Estratégia Concursos

Aula 18

BNB - Raciocínio Lógico e Quantitativo - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

07 de Julho de 2023

Índice

GEOMETRIA ESPACIAL

Noções Introdutórias

Poliedros

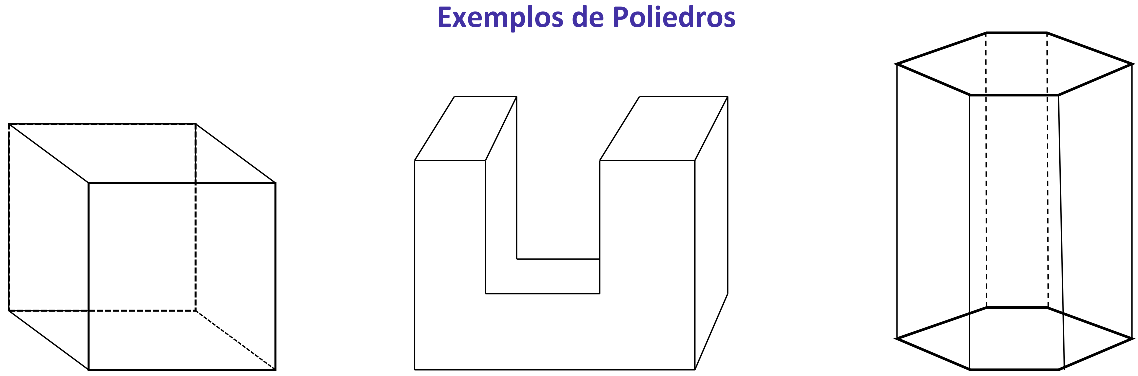
O primeiro passo na Geometria Espacial é **entender o que é um poliedro**. Para isso, é preciso que você tenha feito a aula de Geometria Plana, pois usaremos muitos conceitos vistos lá. Vamos lá!

NOVIDADE!

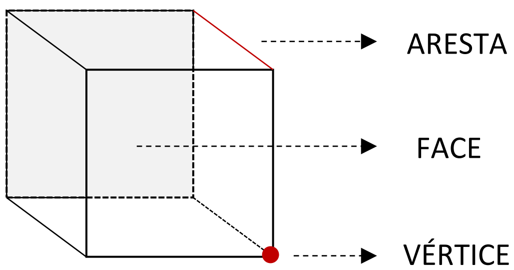
Poliedro é um sólido geométrico limitado por uma quantidade finita de polígonos. Além disso, é importante ressaltar que cada um desses polígonos divide um lado com um outro, vizinho a ele.

Professor, é o quê?!! Calma, aluno! Quando falamos assim, realmente parece um pouco complicado. No entanto, **vamos visualizar alguns poliedros**.

Exemplos de Poliedros



Talvez o poliedro mais conhecido seja **o cubo** (que é o primeiro da esquerda na figura acima). Note que o cubo tem seis faces e cada uma dessas faces é um **quadrado**. Aproveitando esse cubo, vamos estudar alguns elementos que estão presentes nos poliedros de modo geral.



- A **face** normalmente é conhecida como o "lado" do poliedro. Uma observação importante é que ela sempre será um polígono.

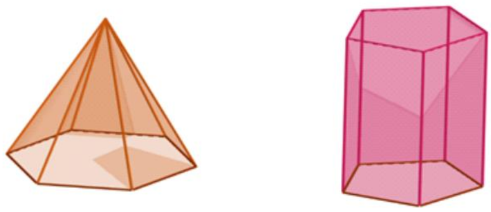
- A **aresta** é a intersecção de duas dessas faces. Ademais, também podemos defini-la como sendo o segmento de reta que une dois vértices.

- O **vértice** é o ponto de encontro das arestas. Ele forma um "cantinho" no referido sólido geométrico.

Esclarecido isso, podemos notar que **o cubo tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices**. Vocês também chegaram nesses números?!

HORA DE PRATICAR!

(PREF. AREIAL/2021) As figuras representam uma pirâmide de base hexagonal e um prisma de base pentagonal. Analise as afirmações e coloque (V) para as verdadeiras e (F) para as falsas.



( ) Somando as arestas da pirâmide e do prisma obtemos 27 arestas.
( ) O prisma possui 2 vértices a mais que a pirâmide.
( ) O prisma possui 10 arestas.
( ) A pirâmide e o prisma possuem a mesma quantidade de faces.

Marque a alternativa que contém a sequência CORRETA de preenchimento dos parênteses.
A) V, F, F e V.
B) V, F, V e F.
C) F, V, F e F.
D) V, V, F e V.
E) F, V, V e F.

Comentários:
(V) Somando as arestas da pirâmide e do prisma obtemos 27 arestas.
Lembre-se que uma **aresta é o segmento de reta que liga dois vértices**. Na pirâmide de base hexagonal que o enunciado trouxe, temos **12 arestas**. Por sua vez, no prisma de base pentagonal teremos mais **15 arestas**. Com isso, realmente **a soma das quantidades de arestas será 27**.

(F) O prisma possui 2 vértices a mais que a pirâmide.
O vértice é o ponto de encontro de duas arestas, ele forma um "canto" na nossa figura. Na pirâmide, perceba que temos 6 vértices na base e mais um no topo. Com isso, **contamos sete vértice**. Já no prisma, temos 5 vértices em cada base (superior e inferior). Com isso, totalizamos **10 vértices no prisma analisado**. Assim, note que **o prisma possui 3 vértices (e não 2) a mais que a pirâmide**.

(F) O prisma possui 10 arestas.

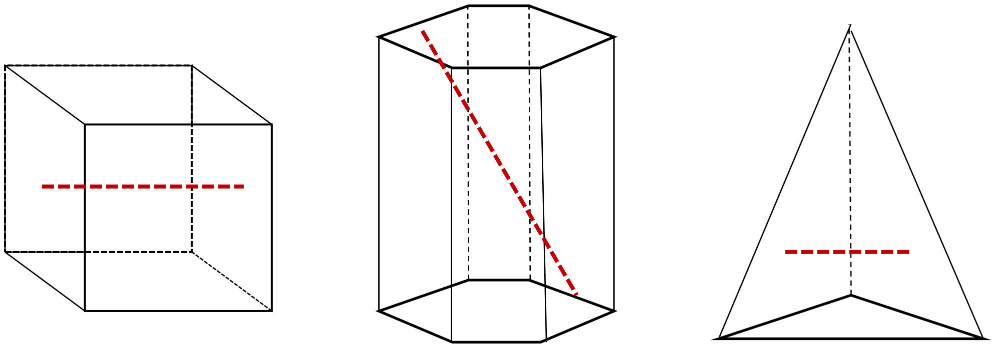
Como já havíamos contado na primeira afirmação, **o prisma possui 15 arestas e não 10**.

(V) A pirâmide e o prisma possuem a mesma quantidade de faces.
A face é o que chamamos de "lado" do poliedro. E é sempre um polígono (triângulo, retângulo, pentágono, por exemplo). No prisma que o enunciado trouxe, temos 5 faces laterais e 2 bases (que também contam como faces). Com isso, **são 7 faces no prisma**. Por sua vez, na pirâmide, temos 6 faces laterais e uma base (como falamos, também é uma face), **totalizando sete faces também**. Logo, afirmação correta.

Gabarito: LETRA A.

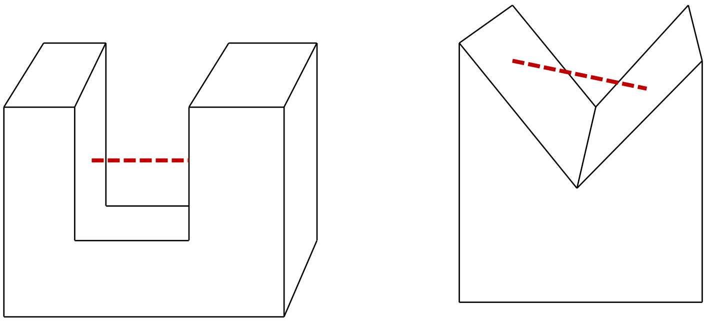
Agora, quero contar para vocês que podemos classificar os poliedros em convexos ou não convexos.

- **Poliedro Convexo:** todo poliedro em que qualquer segmento de reta com extremidades nas faces está inteiramente contido dentro do poliedro. Para melhor entendimento, veja alguns poliedros convexos.



Note que as retas que traçamos unindo pontos nas faces ficam totalmente dentro do poliedro!! Quando isso acontece para qualquer segmento de reta com essas características, o poliedro é convexo!

- **Poliedro Não Convexo (ou côncavo):** qualquer poliedro que não seja convexo.



Nosso estudo se concentrará **nos poliedros convexos**.

Relação de Euler

A relação de Euler envolve a quantidade de vértices, faces e arestas em um **poliedro convexo**.

$$\boldsymbol{V + F = A + 2}$$

- V é o **número de vértices**;
- F é **o número de faces**;

- A é o **número de arestas**.

Por exemplo, lembra quando contamos **o número de vértices, faces e arestas do cubo**? Nós encontramos:

$F = 6;$
$A = 12;$
$V = 8;$

Substituindo na expressão, temos que:

$$8 + 6 = 12 + 2 \quad \rightarrow \quad 14 = 14$$

Note que a relação bate certinho para o cubo. Assim, com o intuito de entender como essa relação pode ser cobrada, vamos ver uma questão bem atual que exigiu o conhecimento da fórmula acima.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. CONCEIÇÃO DE MACABÚ/2020) Os alunos do curso de Licenciatura em Matemática construíram durante a aula de Geometria, um poliedro de isopor. Ao analisarem melhor a figura, uma aluna verificou que o número de vértices é o quádruplo do número de faces acrescido de dois. Um outro aluno verificou que número de arestas é igual ao triplo do número de faces acrescido de doze. Com essas duas observações feitas pelos alunos, esse poliedro possui quantos vértices?
A) 6.
B) 26.
C) 30.
D) 32.

Comentários:
Pessoal, a questão fala de número de vértices, faces e arestas. Qual a expressão que relaciona toda essas três quantidades? É a **relação de Euler**.

$$V + F = A + 2 \quad (1)$$

Agora vamos ver quais as observações que os alunos fizeram.

- **O número de vértices é o quádruplo do número de faces acrescido de dois**.

$$V = 4F + 2 \quad (2)$$

- **O número de arestas é igual ao triplo do número de faces acrescido de doze**.

$$A = 3F + 12 \quad (3)$$

Vamos substituir (2) e (3) em (1).

$$(4F + 2) + F = (3F + 12) + 2 \quad \rightarrow \quad 5F - 3F = 12 \quad \rightarrow \quad 2F = 12 \quad \rightarrow \quad F = 6$$

Logo, **o número de faces desse poliedro de isopor é 6**. Podemos usar esse resultado em (2) e determinar o número de vértices que a questão pede.

$$V = 4 \cdot 6 + 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{V = 26}$$

Gabarito: LETRA B.

Poliedros de Platão

Os poliedros de Platão são poliedros que obedecem a **três condições básicas**:

(i) Possuem o mesmo número de arestas em cada face;
(ii) De cada vértice partem a mesma quantidade de arestas;
(iii) Obedecem a relação de Euler.

Só existem **cinco classes** de poliedros que obedecem a todas essas condições: **o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.**

Tetraedro	4 faces
Hexaedro	6 faces
Octaedro	8 faces
Dodecaedro	12 faces
Icosaedro	20 faces

Poliedros Regulares

Poliedros regulares são poliedros que também obedecem a algumas condições, quais sejam:

(i) **suas faces são polígonos regulares**;
(ii) de cada vértice **partem o mesmo número de arestas;**
(iii) são poliedros convexos.

Uma conclusão importante das condições acima é que **todo poliedro regular é um poliedro de Platão**, mas **nem todo poliedro de Platão é um poliedro regular**. Vamos detalhar.

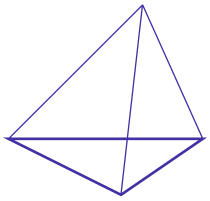
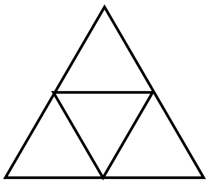
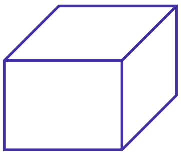
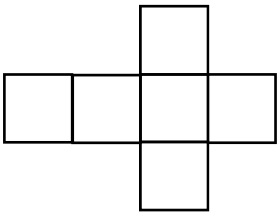
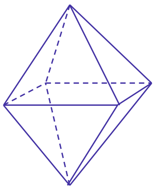
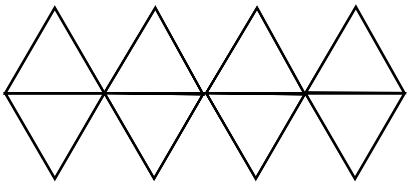
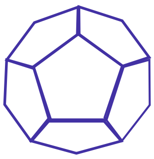
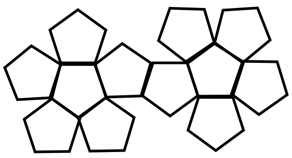
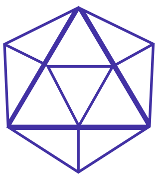
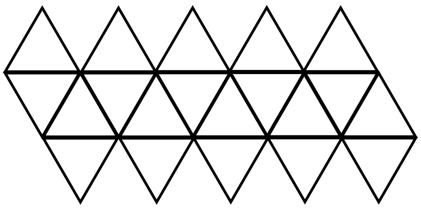
(i) Note que se as faces de um poliedro regular são polígonos regulares, então **toda face tem a mesma quantidade de arestas**, o que satisfaz a primeira condição que vimos para o Poliedro de Platão;

(ii) A segunda condição para ser um poliedro regular é exatamente a mesma para ser um poliedro de Platão.

(iii) Por sua vez, temos que para ser um poliedro regular, esse poliedro deve ser convexo. Vimos que **a relação de Euler vale para todo poliedro convexo**. Portanto, a terceira e última condição para o poliedro ser um poliedro de Platão também está satisfeita.

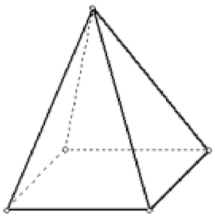
Vamos conhecer os Poliedros Regulares, eles também são cinco!

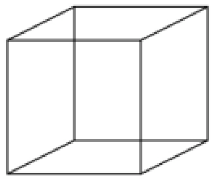
ESQUEMATIZANDO

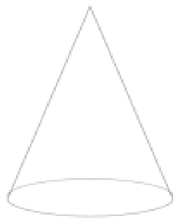
Poliedros Regulares		
Poliedro	Planificação	Informações
 **Tetraedro Regular**		O tetraedro regular é uma pirâmide em que todas as suas 4 faces são triângulos equiláteros. $V = 4$ $A = 6$
 **Hexaedro Regular**		O hexaedro regular é o "nome científico" do famoso cubo. Note que todas suas 6 faces são quadradas. $V = 8$ $A = 12$
 **Octaedro Regular**		O octaedro regular também é chamado de bipirâmide quadrada. As suas 8 faces são triângulos equiláteros. $V = 6$ $A = 12$
 **Dodecaedro Regular**		O dodecaedro regular é formado por 12 faces! Cada uma das faces é um pentágono regular. $V = 20$ $A = 30$
 **Icosaedro Regular**		O icosaedro regular é formado por 20 faces! Cada uma das faces é um triângulo equilátero. $V = 12$ $A = 30$

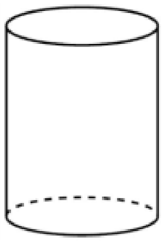
HORA DE PRATICAR!

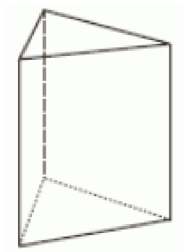
(PREF. MAIRINQUE/2011) Um poliedro é considerado regular se todas as suas faces forem formadas por polígonos regulares idênticos e também se todos os seus vértices forem o ponto de encontro do mesmo número de arestas. Assinale a alternativa que apresenta um poliedro regular.

A)  pirâmide.

B)  cubo.

C)  cone.

D)  cilindro.

E)  prisma triangular.

Comentários:

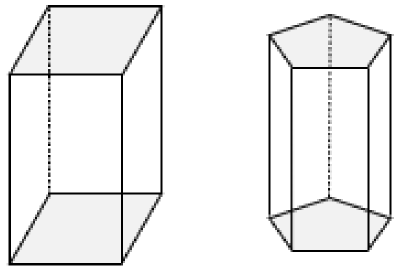
Questão apenas para identificarmos o que acabamos de ver! Conforme vimos na lista anterior, **o cubo (hexaedro regular) é um poliedro regular**. Podemos marcar a alternativa B de cara.

O cilindro e o cone <u>não são poliedros</u>. Eles são "corpos redondos" que estudaremos em breve. Já a pirâmide e o prisma triangular das alternativas A e E não se encaixam na definição de poliedro regular. Para isso, basta observarmos que suas faces **<u>não</u> são polígonos regulares**.

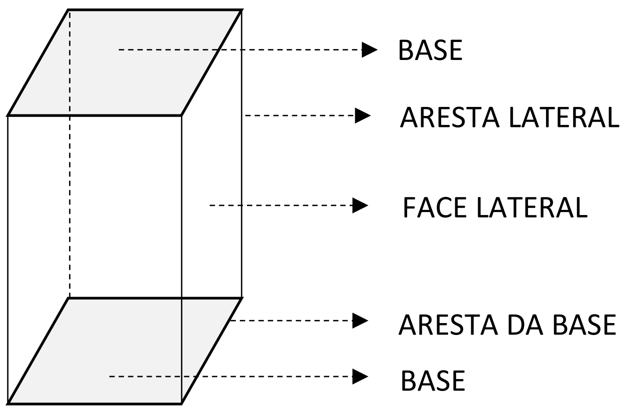
Gabarito: LETRA B.

Prisma

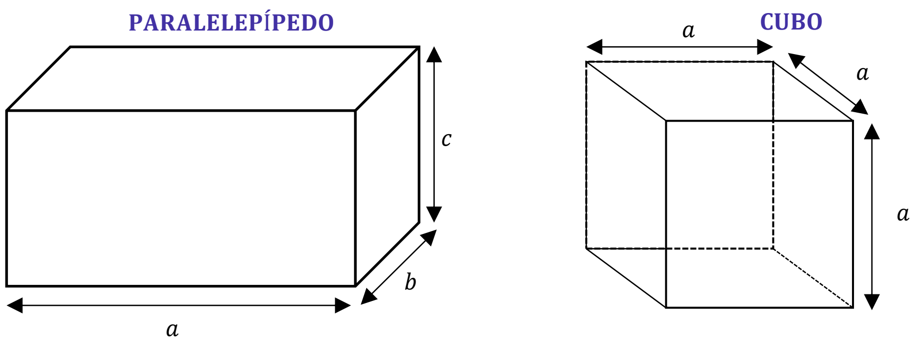
O prisma é um poliedro convexo que possui **duas bases paralelas distintas** (que são polígonos). **As faces laterais são paralelogramos**. Vamos conhecer alguns.



O prisma da esquerda é chamado de **prisma quadrangular**, pois sua base é um quadrilátero. Por sua vez, o prisma da direita é um **prisma pentagonal**, pois sua base é um pentágono. Vamos conhecer seus elementos.



Todos os prismas terão os elementos acima. *Especial atenção nas duas bases paralelas, ok?!* Dito isso, quero apresentar para dois prismas bem famosos.



