$
$$= \frac{e^x}{(1-e^x)^2}\,dx$$

Exercício 12. Encontre a diferencial dy e avalie dy para os valores dados de x e dx:

(a) $y = \cos \pi x, \quad x = \frac{1}{3}, \ dx = 0,02$ (b) $y = \sqrt{3 + x^2}, \quad x = 1, \ dx = -0,1$

(a) $dy = -\pi \operatorname{sen} \pi x \, dx$

Para $x = \frac{1}{3}$, $dx = 0,02$, temos

$$dy = -\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cdot 0,02 = -\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{100} = \frac{-\pi\sqrt{3}}{100}$$

(b) $dy = \dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}} dx$

Para $x = 1$, $dx = -0,1$, temos

$$dy = \frac{1}{2}(-0,1) = -0,05$$

Exercício 13. Use uma aproximação linear (ou diferencial) para estimar o número dado:

(a) $1,999^4$ (b) $\sqrt[3]{1001}$ (c) $e^{0,1}$ (d) $\dfrac{1}{4,002}$ (e) $\sqrt{100,5}$ (f) $\cos 29°$

(a) $1,999^4 = (2-0,001)^4$

Considere $y = x^4$

Aproximação linear em $x=a$:

$$y = 4a^3(x-a) + a^4$$
$$= 4a^3 dx + a^4$$
$$\Rightarrow y = 4\cdot 8\cdot(-0,001) + 16$$
$$= -0,032 + 16$$
$$= 15,958$$

(b) $\sqrt[3]{1001} = \sqrt[3]{1000+1}$

$$y = x^{1/3} \Rightarrow dy = \frac{1}{3x^{2/3}}dx$$

Daí,

$$\sqrt[3]{1001} \approx \frac{1}{3\cdot 10^2} + 10 = 10,00333\ldots$$

(c) $e^{0,1}$

$$y = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$$

Daí,

$$e^{0,1} \approx e^0\cdot 0,1 + 1 = 1,1$$

(d) $\frac{1}{4{,}002}$

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow dy = \frac{-1}{x^2}dx$

Daí,

$$\frac{1}{4{,}002} \approx -\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{1000} + \frac{1}{4} = 0{,}249875$$

(e) $\sqrt{100{,}5}$

$y = \sqrt{x} \Rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

Daí,

$$\sqrt{100{,}5} \approx \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{2} + 10 = 10{,}025$$

(f) $\cos 29° = \cos\left(\pi\cdot\frac{29}{180}\right)$

radianos

$y = \cos\left(\frac{x\pi}{180}\right)$

$dy = -\frac{\pi}{180}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x\pi}{180}\right)dx$

Daí,

$$\cos 29° \approx \frac{-\pi}{180}\operatorname{sen} 30° + \cos 30°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{360} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}008726\ldots$$

Exercício 14. A aresta de um cubo tem 30 cm, com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível, o erro relativo e o erro percentual no cálculo do volume do cubo e da sua área de superfície.

Se x é a medida da aresta, então

$$V = x^3, \quad A = 6x^2$$

$$\Rightarrow dV = 3x^2 dx, \quad dA = 12x\, dx$$

Com $x = 30$, $dx = 0{,}1$, temos que:

- Erro máximo possível:

$$dV = 270, \quad dA = 36$$

- Erro relativo:

$$\frac{dV}{V} = \frac{3x^2}{x^3} dx = 0{,}01, \quad \frac{dA}{A} = \frac{12x}{6x^2} dx = 0{,}0066\ldots$$

- Erro percentual:

$$\frac{dV}{V}\% : 1\%, \quad \frac{dA}{A}\% : 0{,}666\ldots\%$$

Exercício 15. Use diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05 cm de tinta a um domo hemisférico com diâmetro de 50 m.

O volume do domo é

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

A tinta necessária é de, aproximadamente,

$$dV = 4\pi r^2 dr,$$

onde dr é a espessura da camada de tinta.

Temos, para $r = 2500$ cm e $dr = 0{,}05$,

$$dV = 4\pi\, 25^2 \cdot 10^4 \cdot \frac{5}{10^2} = 1.250.000\pi \text{ cm}^3$$

$\approx$ 3.926 litros de tinta.

Exercício 16. Quando o sangue flui ao longo de um vaso sanguíneo, o fluxo é proporcional à quarta potência do raio R do vaso:

$$F = kR^4$$

Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter-balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue.

Mostre que uma variação relativa em F é de cerca de quatro vezes a variação relativa em R. Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo do sangue?

$$dF = 4kR^3\,dR$$

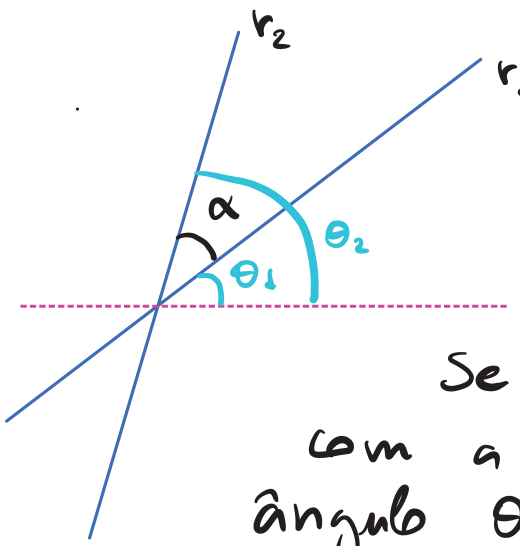
$$\Rightarrow \frac{dF}{F} = \frac{4\cancel{k}\cancel{R^3}}{\cancel{k}\cancel{R^4}}\,dR = 4\,\frac{dR}{R}$$

Se $\frac{dR}{R} = 0{,}05$, então $\frac{dF}{F} = 4 \cdot 0{,}05 = 0{,}2$

Ou seja, um aumento de 5% no raio afeta em 20% o fluxo do sangue.

Exercício 17. Mostre que se duas retas de inclinações m_1 e m_2 se intersectam em um ângulo α, então

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$



$r_1: \quad y = m_1 x + b_1$

$r_2: \quad y = m_2 x + b_2$

Se r_1 forma um angulo θ_1 com a horizontal e r_2 forma um ângulo θ_2, temos

$$\alpha = \theta_2 - \theta_1.$$

Daí,

$$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2}{\cos\theta_2 \cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta_1}$$

$$= \frac{\cancel{\cos\theta_1} \cdot \cancel{\cos\theta_2} \cdot (\tan\theta_2 - \tan\theta_1)}{\cancel{\cos\theta_1} \cdot \cancel{\cos\theta_2} \cdot (1 + \tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2)}$$

$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2},$$

pois $m_1 = \tan\theta_1$, $m_2 = \tan\theta_2$.

Exercício 18. O ângulo de interseção entre duas curvas é definido como o ângulo formado pelas tangentes às curvas no ponto de interseção. Usando o exercício anterior, determine o ângulo entre o seguinte par de curvas em cada ponto de interseção:

$$x^2 - y^2 = 3 \qquad \text{e} \qquad x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$$

As curvas são

$C_1: y^2 = x^2 - 3$ e $C_2: y^2 = 4x - x^2 - 3$

Interseção:

$$x^2 - 3 = 4x - x^2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Porém, $x = 0 \Rightarrow y^2 = -3$, logo, não é solução. Por outro lado,

$$x = 2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Assim, as interseções são

$$(2,-1) \text{ e } (2,1)$$

As tangentes têm as seguintes inclinações:

Em C_1:

$$y = \pm\sqrt{x^2-3} \Rightarrow y'(x) = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{x}{y}$$

Em C_2:

$$y = \pm\sqrt{4x - x^2 - 3} \Rightarrow y'(x) = \frac{\pm(2-x)}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \frac{2-x}{y}$$

Portanto, os ângulos de intersecção α satisfazem, pelo exercício anterior,

$$\tan\alpha = \left(\frac{\frac{x}{y} - \frac{2-x}{y}}{1 + \frac{x}{y}\cdot\frac{2-x}{y}} \right)$$

Em $(2,1)$:

$$\tan\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \arctan 2$$

Em $(2,-1)$:

$$\tan\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = \arctan(-2) = -\arctan 2$$

Exercício 1. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(1) = f(-1) = 0$, mas que $f'(x)$ nunca se anula no intervalo $[-1,1]$. Explique como isso é possível em face do Teorema de Rolle.

Temos $f(1) = f(-1) = 0$. Porém, f não é derivável em $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{1 - x^{2/3} - 1}{x} = -\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x^{1/3}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{1 - x^{2/3} - 1}{x} = -\lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x^{1/3}} = \infty$$

Nos demais pontos,

$$f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-1/3} \neq 0 \quad \forall\, x \neq 0.$$

Logo, f' não se anula em $[-1, 1]$. Isso não contradiz o teorema de Rolle pois f não é derivável em todo o intervalo $(-1, 1)$.

Exercício 2. Seja $f(x) = (x-3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor c em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4-1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$$

Temos $f(4) = 1$, $f(1) = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{1-\frac{1}{4}}{3} = \frac{3}{4\cdot 3} = \frac{1}{4}$$

Se $x \neq 3$, temos

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-3)^3} \quad < 0 \text{ se } x > 3$$

Para $1 < x < 3$,

$$f'(x) = \frac{2}{(3-x)^3} > \frac{2}{(3-1)^3} = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$$

Assim, como f não é derivável em $x = 3$, não existe $c \in (1, 4)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1}$$

Isso não contradiz o TVM pois f não é derivável em todo o intervalo $(1, 4)$.

Exercício 3. Mostre que o teorema do valor médio pode ser escrito na forma

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h), \qquad \text{onde } \theta \in (0,1)$$

O TVM diz que existe c entre x e $x+h$ tal que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(c).$$

Ocorre que

$$\begin{aligned} g : (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto x+\theta h \end{aligned}$$

percorre todos os pontos entre x e $x+h$. Daí, existe um $\theta \in (0,1)$ tal que $g(\theta) = c$. Logo,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

Exercício 4. Mostre que a equação tem exatamente uma raiz real:

(a) $2x + \cos x = 0$ (b) $x^3 + e^x = 0$

(a) $f(x) = 2x + \cos x$

$\Rightarrow f'(x) = 2 - \operatorname{sen} x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Logo, f é estritamente crescente.

Como

$$f(-1) = -2 + \cos(-1) \leq -1 < 0$$

e

$$f(1) = 2 + \cos(1) \geq 1 > 0,$$

Segue do Teorema do Valor Intermediário que existe um $x_0 \in (-1, 1)$ tal que $f(x_0) = 0$. Esse x_0 é único pois f é estritamente crescente.

(b) $g(x) = x^3 + e^x$

$g'(x) = 3x^2 + e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow g$ é estritamente crescente.

Como

$$g(-1) = -1 + e^{-1} < 0$$

e

$$g(0) = e^0 = 1 > 0,$$

Segue do Teorema do Val[illegible]

que existe um $x_0 \in (-1,0)$ tal que $g(x_0)=0$. Esse x_0 é único pois g é estritamente crescente.

Exercício 5. Seja f um polinômio. Um número α diz-se um zero de multiplicidade m se $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$, com $g(\alpha) \neq 0$.

(a) Se f tem r zeros no intervalo $[a,b]$, prove que f' tem pelo menos $r-1$ zeros e que, em geral, a derivada de ordem k, $f^{(k)}$, tem pelo menos $r-k$ zeros em $[a,b]$. (Cada zero é contado tantas vezes quantas as unidades do seu grau de multiplicidade).

(b) Se a derivada de ordem k, $f^{(k)}$, tem exatamente r zeros em $[a,b]$, o que se pode concluir relativamente ao número de zeros de f em $[a,b]$?

(a) Se α é zero com multiplicidade $m \geq 1$, então

$$f(x) = (x-\alpha)^m g(x).$$

$$\Rightarrow f'(x) = m(x-\alpha)^{m-1} g(x) + (x-\alpha)^m g'(x)$$
$$= m(x-\alpha)^{m-1} \cdot [g(x) + (x-\alpha) g'(x)]$$

Daí, como

$$g(\alpha) + (\alpha-\alpha) g'(\alpha) = g(\alpha) \neq 0,$$

segue que α é um zero de multiplicidade $m-1$ de f'.

Suponha que $\alpha < \beta$ sejam zeros de f. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (\alpha, \beta)$ tal que

$$0 = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$$

Ou seja, se, em $[a,b]$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\ell$ são os zeros de f, cada um com multiplicidade $m_1, m_2, \dots, m_\ell$, respectivamente, temos

$$r = m_1 + m_2 + \dots + m_\ell.$$

Pelo que vimos, α_i é um zero de f' com multiplicidade $m_i - 1$ (se der zero, α_i não é raiz de f'). Além disso, entre α_i e α_{i+1} existe outra raiz de f'. Logo, são ao menos

$$\sum_{i=1}^{\ell}(m_i - 1) + \ell - 1 = r - \ell + \ell - 1 = r - 1$$

zeros de f' em $[a,b]$.

A repetição dessa ideia para as demais derivadas nos permite concluir que $f^{(k)}$ possui ao menos $r-k$ zeros em $[a,b]$.

(b) Não podemos concluir nada. Por exemplo, $f(x) = x^2 + 1$ não tem zeros reais, embora $f'(x) = 2x$ tenha um zero.

Exercício 6. Mostre que um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes reais.

Faremos indução sobre o grau n do polinômio.

Se $n=1$, $f(x) = ax+b$ tem exatamente uma raiz, $x = \frac{-b}{a}$.

Suponha que qualquer polinômio de grau n tenha no máximo n raízes reais. Seja p um polinômio de grau $n+1$.

Se p tivesse mais que $n+1$ raízes, pelo exercício (5), p' teria ao menos $n+1$ raízes, absurdo contra a hipótese de indução, já que o grau de p' é n.

Assim, a conclusão é que p tem no máximo $n+1$ raízes reais, completando a indução.

Exercício 7. Utilize o Teorema do Valor Médio para concluir as seguintes desigualdades:

(a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x - y|$

(b) $ny^{n-1}(x - y) \leqslant x^n - y^n \leqslant nx^{n-1}(x - y)$ se $0 < y \leqslant x$ e $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \cos(z)\,(x-y)$, para z entre x e y, pelo TVM. Logo,

$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x-y|$.