Esses dois sólidos geométricos **são os mais comuns em prova**!! Todos dois são prismas quadrangulares. A principal diferença entre os dois é que, no cubo, **todas as arestas possuem a mesma medida**. Normalmente, as questões vão nos perguntar sobre áreas e volumes. Vamos falar sobre isso!

Áreas

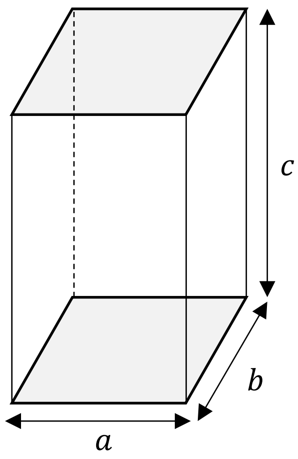
A **área total da superfície de um prisma** é calculada por meio da seguinte soma:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

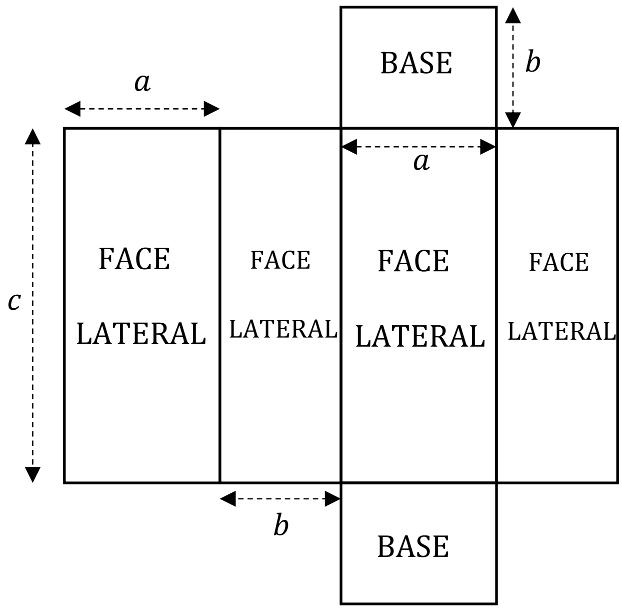
Observe que a área total é composta de duas parcelas. A área lateral e a área da base.

- **Área Lateral ($A_{lateral}$):** soma das áreas das faces laterais. No prisma, as faces laterais são paralelogramos (mais especificamente, serão retângulos quando os prismas forem retos).

- **Área da Base (A_{base}):** É a área do polígono que está na base. Se a base for um quadrado, será a área do quadrado, se for um pentágono, será a área do pentágono, etc.



No paralelepípedo acima, vemos que **as bases são retângulos de lados "a" e "b"**, enquanto **as faces são dois retângulos de lados "b" e "c"** e **outros dois de lados "a" e "c".** Podemos visualizar isso com a planificação.



- Cálculo da Área Lateral:

Temos quatro faces laterais. Nos prismas retos, elas serão retângulos. Aprendemos na aula de Geometria Plana que a área de retângulos é calculada pelo produto de suas duas dimensões. Assim,

$$A_{lateral} = ac + bc + ac + bc \quad \rightarrow \quad A_{lateral} = 2ac + 2bc$$

- Cálculo da Área da Base:

A base é um retângulo de lados "a" e "b". Assim,

$$A_{base} = ab$$

- Cálculo da Área Total:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

Vamos substituir o que achamos.

$$A_{total} = 2ac + 2bc + 2ab$$

$$\boldsymbol{A_{total} = 2 \cdot (ac + bc + ab)}$$

Essa é **a área superficial de um paralelepípedo**. Ela aparece em provas com uma certa frequência! Nos cubos, todas as arestas são iguais a "a", podemos fazer o seguinte:

$$A_{total} = 2 \cdot (a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) \quad \rightarrow \quad A_{total} = 2 \cdot (a^2 + a^2 + a^2) \quad \rightarrow \quad A_{total} = 2 \cdot 3a^2$$

$$\boldsymbol{A_{total} = 6a^2}$$

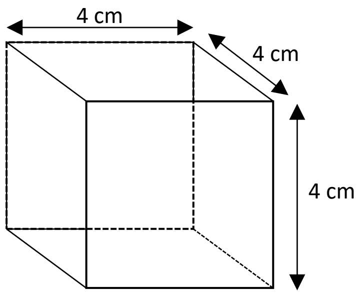
Essa é **a área superficial de um cubo**! Vamos praticar um pouco essa teoria.

(PREF. FRECHEIRINHA/2021) Sabendo que as arestas de um hexaedro regular medem 4 cm cada uma, determine a área total da superfície.

A) 96 cm².
B) 60 cm².
C) 24 cm².
D) 36 cm².
E) 48 cm².

Comentários:

Um **hexaedro regular é um nome bonito para "cubo"**. Isso mesmo, hexaedro regular é um cubo.



Um **cubo possui 6 faces**. Cada face é exatamente **um quadrado de arestas iguais a 4 cm**. Assim, para calcular a área total da superfície, basta **calcular a área do quadrado e multiplicá-la por 6**. Da aula de Geometria Plana, a área de um quadrado é dada por:

$$A_Q = a^2$$

Substituindo o valor da aresta $a = 4$:

$$A_Q = 4^2 \quad \rightarrow \quad A_Q = 16\ cm^2$$

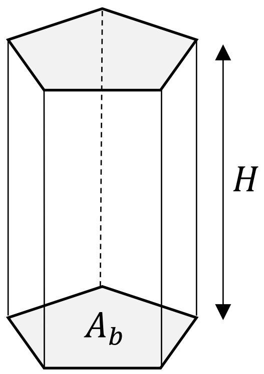
Essa é a área de uma das faces. **O cubo tem 6**. Assim,

$$A_{Total} = 6 \cdot A_Q \quad \rightarrow \quad A_{total} = 6 \cdot 16 \quad \rightarrow \quad A_{total} = 96\ cm^2$$

Gabarito: LETRA A.

Volume

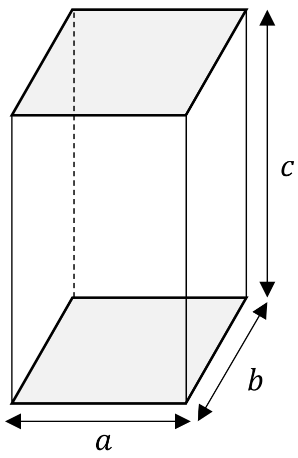
Quando calculamos o volume de algum sólido, estamos **quantificando o espaço que está sendo ocupado por ele**. Considere o prisma abaixo, como exemplo,



Para calcular o volume de prismas, usamos a seguinte expressão:

$$\boldsymbol{V = A_b H}$$

Em que $\boldsymbol{A_b}$ **é a área da base** e $\boldsymbol{H}$ **é a altura**. No caso do paralelepípedo, vamos ter o seguinte:



A base é um retângulo de lados "a" e "b". Assim, sua área é dada por: $A_b = ab$. Por sua vez, temos **uma altura de medida "c"**. O volume fica:

$$\boldsymbol{V = abc}$$

Esse é o volume de um paralelepípedo! Cai demais em questões! Ele é dado pelo produto das três dimensões! No caso do cubo, lembre-se que todas as arestas medem "a". Logo,

$$V = a \cdot a \cdot a$$

$$\boldsymbol{V = a^3}$$

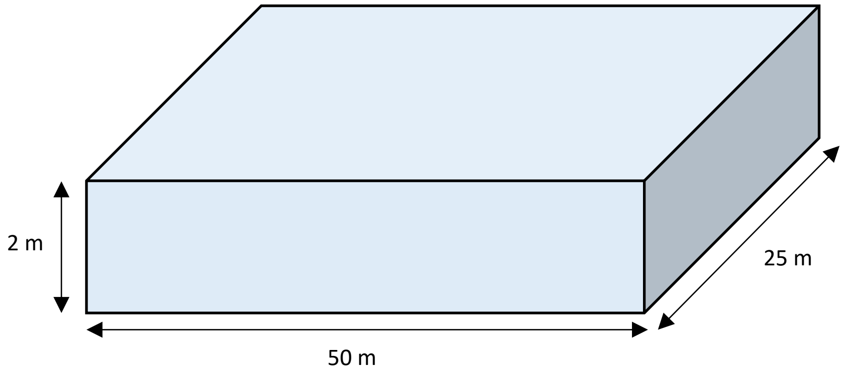
Esse é a fórmula para calcularmos o volume de um cubo.

HORA DE PRATICAR!

(PM-SP/2021) Estudos feitos em 2018 pelo Instituto Trata Brasil, a partir de dados do Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento (Snis), mostrou que cerca de 38% da água potável que passa por sistemas de distribuição no Brasil é desperdiçada em vazamentos durante o processo de produção, tratamento e distribuição. Também entram nessa conta desvios ilegais e furtos de água. Esse volume de água equivale a 7 mil piscinas olímpicas de água potável jogadas fora todos os dias.
Considerando que piscinas olímpicas precisam ter um comprimento de 50 metros, uma largura de 25 metros e profundidade mínima de 2 metros, o volume de água potável desperdiçada diariamente nos sistemas de distribuição no Brasil, segundo o estudo citado anteriormente, é de, no mínimo,
A) 6,65 bilhões de litros.
B) 2,5 milhões de litros.
C) 17,5 bilhões de litros.
D) 17,5 milhões de litros.
E) 6,65 milhões de litros.

Comentários:

A piscina olímpica tem a forma de um paralelepípedo com dimensões informadas pelo enunciado:



Vimos que o volume de um paralelepípedo é dado pelo **produto de suas três dimensões**. Assim,

$$V = 2 \cdot 50 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad V = 2500\ m^3$$

Observe que a quantidade de água desperdiçada equivale a **7 mil piscinas dessas**.

$$V_{água} = 7000V \quad \rightarrow \quad V_{água} = 7000 \cdot 2500 \quad \rightarrow \quad V_{água} = 17.500.000\ m^3$$

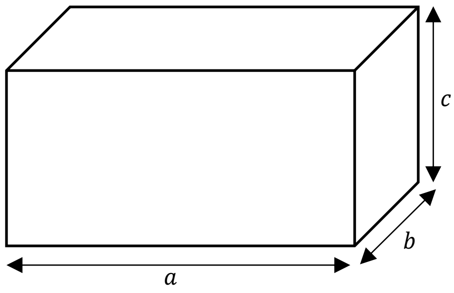
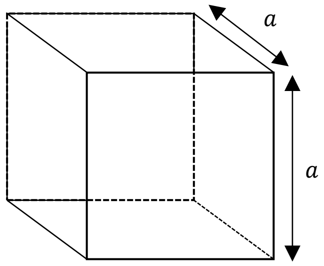
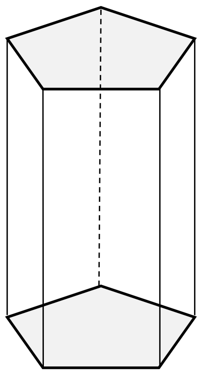
Observe que **o volume nas alternativas está em litros, mas encontramos em metros cúbicos**. Assim, para transformar metros cúbicos em litros, devemos **multiplicar o resultado por 1000**.

$$V_{água} = 17.500.000 \cdot 1000 \quad \rightarrow \quad V_{água} = 17.500.000.000\ L$$

Assim, a quantidade de água desperdiçada é de **17,5 bilhões de litros**.

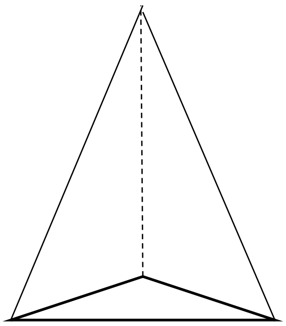
Gabarito: LETRA C.

RESUMINDO

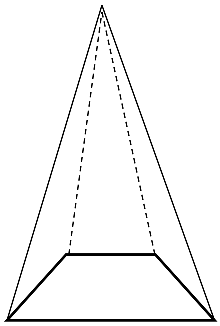
Nome	Prisma	Área Superficial e Volume
Paralelepípedo		$A_{total} = 2 \cdot (ac + bc + ab)$ $V = abc$
Cubo		$A_{total} = 6a^2$ $V = a^3$
Prisma Qualquer		$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$ $V = A_b H$

Pirâmide

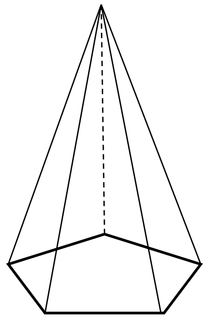
Chegou a vez de falarmos das pirâmides! **Elas são poliedros**! Aqui, faces laterais serão triângulos!! Observe algumas.



PIRÂMIDE TRIANGULAR



PIRÂMIDE QUADRANGULAR



PIRÂMIDE PENTAGONAL

Note que nas pirâmides, **vamos ter uma única base**. Ademais, algumas arestas que partem da base se encontram em um ponto superior, que vamos chamar de **vértice da pirâmide**.

Áreas

A área superficial total de uma pirâmide é calculada de maneira muito semelhante à que vimos anteriormente para prismas. A diferença é que **não multiplicaremos a área da base por 2**, afinal, **aqui só temos uma única base mesmo**.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

Volume

Por sua vez, o volume de uma pirâmide é calculado por meio da seguinte expressão:

$$V = \frac{A_b H}{3}$$

Em que **A_b é a área da base** e **H é a altura**. Uma observação importante é que **há a divisão por 3**, fato que não acontece para os prismas.

(PREF. PERUÍBE/2019) Uma pirâmide de base retangular e altura 12 cm tem volume de 100 cm³. A área da base dessa pirâmide, em cm², é
A) 25.
B) 26.
C) 30.
D) 36.
E) 50.

Comentários:
Questão para **aplicarmos a fórmula que acabamos de ver**. O volume de uma pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

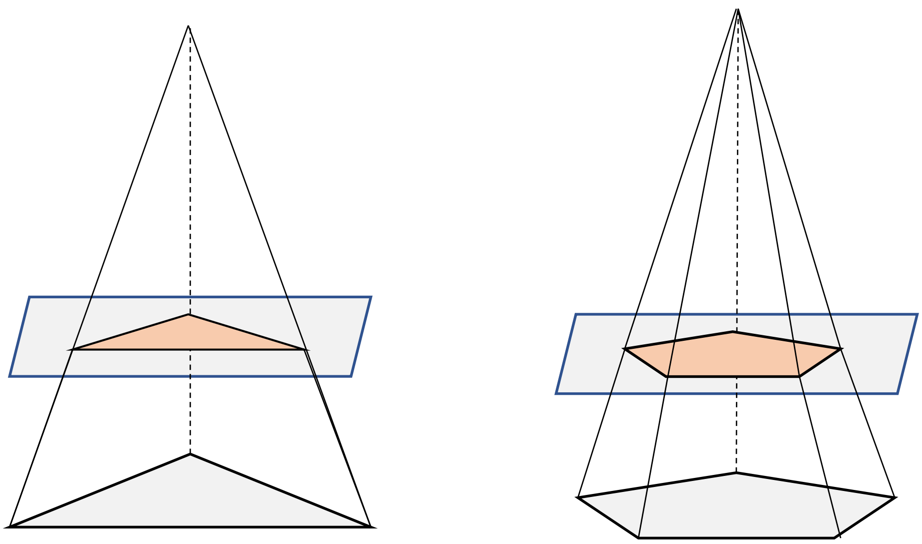
Como **o enunciado disse que $\mathbf{V = 100\ cm^3}$ e $\mathbf{h = 12\ cm}$**, vamos substituir esses valores na fórmula acima para determinar a área da base A_b.

$$100 = \frac{\mathrm{A_b} \cdot 12}{3} \quad \rightarrow \quad 4 \cdot \mathrm{A_b} = 100 \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_b} = 25\ \mathrm{cm}^2$$

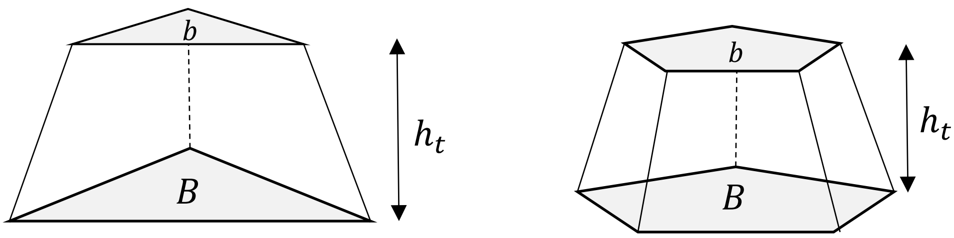
Gabarito: LETRA A.

Tronco de Pirâmide

Grosso modo, o tronco de pirâmide é um pedaço dela. Observe a situação:



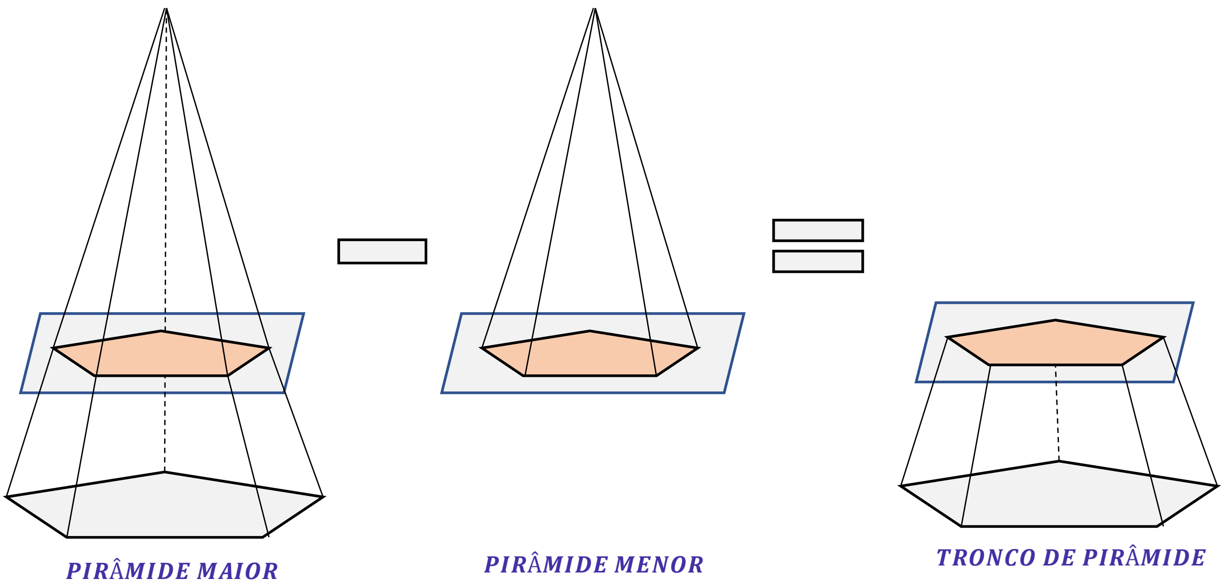
Temos um plano paralelo à base seccionando as pirâmides. Esse plano divide a pirâmide maior em duas partes: **uma pirâmide menor, na parte superior**, e **um tronco de pirâmide, na parte inferior**. Vou separar apenas os troncos para podermos analisá-los melhor.



h_t é a altura do tronco, enquanto **B representa a área da base <u>maior</u>** e **b, a área da base <u>menor</u>**.

O volume desses troncos pode ser calculado de duas formas.