(b) Seja $f(u) = u^n$. Como $f'(u) = nu^{n-1}$, segue do TVM que, se $0 < y < x$

$$x^n - y^n = n z^{n-1}(x-y), \text{ com } y < z < x.$$

Como f é crescente, segue que

$$ny^{z-1}(x-y) \leqslant x^n - y^n \leqslant n x^{n-1}(x-y)$$

Exercício 8. Demonstre que

$$\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{x+1} = 2\arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

Seja

$$f(x) = 2\arctan\sqrt{x} - \operatorname{arcsen}\frac{x-1}{x+1}$$

Temos

$$f'(x) = \frac{2}{x+1}\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x+1}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{4x}} \cdot \frac{2}{(x+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = 0$$

Logo, f é constante. Daí,

$$f(x) = f(0) = -\operatorname{arcsen}(-1) = \frac{\pi}{2}$$

Exercício 9. Um número real a é chamado de ponto fixo de uma função f se $f(a) = a$. Demonstre que se $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então f tem no máximo um ponto fixo.

Suponha que houvesse $x < y$ pontos fixos. Então, pelo TVM, existe $z \in (x, y)$ tal que

$$(x - y) = f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$$

Como $x \neq y$, segue que $f'(z) = 1$, contradição. Assim, f tem no máximo um ponto fixo.

Exercício 10. Se f é contínua em $[a-\epsilon, a+\epsilon]$, possui derivada em $(a-\epsilon, a) \cup (a, a+\epsilon)$ e $\lim_{x\to a} f'(x) = L$, mostre que $f'(a)$ existe e é igual a L.

Temos que, se $a < x < a+\epsilon$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(z) \text{ para algum } z,\ a<z<x.$$

Assim, quando $x \to a_+$, temos que $z \to a_+$. Daí,

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{z\to a_+} f'(z) = L.$$

Analogamente mostramos que

$$\lim_{x\to a_-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L.$$

Logo,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$$

Exercício 11. Seja $f(x)$ definida e derivável sobre toda a reta real. Mostre que se $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seja $M = \max\limits_{|x| \leq 1} |f(x)|$. Se $|x| < 1$, segue do do TVM que

$$f(x) = f(x) - f(0) = x f'(c_1)$$

para algum c_1 tal que $0 < |c_1| < |x|$.

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |x| \cdot |f(c_1)|$$

Novamente pelo TVM, segue que

$$f(c_1) = f(c_1) - f(0) = c_1 f'(c_2)$$

para algum c_2 tal que $0 < |c_2| < |c_1|$.

$$\Rightarrow |f(c_1)| \leq |c_1| \, |f(c_2)|$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |x|^2 \, |f(c_2)|$$

Prosseguindo dessa maneira, vemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe c_n, $0 < |c_n| < |x|$, tal que

$$|f(x)| \leq |x|^n \cdot |f(c_n)| \leq |x|^n \cdot M \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Daí, $f(x) = 0 \;\; \forall \, x \in [-1, 1]$

Suponha, como hipótese indutiva, que tenhamos mostrado que, para algum $n \in \mathbb{N}$,

$$f \equiv 0 \text{ em } [0, n]$$

Seja $x \in (n, n+1)$. Pelo TVM, existe c_1, $n < c_1 < x$, tal que

$$f(x) = f(x) - f(n) = (x-n) \cdot f'(c_1)$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |x-n| \cdot |f'(c_1)|$$

Analogamente, existe c_2, $n < c_2 < c_1$, tal que

$$|f(c_1)| \leq |c_1 - n| \, |f(c_2)|$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |x-n|^2 \cdot |f(c_2)|$$

Se $M = \max\limits_{|x| \leq n+1} |f(x)|$, então

$$|f(x)| \leq |x-n|^k \cdot M \quad \forall \; k \in \mathbb{N}.$$

Como $|x-n| < 1$, fazendo $k \to \infty$, vem que

$$|f(x)| = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \text{ em } [0, n+1].$$

Assim, por indução, provamos que

$f \equiv 0$ em $[0, \infty)$

A demonstração de que $f \equiv 0$ em $(-\infty, 0]$ é inteiramente análoga.

Exercício 12. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)^{1/x} - x^{1/x}}{(x+3)^{1/x} - x^{1/x}}$$

Seja

$$f(a) = (x+a)^{1/x}$$

$$\Rightarrow f'(a) = \frac{1}{x} \frac{1}{(x+a)^{\frac{x-1}{x}}}$$

Pelo TVM, segue que existe $c \in (0,a)$ tal que

$$f(a) - f(0) = f'(c) \cdot a$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(x+c)^{\frac{x-1}{x}}} \cdot a$$

Repetindo a ideia para b no lugar de a, segue que existe $d \in (0,b)$ tal que

$$\frac{f(a)-f(0)}{f(b)-f(0)} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{x+d}{x+c}\right)^{1-\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \left(1 + \frac{d-c}{x+c}\right)^{\frac{x-1}{x}}$$

$$= \frac{a}{b} \underbrace{\left[\left(1+\frac{d-c}{x+c}\right)^{x+c}\right]^{\frac{x-1}{x(x+c)}}}_{u}$$

Temos que

$$\log u = \underbrace{\frac{x-1}{x^2+cx}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0} \cdot \underbrace{\log\left[\left(1+\frac{d-c}{x+c}\right)^{x+c}\right]}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} \log e^{d-c}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

Portanto,

$$u \xrightarrow[x\to\infty]{} 1.$$

Logo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)^{1/x} - x^{1/x}}{(x+3)^{1/x} - x^{1/x}} = \frac{2}{3}$$

Exercício 1. Explique a diferença entre mínimo local e mínimo absoluto.

Mínimo local m:

$f(x) \geq f(m)$ $\forall x \in I$, onde I é um intervalo aberto contendo m.

Mínimo absoluto $\overline{m}$:

$f(x) \geq f(\overline{m})$ $\forall x \in Dom f$.

Exercício 2. Encontre os pontos críticos da função

(a) $f(x) = 5x^2 + 4x$ (b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ (c) $f(x) = |3x - 4|$

(d) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 1}$ (e) $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$ (f) $h(t) = 3t - \operatorname{arcsen} t$

(g) $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ (h) $f(x) = x^2 e^{-3x}$ (i) $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

(a) $f'(x) = 10x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$

(b) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 6 = 6(x^2 - x - 1) = 0$

se $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(c) $f'(x) = \begin{cases} 3 & (\text{se } x > 4/3) \\ -3 & (\text{se } x < 4/3) \end{cases}$

Definimos ponto crítico como aqueles onde $f'(x) = 0$. Alguns autores consideram que pontos onde não existe a derivada são pontos críticos também. Neste caso teríamos $x = 4/3$.

(d) $g'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 1) - (2x-1)(x-1)}{(x^2 - x + 1)^2}$

$= \dfrac{x^2 - x + 1 - 2x^2 + 3x - 1}{(x^2 - x + 1)^2} = \dfrac{-x^2 + 2x}{(x^2 - x + 1)^2} = 0$

se $x = 0$ ou $x = 2$.

(e) $f'(\theta) = -2\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$ se

$\operatorname{sen}\theta \cos\theta = \operatorname{sen}\theta$

Podemos ter $\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Se $\operatorname{sen}\theta \neq 0$, $\cos\theta = 1$ é solução $\Rightarrow$
$\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Assim, os pontos críticos são da forma $\theta = k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

(f) $h'(t) = 3 - \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ se $1 - t^2 = \dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow t^2 = \dfrac{8}{9} \Rightarrow t = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(g) $f'(x) = \dfrac{x - 2x\log x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\log x}{x^3} = 0$

se $\log x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e}$.

(h) $f'(x) = (2x - 3x^2)e^{-3x} = 0$ se

$x = 0$ ou $x = \dfrac{2}{3}$

(i) $g'(\theta) = 4 - \sec^2\theta = 0$ se

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos\theta = \pm\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

ou

$\theta = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3. Encontre os valores máximo e mínimo absolutos no intervalo dado:

(a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $[0, 3]$
(b) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $[0, 3]$
(c) $f(t) = (t^2 - 4)^3$, $[-2, 3]$
(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $[0,2; 4]$
(e) $f(t) = t - \sqrt[3]{t}$, $[-1, 4]$
(f) $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t$, $[0, \pi/2]$
(g) $f(x) = x^{-2} \log x$, $[1/2, 4]$
(h) $f(x) = x - 2\arctan x$, $[0, 4]$

(a) $f'(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(0) = 5$, $f(2) = -7$, $f(3) = -4$

mínimo: $x = -7$ máximo: $x = 0$

(b) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$f(0) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$, $f(3) = 19$

mínimo: $x = 1$ máximo: $x = 19$

(c) $f'(t) = 6t(t^2 - 4) = 0$ se $t = 0$, ou ± 2

$f(-2) = 0$, $f(0) = -64$, $f(2) = 0$, $f(3) = 125$

mínimo: $x = 0$ máximo: $x = 3$

(d) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = 0$ se $x = \pm 1$

$f(0,2) = 5,2$ $f(1) = 2$ $f(4) = 4,25$

mínimo: $x = 1$ máximo: $x = 0,2$

(e) $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{3} t^{-2/3} = \dfrac{t^{2/3} - \frac{1}{3}}{t^{2/3}} = 0$ se $t = \pm \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3/2}$

$f(-1) = 0$, $f(-(1/3)^{3/2}) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, $f(1/3^{3/2}) = \dfrac{-2}{3\sqrt{3}}$,

$f(4) = 4 - \sqrt[3]{4}$

mínimo: $t = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ máximo: $t = 4$

(f) $f'(x) = -2\operatorname{sen} t + 2\cos 2t$
$= -2\operatorname{sen} t + 2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)$
$= -2\operatorname{sen} t + 2 - 4\operatorname{sen}^2 t = 0$

se $2\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t - 1 = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} t = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = -1$ ou $\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$

$f(0) = 2$, $f(\pi/6) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $f(\pi/2) = 0$

mínimo: $x = \pi/2$ máximo: $x = \pi/6$

(g) $f'(x) = -2x^{-3}\log x + x^{-3} = x^{-3}(1 - 2\log x) = 0$

se $x = e^{1/2}$ (em $[1/2, 4]$)

$f(1/2) = -\dfrac{\log 2}{4}$, $f(e^{1/2}) = \dfrac{1}{2e}$, $f(4) = \dfrac{\log 2}{8}$

mínimo: $x = \dfrac{1}{2}$ máximo: $x = \sqrt{e}$

$x - 2\arctan x$ $(0,4)$

(h) $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{1+x^2} = \dfrac{x^2-1}{1+x^2} = 0$ se $x = \pm 1$

$f(0) = 0$, $f(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$, $f(4) = 4 - 2\arctan 4$

mínimo: $x = 1$ máximo: $x = 4$

Exercício 4. Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente, seus valores de máximo e mínimo locais e seus intervalos de concavidade e pontos de inflexão:

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$

(c) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

(d) $f(x) = \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

(e) $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

(f) $f(x) = x^2 \log x$

(a) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$

pontos críticos: $x = -1$ e $x = 3$

$f' > 0$ em $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ (f crescente)

$f' < 0$ em $(-1, 3)$ (f decrescente)

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

$f'' > 0$ em $(1, +\infty)$ (f convexa)

$f'' < 0$ em $(-\infty, 1)$ (f côncava)

$x = 1$ é ponto de inflexão

$x = -1$ é máximo local

$x = 3$ é mínimo local

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+3-3}{x^2+3} = 1 - \dfrac{3}{x^2+3}$

$f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2+3)^2} = 0$ se $x = 0$

$f' < 0$ se $x < 0$ (f decrescente)

$f' > 0$ se $x > 0$ (f crescente)

$$f''(x) = \frac{6(x^2+3)^2 - 24x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$$

$$= \frac{6x^2 + 18 - 24x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{18(1-x^2)}{(x^2+3)^3}$$

$f'' < 0$ em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ (f côncava)

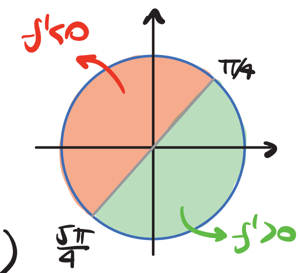
$f'' > 0$ em $(1, 1)$ (f convexa)

$x = -1$ e $x = 1$ são pontos de inflexão

$x = 0$ é máximo local

(c) $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x = 0$ se

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

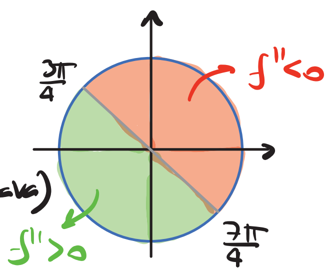


$f' < 0$ em $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ (f decrescente)

$f' > 0$ em $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ (f crescente)

$f''(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x > 0$ se

$-\operatorname{sen} x > \cos x$



$f'' > 0$ em $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ (f convexa)

$f'' < 0$ em $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ (f côncava)

$x = \frac{\pi}{4}$ é máximo local

$x = \frac{5\pi}{4}$ é mínimo local

$x = \frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$ são pontos de inflexão

(d) $f(x) = \cos^2 x - 2\,\text{sen}\,x$

$$f'(x) = -2\cos x\,\text{sen}\,x - 2\cos x$$

$$= -2\cos x(\underbrace{\text{sen}\,x + 1}_{\geq 0}) = 0 \text{ se}$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$f' < 0$ se $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ (f crescente)

$f' > 0$ se $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ (f decrescente)

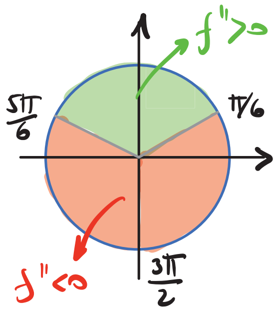
$$f''(x) = 2\,\text{sen}\,x(\text{sen}\,x + 1) - 2\cos^2 x$$

$$= 2\,\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\,x - 2 + 2\,\text{sen}^2 x$$

$$= 2(2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\,x - 1) = 0 \text{ se}$$

$$\text{sen}\,x = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1 \text{ ou } \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$



$f'' > 0$ se $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ (f convexa)

$f'' < 0$ se $x \in (0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}, 2\pi)$ (f côncava)

$x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$ são pontos de inflexão (mas $\frac{3\pi}{2}$ não é!)