Para chegarmos na primeira forma, é importante entendermos o seguinte:



Assim, veja que podemos calcular o volume de um tronco pegando **o volume da pirâmide maior e subtraindo o volume da pirâmide menor**. Assim,

$$V_{tronco} = V_{pirâmide\ maior} - V_{pirâmide\ menor}$$

A segunda forma de calcularmos o volume de um tronco de pirâmide é aplicando a fórmula abaixo:

$$V = \frac{h_T}{3}\left(B + \sqrt{Bb} + b\right)$$

Relembrando: **h_t é a altura do tronco**, enquanto **B representa a área da base maior** e **b, a área da base menor**.

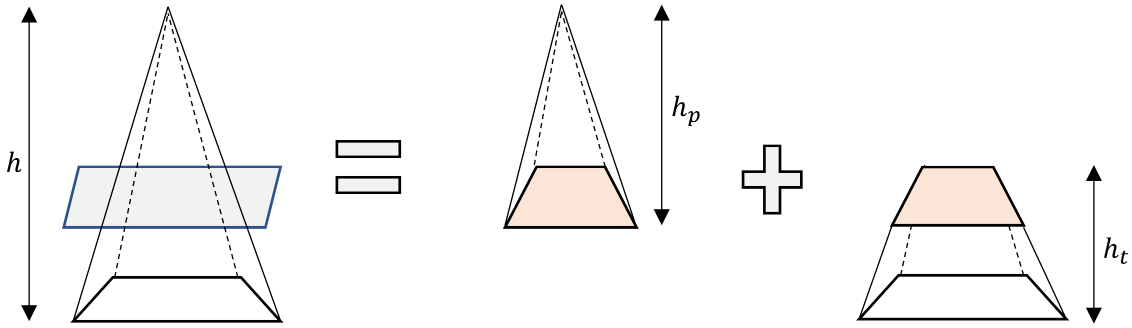
Para nosso curso, **não há custo benefício em demonstrar a expressão acima**. Ela cai muito raramente e em concursos específicos da área da matemática. De qualquer forma, na maioria das vezes poderemos usar a primeira alternativa.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. SOLÂNEA/2019 - ADAPTADA) Uma pirâmide regular de base quadrada com h cm de altura é seccionada por um plano paralelo à base, determinando dois sólidos: uma pirâmide menor e um tronco de pirâmide. O volume do tronco de pirâmide é sete vezes o volume da pirâmide menor. Pode-se afirmar que a altura do tronco é: (use: B/b = 4)

A) h/5 cm
B) h/3 cm
C) h/6 cm
D) h/4 cm
E) h/2 cm

Comentários:
Temos a seguinte situação:



O enunciado disse que **o volume do tronco de pirâmide é sete vezes o volume da pirâmide menor**. Assim,

$$V_{tronco} = 7 \cdot V_{pirâmide\ menor} \qquad (1)$$

Ademais, sabemos que:

$$V_{tronco} = V_{piramide\ maior} - V_{piramide\ menor} \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$7 \cdot V_{pirâmide\ menor} = V_{piramide\ maior} - V_{piramide\ menor}$$

Logo,

$$V_{pirâmide\ maior} = 8 \cdot V_{pirâmide\ menor} \qquad (3)$$

Sabemos que **o volume de uma pirâmide** é dado por:

$$V = \frac{A_b H}{3}$$

- Para **a pirâmide maior**, ficamos com:

$$V_{piramide\ maior} = \frac{Bh}{3}$$

- Para **a pirâmide menor**, ficamos com:

$$V_{pirâmide\ menor} = \frac{bh_p}{3}$$

Assim, usando esses dois resultados em (3):

$$\frac{Bh}{3} = \frac{8bh_p}{3} \quad \rightarrow \quad h_p = \left(\frac{B}{b}\right)\frac{h}{8}$$

Usando o dado do enunciado que $\frac{B}{b} = 4$, ficamos com:

$$h_p = 4 \cdot \frac{h}{8} \quad \rightarrow \quad h_p = \frac{h}{2}$$

Essa é a altura da pirâmide menor em função de h. Para **encontrar a altura do tronco**, fazemos:

$$h_t = h - h_p$$

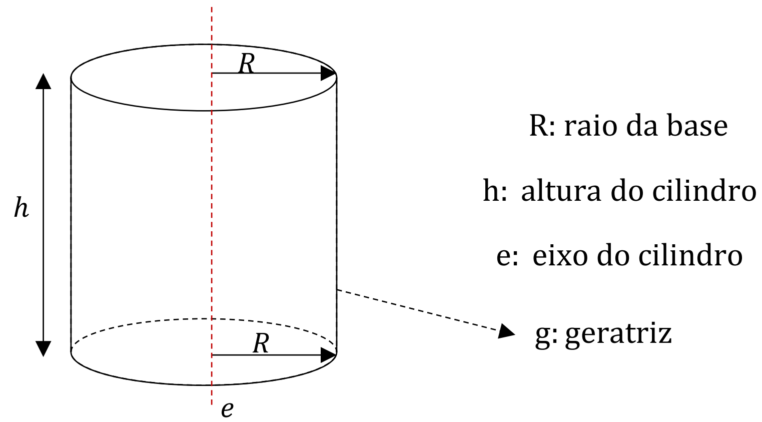
Substituindo,

$$h_t = h - \frac{h}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{h_t = \frac{h}{2}}$$

Gabarito: LETRA E.

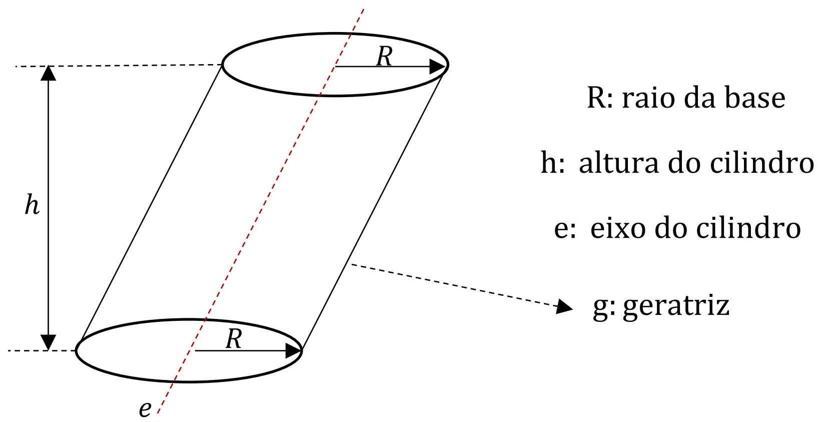
Cilindro

Opa!! Entramos nos cilindros! Nesse ponto, deixamos de falar de poliedros. O cilindro, o cone e a esfera são exemplos do corpos redondos. A partir desse ponto, não precisaremos mais falar de vértices, arestas ou faces. Observe os elementos de um cilindro.



Esse é um cilindro circular reto. Chamamos o cilindro de reto quando **a geratriz for perpendicular ao plano das bases**.

Agora, observe um exemplo de cilindro circular oblíquo.

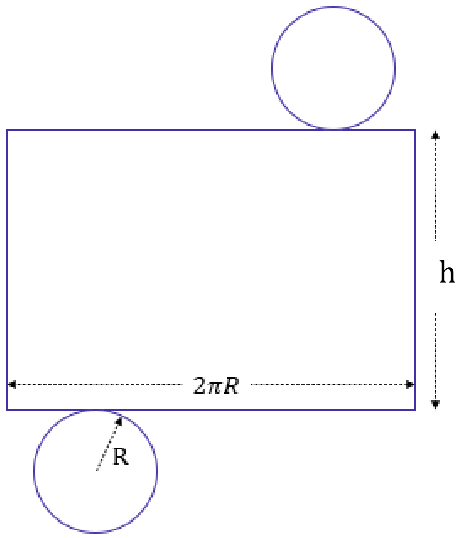


Na maioria das vezes, **lidaremos com cilindros retos**.

No entanto, vale a pena saber que também existem os cilindros oblíquos, tudo bem?

Áreas

Para calcular a área superficial, é interessante planificarmos o cilindro circular reto.



Observe que quando planificamos um cilindro, a sua lateral é um retângulo de lados "$2\pi R$" e "h". Logo,

$$A_{lateral} = 2\pi Rh$$

Por sua vez, as bases são círculos. Com isso, a área da base fica:

$$A_{base} = \pi R^2$$

Como temos duas bases, devemos considerar essa área duas vezes. Assim, a área superficial total fica:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

$$A_{total} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

Colocando $2\pi R$ em evidência:

$$A_{total} = 2\pi R(h + R)$$

Volume

O volume de um cilindro é calculado da mesma forma que fizemos para o prisma.

$$V = A_b h$$

Como sabemos que a área da base é πR^2, podemos substituir:

$$V = \pi R^2 h$$

HORA DE PRATICAR!

(PM-SP/2021) Para abastecer os carros da corporação, há um tanque cilíndrico de combustível, com 2 m de diâmetro e 1,5 m de altura. A capacidade desse tanque é de, aproximadamente,

A) 4.100 litros.
B) 4.400 litros.
C) 4.700 litros.
D) 5.000 litros.
E) 5.300 litros.

Comentários:

Quando uma questão de geometria espacial falar de capacidade, ela estará se referindo ao volume. Observe que o formato do tanque é cilíndrico. Dessa forma, **é o volume de um cilindro que estamos procurando**. De acordo com o que acabamos de ver, essa grandeza é dada por:

$$V = A_b H$$

A base de um cilindro é um círculo. Assim, sua área pode ser calculada por meio da seguinte fórmula:

$$A_b = \pi R^2$$

O enunciado forneceu o diâmetro. Com ele, podemos determinar o raio R.

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{D}}{2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{R} = \frac{2}{2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{R} = 1\ \mathrm{m}$$

Com o raio em mãos, **podemos encontrar a área da base**.

$$\mathrm{A_b} = \pi \cdot 1^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_b} = \pi\ \mathrm{cm}^2$$

Como $\pi \cong 3{,}14$, vamos substituir:

$$\mathrm{A_b} = 3{,}14\ \mathrm{cm}^2$$

A questão também já trouxe a altura do cilindro, $H = 1{,}5\ m$. Assim,

$$V = A_b H \quad \rightarrow \quad V = 3{,}14 \cdot 1{,}5 \quad \rightarrow \quad V = 4{,}71\ m^3$$

Observe que **o nosso resultado foi em metros cúbicos** (m^3). No entanto, as alternativas estão em litros (L).

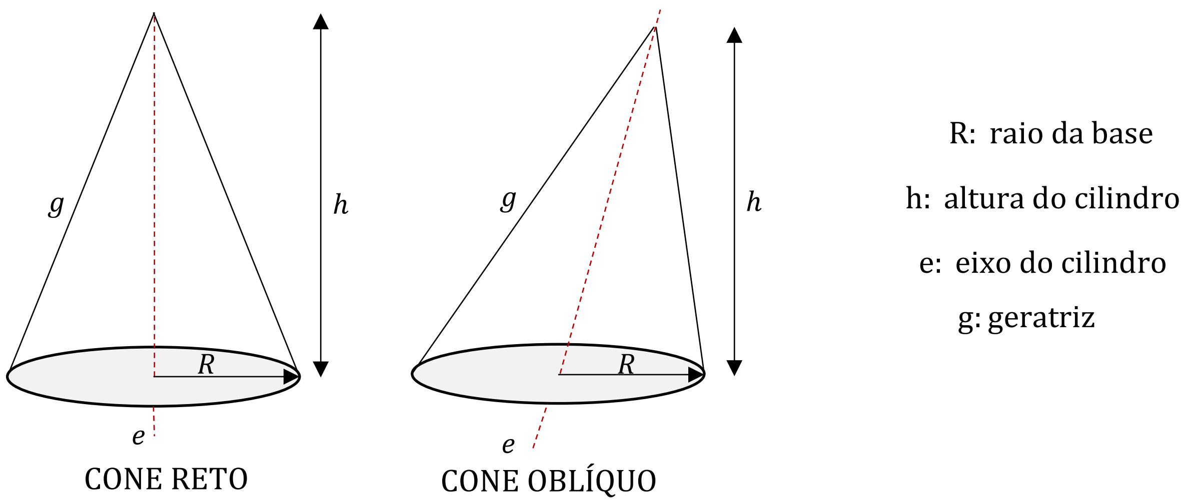
Para fazer essa transformação, **devemos multiplicar o resultado por 1000**.

$$V = 4{,}71 \cdot 1000 \quad \rightarrow \quad V = 4710\ litros$$

Como a questão fala em **valor aproximado**, podemos marcar **a alternativa C**.

Cone

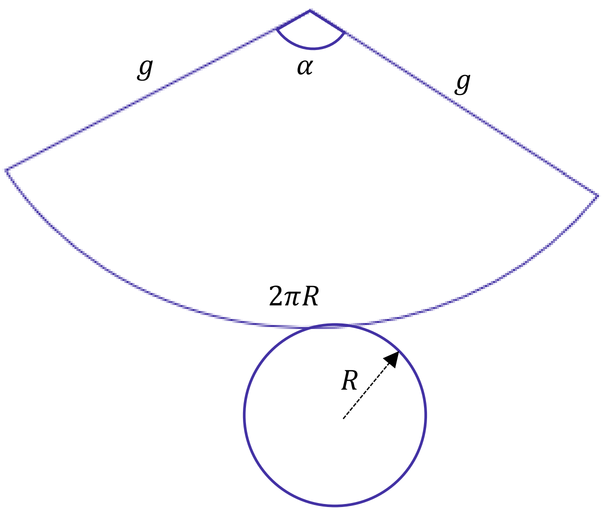
Nosso próximo corpo redondo **é o cone**! É a forma da casquinha de sorvete! Assim como nos cilindros, temos a *"versão reta"* e a *"versão oblíqua"*. Vamos analisá-las.



Observe que no cone reto, **o eixo é perpendicular ao plano da base**. Por sua vez, no cone oblíquo, o eixo não será perpendicular. *Apresentados ao cone?!* Vamos aprender como calcular sua área superficial e seu volume.

Áreas

Assim como fizemos anteriormente, é interessante **planificarmos o cone** para entendermos como sua área superficial é calculada.



Observe que **a área lateral é a área de setor circular cujo ângulo central é α e raio é igual a geratriz**. Por meio de uma regra de três, podemos encontrar que:

$$A_{lateral} = \pi R g$$

Por sua vez, a base é um círculo. Sua área sai mais rapidamente:

$$A_{base} = \pi R^2$$

A área superficial total é a soma das duas.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

$$A_{total} = \pi R g + \pi R^2$$

Colocando "πR" em evidência,

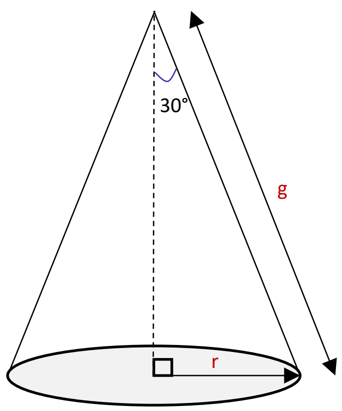
$$A_{total} = \pi R \cdot (g + R)$$

(PREF. SALVADOR/2019) Em um cone de revolução, cada geratriz mede 12 cm e faz 30° com o eixo do cone. A área lateral desse cone em cm² é

A) 24π
B) 36π
C) 48π
D) 60π
E) 72π

Comentários:

A área lateral de um cone é dada por $A_{lateral} = \pi r g$. Perceba que **temos a geratriz, mas <u>não temos o raio</u>**. Com isso, devemos encontrar o raio (r) a partir do ângulo de 30° que a geratriz faz com o eixo do cone.



Note que temos um triângulo retângulo em que **"r" é o cateto oposto relativo ao ângulo de 30°**, enquanto g é a hipotenusa. Dessa forma,

$$\text{sen } 30° = \frac{r}{g} \quad \rightarrow \quad r = g \cdot \text{sen } 30°$$

Substituindo $\boldsymbol{g = 12}$ **e** $\boldsymbol{\text{sen } 30° = 1/2}$:

$$r = 12 \cdot \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad r = 6\ cm$$

Com o raio e a geratriz, agora é só **substituirmos esses valores** na fórmula da área lateral.

$$A_{lateral} = \pi r g \quad \rightarrow \quad A_{lateral} = \pi \cdot 6 \cdot 12 \quad \rightarrow \quad A_{lateral} = 76\pi\ cm^2$$

Gabarito: LETRA E.

Volume

Já o volume de cone é semelhante ao que vimos para a pirâmide.

$$V = \frac{A_b h}{3}$$

Como sabemos que a base de um cone é um círculo, podemos usar que $A_b = \pi R^2$.

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. ITANHAÉM/2020) Assinale a alternativa que apresenta o volume de um cone que possui 18 cm de raio e 26 cm de altura. Use para π = 3,14.
A) 1.469,52 cm^3
B) 13.225,68 cm^3
C) 26.451,36 cm^3
D) 8.817,12 cm^3
E) 4.408,56 cm^3

Comentários:
Questão para treinarmos a fórmula do volume de um cone.

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

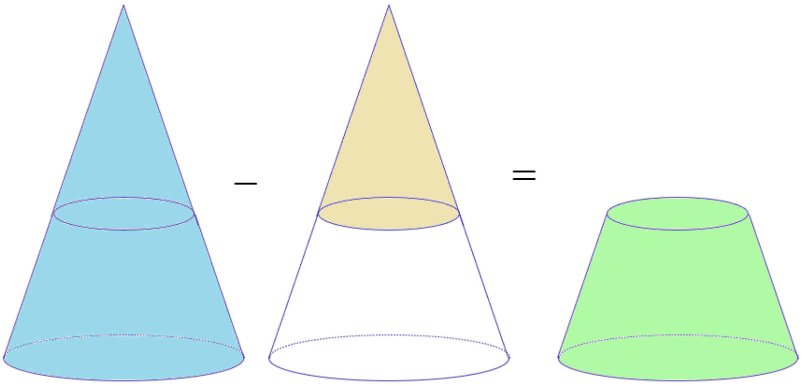
O enunciado nos disse que $\boldsymbol{R = 18\ cm, h = 26\ cm}$ **e** $\boldsymbol{\pi = 3,14}$. Vamos substituir na fórmula acima.

$$\mathrm{V} = \frac{3{,}14 \cdot 18^2 \cdot 26}{3} \quad \rightarrow \quad \mathrm{V} = \frac{81{,}64 \cdot 324}{3} \quad \rightarrow \quad \mathbf{V = 8.817,12\ cm^2}$$

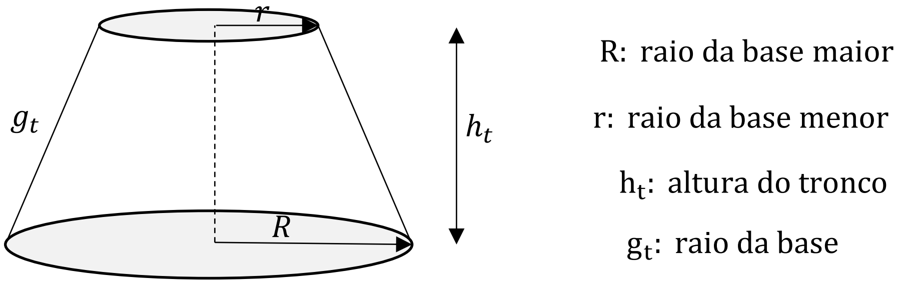
Gabarito: LETRA D.