$x = \frac{\pi}{2}$ é mínimo local

$x = \frac{3\pi}{2}$ é máximo local

(e) $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

$f'(x) = 2e^{2x} - e^{-x} = 0$ se $2e^{2x} = e^{-x}$

$\Rightarrow e^{3x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = -\log 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}\log 2$

$f' < 0$ se $x < -\frac{1}{3}\log 2$ (f decrescente)

$f' > 0$ se $x > -\frac{1}{3}\log 2$ (f crescente)

$f''(x) = 4e^{2x} + e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f é convexa $\forall x \in \mathbb{R}$

$x = -\frac{1}{3}\log 2$ é mínimo local

Não há pontos de inflexão

(f) $f'(x) = 2x\log x + x = 0$ se

$\log x = -1/2 \Rightarrow x = e^{-1/2}$

$f' < 0$ se $0 < x < e^{-1/2}$ (f decrescente)

$f' > 0$ se $x > e^{-1/2}$ (f crescente)

$x = e^{-1/2}$ é mínimo local

$f''(x) = 2\log x + 3 = 0$ se $x = e^{-3/2}$

$f'' < 0$ se $x < e^{-3/2}$ (f côncava)

$f'' > 0$ se $x > e^{-3/2}$ (f convexa)

$x = e^{-3/2}$ é ponto de inflexão

Exercício 5. Encontre os pontos críticos de $f(x) = x^4(x-1)^3$ e determine se são extremos locais e de que tipo.

$$f'(x) = 4x^3(x-1)^3 + 3x^4(x-1)^2$$
$$= x^3(x-1)^2[4(x-1)+3x]$$
$$= x^3(x-1)^2(7x-1)$$

pontos críticos:

$x = 0,\ 1,\ 1/7.$

Sinais de f':

x	x^3	$(7x-1)$	$(x-1)^2$	f'	f
$x<0$	$-$	$-$	$+$	$+$	crescente
$0<x<1/7$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente
$1/7<x<1$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente
$1<x$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente

$x=0$ é máximo local

$x=1/7$ é mínimo local

$x=1$ não é extremo local

Exercício 6. Mostre que a curva $y = (1 + x)/(1 + x^2)$ tem 3 pontos de inflexão e todos ficam sobre uma mesma reta.

$$y = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-(2+2x)(1+x^2)^{\cancel{2}} + 4x\cancel{(1+x^2)}(x^2+2x-1)}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-2-2x^2-2x-2x^3+4x^3+8x^2-4x}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{-2-6x+6x^2+2x^3}{(1+x^2)^3} = 0$$

Se $x^3+3x^2-3x-1 = 0$

Note que $x = 1$ é raiz. Assim, $x-1$ divide x^3+3x^2-3x-1:

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3}+3x^2-3x-1 & x-1 \\ \hline
-\cancel{x^3}+x^2 & x^2+4x+1 \\ \hline
\quad \cancel{4x^2}-3x-1 & \\
\quad -\cancel{4x^2}+4x & \\ \hline
\qquad\quad x-1 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Assim, as demais raízes de x^3+3x^2-3x-1 são as raízes de x^2+4x+1, ou seja,

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

Como x^3+3x^2-3x-1 tem 3 raízes distintas, o polinômio muda de sinal quando x passa por cada uma das raízes. Portanto,

$$x = -2-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3} \text{ e } 1$$

são todos pontos de inflexão.

Calculando $y(x)$ para os pontos de inflexão,

$$y\left(-2 \pm \sqrt{3}\right) = \frac{1-2 \pm \sqrt{3}}{1+4 \mp 4\sqrt{3}+3}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{8 \mp 4\sqrt{3}} \cdot \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{8 \pm 4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{64 - 48} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$$

e

$$y(1) = \frac{1+1}{1+1} = 1,$$

obtemos os seguintes pontos no plano cartesiano:

$$A = \left(-2-\sqrt{3}, \ \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$B = (1, 1)$$

$$C = \left(-2+\sqrt{3}, \ \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$$

Note que, para que A, B e C sejam colineares, basta que exista um vetor $u \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$B - A = \alpha u, \quad C - B = \beta u,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Temos

$$B-A=\left(3+\sqrt{3},\ \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$=(3+\sqrt{3})\cdot\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$$

e

$$C-B=\left(-3+\sqrt{3},\ \frac{-3+\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$=(-3+\sqrt{3})\cdot\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$$

Assim, vemos que A, B e C são colineares.

Exercício 7. Mostre que os pontos de inflexão da curva $y = x \operatorname{sen} x$ estão sobre a curva $y^2(x^2+4) = 4x^2$.

$y' = \operatorname{sen} x + x \cos x$

$y'' = \cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x = 2\cos x - x \operatorname{sen} x$

Se x é ponto de inflexão, então x também é raiz de y'' (note que nem sempre vale a recíproca!). Logo, satisfaz

$$\begin{cases} x = 2\cot x \\ y = 2\cos x \end{cases}$$

Daí,

$y^2(x^2+4) - 4x^2$

$= 4\cos^2 x \cdot 4(\cot^2 x + 1) - 16\cot^2 x$

$= 16\left[\cos^2 x \cdot \operatorname{cossec}^2 x - \cot^2 x\right] = 0$

Portanto, os pontos de inflexão estão na curva

$y^2(x^2+4) = 4x^2.$

Exercício 8. Considere as funcões

$$f(x) = x^4 \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad g(x) = x^4\left(2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right), \quad h(x) = x^4\left(-2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right).$$

Mostre que 0 é um ponto crítico das 3 funções, mas suas derivadas mudam de sinal infinitas vezes ao redor de $x = 0$. Mostre também que f não tem extremo local em $x = 0$, ao passo que g tem um mínimo local e h tem um máximo local.

Para cada uma das 3 funções, o limite quando $x \to 0$ é 0. Daí,

$$f(0) = g(0) = h(0) = 0.$$

Assim,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = 0$$

Analogamente

$$g'(0) = h'(0) = 0.$$

Portanto, $x = 0$ é ponto crítico das 3 funções. Temos, para $x \neq 0$,

$$f'(x) = 4x^3 \operatorname{sen}\frac{1}{x} - x^2 \cos\frac{1}{x},$$

com

$$f'(x) = \begin{cases} < 0 & \text{se } x = \frac{1}{2n\pi} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ > 0 & \text{se } x = \frac{1}{(2n+1)\pi} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Por outro lado

$$g'(x) = 8x^3 + f'(x)$$
$$= 4x^3\left(2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) - x^2\cos\frac{1}{x},$$

Se $x = \frac{1}{n\pi}$, então

$$g'(x) = \frac{1}{n^2\pi^2}\cdot\left[\frac{8}{n^2\pi^2} - \cos n\pi\right] \begin{cases} < 0 & (n \text{ par}) \\ > 0 & (n \text{ ímpar}) \end{cases}$$

Por fim,

$$h'(x) = -8x^3 + f'(x)$$
$$= 4x^3\left(-2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) - x^2\cos\frac{1}{x},$$

Se $x = \frac{1}{n\pi}$, então

$$h'(x) = \frac{-1}{n^2\pi^2}\cdot\left[\frac{8}{n^2\pi^2} + \cos n\pi\right] \begin{cases} > 0 & (n \text{ par}) \\ < 0 & (n \text{ ímpar}) \end{cases}$$

Agora, perceba que f não tem extremo local em $x=0$: para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$f\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right) = \frac{-1}{(2n+1)^2\pi^2} < 0 < \frac{1}{4n^2\pi^2} = f\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$$

Por outro lado,

$$g(x) = x^4\left(2+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \geq x^4(2-1) = 2x^4 > 0$$

$\forall\ x \neq 0$.

Daí, como $g(0)=0$, $x=0$ é mínimo de g.

Por fim,

$$h(x) = x^4\left(-2+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \leq x^4(-2+1) = -2x^4 < 0$$

$\forall\ x \neq 0$.

Daí, como $h(0)=0$, $x=0$ é máximo de h.

Exercício 9. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um âgulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu m g}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta},$$

onde μ é o coeficiente e atrito e $\theta \in [0, \pi/2]$. Mostre que F é minimizada quando $\tan\theta = \mu$.

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{-\mu m g\,(\mu\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{(\mu\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2} = 0$$

se $\tan\theta = \mu$.

Resta ver que esse é um ponto de mínimo. Note que

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{-\mu m g\cos\theta}{(\mu\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2}\cdot(\mu - \tan\theta)$$

Logo, como $\tan\theta$ é crescente, para $\delta > 0$ pequeno temos, para $\theta = \operatorname{arc}\tan\mu$,

$$\mu - \tan(\theta - \delta) < 0 < \mu - \tan(\theta + \delta)$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{d\theta}(\theta - \delta) > 0 > \frac{dF}{d\theta}(\theta + \delta)$$

Assim, pelo teste da 1ª derivada,

$\theta = \operatorname{arc}\tan\mu$ é mínimo

Exercício 10. Demonstre que a função

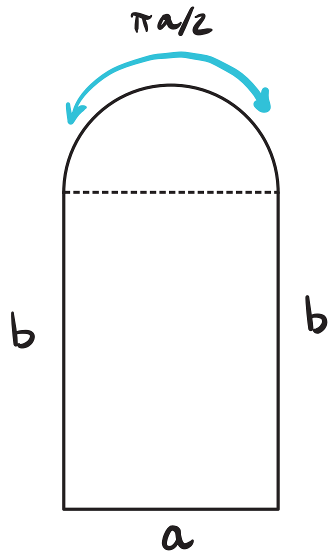
$$x^{101} + x^{51} + x + 1$$

não tem extremos locais.

$$y' = 101x^{100} + 51x^{50} + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $y(x)$ não tem extremos locais por causa do teorema de Fermat.

Exercício 11. Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo (o diâmetro é igual à largura do retângulo). Se o perímetro da janela for 10 m, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.



Temos

$$10 = \frac{\pi a}{2} + a + 2b$$

$$\Rightarrow 2b = 10 - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)a$$

$$\Rightarrow b = 5 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)a$$

A luz que passa é proporcional à área da janela. Então basta maximizar a área A:

$$A(a) = a \cdot b + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= 5a - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)a^2 + \frac{\pi}{8}a^2$$

$$= 5a - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right)a^2$$

$$\Rightarrow A'(a) = 5 - \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)a = 0$$

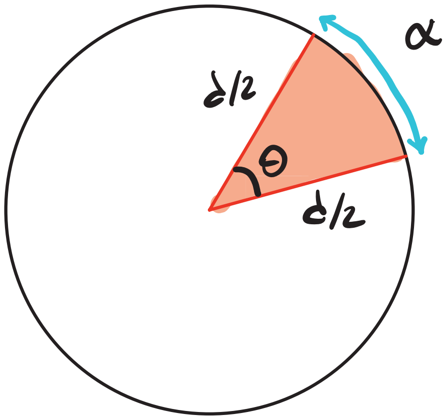
$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{20}{\pi + 4}}$$

$$\Rightarrow b = 5 - \frac{\pi + 2}{\cancelto{1}{4}} \cdot \frac{\cancelto{5}{20}}{\pi + 4} = 5 - 1 + \frac{2}{\pi + 4}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 4 + \frac{2}{\pi + 4}}$$

Como $A(a)$ é um polinômio quadrático com coeficiente líder negativo, seu ponto crítico é um ponto de máximo.

Exercício 12. Se lhe for oferecida uma fatia de uma pizza redonda e a fatia precisar ter um perímetro de 60 cm, qual diâmetro da pizza vai recompensá-lo com a maior fatia?



$\alpha = 60 - d$

Temos $\alpha = \theta \dfrac{d}{2}$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{2\alpha}{d}$

A área da fatia é

$$A = \frac{1}{2}\theta\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}(60-d)}{d}\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(60-d)\cdot d}{2} = -\frac{1}{2}d(d-60)$$

Esse é um polinômio de grau 2 com coeficiente líder negativo e raízes $d=0$ e $d=60$. Logo seu máximo é a média das raízes, ou seja a melhor fatia ocorre quando

$$d = 30 \text{ cm}.$$

Exercício 13. Uma companhia opera 16 poços e petróleo em uma área designada. Cada bomba, em média, extrai 240 barris de petróleo por dia. A companhia pode adicionar mais poços, mas cada poço adicional reduz a saída diária de cada um dos poços em 8 barris. Quantos poços a companhia deveria adicionar para maximizar seu lucro?

Seja y a extração média total diária e x o número de poços adicionais.

Temos

$$y(x) = (16+x)\cdot(240-8x)$$
$$= -8\,[x-(-16)]\cdot(x-30)$$

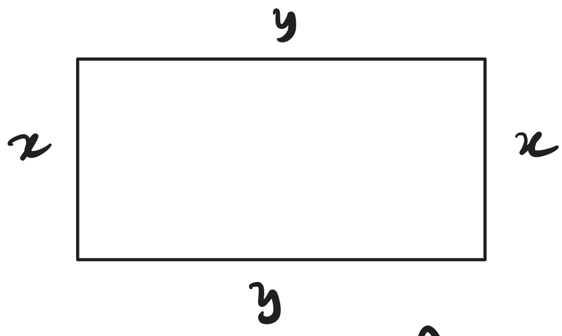
Imaginando que o lucro seja máximo quando y for máximo, isso ocorre quando

$$x = \frac{30-16}{2} = 7,$$

já que $y(x)$ é um polinômio de grau 2 com coeficiente líder negativo. Logo, seu máximo ocorre na média de suas raízes.

Exercício 14. Prove que, dentre todos os retângulos de mesma área, o quadrado é o que tem o menor perímetro.

Seja A a área.



$$\Rightarrow xy = A \Rightarrow y = \frac{A}{x}.$$

O perímetro é

$$p(x) = 2(x+y) = 2\left(x + \frac{A}{x}\right)$$

Temos

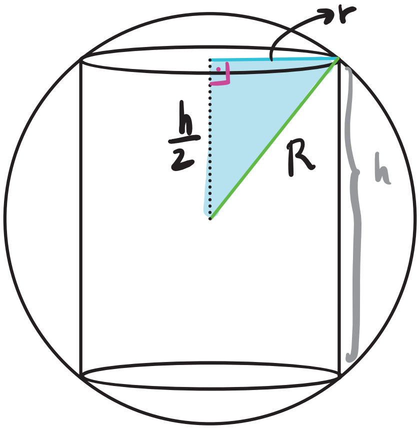
$$p'(x) = 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) = 0$$

se $x = \sqrt{A}$ (OBS: $x > 0$)

Como $p''(x) = \dfrac{4A}{x^3} > 0 \quad \forall x > 0$,

segue que $x = \sqrt{A}$ é ponto de mínimo. Neste caso $y = \dfrac{A}{x} = \sqrt{A} = x$ e temos um quadrado.

Exercício 15. Dada uma esfera de raio R, determinar o raio r e a altura h do cilindro circular reto de maior superfície lateral $2\pi rh$ que pode ser inscrito na esfera.



Temos que

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}$$

$$\Rightarrow h^2 = 4(R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

A superfície lateral (sem as "tampas") do cilindro é

$$S = S(r) = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}$$

Temos

$$S'(r) = 4\pi\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{4\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$= \frac{4\pi(R^2 - r^2) - 4\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{4\pi(R^2 - 2r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0$$

se $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Este é um ponto de máximo pois, para $\delta > 0$ pequeno,

$$R^2 - 2\left(\frac{R}{\sqrt{2}} + \delta\right) < 0 < R^2 - 2\left(\frac{R}{\sqrt{2}} - \delta\right),$$

daí, pelo teste da 1ª derivada

$r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ é ponto de máximo.

Logo, $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ e $h = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}}$

$= R\sqrt{2}$

Exercício 16. Se a e b são os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é 1, determinar o maior valor de $2a + b$.

Temos

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b = \sqrt{1-a^2}$$

Seja

$$f(a) = 2a + b = 2a + \sqrt{1-a^2}$$

Temos

$$f'(a) = 2 - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{2\sqrt{1-a^2} - a}{\sqrt{1-a^2}}$$

$= 0$ se

$$a^2 = 4(1-a^2) \Rightarrow 5a^2 = 4 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Como

$$f''(a) = \frac{-\sqrt{1-a^2} + a \cdot \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}}{1-a^2}$$

$$= \frac{a^2 - 1 - a^2}{(1-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{(1-a^2)^{3/2}} < 0 \quad \text{se } a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Assim, $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ gera um máximo para f. Logo, seu maior valor é

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}} + \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Para termos certeza de que esse é

o máximo de f em $0<a<1$, resta ver o comportamento nos extremos. Temos:

$f(0)=1$, $f(1)=2$.

Logo, $\sqrt{5}$ é de fato o maior valor de f.

Exercício 17. Dados n números reais $a_1, a_2, ..., a_n$, prove que a soma $\sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$ é mínima quando x é a média aritmética de $a_1, a_2, ..., a_n$.

Seja $S = \sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$

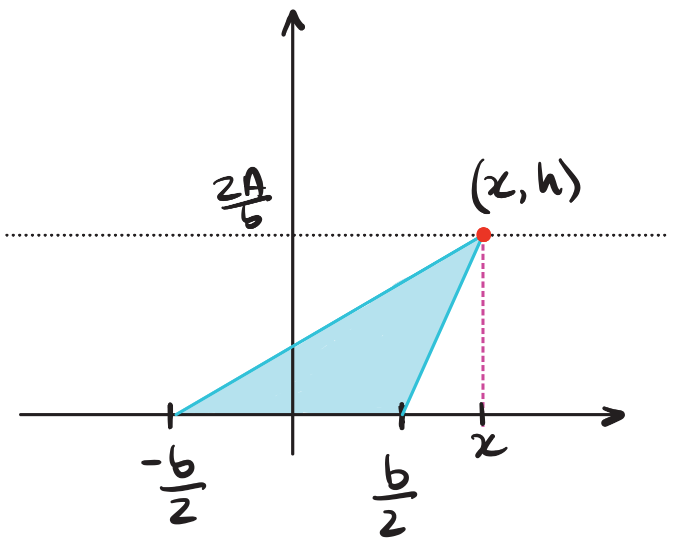
$$\Rightarrow S = nx^2 - \left(2\sum_{k=1}^{n} a_k\right)x + \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

Esse é um polinômio quadrático com coeficiente líder positivo. Logo, seu ponto crítico é um ponto de mínimo.

$$S'(x) = 2nx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$$

se $x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, a média aritmética.

Exercício 18. Dentre todos os triângulos com dada área, mostre que o triângulo equilátero é aquele com menor perímetro.



$A = \frac{1}{2} bh$

$\Rightarrow h = \frac{2A}{b}$

Para cada escolha de $x \in \mathbb{R}$ na figura, temos um triângulo de perímetro

$$p(x) = b + \sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + h^2} + \sqrt{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + h^2}$$

$$p'(x) = \frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + h^2}} + \frac{\left(x-\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + h^2}}$$

Note que $p'(0) = 0$.

Temos

$$p''(x) = \frac{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + h^2} - \frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + h^2}}}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + h^2} +$$

$$+\frac{\sqrt{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+h^2}-\dfrac{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+h^2}}}{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+h^2}$$

$$=\frac{h^2}{\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+h^2\right]^{3/2}}+\frac{h^2}{\left[\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+h^2\right]^{3/2}}>0$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$

Assim, $x=0$ é ponto de mínimo.

Portanto, o perímetro quando o triângulo tem área A e base b assume seu valor mínimo quando $x=0$, ou seja, quando ele é isósceles. Nesse caso, o perímetro é

$$p(b)=b+2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+h^2}$$

$$=b+2\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{4A^2}{b^2}}$$

Vamos agora minimizar em b:

$$p'(b) = 1 + \frac{\cancel{2}\cdot}{\cancel{2}} \frac{\frac{\cancel{2}b}{\cancel{4}2} - \frac{8A^2}{b^3}}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{4A^2}{b^2}}}$$

$$= 1 + \frac{b^4 - 16A^2}{2b^3\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{4A^2}{b^2}}} = 1 + \frac{b^4 - 16A^2}{\cancel{2}b^3 \frac{\sqrt{b^4 + 16A^2}}{\cancel{2}b}}$$

$$= 1 + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^4 - 16A^2}{\sqrt{b^4 + 16A^2}} = 0 \quad \text{se}$$

$$b^2\sqrt{b^4 + 16A^2} = (4A)^2 - b^4$$

$$\Rightarrow b^4\left(b^4 + (4A)^2\right) = (4A)^4 - 2(4A)^2 \cdot b^4 + b^8$$

$$\Rightarrow \cancel{b^8} + (4A)^2 b^4 = (4A)^4 - 2(4A)^2 b^4 + \cancel{b^8}$$

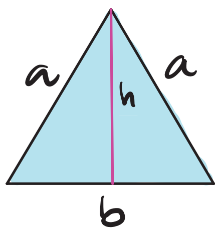
$$\Rightarrow 3\cancel{(4A)^2} b^4 = (4A)^{\cancel{4}2}$$

$$\Rightarrow b^4 = \frac{1}{3}(4A)^2 \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{A}$$

Como $$p'(b) = 1 + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^4 - 16A^2}{\sqrt{b^4 + 16A^2}},$$

vemos que p' muda de negativa para positiva ao passar por $b = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}}$. Logo este é um ponto de mínimo.

Repare que para este valor de b, o lado a do triângulo isósceles mede



$$a = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{2A}{b}\right)^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{A}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{A}}} \cdot \sqrt[4]{3}\right)^2 + \frac{\cancel{4}A}{\sqrt{3} \cdot \cancel{4}}} = \sqrt{\sqrt{3}A + \frac{A}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{A} \cdot 2}{\sqrt[4]{3}} = b$$

Assim, temos na verdade um triângulo equilátero como aquele que minimiza o perímetro.

Exercício 19. Prove que, se $p > 1$ e $x > 0$, $x^p - 1 \geqslant p(x-1)$.

Seja $f(x) = x^p - 1 - p(x-1)$

Temos
$$f'(x) = px^{p-1} - p = p(x^{p-1} - 1) = 0$$
se $x = 1$.

Como
$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0 \quad \forall\, x > 0,$$
$x = 1$ é ponto de mínimo.

Temos
$$f(x) \geqslant f(1) = 0 \quad \forall\, x > 0$$

$$\Rightarrow \quad x^p - 1 \geqslant p(x-1) \quad \forall\, x > 0 \text{ se } p > 1.$$

Exercício 20. Prove que $\tan x \geqslant x$ se $0 \leqslant x < \pi/2$.

Seja $f(x) = \tan x - x$. Temos

$$f'(x) = \sec^2 x - 1 \geqslant 0 \quad \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2})$$

Logo, f é crescente em $[0, \frac{\pi}{2})$

Como $f(0) = 0$, segue que

$$\tan x \geqslant x \quad \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2})$$

Exercício 21. Prove que $1 > (\operatorname{sen} x)/x \geqslant 2/\pi$ se $0 < x \leqslant \pi/2$.

Seja $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Temos

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

Se $x = \frac{\pi}{2}$, $f'(x) = -1$

Se $x \neq \frac{\pi}{2}$,

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (x - \tan x)}{x^2} \leq 0$$

pelo exercício anterior.

Logo, f é decrescente em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

daí

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

Exercício 22. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $e^x > \dfrac{1}{x+1}$ se $x > 0$ (b) $e^x > 1 + \log(1+x)$ se $x > 0$.

(c) $e^x > 1 + (1+x)\log(1+x)$ se $x > 0$.

(a) e^x é crescente e $\dfrac{1}{x+1}$ é decrescente se $x>0$. Daí, como $e^0 = 1 \geq 1 = \dfrac{1}{0+1}$, segue que

$$e^x > e^0 = 1 \geq 1 = \frac{1}{0+1} > \frac{1}{x+1} \quad \forall\, x>0.$$

(b) Seja $f(x) = e^x - 1 - \log(1+x)$.

Temos

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x} > 0$$

para todo $x>0$ pelo item (a).

Assim, f é crescente. Como $f(0)=0$, segue que

$$e^x > 1 + \log(1+x) \quad \forall\, x>0.$$

(c) Seja $g(x) = e^x - 1 - (1+x)\log(1+x)$.

Temos

$$g'(x) = e^x - \log(1+x) - 1 > 0$$

para todo $x>0$ pelo item (b).

Assim, g é crescente. Como $f(0)=0$, segue que

$$e^x - (1+x)\log(1+x) > 0 \quad \forall\, x>0.$$

Exercício 23. Se $f''(x) \geqslant 0$, mostre que $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

Suponha que $x<y$. Então

$$x < \frac{x+y}{2} < y.$$

Temos

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$= \frac{f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2} - \frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x)}{2}$$

$$= \frac{f'(\beta)}{2}\left(\frac{y-x}{2}\right) - \frac{f'(\alpha)}{2}\cdot\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{y-x}{2}\right)\left[f'(\beta) - f'(\alpha)\right]$$

pelo Teorema do Valor Médio onde

$$x < \alpha < \frac{x+y}{2} < \beta < y.$$

Aplicando de novo o TVM, vem

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{y-x}{2}\right)\left[f'(\beta) - f'(\alpha)\right] = \left(\frac{y-x}{2}\right)(\beta-\alpha)f''(\gamma) \geqslant 0,$$

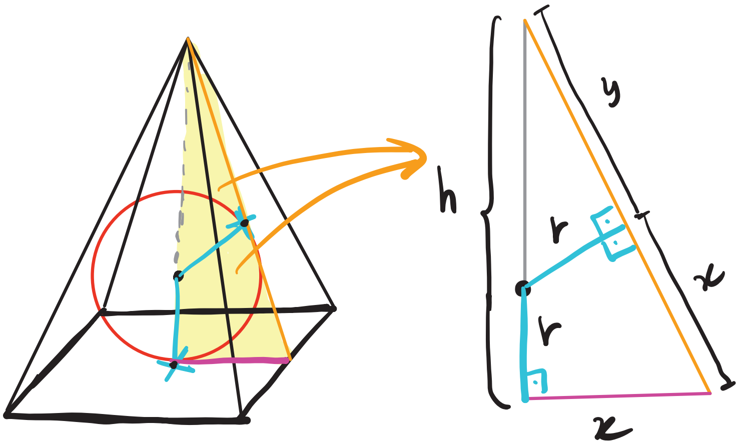
onde $\alpha < \gamma < \beta$.

Assim,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Exercício 24. Dada uma esfera de raio r, encontre a altura da pirâmide de menor volume cuja base é um polígono regular de n lados e cuja base e faces triangulares são todas tangentes à esfera.

Vamos desenhar uma base quadrada, mas a ideia se aplica a qualquer polígono regular. Seja h a altura procurada.



$$\frac{y}{r} = \frac{h}{x}$$

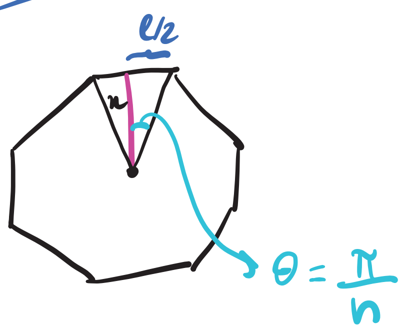
$$\Rightarrow h = \frac{x}{r} \cdot y$$

$$(x+y)^2 = x^2 + h^2$$
$$= x^2 + \frac{x^2}{r^2} y^2$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + 2xy + y^2 = \cancel{x^2} + \frac{x^2}{r^2} y^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2 - r^2}{r^2}\right) y^{\cancel{2}} = 2x\cancel{y} \Rightarrow y = \frac{2xr^2}{x^2 - r^2} \Rightarrow \boxed{h = \frac{2x^2 r}{x^2 - r^2}}$$

BASE: (n lados) $\quad \ell =$ lado



$$\frac{\ell}{2x} = \tan\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = 2x \tan\frac{\pi}{n}}$$

$$A = \text{ÁREA BASE} = n \cdot \frac{1}{2} \ell x =$$

$$\Rightarrow \boxed{A = n x^2 \tan\frac{\pi}{n}}$$

Assim, o volume da pirâmide é

$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3} n x^2 \tan\frac{\pi}{n} \cdot \frac{2x^2 r}{x^2 - r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{2nr}{3} \tan\frac{\pi}{n} \cdot \frac{x^4}{x^2 - r^2}}$$

Seja $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - r^2}$. Queremos minimizar f.

Seja $F(x) = \log f(x) = 4\log x - \log(x^2 - r^2)$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{4}{x} - \frac{2x}{x^2 - r^2} = \frac{4x^2 - 4r^2 - 2x^2}{x(x^2 - r^2)}$$

$$= \frac{2(x^2 - 2r^2)}{x(x^2 - r^2)} = 0 \text{ se } x = \pm\sqrt{2}\,r$$

Ponto crítico: $x = \sqrt{2}\,r$

Sinal F':

$$\left.\begin{array}{ll} r < x < \sqrt{2}r : & F' < 0 \\ \sqrt{2}r < x : & F' > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{2}r \text{ é mín. local}$$

$$\Rightarrow h = \frac{2x^2 r}{x^2 - r^2} = \frac{2 \cdot 2r^3}{2r^2 - r^2} \Rightarrow h = 4r$$

Exercício 25. Suponha que uma bola de neve derreta de maneira que seu volume decresce a uma taxa proporcional à área de sua superfície. Se levar três horas para a bola de neve derreter para a metade de seu volume, quanto demorará para a bola de neve derreter completamente?