Tronco de Cone

Assim como na pirâmide, temos também o tronco de cone. Ele é formado da mesma forma: cortamos um cone maior com um plano paralelo a base. Esse corte divide o cone maior em duas partes: **um cone menor, na parte superior**, e **um tronco de cone, na parte inferior**. Observe como podemos imaginar a situação:



O tronco de cone está representado em verde. Vamos detalhar um pouco mais seus elementos.



Temos duas formas de calcular **o volume do tronco de cone**. A primeira é subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior.

$$V_{tronco} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor}$$

A outra alternativa é por meio da seguinte fórmula:

$$V = \frac{\pi h_t}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

Mais uma vez, não fique tão assustado com essa parte relativa aos troncos, ela ainda não é nada comum em concursos. Coloco aqui para deixar nosso material mais completo, pois pode ser cobrado eventualmente.

HORA DE PRATICAR!

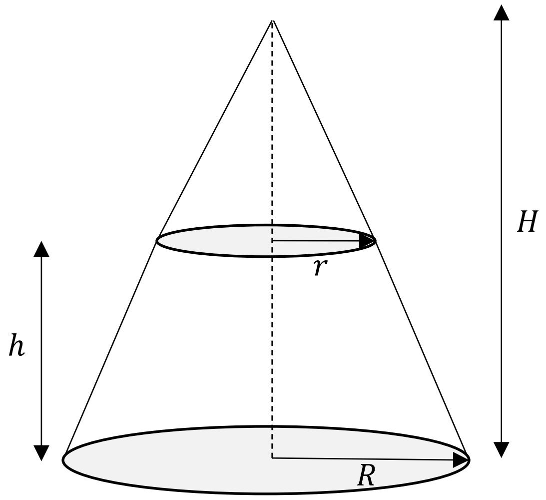
ESTA É DIFÍCIL!

(UFSC/2019) Considere um cone de altura H e raio da base R. A que altura, a partir da base, se deve fazer um corte paralelo à base de forma que o tronco de cone correspondente tenha metade do volume do cone original?

A) $\frac{H(2-\sqrt[3]{4})}{2}$ B) $\frac{H(\sqrt{2}-1)}{4}$ C) $\frac{H(\sqrt[3]{2}-1)}{2}$ D) $\frac{H(2-\sqrt[3]{2})}{2}$ E) $\frac{H(4-\sqrt{2})}{4}$

Comentários:

Confira abaixo como fica uma a situação desenhada.



O enunciado quer a altura h. Para encontrá-la, devemos usar a informação de que **o tronco de cone tem <u>metade</u> do volume do cone original**. Assim,

$$V_{tronco} = \frac{V_{cone\ maior}}{2} \qquad (1)$$

Além disso, lembre-se que o volume de um tronco de cone pode ser calculado da seguinte forma:

$$V_{tronco} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor} \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$\frac{V_{cone\ maior}}{2} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor} \qquad \rightarrow \qquad V_{cone\ menor} = \frac{V_{cone\ maior}}{2}$$

Com isso, lembre que **o volume de um cone** é expresso por:

$$V_{cone} = \frac{A_b H}{3}$$

Olhando para a figura que desenhamos, podemos escrever que:

- Para o cone maior: $A_b = \pi R^2$
- Para o cone menor: $A_b = \pi r^2$

- A altura do cone maior é H.
- A altura do cone menor é $H - h$.

Assim,

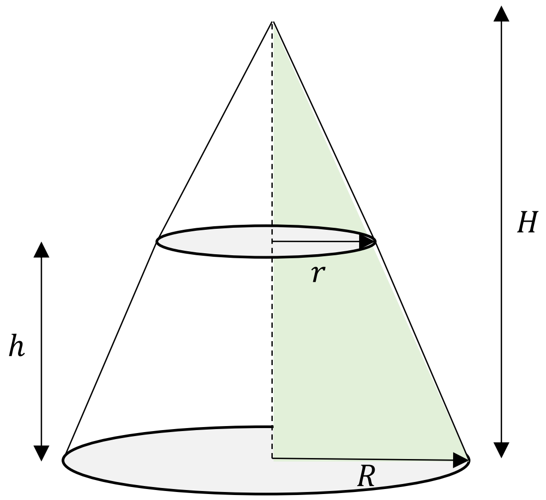
$$V_{cone\ maior} = \frac{\pi R^2 H}{3} \qquad\qquad V_{cone\ menor} = \frac{\pi r^2 (H-h)}{3}$$

Substituindo na expressão que obtemos anteriormente.

$$\frac{\pi r^2 (H-h)}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Simplificando,

$$2r^2(H-h) = R^2 H \qquad (3)$$



Observe o triângulo retângulo destacado. Nós podemos desenvolver uma **semelhança de triângulos**.

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} \quad \rightarrow \quad r = R \cdot \left(\frac{H-h}{H}\right) \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$2R^2 \cdot \left(\frac{H-h}{H}\right)^2 \cdot (H-h) = R^2 H$$

Podemos **cortar os raios (R).**

$$\frac{2(H-h)^3}{H^2} = H \qquad \rightarrow \qquad 2(H-h)^3 = H^3$$

Tirando **a raiz cúbica** dos dois lados.

$$\sqrt[3]{2(H-h)^3} = \sqrt[3]{H^3} \qquad \rightarrow \qquad \sqrt[3]{2}\cdot(H-h) = H$$

Isolando o "h".

$$\sqrt[3]{2}H - \sqrt[3]{2}h = H \qquad \rightarrow \qquad \sqrt[3]{2}h = \sqrt[3]{2}H - H \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{H\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{\sqrt[3]{2}}$$

Racionalizando com $\sqrt[3]{2^2}$

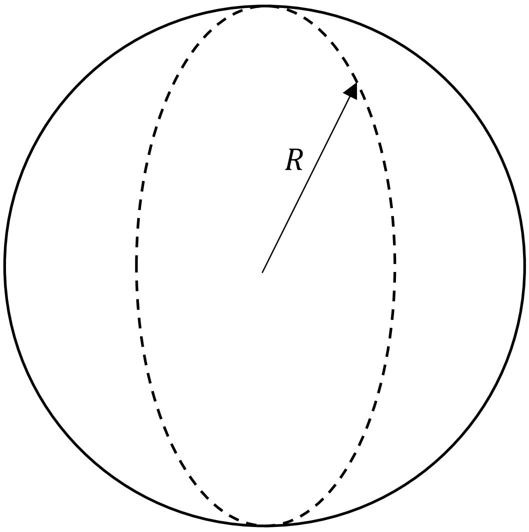
$$h = \frac{H\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{h = \frac{H\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{2}}$$

Ufa!! Essa não foi simples, em? Coloquei essa questão pois ela envolve diversos assuntos e serve como uma boa revisão! Note que falamos sobre: **cones, triângulo retângulo, semelhança de triângulos, racionalização e tudo isso com uma boa dose de manipulações algébricas**! (rsrs)

Gabarito: LETRA A.

Esfera

Chegamos ao nosso último sólido e corpo redondo! **A esfera!** Acredito que é o que temos mais familiaridade e a abordaremos de forma bem direta nessa aula. Observe o seu formato.



Sobre a esfera, as questões **gostam de explorar a sua área superficial**. Para calculá-la, utilizamos a fórmula:

$$A_s = 4\pi R^2$$

Essa é uma outra fórmula em que o custo benefício de demonstrá-la é praticamente nulo.

(PREF. SR CANAÃ/2019) A área da superfície de uma esfera de diâmetro 6 m é: (dado: $\pi = 3$)
A) 18 m².
B) 36 m².
C) 81 m².
D) 108 m².
E) 212 m².

Comentários:
Galera, a área superficial de uma esfera é dada:

$$A_s = 4\pi R^2$$

O enunciado nos forneceu o diâmetro. Sabemos que **o diâmetro é o dobro do raio**. Assim,

$$D = 2R \quad \rightarrow \quad R = \frac{D}{2} \quad \rightarrow \quad R = \frac{6}{2} \quad \rightarrow \quad R = 3 \text{ m}$$

O raio da esfera é 3 m. Podemos substituir na fórmula, não esquecendo que a questão pediu para considerar $\pi = 3$.

$$A_s = 4 \cdot 3 \cdot 3^2 \quad \rightarrow \quad A_s = 12 \cdot 9 \quad \rightarrow \quad \mathbf{A_s = 108\ m^2}$$

Gabarito: LETRA D.

Por fim, também devemos saber como calculamos o seu volume. Anote aí o volume da esfera:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. CABEDELO/2020) Considere uma esfera de raio de 3 cm. A razão entre o volume e a área da superfície dessa esfera é:
A) 1 cm
B) 1 cm³
C) 2π cm
D) π cm²
E) π

Comentários:
Questão apenas para **treinar as fórmulas** que estamos vendo. A esfera tem raio igual a 3 cm.

- Para calcular **a área superficial de uma esfera**, utilizamos a seguinte fórmula:

$$A_s = 4\pi R^2$$

Substituindo $R = 3$,

$$A_s = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 \quad \rightarrow \quad A_s = 36\pi\ cm^2$$

- Para calcular **o volume de uma esfera**, utilizamos a seguinte fórmula:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Substituindo $R = 3$,

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} \quad \rightarrow \quad V = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 \quad \rightarrow \quad V = 36\pi\ cm^3$$

O enunciado pede **a razão entre o volume e a área superficial.**

$$\frac{V}{A_s} = \frac{36\pi\ cm^3}{36\pi\ cm^2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{V}{A_s} = 1\ cm}$$

Gabarito: LETRA A.

Inscrição e Circunscrição de Sólidos

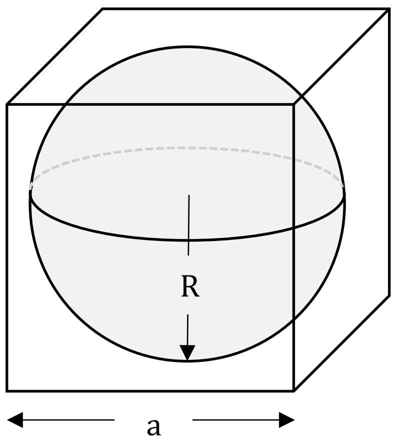
Introdução

Agora, vamos aplicar tudo que vimos anteriormente para resolver o problema da inscrição e circunscrição de sólidos. Você deve lembrar que na aula de Geometria Plana vimos algo semelhante para os polígonos, não é mesmo? Quando falamos que um sólido está inscrito em outro, significa que ele está dentro desse outro sólido, **tangenciando as suas faces**. Por sua vez, o sólido externo encontra-se circunscrito.

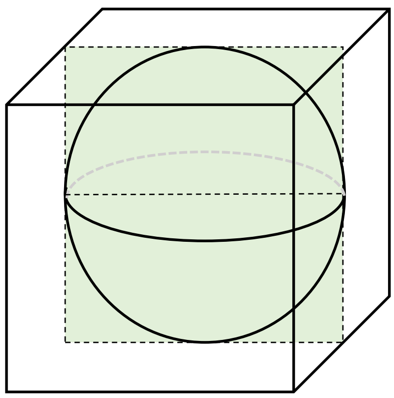
Dada a infinidade de sólidos geométricos que existem, **as possibilidades de inscrição e circunscrição são infinitas**. Sendo assim, selecionei apenas aquelas mais comuns nas provas para tratar nesse tópico. Por fim, a esfera será nossa "atriz principal", então é bom estar bem familiarizado com ela.

Esfera inscrita no cubo

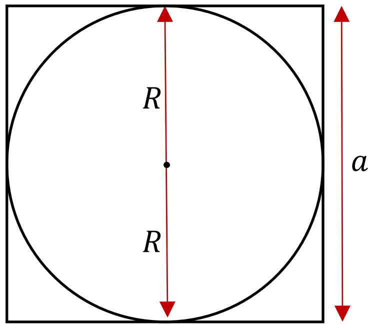
Quando a esfera está **inscrita** no cubo, temos que ela está **dentro** do cubo. O detalhe mais importante é que ela tangencia todas as faces do cubo. Observe como esquematizamos a situação.



Nosso maior objetivo é **relacionar o raio da esfera (R) com alguma dimensão do sólido**, no caso em tela, a aresta do cubo. Para isso, a melhor estratégia é fazermos um "corte" e observar a seção formada.



Observando a seção formada pelo corte, temos:



Note que **o lado do cubo tem o mesmo comprimento do diâmetro da esfera**. É o que devemos guardar!

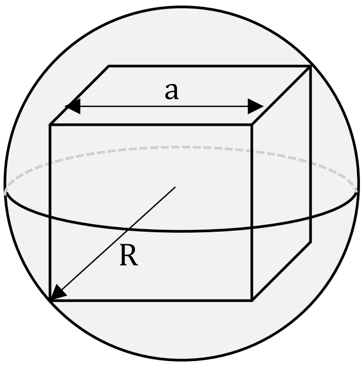
TOME NOTA!

Na esfera inscrita no cubo, o diâmetro da esfera é igual à aresta do cubo.

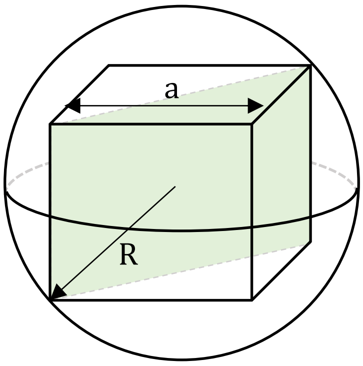
$$\boldsymbol{2R = a}$$

Esfera circunscrita ao cubo

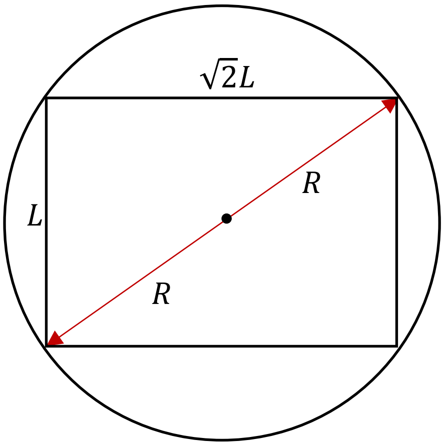
Dessa vez, a esfera está por fora do cubo. Os vértices do cubo tangenciam a esfera internamente.



Nosso objetivo aqui é o mesmo, **relacionar o raio da esfera com a aresta do cubo**. Assim, a estratégia será a mesma também: fazer um corte transversal de modo a evidenciar essas dimensões no plano.



O corte mais interessante deve ser feito de tal forma que os vértices do cubo estejam incluídos bem com as diagonais das faces. Observe como fica o corte:



Perceba que **o diâmetro da esfera coincide com a diagonal do cubo**. Esse é o nosso principal resultado.

TOME NOTA!

Na esfera inscrita no cubo, o diâmetro da esfera é igual à diagonal do cubo.

$$\boldsymbol{2R = \sqrt{3}a}$$

HORA DE PRATICAR!

(INÉDITA/2023) Considere uma esfera de área superficial igual a 36π cm² que está inscrita em um cubo. Assinale a alternativa que contém a área superficial do cubo.

A) 18 cm²

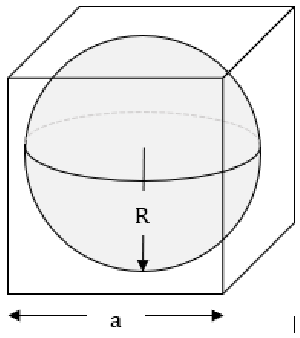
B) 36 cm²

C) 81 cm²

D) 108 cm²

E) 72 cm²

Comentários:



Como a questão deu a área superficial, podemos encontrar **o raio da esfera**.

$$A_s = 4\pi R^2 \quad \rightarrow \quad 4\pi R^2 = 36\pi \quad \rightarrow \quad R^2 = 9$$

$$R = 3 \text{ cm}$$

Ora, como a esfera está inscrita no cubo, temos que **o diâmetro é igual a aresta do cubo**. Sendo assim:

$$a = 2R \quad \rightarrow \quad a = 2 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad a = 6 \text{ cm}$$

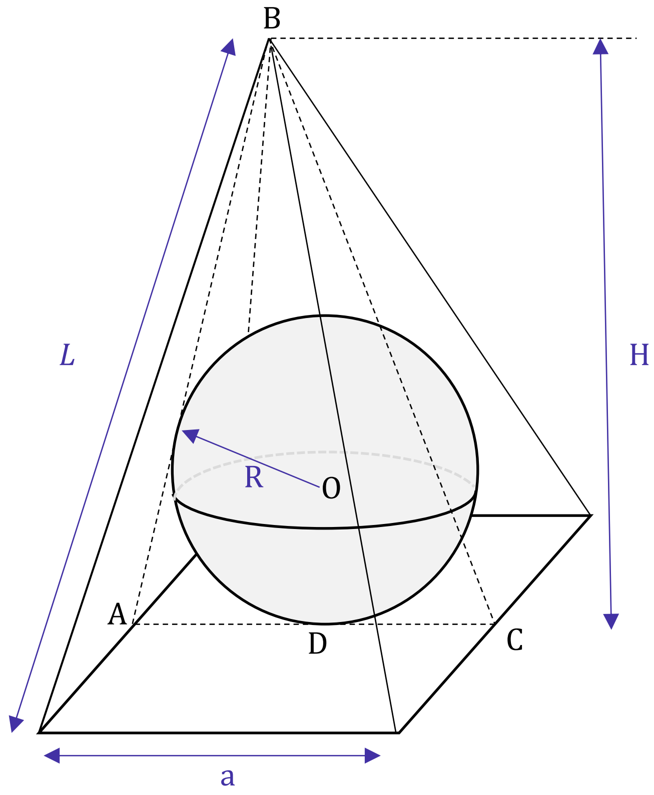
Com a aresta do cubo, podemos encontrar a sua **área superficial**:

$$A_{s,cubo} = 6a^2 \quad \rightarrow \quad A_{s,cubo} = 6 \cdot 6^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{A_{s,cubo} = 108 \text{ cm}^2}$$

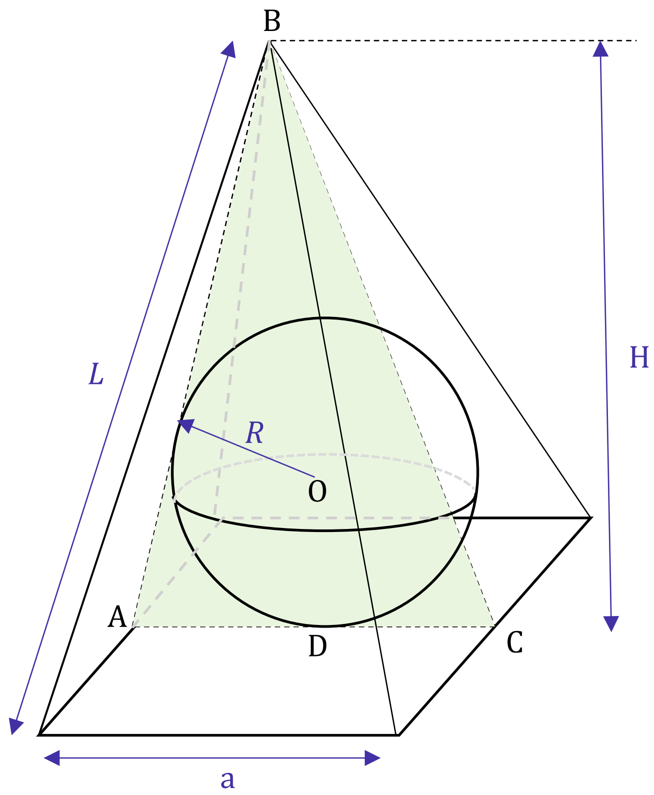
Gabarito: LETRA D.