Se $V(t)$ é o volume e $A(t)$ a área no tempo t, o enunciado diz que

$$V'(t) = -k \cdot A(t)$$

Temos que

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad A = 4\pi r^2$$

Daí,

$$V'(t) = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot r' = -k \cdot 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow r'(t) = -k \Rightarrow r(t) = r_0 - kt$$

Do enunciado, temos que

$$V(3) = \frac{1}{2} V(0)$$

Logo,

$$r(3) = \frac{r_0}{\sqrt[3]{2}} = r_0 - 3k$$

$$\Rightarrow k = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\frac{r_0}{3}$$

A bola derrete completamente quando $r(t) = 0$. Assim,

$$\cancel{r_0} = tk = t\,\frac{\cancel{r_0}(\sqrt[3]{2}-1)}{3\sqrt[3]{2}}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} \text{ horas} = 14{,}5 \text{ horas}$$

é o tempo de derretimento.

Exercício 1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}$ (b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-13x+21}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3}$ (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)}$ (f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{(x \operatorname{sen} x)^{3/2}}$

(g) $\lim_{x\to a_+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ (h) $\lim_{x\to 1_+} \dfrac{x^x - x}{1-x+\log x}$ (i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} 2x - 2\operatorname{arcsen} x}{x^3}$

(j) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x^k - n}{x-1}$ (k) $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{(\operatorname{sen} 4x)(\operatorname{sen} 3x)}{x \operatorname{sen} 2x}$ (l) $\lim_{x\to 0_+} \left(\log \dfrac{1}{x}\right)^x$

(m) $\lim_{x\to 1_-} \log x \log(1-x)$ (n) $\lim_{x\to 0_+} x^{(x^x-1)}$ (o) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x^b}$, $(a>1)$

(p) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\cosh(x+1)}{e^x}$ (q) $\lim_{x\to 0_-} (1-2^x)^{\operatorname{sen} x}$ (r) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{\arctan(1/x)}$

(a) Quando $x=2$, temos uma indeterminação 0/0. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{6x+2}{2x-1} = \frac{14}{3}$$

(b) Quando $x=3$, temos uma indeterminação 0/0. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{2x^2-13x+21} = \lim_{x\to 3} \frac{2x-4}{4x-13} = -2$$

(c) Quando $x=0$, temos uma indeterminação 0/0. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{3x^2},$$

que é uma nova indeterminação 0/0.

Usando novamente L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x + \operatorname{sen} x}{6x},$$

outra indeterminação 0/0. Usando outra vez L'Hôpital vem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x + \operatorname{sen} x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x + \cos x}{6} = \frac{1}{3}$$

(d) Quando $x=0$, temos uma indeterminação 0/0. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-x)e^x - 1}{3x^2}$$

que é uma nova indeterminação 0/0.

Usando novamente L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)e^x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{x}e^x}{6\cancel{x}} = \frac{-1}{6}$$

(e) Quando $x=0$, temos uma indeterminação 0/0. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{a \operatorname{sen} ax \cos bx}{b \operatorname{sen} bx \cos ax},$$

que é uma nova indeterminação 0/0.

Usando novamente L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a \operatorname{sen} ax \cos bx}{b \operatorname{sen} bx \cos ax}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a^2 \cos ax \cos bx - ab \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx}{b^2 \cos bx \cos ax - ab \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} ax}$$

$$= \frac{a^2}{b^2}$$

f) Quando $x=0$, temos uma indeterminação 0/0. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{(x \operatorname{sen} x)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{3}{2}(\operatorname{sen} x + x\cos x)^{1/2}}$$

que é uma nova indeterminação 0/0.

Usando novamente L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{3}{2}(\operatorname{sen} x + x\cos x)^{1/2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x\,(\operatorname{sen} x + x\cos x)^{1/2}}{\frac{3}{4}(2\cos x - x\operatorname{sen} x)} = 0$$

(g) Quando $x = a$, temos uma indeterminação 0/0. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to a_+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a_+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}$$

$$= \lim_{x\to a_+} \frac{(2\sqrt{x-a} - 2\sqrt{x})\cancel{\sqrt{x-a}}\sqrt{x+a}}{4\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x-a}}\cdot x}$$

$$= \frac{-2\cancel{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}}{4\cancel{\sqrt{a}}\cdot a} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}$$

(h) Quando $x = 1$, temos uma indeterminação 0/0. Por L'Hôpital, como $x^x = e^{x\log x}$,

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{x^x - x}{1-x+\log x} = \lim_{x\to 1_+} \frac{(\log x+1)\, x^x - 1}{-1+\frac{1}{x}},$$

que é uma nova indeterminação 0/0.

Usando novamente L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{(\log x+1)\, x^x - 1}{-1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1_+} \frac{\left[\frac{1}{x} + (\log x+1)^2\right] x^x}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= -2$$

(i) Quando $x=0$, temos uma indeterminação $0/0$. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - \arcsin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$= \infty$$

(j) Quando $x = 1$, temos uma indeterminação $0/0$. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sum_{k=1}^{n} x^k - n}{x-1} = \lim_{x\to 1} \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(k) Lembre que $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$.

Assim,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{sen} 4x)(\operatorname{sen} 3x)}{x \operatorname{sen} 2x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cancel{(\operatorname{sen} 2x)}(\cos 2x)(\operatorname{sen} 3x)}{x\cancel{(\operatorname{sen} 2x)}} = \frac{4}{\pi}$$

(l) Estamos diante de uma indeterminação do tipo ∞^0.

Note que

$$\log\left(\log\frac{1}{x}\right)^x = x\log\left(\log\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\log\left(\log\frac{1}{x}\right)}{1/x},$$

que é uma indeterminação ∞/∞ quando $x \to 0_+$. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{\log\left(\log\frac{1}{x}\right)}{1/x} = \lim_{x\to 0_+}\frac{\frac{1}{\log\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{1/x}\cdot\cancel{\frac{-1}{x^2}}}{\cancel{-1/x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0_+}\frac{x}{\log\frac{1}{x}} = 0$$

Daí,

$$\lim_{x\to 0_+}\left(\log\frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1$$

(m) $\log x\,\log(1-x) = \dfrac{\log(1-x)}{1/\log x}$

Quando $x \to 1_-$, temos uma indeterminação do tipo ∞/∞. Por L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1_-}\frac{\log(1-x)}{1/\log x} = \lim_{x\to 1_-}\frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{(\log x)^2}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1_-}\frac{x(\log x)^2}{1-x},$$

que é outra indeterminação, do tipo 0/0.
Novamente por L'Hôpital vem

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x(\log x)^2}{1-x} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(\log x)^2 + 2\log x}{-1} = 0$$

(n) Temos

$$x^{(x^x - 1)} = e^{(x^x - 1)\cdot \log x} = e^{\frac{x^x - 1}{\log x}}$$

Vamos avaliar, com L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{\log x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x\log x} - 1}{\log x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(\log x + 1)x^x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x + 1}{1/x} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0^+} x^x}_{1}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x + 1}{1/x},$$

que é uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x + 1}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

Logo $\lim_{x \to 0^+} x^{(x^x - 1)} = e^0 = 1.$

(o) Temos $\dfrac{a^x}{x^b} = \left[\dfrac{a^{x/b}}{x}\right]^b$, e, como $u \longmapsto u^b$ é contínua, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^b} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a^{x/b}}{x}\right)^b = \left[\lim_{x\to\infty} \frac{a^{x/b}}{x}\right]^b$$

Repare que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^{x/b}}{x}$ é uma indeterminação do tipo ∞/∞. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^{x/b}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{x}{b}\log a}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\log a}{b} \cdot a^{x/b} = \infty$$

Assim,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty.$$

(p) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\cosh(x+1)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2(x+1)} - 1}{2\,e^{2(x+1)} \cdot e^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^2 \cdot e^{2x} + 1}{2 \cdot e^2 e^{3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{e^x} + \frac{1}{2e^2 \cdot e^{3x}} = 0$$

(q) Temos

$$(1-2^x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x \log(1-2^x)} = e^{\left[\frac{\log(1-2^x)}{\operatorname{cossec} x}\right]}$$

Por L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{\log(1-2^x)}{\operatorname{cossec} x} = \lim_{x\to 0_-} \frac{-\frac{\log 2}{1-2^x}}{-\operatorname{cossec} x \cdot \cot x}$$

$$= \lim_{x\to 0_-} \frac{\log 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1-2^x},$$

que é indeterminação 0/0. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1-2^x} = \lim_{x\to 0_-} \frac{\operatorname{sen} x(1-\sec^2 x)}{-\log 2 \cdot 2^x} = 0$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0_-} (1-2^x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$$

(r) Quando $x=0$, temos uma indeterminação 0/0. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/x}{\arctan 1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos 1/x \cdot \cancel{(-1/x^2)}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \cancel{(-1/x^2)}} = 1$$

Exercício 2. A corrente $I(t)$ que circula num circuito elétrico num instante t é definida por

$$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L}),$$

com E, R e L números positivos. Determinte o valor limite de $I(t)$ quando $R \to 0_+$.

Se $R=0$, temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$.

Por L'Hôpital

$$\lim_{R\to 0_+} \frac{E}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right) = E \lim_{R\to 0_+} \frac{t}{L} e^{-Rt/L} = \frac{E}{L} \cdot t.$$

Exercício 3. Determinar c de modo que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$$

$$\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \left(\frac{x-c+2c}{x-c}\right)^x = \left(1+\frac{1}{\frac{x-c}{2c}}\right)^x$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{x-c}{2c}}\right)^{\left(\frac{x-c+c}{2c}\cdot 2c\right)}$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-c}{2c}}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{2c}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x-c}{2c}}\right)^c$$

$$\xrightarrow[x\to\infty]{} e^{2c} = 4 \Rightarrow 2c = 2\log 2 \Rightarrow c = \log 2.$$

Exercício 4. Se um montante inicial de dinheiro A_0 for investido a uma taxa de juros r capitalizada n vezes ao ano, o valor do investimento após t anos será

$$A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Se $n \to \infty$, nos referimos à capitalização contínua de juros. Usando a regra de L'Hôpital, mostre que se os juros forem capitalizados continuamente, então o montante após t anos será

$$A = A_0 e^{rt}$$

Temos

$$\frac{A}{A_0} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = e^{nt\log\left(1+\frac{r}{n}\right)} = e^{t\cdot\left[\frac{\log(1+r/n)}{1/n}\right]}$$

Por L'Hôpital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+r/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n+r} \cdot \frac{-r}{\cancel{n^2}}}{\frac{-1}{\cancel{n^2}}} = r$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A}{A_0} = e^{rt}$$

Exercício 5. Mostre que se $r(x) = \dfrac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b^m x^m + ... + b_1 x + b_0}$, então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{r(x)}{x^{n-m}} = \frac{a_n}{a_m}$$

Temos

$$r(x) = \frac{x^n\left(a_n + \cdots + a_1/x^{n-1} + a_0/x^n\right)}{x^m\left(b_m + \cdots + b_1/x^{m-1} + b_0/x^m\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{r(x)}{x^{n-m}} = \frac{\left(a_n + \cdots + a_1/x^{n-1} + a_0/x^n\right)}{\left(b_m + \cdots + b_1/x^{m-1} + b_0/x^m\right)}$$

$$\xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{a_n}{b_m}$$

Exercício 6. Usando o exercício anterior, conclua que e^x não é uma função racional.

Se $e^x = r(x)$ fosse racional então haveria $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^k} = \lim_{x \to \infty} \frac{r(x)}{x^k} = a \neq 0.$$

Por outro lado, como $\frac{e^x}{x^k} = \left(\frac{e^{x/k}}{x}\right)^k$, segue de L'Hôpital que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^k} = \left(\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x/k}}{x}\right)^k = \left(\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x/k}}{k}\right)^k = \infty,$$

gerando uma contradição. Assim, e^x não é racional.

Exercício 7. Prove que e^x não pode satisfazer uma equação algébrica com coeficientes que sejam polinômios em x.

Se $\sum_{k=0}^{n} p_k(x) e^{kx} = 0$, dividindo por $e^{(k-1)x}$, vem

$$p_n(x)e^x + p_{n-1}(x) + \underbrace{\frac{p_{n-2}(x)}{e^x} + \cdots + \frac{p_0(x)}{e^{(n-1)x}}}_{q(x)} = 0$$

$\Rightarrow e^x = r(x) + q(x)$,

onde $r(x) = -\dfrac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)}$ é racional.

Por um exercício anterior, existe $k \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tais que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{r(x)}{x^k} = \alpha.$$

Por outro lado, usando L'Hôpital como fizemos no exercício anterior, vemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{q(x)}{x^k} = 0$$

Assim,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{r(x)}{x^k} + \frac{q(x)}{x^k} = \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

uma contradição como visto no exercício anterior. Isso mostra que e^x não

pode satisfazer uma equação algébrica com
polinômios como coeficientes.

Exercício 8. Prove que $f(x) = (x^2)^x$, $f(0) = 1$ é contínua em $x = 0$.

Temos

$$\lim_{x\to 0_+} (x^2)^x = \left(\lim_{x\to 0_+} x^x\right)^2.$$

Como

$$x^x = e^{x\log x} = e^{\log x/(1/x)},$$

por L'Hôpital temos

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0_+} -x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0_+} x^x = e^0 = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0_+} x^{2x} = 1^2 = 1.$$

Por outro lado, se $x = -|x| < 0$,

$$(x^2)^x = |x|^{-2|x|} = \left(|x|^{|x|}\right)^{-2} \xrightarrow[x\to 0_-]{} 1^{-2} = 1$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0_-} (x^2)^x = \lim_{x\to 0_+} (x^2)^x = 1 = f(0),$$

e f é contínua em $x = 1$.

Exercício 1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = e^{-x^2}$ (c) $y = \sqrt{x^2+1} - x$ (d) $y = \log(1 - \log x)$

(e) $y = \dfrac{e^x}{1-e^x}$ (f) $y = e^{\arctan x}$ (g) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ (h) $y = \operatorname{sen}^3 x$

(i) $y = x \tan x$ (j) $y = \operatorname{cossec} x - 2\operatorname{sen} x$ (k) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x}$ (l) $y = \arctan \dfrac{x-1}{x+1}$

(a) Domínio: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Raízes: $y = \dfrac{x^2+x-1}{x^2} = 0$ se $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$y' = \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2-x}{x^3} = 0$ se $x = 2$

Sinal derivada:

	x^3	$2-x$	y'
$x<0$	$-$	$+$	$-$
$0<x<2$	$+$	$+$	$+$
$x>2$	$+$	$-$	$-$

$\dfrac{4+2-1}{4}$

$\Rightarrow x = 2$ é máximo local $\left(y(2) = \dfrac{5}{4}\right)$

$y'' = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{6}{x^4} = \dfrac{2(x-3)}{x^4} = 0$ se $x = 3$

Sinal 2ª derivada:

	x^4	$x-3$	y''
$x<0$	$+$	$-$	$-$
$0<x<3$	$+$	$-$	$-$
$x>3$	$+$	$+$	$+$

$\Rightarrow x = 3$ é ponto de inflexão $\left(y(3) = \frac{11}{9}\right)$

Assíntotas:

$$y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} y = -\infty$$

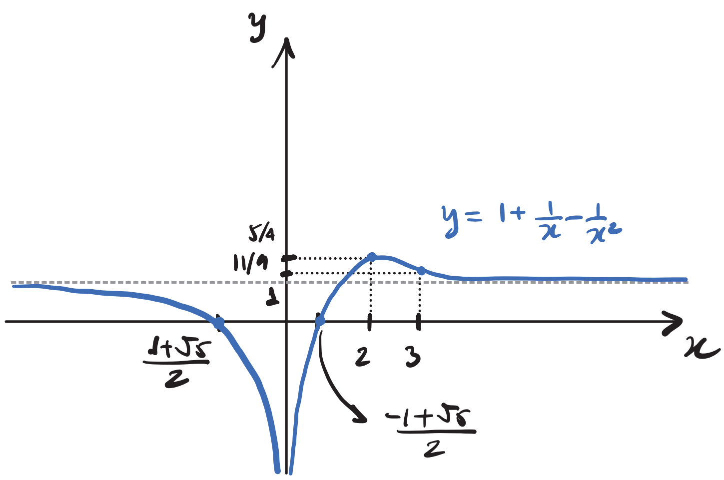
$\Rightarrow x = 0$ é assíntota vertical

Por outro lado

$$\lim_{x \to \pm\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 1$$

$\Rightarrow y = 1$ é assíntota horizontal

Esboço do gráfico:



(b) $y = e^{-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$y' = -2xe^{-x^2} = 0$ se $x = 0$

Sinais da derivada:

$$\begin{cases} x < 0 \Rightarrow y' > 0 \\ x > 0 \Rightarrow y' < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 0$ é máximo local $(y(0) = 1)$

$y'' = (-2 + 4x^2)\, e^{-x^2} = 0$ se

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Sinais da 2ª derivada:

$x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y'' > 0$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y'' < 0$

$x > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y'' < 0$

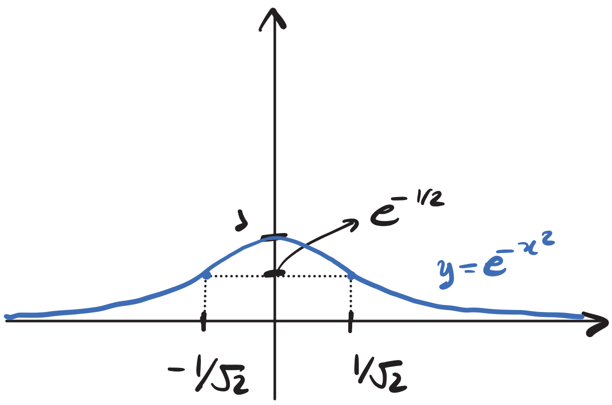
$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ são pontos de inflexão $(y(\pm 1/\sqrt{2}) = e^{-1/2})$

Assíntotas:

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ é assíntota horizontal.

Esboço do gráfico:



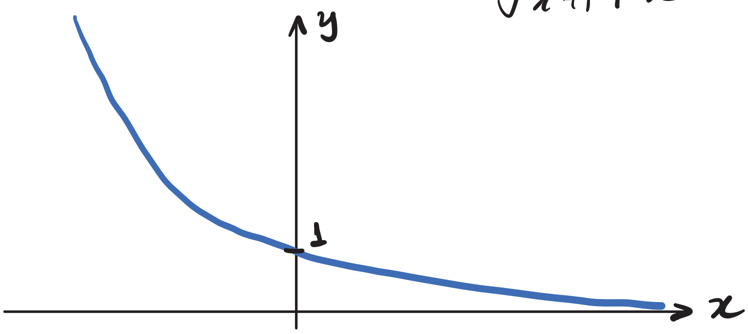
(c) $y=\sqrt{x^2+1}-x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad y(0)=1$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y'' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$



(d) $y = \log(1-\log x) = 0$ se

$1 - \log x = 1 \Rightarrow \log x = 0 \Rightarrow x = 1$

Domínio: $1 - \log x > 0 \Rightarrow \log x < 1$

$\Rightarrow 0 < x < e$

$$\lim_{x \to 0} \log(1-\log x) = \infty$$

$$\lim_{x \to e} \log(1-\log x) = -\infty$$

$$y' = \frac{1}{1-\log x} \cdot \frac{-1}{x} = \frac{-1}{x(1-\log x)} < 0$$

$\forall x \in (0, e)$

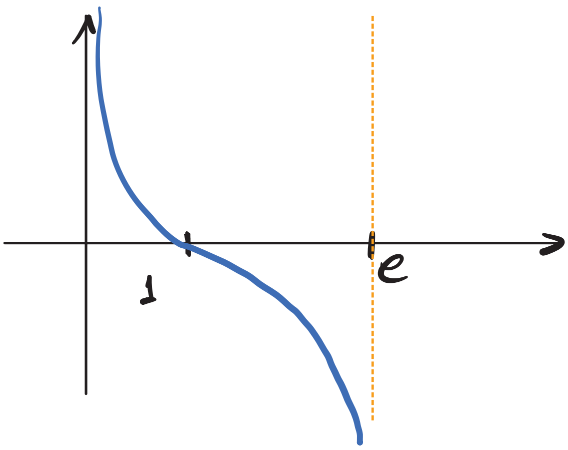
$$y'' = \frac{-(\cancel{1} - \log x - \cancel{1})}{x^2(1-\log x)^2} = \frac{\log x}{x^2(1-\log x)^2}$$

Sinais:

$0 < x < 1 \Rightarrow y'' < 0 \qquad 1 < x < e \Rightarrow y'' > 0$

$\Rightarrow x = 1$ é ponto de inflexão

$y(1) = 0$



(e) Domínio: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$y \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{1-e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1-e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^{-x}-1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{e^x}{1-e^x} = +\infty \,, \quad \lim_{x\to 0_+} \frac{e^x}{1-e^x} = -\infty$$

$$y = \frac{e^x - 1 + 1}{1-e^x} = -1 + \frac{1}{1-e^x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{e^x}{(1-e^x)^2} > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

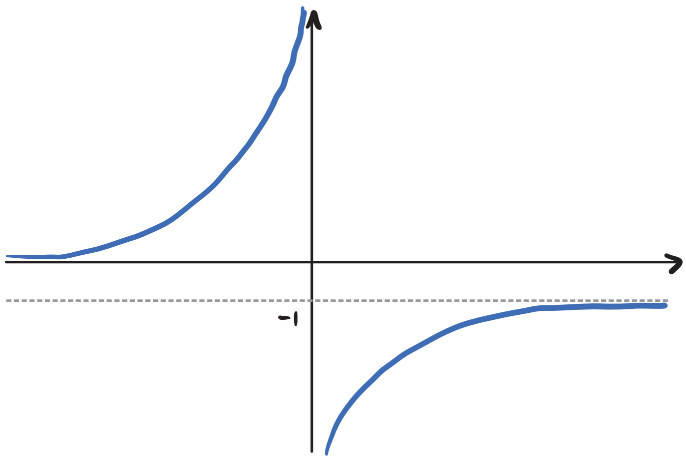
$$y'' = \frac{e^x(1-e^x)^2 + 2e^{2x}(1-e^x)}{(1-e^x)^4}$$

$$= \frac{e^x - e^{2x} + 2e^{2x}}{(1-e^x)^3} = \frac{e^x + e^{2x}}{(1-e^x)^3}$$

Sinais da 2ª derivada:

$x<0 \Rightarrow y''>0$

$x>0 \Rightarrow y''<0$



(f) $y = e^{\arctan x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad y(0) = 1$

$$y' = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y'' = \frac{\frac{e^{\arctan x}}{\cancel{1+x^2}} \cdot \cancel{(1+x^2)} - 2x\, e^{\arctan x}}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(1-2x)\, e^{\arctan x}}{(1+x^2)^2}$$

Sinal y'':

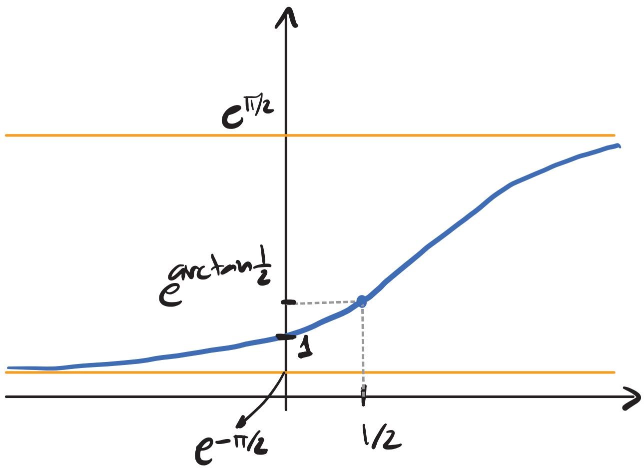
$x < 1/2 \Rightarrow y'' > 0$

$x > 1/2 \Rightarrow y'' < 0$

$x = 1/2$ é ponto de inflexão

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\arctan x} = e^{-\pi/2}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\arctan x} = e^{\pi/2}$$



(g) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+4} = 1 - \dfrac{8}{x^2+4}$

Raízes: $x = \pm 2$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = 1$$

$$y' = \frac{2x}{(x^2+4)^2}$$

Sinais y'

$x<0 \Rightarrow y'<0$

$x>0 \Rightarrow y'>0$

$$y'' = \frac{2}{(x^2+4)^2} - \frac{8x^2}{(x^2+4)^3} = \frac{4-7x^2}{(x^2+4)^3}$$

Sinais y'':

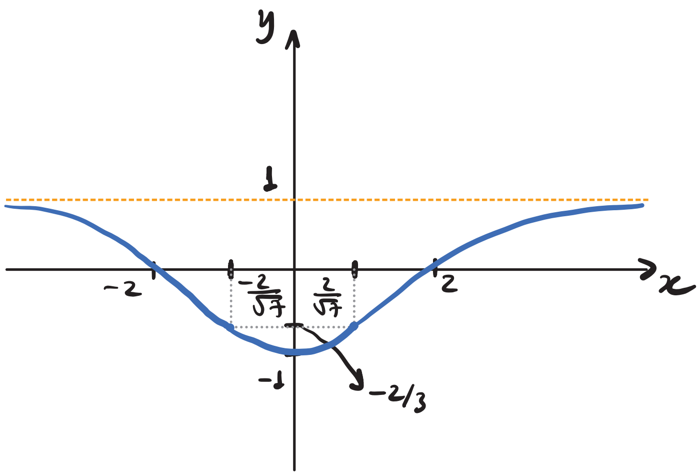
$x < -2/\sqrt{7} \Rightarrow y'' < 0$

$-2/\sqrt{7} < x < 2/\sqrt{7} \Rightarrow y'' > 0$

$x > 2/\sqrt{7} \Rightarrow y'' < 0$

$\Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{7}}$ são pontos de inflexão

$y\left(\pm\frac{2}{\sqrt{7}}\right) = \dfrac{\frac{4}{7}-4}{\frac{4}{7}+4} = \dfrac{-6}{9} = \dfrac{-2}{3}$



(h) $y = \text{sen}^3 x = 0$ se $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$y' = 3\,\text{sen}^2 x \cos x = 0$ se $x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Sinais y': (em $[0, 2\pi]$)

$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow y' > 0$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow y' < 0$

$\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow y' < 0$

$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Rightarrow y' > 0$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ é máximo local

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ é mínimo local

$x = k\pi$ é ponto crítico que não é extremo local

$$y'' = 6 \operatorname{sen} x \cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^3 x$$
$$= 6 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) - 3 \operatorname{sen}^2 x$$
$$= 6 \operatorname{sen} x - 9 \operatorname{sen}^2 x$$
$$= 9 \operatorname{sen} x \left(\frac{2}{3} - \operatorname{sen} x\right)$$

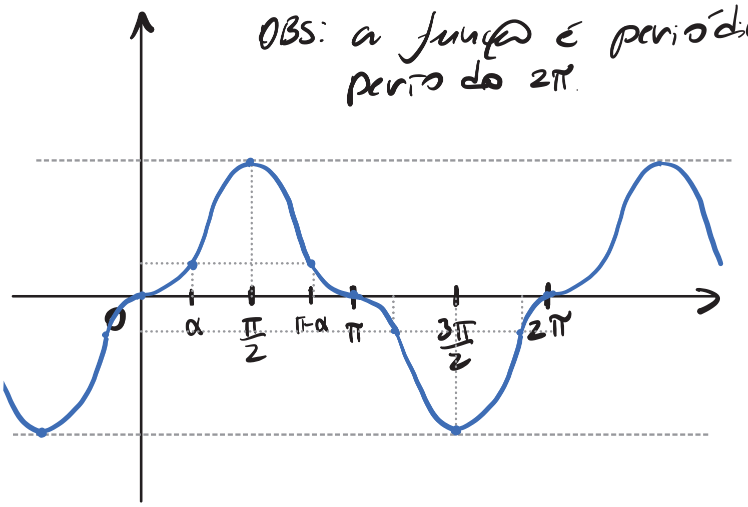
Sinais y'': (em $[0, 2\pi]$)

Seja $\alpha = \arcsen 2/3 \Rightarrow \alpha \in (0, \pi/2)$

	$9 \operatorname{sen} x$	$\frac{2}{3} - \operatorname{sen} x$	y''
$0 < x < \alpha$	+	+	+
$\alpha < x < \pi - \alpha$	+	−	−
$\pi - \alpha < x < \pi$	+	+	+
$\pi < x < 2\pi$	−	+	−

$\Rightarrow$ $x = 2k\pi$, $x = \alpha + 2k\pi$,
$x = \pi - \alpha + 2k\pi$ e $x = \pi + 2k\pi$
são pontos de inflexão

OBS: a função é periódica com período de 2π.