Esfera inscrita na pirâmide

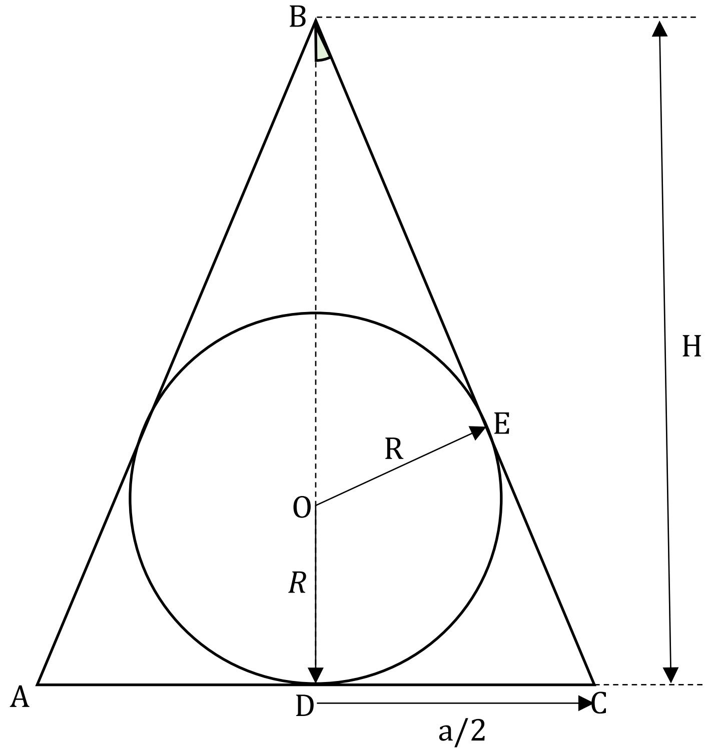
Uma esfera também pode estar inscrita em uma pirâmide. Para hoje, trabalharemos com uma pirâmide de base quadrada, mas **poderia ser uma base pentagonal, hexagonal**... O raciocínio que desenvolveremos é passível de ser aplicado a todos esses casos, tudo bem? Observe a situação abaixo.



Parece um pouco mais complicado, não é verdade? "H" é a altura da pirâmide, "L" é a aresta lateral, "a" é a aresta da base e "R" é o raio da esfera. O corte que faremos deverá conter o triângulo ABC pois é um corte que engloba os pontos onde a esfera tangencia as faces triangulares.



Quando destacamos essa seção, temos o seguinte resultado:



Para relacionarmos as dimensões, podemos usar **a semelhança entre os triângulos BOE e BDC**.

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}}$$

Observe que $\overline{BC}$ pode ser determinada usando **Teorema de Pitágoras** no triângulo BDC.

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\overline{BC} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Na semelhança de triângulos, ficamos com:

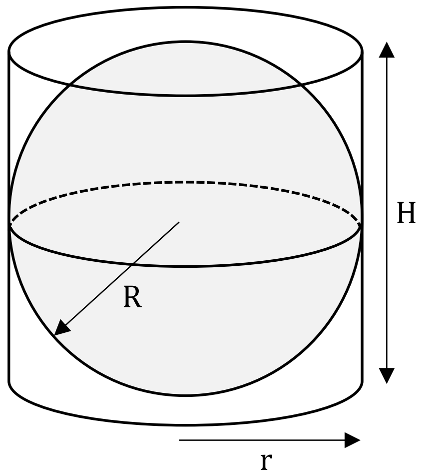
$$\frac{\overline{OE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{R}{\frac{a}{2}} = \frac{H - R}{\sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$

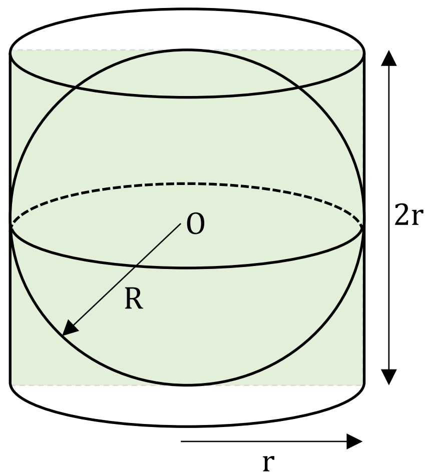
Pessoal, **essa não é uma expressão para ser decorada**. O objetivo aqui é apenas mostrar o raciocínio a ser desenvolvido caso uma questão como essa apareça em sua prova. Busque sempre o corte transversal que traga mais informações e, depois, tente encontrar uma semelhança de triângulos. Para um exemplo de aplicação, observe a **questão 10** da nossa lista de exercícios!

Esfera inscrita no cilindro equilátero

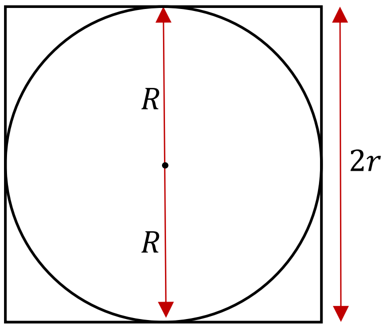
Esse é um dos casos mais simples. Observe como desenhamos a situação.



Nesse caso, a esfera tangencia a superfície lateral do cilindro bem como o centro das bases. É importante lembrar que **um cilindro equilátero é aquele que possui altura igual ao diâmetro da base**. Agora, vamos fazer aquele corte para observarmos com mais atenção as dimensões envolvidas.



Quando visualizamos a seção transversal destacada pelo corte, temos:



Note que **o diâmetro da esfera é igual ao diâmetro da base** (que, por sua vez, é igual a altura do cilindro). Logo, **os raios também são iguais**.

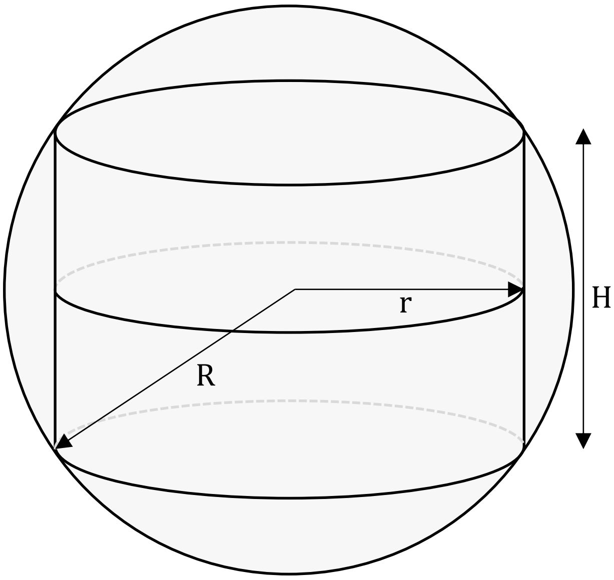
TOME NOTA!

Na esfera inscrita no cilindro equilátero, o raio da esfera é igual ao raio da base do cilindro. Assim, seja "R" o raio da esfera e "r" o raio da base do cilindro, temos:

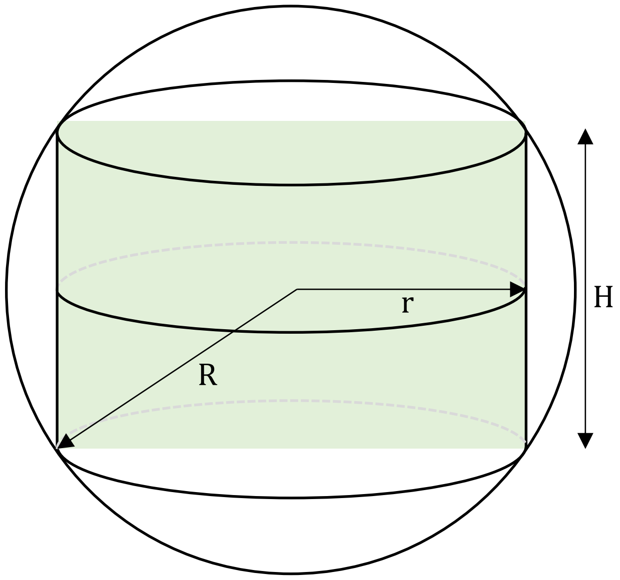
$$\boldsymbol{R = r}$$

Esfera circunscrita ao cilindro

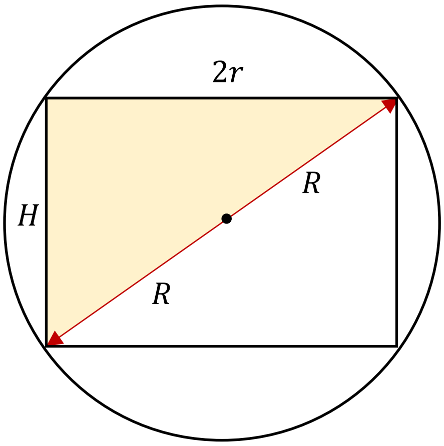
Nesse caso, a esfera está externa ao cilindro conforme o seguinte desenho.



Vamos fazer um corte que pegue ao mesmo tempo o diâmetro da base do cilindro e o diâmetro da esfera.



Quando visualizamos esse corte mais atentamente, obtemos:



Note o triângulo retângulo destacado. Para relacionarmos as dimensões, podemos usar Pitágoras.

$$(2R)^2 = (2r)^2 + H^2$$

$$4R^2 = 4r^2 + H^2$$

$$R = \frac{\sqrt{4r^2 + H^2}}{2}$$

Pessoal, essa é uma outra expressão que não precisa ser decorada. O nosso esforço aqui deve ser no entendimento do problema para que, na hora da prova, vocês rapidamente consigam desenrolar.

HORA DE PRATICAR!

(INÉDITA/2023) Considere um cilindro com volume igual a 125π cm³ que está inscrito em uma esfera. Se a altura desse cilindro é igual a 5 cm, assinale a alternativa que contém o volume da esfera.

A) $625\pi\sqrt{5}/6$

B) $125\pi\sqrt{5}/12$

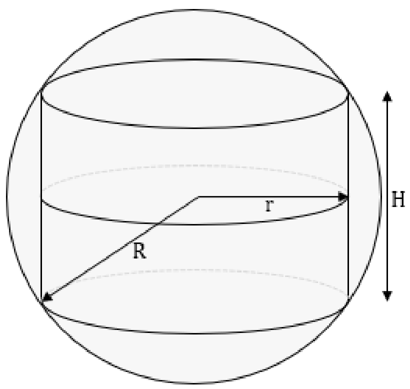
C) $75\pi\sqrt{3}/6$

D) $625\pi\sqrt{2}/6$

E) $125\pi\sqrt{2}/12$

Comentários:

Note que o cilindro está inscrito na esfera. Isso é o mesmo que dizer que a esfera está circunscrita ao cilindro. Tudo bem? Sendo assim, vamos desenhar a situação.



Como temos o volume a altura do cilindro, podemos encontrar o raio da base "r".

$$V_{cilindro} = \pi r^2 H$$

$$\pi r^2 \cdot 5 = 125\pi$$

$$r^2 = 25$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

Ora, com o raio da base e a altura, podemos encontrar o raio da esfera por meio da expressão que chegamos na teoria:

$$R = \frac{\sqrt{4r^2 + H^2}}{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{4 \cdot 5^2 + 5^2}}{2}$$

$$R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

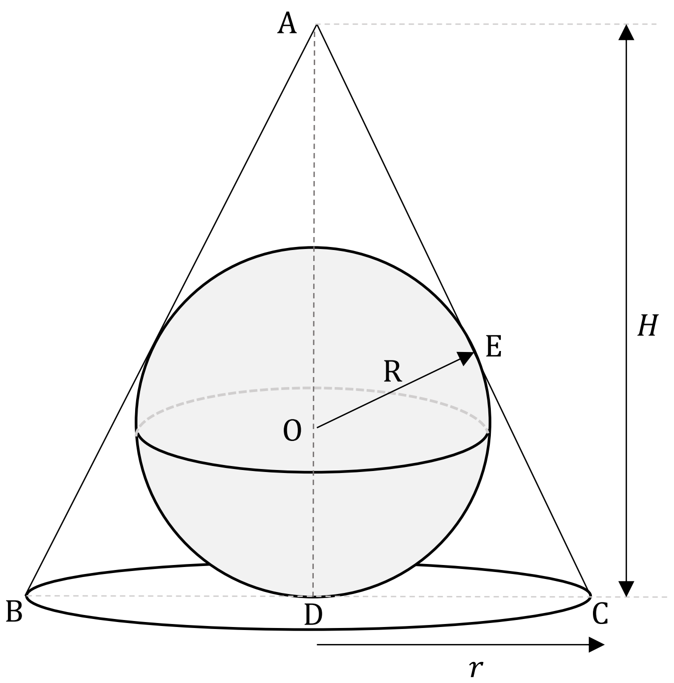
Pronto! Com o raio da esfera, calculamos o seu volume.

$$V_e = \frac{4\pi R^3}{3} \quad \rightarrow \quad V_e = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^3 \quad \rightarrow \quad V_e = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{625\sqrt{5}}{8} \quad \rightarrow \quad \boxed{V_e = \frac{625\pi\sqrt{5}}{6}}$$

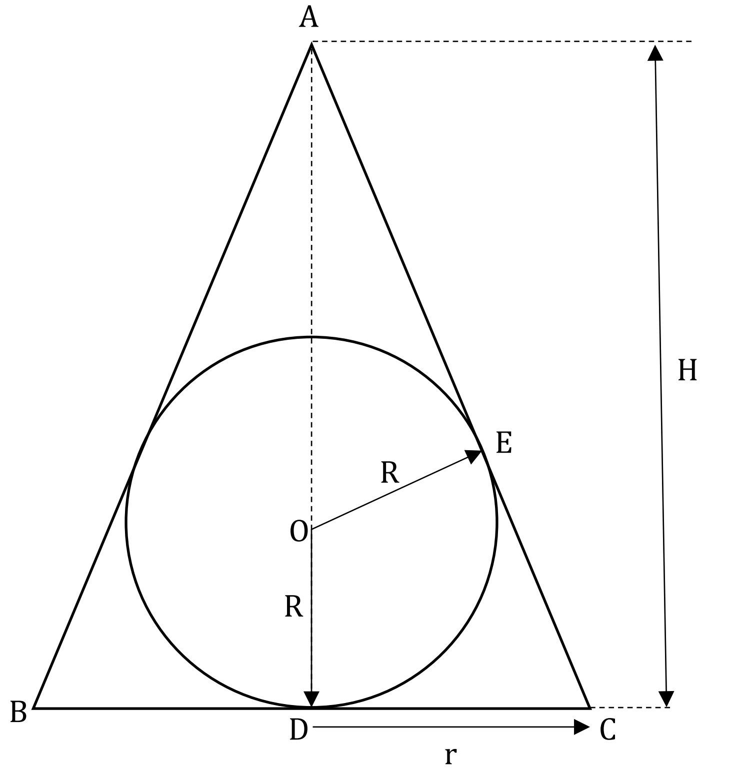
Gabarito: LETRA A.

Esfera inscrita no cone

Quando temos uma esfera inscrita no cone, devemos visualizar algo semelhante a figura abaixo:



Da mesma forma que fizemos anteriormente, vamos passar um plano que contenha o vértice do cone, o centro da esfera e o centro da base. O resultado desse corte é mostrado no desenho a seguir:



Trata-se de uma situação em que precisaremos usar a **semelhança de triângulos**. Note que o triângulo AOE é semelhante ao triângulo ADC. Dessa forma, podemos escrever:

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}}$$

Substituímos o que temos:

$$\frac{R}{r} = \frac{H - R}{\sqrt{r^2 + H^2}}$$

Vamos treinar como poderia ser uma cobrança desse tema (ver também **a questão 8** da nossa lista).

(INÉDITA/2023) Considere uma esfera que está inscrita em um cone reto de altura igual a 8 cm e raio da base 6 cm. Assinale a alternativa que contém o volume no interior do cone que não está ocupado pela esfera.

A) $20\pi\ \text{cm}^3$

B) $40\pi\ \text{cm}^3$

C) $60\pi\ \text{cm}^3$
D) $80\pi\ \text{cm}^3$
E) $100\pi\ \text{cm}^3$

Comentários:
É a situação estudada anteriormente. Temos uma esfera inscrita no cone.

Como queremos o volume no interior do cone que **não está ocupado pela esfera**, devemos fazer:

$$V = V_{cone} - V_{esfera}$$

$$V = \frac{\pi r^2 H}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}$$

Observe que o enunciado forneceu **o raio da base do cone e a altura**.

$$r = 6\ cm$$

$$H = 8\ cm$$

Para matarmos o problema, falta apenas **determinar o raio da esfera**. Para isso, podemos usar a expressão que deduzimos.

$$\frac{R}{r} = \frac{H - R}{\sqrt{r^2 + H^2}}$$

Substituindo o que temos:

$$\frac{R}{6} = \frac{8 - R}{\sqrt{6^2 + 8^2}}$$

$$\frac{R}{6} = \frac{8 - R}{10}$$

$$10R = 48 - 6R$$

$$16R = 48$$

$$R = 3\ \text{cm}$$

Pronto! Vamos encontrar o volume procurado:

$$V = \frac{\pi 6^2 8}{3} - \frac{4\pi 3^3}{3}$$

$$V = \frac{288\pi}{3} - \frac{108\pi}{3}$$

$$V = \frac{180\pi}{3}$$

$$\boxed{V = 60\pi}$$

Gabarito: LETRA C.

Pessoal, como falei anteriormente, temos uma gama de situações que envolvem a inscrição e circunscrição de sólidos. São infinitas as possibilidades. Podemos ter prisma inscrito em cilindros, cones em cubos, pirâmides em cilindros... Todas essas situações são resolvidas por meio do raciocínio que aprendemos hoje. Treine com a lista a seguir que tenho certeza de que ficará bem-preparado para sua prova!

Questões Comentadas - Cebraspe

Prisma

1. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Julgue o item subsequente, relativos a geometria.

Suponha que o volume (em cm³) de um cubo seja numericamente menor do que a área (em cm²) de sua superfície, isto é, a soma das áreas de suas faces. Nessa situação, o comprimento da aresta desse cubo é inferior a 6 cm.

Comentários:
Vamos relembrar as fórmulas do volume do cubo e da área superficial.

1) Volume do cubo

$$V = a^3$$

2) Área superficial

$$A_s = 6a^2$$

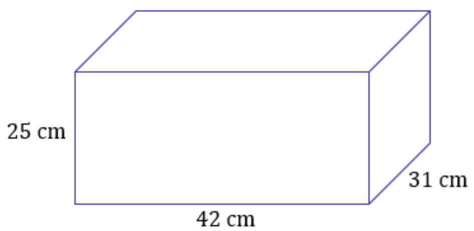
A questão quer o valor da aresta "a" para que V seja inferior a A_s.

$$V < A_s \quad \rightarrow \quad a^3 < 6a^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a < 6\ \text{cm}}}$$

Gabarito: CERTO.

2. (CESPE/TJ-PR/2019) Mesmo com a informatização dos processos, ainda é grande o volume de papéis consumidos nas instituições públicas, o que demanda grandes espaços para seu armazenamento. Por exemplo, uma caixa na forma de um paralelepípedo retângulo medindo 31 cm de largura, 25 cm de altura e 42 cm de comprimento armazena 10 resmas de papel A4. Nesse caso, para armazenar 1.000 dessas caixas em um contêiner, é necessário que a capacidade desse contêiner seja de
A) 32,55 m³.
B) 39,20 m³.
C) 77,50 m³.
D) 98 m³.
E) 105 m³.

Comentários:
Temos uma caixa no formato de paralelepípedo.



Sabemos que para calcular o volume de um paralelepípedo, devemos **multiplicar suas três dimensões**. Note que **as dimensões estão em centímetros e as respostas estão em metros cúbicos**. Para transformar centímetros em metros, **basta dividir aquele por 100**. Assim, o volume de uma única caixa é:

$$V = 0{,}25 \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}31 \quad \rightarrow \quad V = 0{,}03255\ m^3$$

Veja que esse volume **é o volume de uma única caixa**. O enunciado quer saber o volume de 1000 delas. Logo, devemos multiplicar o resultado por 1000.

$$V_{total} = 1000 \cdot V \quad \rightarrow \quad V_{total} = 1000 \cdot 0{,}03255 \quad \rightarrow \quad V_{total} = 32{,}55\ m^3$$

Gabarito: LETRA A.

3. (CESPE/FUB/2018) Paulo, Maria e João, servidores lotados em uma biblioteca pública, trabalham na catalogação dos livros recém-adquiridos. Independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, Paulo cataloga 1/4, Maria cataloga 1/3 e João, 5/12. A respeito da catalogação de livros por esses servidores, julgue o item a seguir.

Situação hipotética: Cada um dos livros que serão catalogados em três dias de trabalho constitui um sólido que tem a forma de um paralelepípedo retângulo de 2.000 cm³ de volume. **Assertiva:** Nessa situação, se, nesse período, João catalogar 375 desses livros, então, nesse período, os três servidores juntos catalogarão uma quantidade de livros cuja soma dos volumes será superior a 2 m³.

Comentários:
Beleza, vamos primeiro **determinar a quantidade total de livros**. O enunciado adiantou para nós e disse que **João cataloga 375** deles. Esse valor corresponde a 5/12 da quantidade total de livros. Podemos fazer uma regra de três simples e determinar quantos livros foram catalogados ao total, tudo bem?!

$$\begin{array}{ccc} 375 & \longleftrightarrow & \dfrac{5}{12} \\ x & \longleftrightarrow & 1 \end{array}$$

Multiplicando cruzado, ficamos com:

$$\frac{5x}{12} = 375 \quad \rightarrow \quad x = 900$$

Logo, **o total de livros é 900**. Pessoal, se não ficou claro, vou tentar explicar melhor.

- Quando o enunciado fala que João cataloga 5/12 dos livros, podemos dizer, com outras palavras, que João cataloga $5/12 = 0{,}41666\ldots = \mathbf{41{,}6\%\ dos\ livros}$. Tudo bem?!

- Além disso, a questão disse que João catalogou 375 livros. Ora, podemos fazer uma regra de três a partir daí. Pensamos assim: "*se 375 livros correspondem a 41,6%, então x livros correspondem a 100%*".

Se são 900 livros e **cada livro tem 2.000 cm³**, então o volume total ocupado pelos 900 é dado por:

$$V_{total} = 900 \cdot 2000 \quad \rightarrow \quad V_{total} = 1.800.000\ cm^3$$

O problema é que encontramos um volume em cm³ e **é preciso comparar com m³**. Para fazer a conversão, podemos usar a seguinte estratégia:

- 1 m³ equivale a multiplicar "1 m" três vezes.

$$V = 1\ m^3 = (1\ m) \cdot (1\ m) \cdot (1\ m)$$

- Quantos centímetros existem em "1 m"? Ora, **1 metro tem 100 centímetros.**

$$V = 1\ m^3 = (100\ cm) \cdot (100\ cm) \cdot (100\ cm) = 1.000.000\ cm^3$$

Logo, acabamos de encontrar 1 m³ tem 1.000.000 cm³. Assim, podemos fazer outra regra de três.

$$\begin{array}{ccc} 1\ m^3 & \longleftrightarrow & 1.000.000\ cm^3 \\ x & \longleftrightarrow & 1.800.000\ cm^3 \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

$$1.000.000 \cdot x = 1.800.000 \quad \rightarrow \quad x = 1{,}8\ m^3$$

Note que **a soma dos volumes <u>é inferior</u> a 2 m³** e, portanto, o item encontra-se errado.

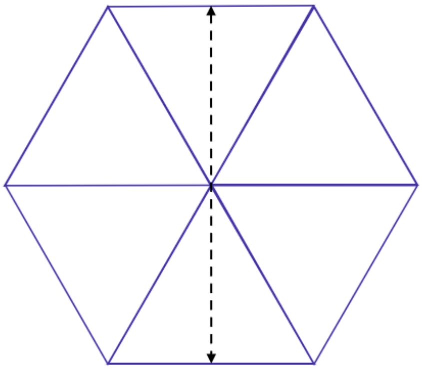
Gabarito: ERRADO.

4. (CESPE/FUB/2018) A figura a seguir mostra uma mesa em que o tampo é um hexágono regular cujo lado mede 80 cm.

Julgue o item que se segue, a respeito da geometria do tampo dessa mesa.

Se esse tampo tiver espessura de 2 cm, então o seu volume será superior a 0,04 m³.

Comentários:
Pessoal, um hexágono regular pode ser decomposto em **6 triângulos equiláteros** conforme figura abaixo.



Portanto, para calcular a sua área, basta calcularmos a área de um triângulo equilátero **e multiplicar por 6**. Durante a teoria, deduzimos a fórmula da área do triângulo equilátero. Lembre-se:

$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

O lado do triângulo é o próprio lado do hexágono, ou seja, $L = 80\ cm = 0{,}8\ m$. Assim:

$$A = \frac{0{,}8^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A = 0{,}32\sqrt{3}\ m^2$$

Você pode estar se perguntando o motivo de termos calculado essa área. Observe que **o enunciado quer volume do tampo da mesa**. O tampo da mesa tem formato de **prisma regular da base hexagonal**. Sabemos que o volume de prismas é dado pelo produto da área da base pela altura.

A base é o hexágono e a altura é a espessura dada no item ($2\ cm\ =\ 0{,}02\ m$). Assim.

$$V_{tampo} = A_b \cdot H \quad \rightarrow \quad V_{tampo} = 0{,}32\sqrt{3} \cdot 0{,}02 \quad \rightarrow \quad V_{tampo} = 0{,}0064\sqrt{3}\ m^3$$

Para terminar, devemos considerar $\sqrt{3} \cong 1{,}73$. Guarde esse valor com você, vai ser útil em muitas situações.

$$V_{tampo} \cong 0{,}0064 \cdot 1{,}73 \quad \rightarrow \quad V_{tampo} \cong 0{,}011\ m^3$$

O volume encontrado **é inferior a 0,04 m³.**

- Obs.: Note que realizamos a transformação de unidades (cm para m) no momento em que fomos utilizar tais valores. Minha recomendação é: sempre compare a unidade dos parâmetros que estão no item (ou alternativas) com os valores passados no enunciado geral da questão. Faça disso um hábito.

Sempre checar as unidades. Com o tempo, esse *check* torna-se natural e evitamos o famoso erro por ter esquecido de transformar. Pode parecer besteira, mas vejo aluno bom perder questões simples por isso. Tudo bem?!

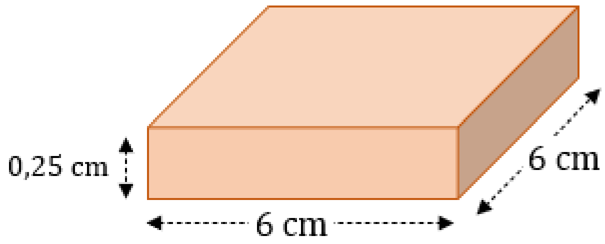
Gabarito: ERRADO.

5. (CESPE/PREF. SÃO LUIS/2017) Os biscoitos de sal de determinada marca têm a forma de um paralelepípedo retângulo: a base é um quadrado de lados medindo 6 cm; a altura mede 0,25 cm. Os biscoitos são acondicionados em caixas com capacidade para 5.184 cm³. Nesse caso, a quantidade de biscoitos que podem ser acondicionados em uma dessas caixas é

A) superior a 1.500.
B) inferior a 100.
C) superior a 100 e inferior a 500.
D) superior a 500 e inferior a 1.000.
E) superior a 1.000 e inferior a 1.500.

Comentários:

Inicialmente, vamos calcular **o volume de um biscoito**. Ele tem base quadrada de *lado 6 cm e altura 0,25 cm*.



O volume de um paralelepípedo é dado pelo **produto das <u>três</u> dimensões**. Assim,

$$V = 0{,}25 \cdot 6 \cdot 6 \qquad \rightarrow \qquad V = 9\ cm^3$$

Cada biscoito possui um volume de **9 cm³**. Se a caixa tem capacidade para **5.184 cm³**, então cada caixa cabe:

$$N = \frac{5184}{9} \qquad \rightarrow \qquad N = 576\ biscoitos$$

Logo, um número superior a 500 e inferior a 1.000.

Gabarito: LETRA D.

6. (CESPE/PM-ES/2017) No item a seguir é apresentada uma situação hipotética, seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de modelos lineares, modelos periódicos e geometria dos sólidos.

O tanque para água de um veículo de combate a incêndio tem a forma de um paralelepípedo retângulo e está completamente cheio. No combate a um incêndio, gastou-se 1/3 de sua capacidade. No combate a um segundo incêndio, gastou-se 3/7 do que sobrou. Nesse caso, depois de extintos os dois incêndios, restou, no tanque, água até uma altura superior a 1/3 da altura original.

Comentários:

Pessoal, temos um tanque na forma de um paralelepípedo. **O volume de um paralelepípedo é linearmente proporcional a altura**. Mas o que isso significa? Significa que se gastamos 1/3 da capacidade, a altura cai em um terço também. Se for usando metade do tanque, a altura vai cair na metade (mantido a área da base constante).

Dito isso, vamos analisar as informações do enunciado. Inicialmente, gastou-se 1/3 da sua capacidade. Com isso, **a altura do tanque também desceu 1/3**, resultando em uma altura e volumes iguais **a 2/3 da original**. Tudo bem até aqui?! Depois, consome-se mais **3/7 do que sobrou**. Ou seja, 3/7 dos 2/3 que havia sobrado. Sendo assim, sobram 4/7 dos 2/3.

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{21}\cong 0{,}3809\cong 38{,}09\%$$

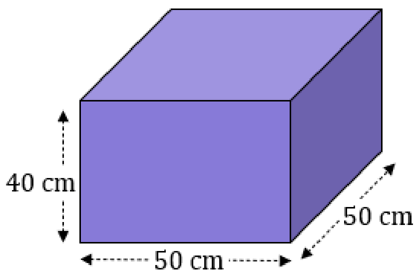
Percebemos que, depois dos consumos, o tanque ficou com **$38,09\%$ de sua capacidade**, indicando que sua **altura está $38,09\%$ da original**. Note que 38,09% é maior que $\frac{1}{3}=0{,}333=33{,}3\%$. Portanto, item correto.

Gabarito: CERTO.

(PRF/2012) Texto para as próximas questões
Considere que o interior de um recipiente tenha a forma de um paralelepípedo retângulo de base quadrada de lado medindo 50 cm e altura, 40 cm. Considere, ainda, que esse recipiente tenha sido enchido com um combustível homogêneo composto de gasolina pura e álcool e que 40% do combustível constitua-se de álcool. Com base nessas informações, julgue o item subsequente.

7. (CESPE/PRF/2012) Se o recipiente estiver assentado sobre um plano horizontal e 30 litros do combustível forem retirados, a altura do combustível que restou no recipiente será inferior a 30 cm.

Comentários:
Inicialmente, **calcular o volume do recipiente**. Pelas informações do enunciado, temos o seguinte:



O volume de um paralelepípedo é dado pelo **produto de suas três dimensões**. Então,

$$V=40\cdot 50\cdot 50 \qquad \rightarrow \qquad V=100.000\ cm^3$$

Note que obtemos **um volume em cm³ e precisamos passar para litros**. Lembre-se:

$$1\ cm^3 = 1\ mL$$

Assim,

$$V=100.000\ cm^3=100.000\ mL=100\ L$$

Veja que temos **100 L de combustível**. Se 30 litros foram retirados, então o volume foi reduzido em 30%. Naturalmente, a altura do combustível no tanque foi reduzida em 30%, **ficando com 70% da original**. Assim, se no início a altura era 40 cm, então, depois da retirada dos 30L, ficamos com:

$$h = (40\ cm) \times 70\% \qquad \rightarrow \qquad h = 28\ cm$$

A altura resultante é, portanto, **menor do que 30 cm**.

Gabarito: CERTO.

8. (CESPE/PRF/2012) Menos de 55 litros do combustível contido no recipiente constitui-se de gasolina pura.

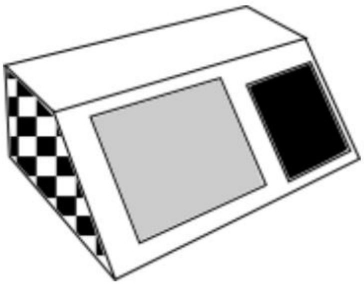
Comentários:

Vamos aproveitar a resolução do item anterior. Inicialmente, temos 100 L de combustível. Depois, 30 litros são retirados. Com essa retirada, **ficamos com 70 litros**. Tudo bem?! O enunciado diz que **40% desse combustível é álcool**. Consequentemente, **60% será a gasolina pura**. Para saber quanto de gasolina sobrou após a retirada, basta **multiplicarmos a porcentagem de gasolina pelo volume restante**.

$$V_{gasolina} = 60\% \cdot 70 \qquad \rightarrow \qquad V_{gasolina} = 48\ L$$

Gabarito: ERRADO.

9. (CESPE/TRE-ES/2011)



No prisma reto da figura acima, que representa, esquematicamente, uma urna eletrônica, as bases são trapézios retos, em que a base maior mede 27 cm, a base menor, 14 cm, e a altura, 13 cm. A altura do prisma é igual a 42 cm. No retângulo da parte frontal do prisma mostrado na figura, em um dos retângulos destacados, localizam-se as teclas e, no outro, uma tela em que aparece a foto do candidato escolhido pelo eleitor. Para atender aos eleitores portadores de deficiência visual, cada tecla possui, além do caractere comum, sua correspondente representação na linguagem braille. Cada caractere na linguagem braille é formado a partir de seis pontos colocados em duas colunas paralelas de três pontos cada. Seguindo as regras da linguagem braille, cada caractere é formado levantando o relevo de alguns desses pontos, que pode ser apenas um ponto ou até cinco pontos. A partir dessas informações e considerando 1,4 como valor aproximado de Imagem $\sqrt{2}$, julgue o itens que se segue.

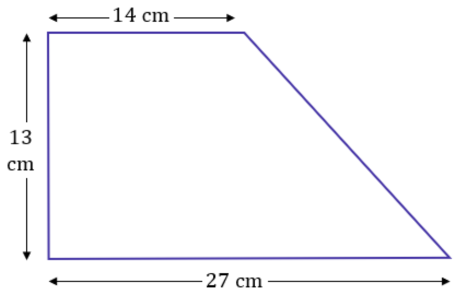
O volume do prisma é superior a 11 dm³.

Comentários:

Queremos calcular o volume de um prisma que possui base trapezoidal! Lembre-se que o volume de um prisma é dado pelo **produto da área da base pela altura**.

$$V = A_b \cdot H$$

A base é um trapézio e precisamos calcular a sua área. Veja como fica o desenho da base considerando as informações passadas pelo enunciado:



A área de um trapézio é dada por:

$$A_b = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

B: representa o comprimento da **base maior**;
b: representa o comprimento da **base menor**;
h: representa a **altura**.
Assim, basta **substituirmos** os valores na fórmula.

$$A_b = \frac{(14 + 27) \cdot 13}{2} \quad \rightarrow \quad A_b = 266{,}5\ cm^2$$

A altura do prisma é 42 cm. Agora, aplicando esses valores na fórmula do volume, ficamos com:

$$V = 266{,}5 \cdot 42 \quad \rightarrow \quad V = 11.193\ cm^3$$

Encontramos o volume do prisma. No entanto, a unidade do item ainda está diferente, o que dificulta a comparação. **Temos que deixar tudo na mesma unidade**. *(Pessoal, por isso eu reforço bastante, tire um tempinho para revisar as conversões de unidade).* Sabemos que:

$$1\ cm^3 = 1\ mL \qquad\qquad 1\ dm^3 = 1\ L$$

Logo, quando o enunciado fala em 11 dm^3, **ele está falando em 11 L.** Quando encontramos o volume de 11.193 cm^3, encontramos **11.193 mL**. Veja que agora ficou bem mais fácil converter as unidades, já que **mililitros e litros são unidades bem mais corriqueiras**.

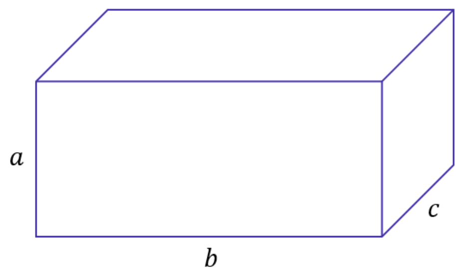
$$11.193\ mL = 11{,}193\ L$$

Note, portanto, que **o volume do prisma é superior aos 11 dm³** trazidos pelo item.

Gabarito: CERTO.

10. (CESPE/CORREIOS/2011) Considerando-se que duas caixas, A e B, tenham, ambas, a forma de um paralelepípedo retângulo, que a caixa A tenha arestas que meçam 27 cm, 18 cm e 9 cm, e a caixa B tenha arestas medindo o dobro das arestas da caixa A, é correto afirmar que o volume da caixa B corresponde a
A) 8 vezes o volume da caixa A.
B) 2 vezes o volume da caixa A.
C) 3 vezes o volume da caixa A.
D) 4 vezes o volume da caixa A.
E) 6 vezes o volume da caixa A.

Comentários:
Para resolver esse item, **não precisaremos dos valores informados**! Imagine um paralelepípedo genérico, conforme representado no desenho abaixo.



Sabemos que o volume dele é dado pelo **produto das três dimensões**.

$$V_i = abc$$

Agora, considere que **dobramos as arestas**. Assim,

$$V_f = (2a) \cdot (2b) \cdot (2c) \quad \rightarrow \quad V_f = 8abc \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{V_f = 8 \cdot V_i}$$

Note que o volume do novo paralelepípedo é **8 vezes** o valor do volume inicial! Já podemos marcar.

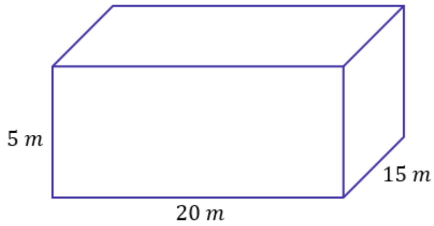
Gabarito: LETRA A.

11. (CESPE/CBM-ES/2010) Uma caixa-d'água tem formato de um paralelepípedo retângulo, e outra, de um cilindro circular. A caixa-d'água com formato de paralelepípedo tem base igual a 20 m e 15 m, e altura igual a 5 m. O raio da base da caixa com formato cilíndrico mede 10 m, e a altura, 5 m. Tomando 3,14 como o valor aproximado da constante julgue o item que se segue.