(i) $y = x\tan x \Rightarrow y$ é par

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Se $k \neq 0$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+k\pi_-} x\tan x = +\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+k\pi_+} x\tan x = -\infty$$

Raízes: $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$y' = \tan x + x\sec^2 x = \frac{\text{sen}\, x \cos x + x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\text{sen}\, 2x + x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}\, 2x + 2x}{2\cos^2 x}$$

Note que se $g(u) = \text{sen}\, u + u$, então

$g'(u) = \cos u + 1 \geq 0 \quad \forall u$

Daí, como $g(0) = 0$, segue que que

$g < 0$ se $x < 0$, $g > 0$ se $x > 0$.

Logo:

$$\left.\begin{array}{l} x < 0 \Rightarrow y' < 0 \\ x > 0 \Rightarrow y' > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \text{ é mínimo local } (y(0) = 0)$$

Temos $y' = \tan x + x\sec^2 x$

$$\Rightarrow y'' = 2\sec^2 x + 2\sec^2 x \cdot \tan x$$

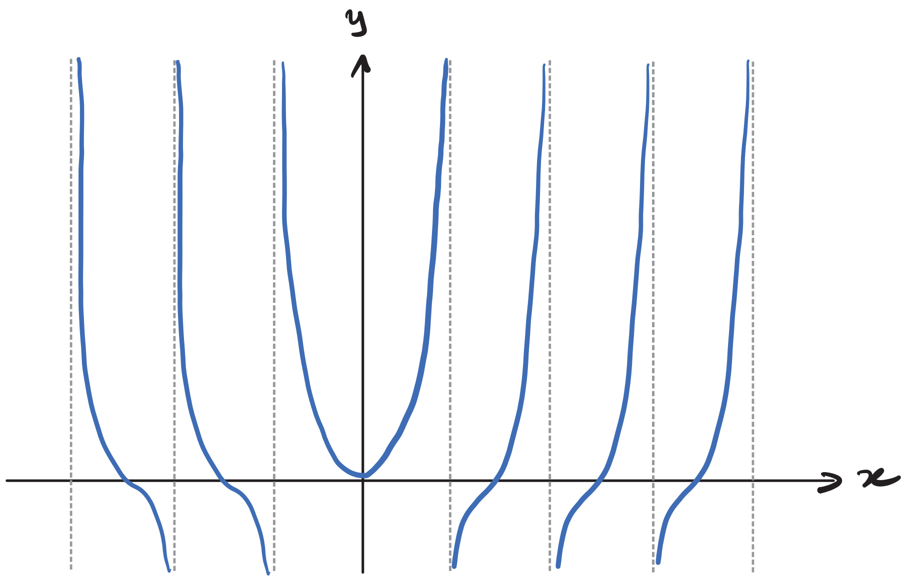
$$= 2\sec^2 x \cdot (1 + \tan x)$$

Sinal y'': (em $x > 0$: lembre que y é função par)

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow y'' < 0 \qquad (k \in \mathbb{N})$

$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow y'' > 0$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ é ponto de inflexão $(k \in \mathbb{N})$



(j) $y = \operatorname{cossec} x - 2\operatorname{sen} x$ Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$= \dfrac{\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}$

$= \dfrac{\cos x - 2 + 2\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = 0$ se

$\cos x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$,

que só tem solução para

$$\cos x = \frac{\sqrt{17} - 1}{4}$$

Assíntotas:

$\displaystyle\lim_{x \to 2k\pi_+} \frac{\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = +\infty$; $\displaystyle\lim_{x \to 2k\pi_-} \frac{\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to (2k+1)\pi_+} \frac{\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$; $\displaystyle\lim_{x \to (2k+1)\pi_-} \frac{\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = +\infty$

$$y' = -\operatorname{cossec}x \cdot \cot x - 2\cos x$$
$$= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} - 2\cos x$$
$$= -\cos x\left(\operatorname{cossec}^2 x + 2\right)$$

Sinal y':

$2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow y' < 0$
$2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \pi \Rightarrow y' > 0$
$2k\pi + \pi < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow y' > 0$
$2k\pi + \frac{3\pi}{2} < x < 2(k+1)\pi \Rightarrow y' < 0$

$\Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ é mínimo local

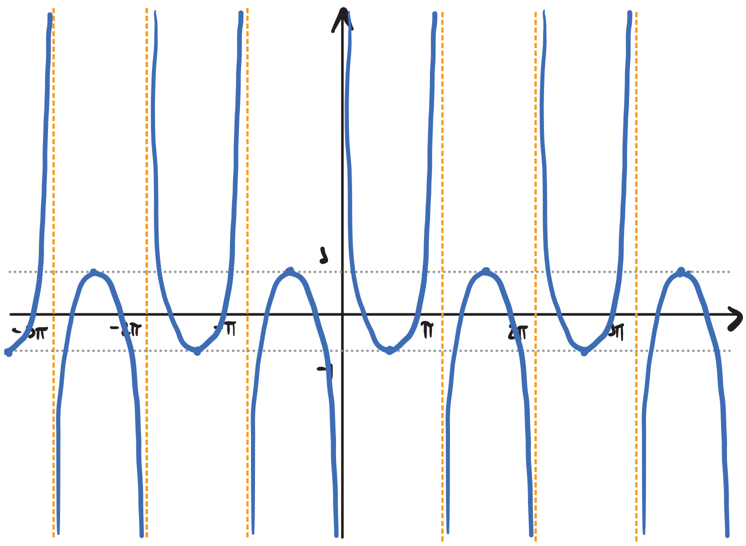
$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ é máximo local

$$\begin{cases} y(\pi/2 + 2k\pi) = -1 \\ y(3\pi/2 + 2k\pi) = 1 \end{cases}$$

$$y' = -\operatorname{cossec}x \cdot \cot x - 2\cos x$$
$$\Rightarrow y'' = \operatorname{cossec} x \cot^2 x + \operatorname{cossec}^3 x + 2\operatorname{sen}x$$
$$= \frac{\cos^2 x + 1 + 2\operatorname{sen}^4 x}{\operatorname{sen}^3 x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

Sinal y'':

$2k\pi < x < 2k\pi + \pi \Rightarrow y'' > 0$
$2k\pi + \pi < x < 2(k+1)\pi \Rightarrow y'' < 0$



(K) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$ Domínio $= \mathbb{R}$

Raízes: $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$$y' = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$$

Sinais y':

$2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow y' > 0$

$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow y' < 0$

$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi \Rightarrow y' > 0$

$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ é máximo local

$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ é mínimo local

$y\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

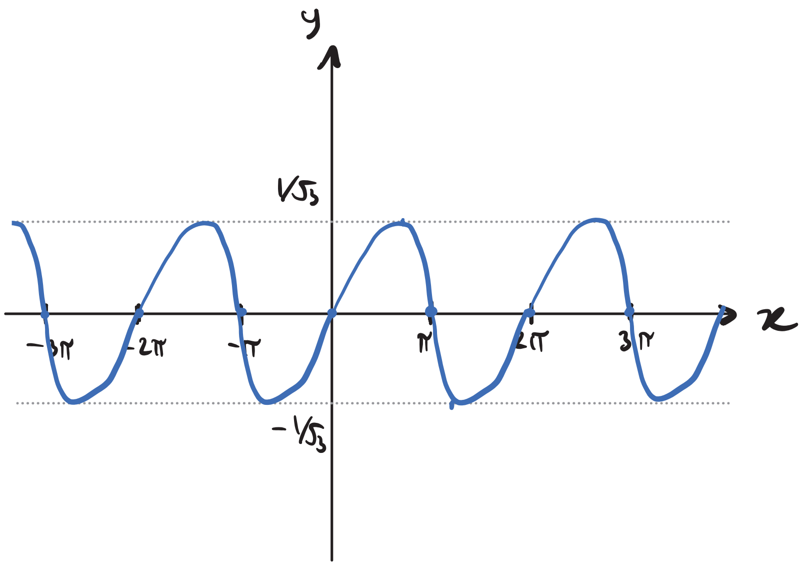
$$y'' = \frac{-2\operatorname{sen} x(2+\cos x)^2}{(2+\cos x)^4} + \frac{2(2\cos x + 1)(2+\cos x)\operatorname{sen} x}{(2+\cos x)^4}$$

$$= \frac{-4\,\text{sen}x - 2\,\text{sen}x\cos x + 4\,\text{sen}x\cos x + 2\,\text{sen}x}{(2+\cos x)^3}$$

$$= \frac{2\,\text{sen}x\cdot(\cos x - 1)}{(2+\cos x)^3}$$

Sinal y'':

$$\left.\begin{array}{l} 2k\pi < x < 2k\pi + \pi \Rightarrow y'' \leq 0 \\ 2k\pi + \pi < x < 2(k+1)\pi \Rightarrow y'' > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = k\pi \text{ são pontos de inflexão}$$



(e) $y = \arctan \dfrac{x-1}{x+1}$ Domínio: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Raízes: $x = 1$

$x = 0 \Rightarrow y(0) = -\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \operatorname{arctan}\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

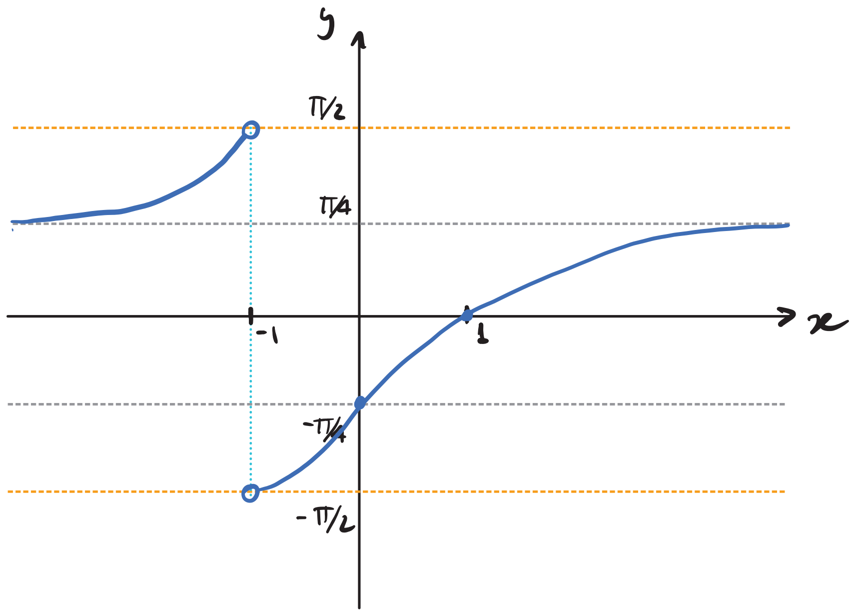
$$\lim_{x \to -1^-} \operatorname{arctan}\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2}{2x^2 + 2} = \frac{1}{x^2+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$y'' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Sinal y'':

$$\left.\begin{array}{l} x<0 \Rightarrow y''>0 \\ x>0 \Rightarrow y''<0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0 \text{ é ponto de inflexão}$$



Exercício 2. Encontre as assíntotas oblíquas às curvas:

(a) $y = x - \arctan x$. (b) $y = \sqrt{x^2+4}$

(a) $\lim_{x\to\infty} x - \arctan x - mx - b$

$= \lim_{x\to\infty} (1-m)x - \arctan x - b$

$= \lim_{x\to\infty} (1-m)x - \lim_{x\to\infty} (\arctan x + b)$

$= \lim_{x\to\infty} (1-m)x - \left(\frac{\pi}{2} + b\right) = 0$

se $m = 1$ e $b = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = x - \frac{\pi}{2} \text{ é assíntota.}}$

Analogamente

$\lim_{x\to-\infty} (1-m)x - \lim_{x\to-\infty} (\arctan x + b)$

$= \lim_{x\to-\infty} (1-m)x + \left(\frac{\pi}{2} - b\right) = 0$

se $m = 1$ e $b = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = x + \frac{\pi}{2} \text{ é assíntota.}}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4} - mx - b =$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 4 - m^2x^2}{\sqrt{x^2+4} + mx} - b$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(1-m^2)x^2}{\sqrt{x^2+4} + mx} + \frac{4}{\sqrt{x^2+4} + mx} - b$$

$= 0$

se $m = \pm 1$, $b = 0$

$\Rightarrow$ $y = \pm x$ são assíntotas

Exercício 3. Esboce o gráfico da função $y = (x^2)^x$, $y(0) = 1$. Essa função tem máximos, mínimos ou pontos de inflexão?

$y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$y'(x) = \frac{d}{dx} e^{x \log x^2} = (\log x^2 + 2)(x^2)^x$$

$= 0$ se $x^2 = \frac{1}{e^2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{e}$ $\qquad \frac{1}{e^2}$

Sinal y':

$x < -\frac{1}{e} \Rightarrow y' > 0$

$-\frac{1}{e} < x < 0 \Rightarrow y' < 0$

$0 < x < \frac{1}{e} \Rightarrow y' < 0$

$x > \frac{1}{e} \Rightarrow y' > 0$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{e}$ é máximo local $\left(y\left(-\frac{1}{e}\right) = e^{2/e}\right)$

$x = \frac{1}{e}$ é mínimo local $\left(y\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-2/e}\right)$

$$y''(x) = \left[\frac{2}{x} + (\log x^2 + 2)^2\right](x^2)^x$$

Temos $y'' > 0$ se $x > 0$.

Para $x < 0$, o sinal de y'' depende do sinal de

$$\frac{2}{x} + (\log x^2 + 2)^2$$

$$= 4(\log e|x|)^2 - \frac{2}{|x|} = 0$$

se $\quad (\log e|x|)^2 = \frac{1}{2|x|}$

$$\iff \log e|x| = \frac{1}{\sqrt{2|x|}}$$

$$\iff e|x| = e^{1/\sqrt{2|x|}}$$

Assim, passamos a analisar o comportamento de

$$h(u) = eu - e^{\frac{1}{\sqrt{2u}}} \quad (u>0)$$

Temos

$$h'(u) = e + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{u^{3/2}} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{2u}}} > 0 \quad \forall u>0$$

Logo, h é crescente em $u>0$.