A caixa com formato de paralelepípedo tem mais capacidade de armazenamento de água que a caixa com formato cilíndrico.

Comentários:

Precisamos calcular o volume da caixa com formato de paralelepípedo. Com as informações do enunciado, podemos desenhar o seguinte sólido:



Sabemos que o volume de um paralelepípedo é dado pelo **produto de suas três dimensões**. Assim,

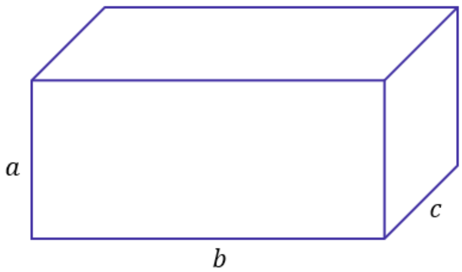
$$V_p = 5 \cdot 20 \cdot 15 \qquad \rightarrow \qquad V_p = 1.500\ m^3$$

No item anterior, calculamos o volume da caixa cilíndrica e encontramos $\boldsymbol{V_c = 1.570\ m^3}$. Observe que a caixa cilíndrica **tem maior capacidade**, ao contrário do que afirma o item.

Gabarito: ERRADO.

12. (CESPE/PREF. IPOJUCA/2009) Em uma piscina que tenha a forma de um paralelepípedo com comprimento igual a 6 m, largura igual a 3 m e altura igual a 2 m, cabem 36.000 litros d'água.

Comentários:
Questão que nos exige calcular **o volume de um paralelepípedo**. Note que a questão trouxe todas as dimensões dele. Assim, para encontrar o seu volume, basta fazer **a multiplicação das três quantidades**.



$$V = abc \qquad \rightarrow \qquad V = 2 \cdot 6 \cdot 3 \qquad \rightarrow \qquad V = 36\ m^3$$

Creio que o maior foco da questão era determinar se conhecíamos **a conversão entre metro cúbico e litros**. Saber essas conversões é de extrema importância, galera! Lembre-se:

$$1\ m^3 = 1.000\ L$$

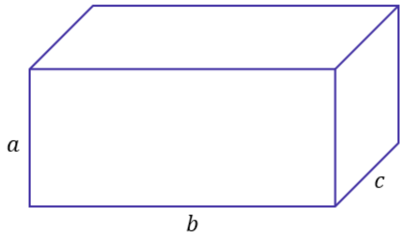
Logo, quando encontramos que o volume da piscina era 36 m³, estamos dizendo, com outras unidades, que o volume dela é **36.000 litros**.

Gabarito: CERTO.

13. (CESPE/MPE-RR/2008) Considere que a carroceria de um caminhão de transporte de cargas tenha a forma de um paralelepípedo retângulo medindo 8 m × 3 m × 4 m. Com base nessas informações, julgue o item que se segue.

O volume máximo de carga que esse caminhão pode transportar em sua carroceria é inferior a 100.000 litros.

Comentários:
Questão que nos exige a aplicação direta da fórmula de **volume para o paralelepípedo**. Lembre-se que quando temos esse sólido, o volume é dado pelo **produto das três dimensões**. Assim,



$$V = abc$$

O enunciado forneceu o valores: **8m, 3m e 4m**. Logo,

$$V = 8 \cdot 3 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad V = 96\, m^3$$

No entanto, a questão quer a resposta **em litros**. Para isso, devemos ter em mente que $\mathbf{1\, m^3 = 1.000\, L}$.

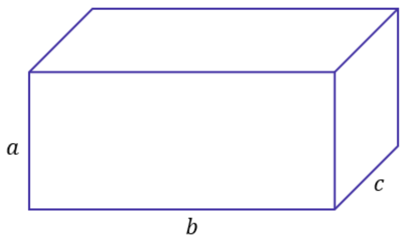
$$V = 96\, m^3 = 96.000\, L$$

Logo, o item acerta quando afirma que ***a capacidade da carroceria é <u>inferior</u> a 100.000L***.

Gabarito: CERTO.

14. (CESPE/PGE-PA/2007) Se uma caixa d'água tem a forma de um paralelepípedo retângulo, em que a base é um retângulo de lados 100 cm × 50 cm e a altura mede 80 cm, então o volume da caixa d'água, em litros, é igual a
A) 200.
B) 400.
C) 2.000.
D) 4.000.

Comentários:
Essa questão é idêntica à anterior. Coloquei mais para treino e enfatizar o quanto é importante sabermos a do **volume para o paralelepípedo**. Lembre-se que quando temos esse sólido, o volume é dado pelo **produto das três dimensões**.



$$V = abc$$

O enunciado forneceu o valores: **100 cm, 50 cm e 80 cm**. Logo,

$$V = 100 \cdot 50 \cdot 80 \quad \rightarrow \quad V = 400.000\ cm^3$$

No entanto, a questão quer a resposta **em litros**. Para isso, devemos ter em mente que $\mathbf{1\ cm^3 = 1\ mL}$.

$$V = 400.000\ cm^3 = 400.000\ mL = 400\ L$$

Gabarito: LETRA B.

QUESTÕES COMENTADAS - CEBRASPE

Pirâmide

1. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Uma pirâmide de altura $h = 2\sqrt{3}$ cm com base dada por um hexágono regular de lado $l = 3$ cm tem volume $V = \sqrt{3}$ cm³.

Comentários:
Vamos lá, moçada! É hora de calcular o volume de uma pirâmide de base hexagonal regular.

Lembre-se que **o volume de qualquer pirâmide** é dado por:

$$V = \frac{A_b H}{3}$$

Como **a base é um hexágono regular**, então sua área é dada por:

$$A_b = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$$

O enunciado passou o valor do lado: $\boldsymbol{L = 3\ cm}$. Assim,

$$A_b = \frac{3 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad A_b = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

Com **o valor da área da base e da altura**, usamos agora a fórmula do volume.

$$\mathrm{V} = \frac{\left(\frac{27\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 2\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{V = 27\ cm^3}}$$

Gabarito: ERRADO.

2. (CESPE/CBM-AL/2021) Julgue o seguinte item, relativos a geometria espacial.

Para cobrir um tetraedro regular de aresta igual a $\sqrt[4]{3}$ m com um material adesivo que custa R$ 5,50/m², deve-se gastar R$ 16,50.

Comentários:
Primeiramente, precisamos encontrar a área superficial do tetraedro regular. Lembre-se que um tetraedro regular tem **4 faces e cada uma delas é um <u>triângulo equilátero</u>**. Sendo assim, a área superficial do tetraedro é igual a:

$$A_s = 4 \cdot \left(\frac{L^2\sqrt{3}}{4}\right) \quad \rightarrow \quad A_s = L^2\sqrt{3}$$

De acordo com o enunciado, a aresta desse tetraedro é igual a $\sqrt[4]{3}$ m.

$$\mathrm{A_s} = \left(\sqrt[4]{3}\right)^2\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_s} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_s} = 3\ \mathrm{m}^2$$

Como **o custo de material adesivo é de R$ 5,50 /m²**. Sendo assim, o total que se deve gastar é:

$$C_t = 3 \cdot 5{,}50 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{C_t = 16,50}}$$

Gabarito: CERTO.

3. (CESPE/PM-AL/2021) Com relação às geometrias plana, espacial e analítica, julgue o item que se segue.

A área superficial de uma pirâmide de base quadrada regular em que todas as arestas são iguais a 2 é $S = 4 + 4\sqrt{3}$.

Comentários:
Pessoal, se **todas as arestas são iguais a 2**, então as faces laterais dessa pirâmide são **triângulos equiláteros** de lados iguais a 2.

A área de um triângulo equilátero é igual a:

$$A_e = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Como a base dessa pirâmide é um quadrado, vamos ter **4 triângulos equiláteros nas laterais**.

Sendo assim, a areal lateral é 4 vezes a área acima.

$$A_l = 4A_e \quad \rightarrow \quad A_l = L^2\sqrt{3}$$

A aresta é igual a 2, com isso, podemos substituir:

$$\mathrm{A_l} = 2^2\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_l} = 4\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$$

Essa é a área lateral, falta ainda contabilizarmos a área da base, para obtermos a área superficial.

Como **a base é um quadrado**:

$$\mathrm{A_b} = \mathrm{L}^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_b} = 2^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_b} = 4\ \mathrm{cm}^2$$

Pronto! A área superficial é a soma da área lateral com a área da base.

$$A_s = A_b + A_l \quad \rightarrow \quad \boxed{A_s = 4 + 4\sqrt{3}\ cm^2}$$

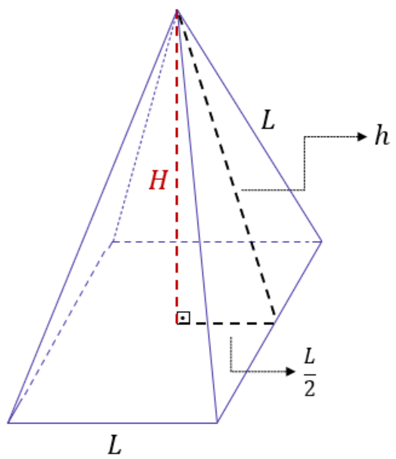
Gabarito: CERTO.

4. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item seguinte, referente a geometria analítica, geometria plana e geometria espacial.

Situação hipotética: As faces laterais de uma pirâmide regular quadrangular são triângulos equiláteros, e todas as arestas da pirâmide medem L cm. **Assertiva:** Nessa situação, a altura da pirâmide é igual a $\frac{L}{\sqrt{2}}$ cm.

Comentários:

Observe que se temos uma pirâmide regular quadrada em que as faces são triângulos equiláteros, então **todas as arestas dessa pirâmide, incluindo as da base, medem L cm**. Assim, podemos compor o seguinte desenho.



Estamos querendo determinar a altura da pirâmide H. Como vamos fazer isso? Ora, quero que você perceba **o triângulo retângulo formado pelos catetos H e L/2 e hipotenusa h**. É com ele que resolveremos nosso problema. h nada mais é do que **a altura do triângulo equilátero**. Da nossa teoria, vimos que ela é dada por:

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Com o valor de h explicitado, **podemos usar o teorema de Pitágoras** e encontrar o valor da altura.

$$H^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = h^2 \quad \rightarrow \quad H^2 + \frac{L^2}{4} = \frac{L^2 \cdot 3}{4} \quad \rightarrow \quad H^2 = \frac{3L^2}{4} - \frac{L^2}{4} \quad \rightarrow \quad H^2 = \frac{L^2}{2}$$

$$\boldsymbol{H = \frac{L}{\sqrt{2}}\ cm}$$

Gabarito: CERTO.

QUESTÕES COMENTADAS - CEBRASPE

Cilindro

1. (CESPE/CBM-TO/2021) Considere um caminhão-pipa cujo tanque é cilíndrico com comprimento igual a 4 metros e diâmetro igual a 2 metros. Usando-se π = 3,14, é correto estimar que o volume desse tanque é igual a

A) 6.280 litros.
B) 12.560 litros.
C) 25.120 litros.
D) 50.240 litros.

Comentários:
Questão bem direta para aplicarmos a fórmula do **volume de um cilindro**. Lembre-se da teoria que:

$$V = \pi R^2 H$$

De acordo com o enunciado, **temos $H = 4$ m e $R = 1$** m. O raio é metade do diâmetro.

Como o enunciado pediu para usar $\pi = 3{,}14$, ficamos com:

$$V = 3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 4$$

$$V = 12{,}56\ m^3$$

O resultado está em **metros cúbicos (m^3)** mas todas as alternativas estão em **litros**.

Para transformar m^3 em litros, devemos multiplicar o resultado por mil.

$$V = 12{,}56 \cdot 1000$$

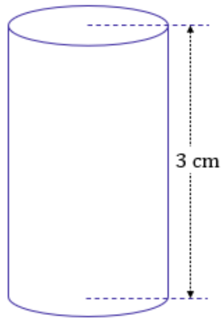
$$\boxed{V = 12560\ L}$$

Gabarito: LETRA B.

2. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item seguinte, referente a geometria analítica, geometria plana e geometria espacial.

Se a área total de um cilindro circular reto de 3 cm de altura for igual ao triplo de sua área lateral, então o volume desse cilindro será inferior a 400 cm^3.

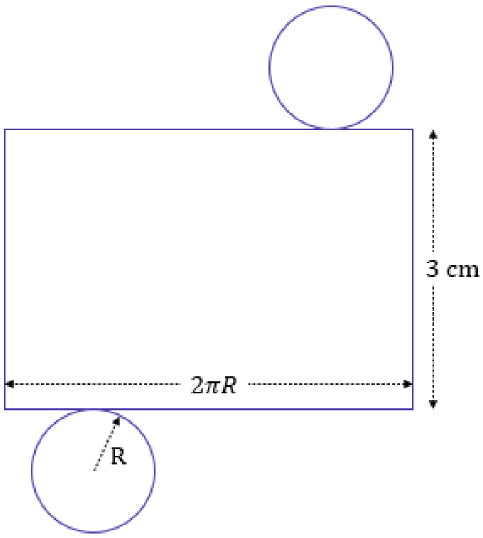
Comentários:
Temos um **cilindro circular reto de 3 cm de altura**. Vamos desenhá-lo.



Além disso, o enunciado informa que **a área total é o triplo da área lateral**. Lembre-se que **a área total é o somatório da área lateral com duas vezes a área da base**. Assim,

$$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lat} = 3 \cdot A_{lat} \quad \rightarrow \quad 2 \cdot A_{base} = 2 \cdot A_{lat} \quad \rightarrow \quad A_{base} = A_{lat}$$

Observe que, para a condição do enunciado ser satisfeita, a área da base deve ser igual a área lateral. **Na base temos um círculo,** logo, $A_{base} = \pi R^2$. **A lateral do cilindro é um retângulo** com um dos lados medindo a própria altura do cilindro e o outro lado medindo o comprimento da circunferência. Lembre-se:



Assim, $A_{lat} = (2\pi R) \cdot 3 = 6\pi R$. Logo, podemos encontrar o valor do raio usando $A_{base} = A_{lat}$.

$$\pi R^2 = 6\pi R \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R = 6\ cm}$$

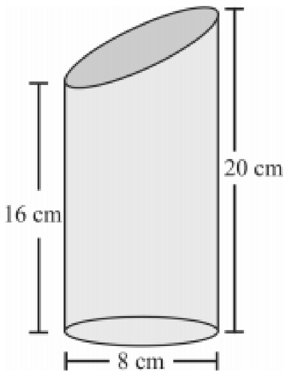
Com o raio em mãos, podemos determinar o volume do cilindro.

$$V = A_{base} \cdot H \quad \rightarrow \quad V = \pi \cdot 6^2 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad V = 108\pi \quad cm^2$$

Usando que $\boldsymbol{\pi \cong 3,14}$, ficamos com $V = 108 \cdot 3{,}14 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{V = 339,12\ cm^2}$. O **resultado é inferior a 400 cm³**, logo, o item está correto.

Gabarito: CERTO.

3. (CESPE/IFF/2018)



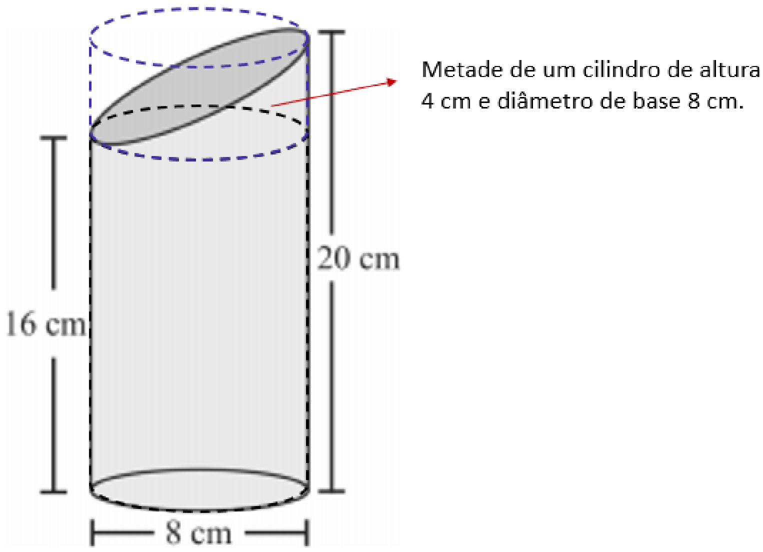
Um cilindro circular reto, cuja base tem diâmetro de 8 cm, foi cortado por um plano inclinado em relação à base, dando origem ao tronco de cone apresentado. A altura maior do tronco de cone mede 20 cm e a menor, 16 cm. Nesse caso, o volume do tronco de cone é igual a

A) 256π cm³.
B) 288π cm³.
C) 320π cm³.
D) 576π cm³.
E) 1.152π cm³.

Comentários:

O primeiro comentário importante que deve ser feito é sobre o enunciado chamar o sólido resultante de tronco de cone. O que temos é um **tronco de cilindro**. Tudo bem?!

Existe mais de uma maneira de resolver essa questão, vou explicar a que julgo mais simples, pois não precisaremos saber de outras fórmulas ou princípios além do que já estudamos.



Veja que temos um cilindro grandão e que foi tirado um pedaço dele. Esse pedaço retirado é exatamente **metade de um cilindro menor**, que destacamos na figura acima. Portanto, para calcular o volume do sólido, seguiremos exatamente essa linha de raciocínio:

- Calcularemos o volume do cilindro maior, **como se completo fosse**.
- Descontaremos **metade do volume do cilindro menor**, que está destacado na figura.

Na teoria, mostramos que o volume do cilindro é dado **produto da área da base pela altura**.

$$V = A_b \cdot H$$

Para o cilindro maior, temos $R = 4\ cm$ e $H = 20\ cm$:

$$A_b = \pi R^2 \quad \rightarrow \quad A_b = \pi \cdot 4^2 \quad \rightarrow \quad A_b = 16\pi\ cm^2$$

$$V = 16\pi \cdot 20 \quad \rightarrow \quad V = 320\pi\ cm^3$$

Agora, devemos descontar o volume arrancado. Observe que **a área da base do cilindro menor é a mesma**. Temos apenas uma mudança na altura que passa a ser $H = 4$ cm.

$$V_{menor} = 16\pi \cdot 4 \quad \rightarrow \quad V_{menor} = 64\pi$$

Esse é o volume do cilindro menor. Como, depois do corte, **ainda sobrou metade desse cilindro**, devemos **subtrair** do cilindro maior apenas a metade desse volume. Tudo bem?!

$$V_{sólido} = V - \frac{V_{menor}}{2} \quad \rightarrow \quad V_{sólido} = 320\pi - 32\pi \quad \rightarrow \quad V_{sólido} = 288\pi\ cm^3$$

Gabarito: LETRA B.

(INPE/2013) Texto para as próximas questões
Considere um reservatório de formato cilíndrico com volume de 60 m^3 que esteja conectado a um cano para enchê-lo. Sabendo que a vazão do cano é definida como sendo o volume de água que sai do cano por segundo, julgue os itens seguintes.

4. (CESPE/INPI/2013) Se o custo para encher esse reservatório de 60.000 dm^3 for de R$ 0,03 por segundo, então a utilização de uma vazão de 40.000 mL por segundo será 25% mais econômico que a utilização de uma vazão de 0,0125 m^3 por segundo.

Comentários:
O enunciado trouxe o conceito de vazão: **volume de água que sai do cano por segundo**. Matematicamente,

$$z = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Calma, pessoal. Essa não é uma aula de física. Na prática, não precisamos saber essa fórmula para resolver a questão. No entanto, entender bem a vazão é importante, pois muitos e exercícios que envolvem sólidos e volumes trazem esse conceito. Tudo bem?!