Como

$$h(1/\sqrt{2}) = \frac{e}{\sqrt{2}} - e = e\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) < 0$$

e

$$h(2) = 2e - e^{\frac{1}{2}} = 2e - \sqrt{e} > 0,$$

segue do Teorema do Valor intermediário que existe uma (única, pois h é crescente) raiz $\beta > 0$ de h, com $\beta \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$.

Assim,

$x = -\beta$ é raiz de y''

Sinal y'':

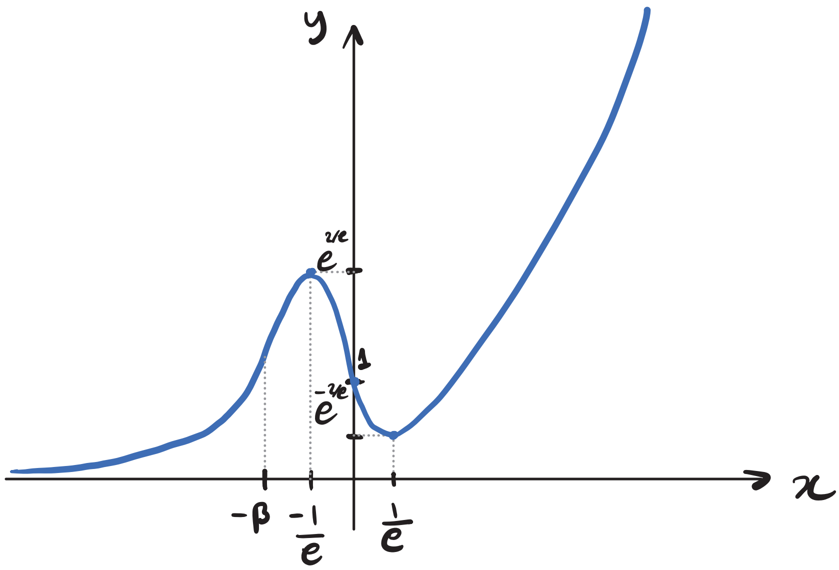
$x < -\beta \Rightarrow y'' > 0$
$-\beta < x < 0 \Rightarrow y'' < 0$
$x > 0 \Rightarrow y'' > 0$

Logo, $x = -\beta$ e $x = 0$ são pontos de inflexão.

Note que $-\beta < -\frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{e}$, bem como

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2)^x = \lim_{|x| \to \infty} |x|^{-2|x|} = 0$$

e $\lim_{x \to +\infty} x^{2x} = +\infty$.



Exercício 1. Use o método de Newton para aproximar uma raiz das seguintes equações com precisão de 6 casas decimais:

(a) $\operatorname{sen} x = x^2$ (b) $2\cos x = x^4$

(c) $2^x = 2 - x^2$ (d) $\log x = \dfrac{1}{x-3}$

(a) Existe a solução trivial $x=0$ para $\operatorname{sen} x = x^2$. Mas vamos buscar uma solução não trivial usando o método de Newton partindo de $x_0 = 1$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x - x^2) = \cos x - 2x$$

O método de Newton diz que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{\operatorname{sen}(x_n) - x_n^2}{\cos(x_n) - 2x_n}$$

Temos

$x_0 = 1$

$x_1 = 0,89139599\ldots$

$x_2 = 0,87698484\ldots$

$x_3 = \underline{0,876726}29\ldots$

$x_4 = \underline{0,876726}21\ldots$

Logo, a raiz com 6 casas decimais é

$x \cong 0,876726$

(b) $f'(x) = \frac{d}{dx}(2\cos x - x^4) = -2\operatorname{sen} x - 4x^3$

O método de Newton diz que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n + \frac{2\cos x_n - x_n^4}{2\operatorname{sen} x_n + 4x_n^3}$$

Temos

$x_0 = 1$

$x_1 = 1{,}01418360\ldots$

$x_2 = 1{,}\underline{0139576}7\ldots$

$x_3 = 1{,}\underline{0139576}1\ldots$

Logo, a raiz com 6 casas decimais é
$x \cong 1{,}013957$

(c) $f'(x) = \frac{d}{dx}(2^x + x^2 - 2) = \log 2 \cdot 2^x + 2x$

O método de Newton diz que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{2^x + x^2 - 2}{\log 2 \cdot 2^x + 2x}$$

Temos

$x_0 = 1$

$x_1 = 0,70469194\ldots$

$x_2 = 0,65491497\ldots$

$x_3 = 0,65348370\ldots$

$x_4 = 0,\underline{653482}52\ldots$

$x_5 = 0,\underline{653482}52\ldots$

Logo, a raiz com 6 casas decimais é

$x \cong 0,653482$

(d) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\log x - \frac{1}{x-3}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-3)^2}$

O método de Newton diz que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{\log x - \frac{1}{x-3}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-3)^2}}$$

Temos

$x_0 = 1$

$x_1 = 0,6$

$x_2 = 0,65116562\ldots$

$x_3 = 0,65305743\ldots$

$x_4 = 0,\underline{653059}72\ldots$

$x_5 = 0,\underline{653059}72\ldots$

Logo, a raiz com 6 casas decimais é

$x \cong 0,653059$

Exercício 2. Aplique o método de Newton à equação $1/x - a = 0$ para deduzir o seguinte algoritmo para os inversos:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

(Esse algoritmo possibilita a um computador achar os inversos sem realmente dividir). Use essa técnica para calcular 1/1,6984 com precisão de 6 casas decimais.

$$f(x) = \frac{1}{x} - a \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - a}{-\frac{1}{x_n^2}}$$

$$= x_n + x_n^2\left(\frac{1}{x_n} - a\right)$$

$$= x_n + x_n - ax_n^2$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

Daí, para $a = 1,6984$,

$x_0 = 1$

$x_1 = 0,3016$

$x_2 = 0,44870918$

$x_3 = 0,5554626$

$x_4 = 0,58690307$

$x_5 = 0,58878340$

$x_6 = 0,\underline{588789}44$

$x_7 = 0,\underline{588789}44$

Logo, $1/1,6984$ com 6 casas decimais é

$$\frac{1}{1,6984} \approx 0,588789$$

Exercício 3. Explique por que o método de Newton não funciona para encontrar as raízes de $x^3 - 3x + 6 = 0$ se o valor inicial escolhido for $x_0 = 1$.

Temos

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

O método de Newton é

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Se $x_0 = 1$, então

$$f'(x_0) = 3 \cdot 1^2 - 3 = 0.$$

Por isso não é possível encontrar x_1 começando em $x_0 = 1$, pois teríamos que dividir por zero.

Exercício 4. Explique por que o método de Newton falha quando aplicado à equação $\sqrt[3]{x} = 0$ para qualquer valor inicial $x_0 \neq 0$.

Temos

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

O método de Newton é

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

$$= x_n - 3x_n = -2x_n$$

Assim,

$$x_n = (-2)^n \cdot x_0$$

Se $x_0 \neq 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty,$$

e o método diverge. Note que a única raiz real de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é $x=0$.

Exercício 1. Encontre uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = 4x + 7$ (b) $f(x) = x(12x + 8)$ (c) $f(x) = \sqrt{2}$

(d) $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{x}$

(f) $g(t) = \dfrac{1 + t + t^2}{\sqrt{t}}$ (g) $h(\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta - \sec^2\theta$ (h) $f(x) = 2^x + 4\,\text{senh}\,x$

(i) $f(x) = 1 + 2\,\text{sen}\,x + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ (j) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{x}$ (k) $r(\theta) = \sec\theta\tan\theta - 2e^\theta$

(l) $g(v) = 2\cos v - \dfrac{3}{\sqrt{1 - v^2}}$

(a) $2x^2 + 7x$ (b) $4x^3 + 4x^2$ (c) $\sqrt{2}x$

(d) $2x^{3/2} - \frac{3}{2}x^{4/3}$ (e) $\frac{1}{5}x - 2\log x$

(f) $2t^{1/2} + \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{2}{5}t^{5/2}$

(g) $-2\cos\theta - \tan\theta$ (h) $\frac{1}{\log 2}2^x + 4\cosh x$

(i) $x - 2\cos x + 6x^{1/2}$

(j) $\frac{3}{5}x^{5/3} + \frac{2}{5}x^{5/2}$ (k) $\sec\theta - 2e^\theta$

(l) $2\,\text{sen}\,v - 3\,\text{arcsen}\,v$

Exercício 2. Encontre f:

(a) $f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x$ (b) $f''(x) = 2x + 3e^x$ (c) $f''(x) = 1/x^2$

(d) $f'''(t) = \sqrt{t} - 2\cos t$ (e) $f'''(t) = 12 + \operatorname{sen} t$ (f) $f''(x) = x^3 + \operatorname{senh} x$

(a) $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + \alpha$ (α const.)

$\Rightarrow f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + \alpha x + \beta$ (α, β const.)

(b) $f'(x) = x^2 + 3e^x + \alpha$ (α const.)

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3e^x + \alpha x + \beta$ (α, β const.)

(c) $f'(x) = -\frac{1}{x} + \alpha$ (α const)

$\Rightarrow f(x) = -\log x + \alpha x + \beta$ (α, β const.)

(d) $f''(t) = \frac{2}{3}t^{3/2} - 2\operatorname{sen} t + \alpha$ (α const.)

$\Rightarrow f'(t) = \frac{4}{15}t^{5/2} + 2\cos t + \alpha t + \beta$ (α, β const.)

$\Rightarrow f(t) = \frac{8}{105}t^{7/2} + 2\operatorname{sen} t + \frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + \gamma$
(α, β, γ const.)

(e) $f''(t) = 12t - \cos t + \alpha$ (α const.)

$\Rightarrow f'(t) = 6t^2 - \operatorname{sen} t + \alpha t + \beta$ (α, β const.)

$\Rightarrow f(t) = 2t^3 + \cos t + \frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + \gamma$ (α, β, γ
const.)

(f) $f'(x) = \frac{1}{4}x^4 + \cosh x + \alpha \quad (\alpha \text{ const.})$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{20}x^5 + \operatorname{senh} x + \alpha t + \beta \quad (\alpha, \beta \text{ const.})$

Exercício 3. Uma partícula move-se de acordo com os dados a seguir. Encontre sua função de posição:

(a) $v(t) = \operatorname{sen} t - \cos t$, $s(0) = 0$

(b) $v(t) = t^2 - 3\sqrt{t}$, $s(4) = 8$

(c) $a(t) = 2t + 1$, $s(0) = 3$, $v(0) = -2$

(d) $a(t) = 10 \operatorname{sen} t + 3 \cos t$, $s(0) = 0$, $s(2\pi) = 12$

(a) Temos $s(t) = v'(t)$

$\Rightarrow s(t) = -\cos t - \operatorname{sen} t + C$ (c const.)

$\Rightarrow s(0) = -1 + C = 0 \Rightarrow C = 1$

$\Rightarrow s(t) = -\cos t - \operatorname{sen} t + 1$

(b) $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^{3/2} + C$

$\Rightarrow s(4) = \frac{64}{3} - 16 + C = \frac{64-48}{3} + C$

$= \frac{16}{3} + C = 8 \Rightarrow C = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^{3/2} + \frac{8}{3}$

(c) $a(t) = s''(t)$

$\Rightarrow s'(t) = t^2 + t + C = v(t)$

$v(0) = C = -2 \Rightarrow s'(t) = t^2 + t - 2$

$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + K$, $s(0) = K = 3$

$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$

(d) $s''(t) = a(t)$

$\Rightarrow s'(t) = -10\cos t + 3\,\text{sen}\,t + C$

$\Rightarrow s(t) = -10\,\text{sen}\,t - 3\cos t + Ct + K$

$s(0) = -3 + K = 0 \Rightarrow K = 3$

$s(2\pi) = -3 + 2\pi C + 3 = 12 \Rightarrow C = \dfrac{6}{\pi}$

$\Rightarrow s(t) = -10\,\text{sen}\,t - 3\cos t + \dfrac{6}{\pi}t + 3$

Exercício 4. Um carro está viajando a 80 km/h quando seu condutor freia completamente, produzindo uma desaceleração constante de 7 m/s^2. Qual a distância percorrida antes do carro parar?

Primeiramente, note que

$$80 \text{ km/h} = \frac{80}{3,6} \text{ m/s} = \frac{200}{9} \text{ m/s}$$

O movimento de frenagem iniciado no instante $t=0$ com velocidade inicial $v(0) = \frac{200}{9}$ tem aceleração constante $a = -7$. Logo, considerando $s(0) = 0$, temos

$$v(t) = -7t + v(0) = -7t + \frac{200}{9}$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{7}{2}t^2 + \frac{200}{9}t$$

O carro para quando $v(t) = 0$

$$\Rightarrow v(t) = -7t + \frac{200}{9} = 0 \Rightarrow t = \frac{200}{7 \cdot 9}$$

Logo, a distância percorrida é

$$s(t) = -\frac{\cancel{7}}{2} \cdot \frac{200^2}{7^{\cancel{2}} \cdot 9^2} + \frac{200}{9} \cdot \frac{200}{7 \cdot 9}$$

$$= \frac{200^2}{2 \cdot 7 \cdot 9^2} \cong 35,27 \text{ m}$$

Exercício 5. Um carro é freado com uma desaceleração constante de 5 m/s^2, produzindo marcas de frenagem meindo 60 m antes de parar completamente. Quão rápido o carro estava viajando quando o freio foi acionado pela primeira vez?

A função de movimento do carro do início da frenagem em $t=0$ com $s(0)=0$ até a parada em $t=t^*$, com $s(t^*)=60$, satisfaz

$$s''(t) = -5$$

$$\Rightarrow s'(t) = -5t + v_0,$$

com $s'(t^*) = -5t^* + v_0 = 0$

$$\Rightarrow t^* = \frac{v_0}{5}$$

Logo, lembrando que $s(0)=0$,

$$s(t) = -\frac{5}{2}t^2 + v_0 t$$

Temos

$$s(t^*) = 60$$

$$\Rightarrow -\frac{\cancel{5}}{2}\frac{v_0^2}{5^{\cancel{2}}} + \frac{v_0^2}{5} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{5} = 60$$

$$\Rightarrow v_0^2 = 600 \Rightarrow v_0 = 10\sqrt{6}\ m/s$$

$$\approx 88,18\ Km/h$$