Queremos **encher um reservatório de 60.000 dm³**. Já podemos perceber uma unidade "estranha" aqui. Lembre-se que:

$$1\ dm^3 = 1\ L$$

Logo, podemos reescrever a informação: **queremos encher um reservatório de 60.000 litros**. Melhor, né?! Para encher esse reservatório, temos duas opções:

- Na primeira, a vazão é 40.000 mL por segundo.

Aqui, a unidade foi mL, sabemos que **1 litro possui 1.000 mL**. Logo, 40.000 mL = 40 L. Assim, a vazão pode ser reescrita como 40L por segundo.

- Na segunda, a vazão é 0,0125 m³ por segundo.

Dessa vez, o enunciado trouxe a unidade m³. Em nossa teoria, mostramos que **1 m³ possui 1.000 L**. Assim, com uma regra de três, a vazão dada é equivalente 12,5 L por segundo.

Note que a primeira opção encherá o reservatório muito mais rápido! (**40 L/s contra 12,5 L/s**). Vamos calcular **o <u>tempo necessário</u> para cada um encher o reservatório**. Para isso, *podemos dividir o volume pela vazão*.

$$\Delta t_1 = \frac{60000}{40} \quad \rightarrow \quad \Delta t_1 = 1500\ s$$

$$\Delta t_2 = \frac{60000}{12{,}5} \quad \rightarrow \quad \Delta t_2 = 4800\ s$$

Para saber quanto cada um vai pagar, basta **multiplicamos o tempo pelo preço do segundo**.

$$P_1 = 1500 \cdot 0{,}03 \quad \rightarrow \quad P_1 = R\$\ 45{,}00$$

$$P_2 = 4800 \cdot 0{,}03 \quad \rightarrow \quad P_2 = R\$\ 144{,}00$$

Veja que, enquanto **a primeira opção custa R$ 45,00, a segunda custará R$ 144,00**. Logo, a economia é de:

$$Economia = \frac{(144 - 45)}{144} \cdot 100 \quad \rightarrow \quad Economia = 68{,}75\%$$

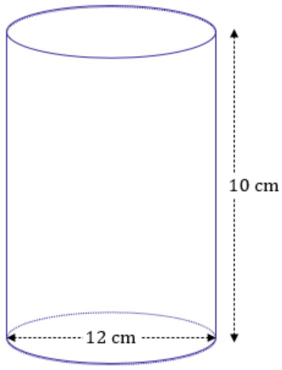
A economia **é bem <u>maior</u> do que os 25%** informado pelo item.

Gabarito: ERRADO.

5. (CESPE/SEE-AL/2013) Para confeccionar os brigadeiros e os doces de coco para a festa de seu filho, Maria preparou uma lata de brigadeiro — cilíndrica, com medidas internas iguais a 12 cm de diâmetro e 10 cm de altura — e uma lata de docinho de coco — cilíndrica, com medidas internas iguais a 8 cm de diâmetro e 10 cm de altura. Considerando que os brigadeiros e os docinhos de coco tenham sido enrolados sob a forma de uma pequena esfera de 1 cm de raio, julgue o item a seguir.

Maria preparou ingredientes suficientes para enrolar mais de 250 brigadeiros.

Comentários:
Temos dois cilindros com bases diferentes, no entanto, vamos focar na **lata de brigadeiro**.



LATA de BRIGADEIRO

Primeiro, devemos calcular o volume da lata, para sabermos a quantidade de brigadeiro. Lembre-se que o volume de um cilindro é **o produto da área da base pela altura**. Assim,

$$V = A_b \cdot H \quad \rightarrow \quad V = (\pi \cdot 6^2) \cdot 10 \quad \rightarrow \quad V = 360\pi\ cm^3$$

Agora, vamos calcular **o volume de um único brigadeiro**. O enunciado diz que o brigadeiro tem formato de uma **esfera de raio 1 cm**. O volume de uma esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \quad \rightarrow \quad V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 \quad \rightarrow \quad V = \frac{4}{3}\pi\ \ cm^3$$

O número de brigadeiros é dado pelo **volume total da lata dividido pelo volume de um único brigadeiro**.

$$N = \frac{360\pi}{\frac{4}{3}\pi} \quad \rightarrow \quad N = 270\ brigadeiros$$

Veja que serão possíveis enrolar **270 brigadeiros**, quantidade essa realmente superior aos 250 do item.

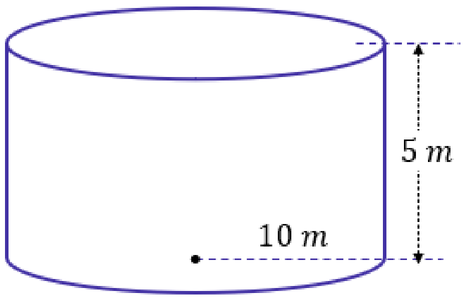
Gabarito: CERTO.

6. (CESPE/CBM-ES/2010) Uma caixa-d'água tem formato de um paralelepípedo retângulo, e outra, de um cilindro circular. A caixa-d'água com formato de paralelepípedo tem base igual a 20 m e 15 m, e altura

igual a 5 m. O raio da base da caixa com formato cilíndrico mede 10 m, e a altura, 5 m. Tomando 3,14 como o valor aproximado da constante π julgue o item que se segue.

A caixa com formato cilíndrico tem capacidade de $1.570\ m^3$.

Comentários:
Precisamos calcular **o volume do cilindro**.



Para isso, basta multiplicarmos **a área da base pela altura**. Sabemos que a área de um círculo é dada por:

$$A_b = \pi R^2 \quad \rightarrow \quad A_b = 3{,}14 \cdot 10^2 \quad \rightarrow \quad A_b = 314\ m^2$$

Agora, o volume do cilindro fica:

$$V = A_b \cdot H \quad \rightarrow \quad V = 314 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{V = 1.570\ m^3}$$

Gabarito: CERTO.

Questões Comentadas - Cebraspe

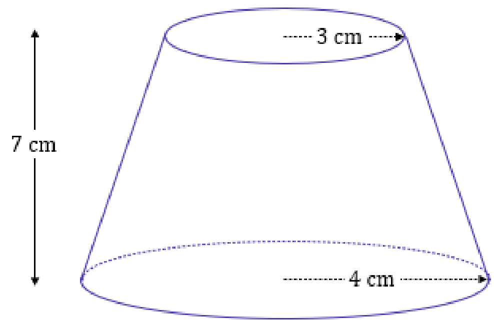
Cone

1. (CESPE/PC-ES/2010) Os policiais da delegacia de defesa do consumidor apreenderam, em um supermercado, 19,5 kg de mercadorias impróprias para o consumo: potes de 150 g de queijo e peças de 160 g de salaminho. Com base nessa situação, julgue o item a seguir.

Suponha que os potes de queijo tenham a forma de um tronco de cone de 7 cm de altura, em que o raio da base maior meça 4 cm e o da base menor, 3 cm. Nesse caso, tomando 3,14 como valor aproximado para π, é correto afirmar que essas embalagens têm capacidade para, no máximo, 250 mL.

Comentários:

Essa é uma excelente questão para **treinarmos um pouco** sobre tronco de cone. Vamos resolver a questão de duas maneiras: uma aplicando a fórmula direta (caso você lembre) e outra sem ter que lembrar de fórmulas difíceis.



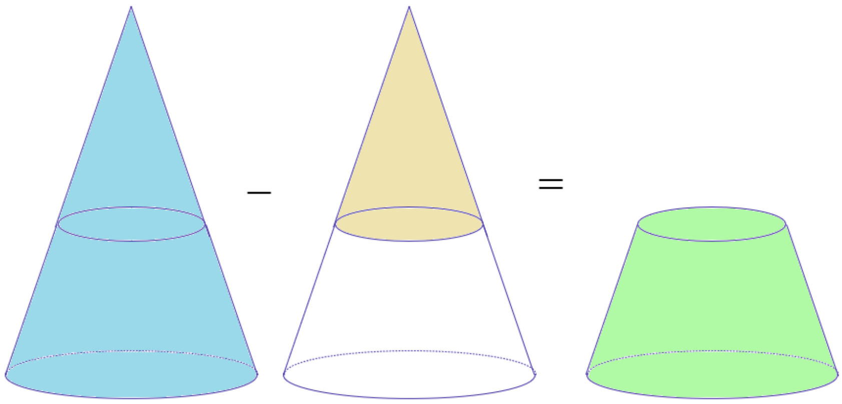
Com as informações passadas pelo enunciado, conseguimos desenhar o sólido acima. Na nossa teoria, demonstramos que o volume do tronco de cone é dado pela seguinte fórmula:

$$V = \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$$

Portanto, para encontrarmos o volume, basta substituirmos os valores.

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 7}{3} \cdot (4^2 + 4 \cdot 3 + 3^2) \quad \rightarrow \quad V \cong 271{,}08\ cm^3$$

Galera, eu sei que **a fórmula do tronco de cone não é nada intuitiva.** Ela é horrível de decorar. Por sorte, algumas vezes, usá-la não será necessário. Para resolver uma questão de tronco de cone sem usar a fórmula, precisaremos fazer **a subtração de dois volumes**: o volume do cone maior e o volume do cone menor. *Mas que cones são esses?* Veja o desenho abaixo:



Note que o volume do tronco (em verde) é a diferença entre o volume do cone (em azul) pelo volume do cone (em marrom). Tudo bem? O volume de um cone nós lembramos:

$$V_{cone} = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

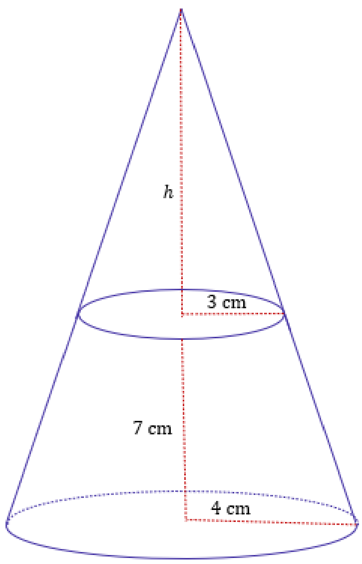
O raio da base do cone azul **é 4 cm**. Assim,

$$A_{b,azul} = \pi \cdot 4^2 \quad \rightarrow \quad A_{b,azul} = 16\pi\ cm^2$$

O raio da base do cone marrom **é 3 cm**. Assim,

$$A_{b,marrom} = \pi \cdot 3^2 \quad \rightarrow \quad A_{b,marrom} = 9\pi\ cm^2$$

Agora, **falta determinarmos <u>as alturas</u> do cones**. Para isso, precisamos atentar para a seguinte figura:



Observe que **o cone menor tem a altura h**. Por sua vez, **a altura do cone maior será $h + 7$**. Para determinar h, nós precisamos fazer uma semelhança de triângulos.

$$\frac{h}{h+7} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad 4h = 3h + 21 \quad \rightarrow \quad h = 21\ cm$$

Agora, podemos calcular os volumes.

$$V_{azul} = \frac{A_{b,azul} \cdot (h+7)}{3} \quad \rightarrow \quad V_{azul} = \frac{16\pi \cdot 28}{3} \quad \rightarrow \quad V_{azul} = \frac{448\pi}{3}\ cm^3$$

$$V_{marrom} = \frac{A_{b,marrom} \cdot h}{3} \quad \rightarrow \quad V_{marrom} = \frac{9\pi \cdot 21}{3} \quad \rightarrow \quad V_{marrom} = \frac{189\pi}{3}\ cm^3$$

Vimos que **o volume do tronco será <u>a diferença</u> desses dois volumes**.

$$V_{tronco} = V_{azul} - V_{marrom} = \frac{448\pi}{3} - \frac{189\pi}{3} = \frac{259 \cdot 3{,}14}{3} = 271{,}08\ cm^3$$

Esse é o mesmo resultado que encontramos usando a fórmula (ainda bem! rsrs). Veja que deu um pouco mais de trabalho (pois foi além de apenas uma aplicação de fórmula). Cada uma das resoluções apresenta suas vantagens e desvantagens. A primeira vai te fazer economizar tempo. Por sua vez, a segunda evita que tenha que decorar mais uma fórmula (bem grande por sinal, rsrs). A melhor maneira é você que decide!

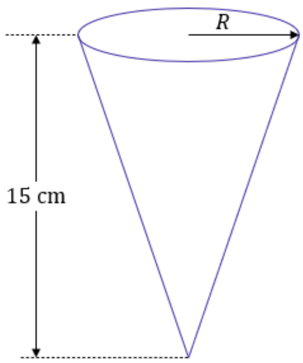
Gabarito: ERRADO.

2. (CESPE/PETROBRÁS/2008) Considere que casquinhas de sorvete têm a forma de um cone circular reto e capacidade para 45π cm³ de sorvete em seu interior. Nesse caso, se as casquinhas têm 15 cm de altura, então o raio da base do cone deve medir

A) $\sqrt{45/\pi}$ cm.
B) $\sqrt{18}$ cm.
C) $3/\sqrt{\pi}$ cm.
D) 3π cm.
E) 3 cm.

Comentários:

Pessoal, temos um **cone circular reto**. O enunciado nos forneceu seu **volume e a sua altura**. Precisamos **descobrir o <u>raio da base</u>**. Para ajudar na visualização, considere o cone abaixo:



Na nossa teoria, mostramos que o volume do cone é dado pela seguinte expressão:

$$V_{cone} = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

As informações do enunciado foram: $V_{cone} = 45\pi\ cm^3$ e $H = 15\ cm$. Vamos substituir.

$$45\pi = \frac{A_b \cdot 15}{3} \quad \rightarrow \quad A_b = 9\pi\ cm^2$$

Como **a base é um círculo**, sabemos calcular sua área e, portanto, o seu raio.

$$\pi R^2 = 9\pi \quad \rightarrow \quad R^2 = 9 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R = 3\ cm}$$

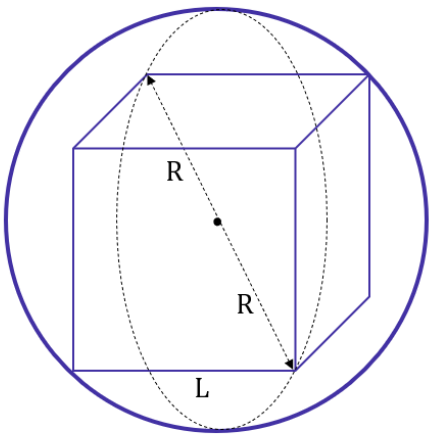
Gabarito: LETRA E.

Questões Comentadas - Cebraspe

Esfera

1. (CESPE/IFF/2018) O volume de um cubo que tem seus vértices sobre uma superfície esférica de raio igual a $5\sqrt{3}$ centímetros é igual a
A) 75 cm³.
B) 125 cm³.
C) $375\sqrt{3}$ cm³
D) 1.000 cm³.
E) $3.000\sqrt{3}$ cm³.

Comentários:
Temos um **cubo dentro de uma esfera**. Imagine algo como a figura abaixo.



Sei que não é a melhor das figuras, mas minha intenção é fazer você perceber que **o diâmetro da esfera coincide com a diagonal do cubo**. Na teoria, vimos que a diagonal de um cubo é dada por:

$$d = L\sqrt{3}$$

L representa **o valor da aresta do cubo**. Como o diâmetro é igual a essa diagonal, podemos igualar as duas quantidades.

$$L\sqrt{3} = 2R \quad \rightarrow \quad L = \frac{2R}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad L = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$$

Esse o valor da aresta em **função do raio da esfera**. O enunciado forneceu que $R = 5\sqrt{3}\ cm$, substitua na fórmula para obter o L.

$$L = \frac{2\sqrt{3} \cdot (5\sqrt{3})}{3} \quad \rightarrow \quad L = 10\ cm$$

Com a aresta do cubo determinada, vamos encontrar o volume.

$$V = L^3 \quad \rightarrow \quad V = 10^3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{V = 1000\ cm^3}$$

Gabarito: LETRA D.

(SEPLAG-DF/2008) Texto para as próximas questões
Julgue os itens a seguir, acerca de um reservatório de gás que tem a forma de uma esfera de 10 m de raio.

2. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Se for construído um novo reservatório esférico, com raio igual à metade do raio do reservatório original, então o volume desse novo reservatório será igual à metade do volume do outro reservatório.

Comentários:
Nós vimos na teoria que **o volume de uma esfera** é dado pela seguinte fórmula:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Se o raio da esfera **for reduzido pela metade**, então ficamos com o volume:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 \quad \rightarrow \quad V_2 = \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{V_1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \quad \rightarrow \quad V_2 = \frac{1}{8} \cdot V_1$$

Veja que se reduzirmos o raio na metade, o volume do reservatório **diminuirá numa proporção bem maior**, resultando em um volume igual a **um oitavo do original (12,5%)**. Logo, o item está incorreto.

Gabarito: ERRADO.

3. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) O volume desse reservatório é igual a 4.000π m³.

Comentários:
Nós vimos na teoria que **o volume de uma esfera** é dado pela seguinte fórmula:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Se o raio do reservatório é $\boldsymbol{R = 10m}$, então, devemos substituir:

$$V = \frac{4}{3}\pi 10^3 \quad \rightarrow \quad V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1000 \quad \rightarrow \quad V = \frac{4000\pi}{3}\ m^3$$

O item **"esqueceu" de dividir por 3**. Logo, encontra-se errado.

Gabarito: ERRADO.

4. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) A área de superfície do reservatório é igual a 400π m².

Comentários:

Questão para treinarmos a aplicação da fórmula da **área de uma superfície esférica**. Lembre-se:

$$A_s = 4\pi R^2$$

Como o raio de reservatório é $\boldsymbol{R = 10\ m}$, devemos substituir o valor:

$$A_s = 4\pi \cdot 10^2 \qquad \rightarrow \qquad A_s = 400\pi\ cm^2$$

O resultado que encontramos **bate com o trazido pelo item**. Portanto, correto.

Gabarito: CERTO.

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Prisma

1. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Julgue o item subsequente, relativos a geometria.

Suponha que o volume (em cm^3) de um cubo seja numericamente menor do que a área (em cm^2) de sua superfície, isto é, a soma das áreas de suas faces. Nessa situação, o comprimento da aresta desse cubo é inferior a 6 cm.

2. (CESPE/TJ-PR/2019) Mesmo com a informatização dos processos, ainda é grande o volume de papéis consumidos nas instituições públicas, o que demanda grandes espaços para seu armazenamento. Por exemplo, uma caixa na forma de um paralelepípedo retângulo medindo 31 cm de largura, 25 cm de altura e 42 cm de comprimento armazena 10 resmas de papel A4. Nesse caso, para armazenar 1.000 dessas caixas em um contêiner, é necessário que a capacidade desse contêiner seja de

A) 32,55 m^3.
B) 39,20 m^3.
C) 77,50 m^3.
D) 98 m^3.
E) 105 m^3.

3. (CESPE/FUB/2018) Paulo, Maria e João, servidores lotados em uma biblioteca pública, trabalham na catalogação dos livros recém-adquiridos. Independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, Paulo cataloga 1/4, Maria cataloga 1/3 e João, 5/12. A respeito da catalogação de livros por esses servidores, julgue o item a seguir.

Situação hipotética: Cada um dos livros que serão catalogados em três dias de trabalho constitui um sólido que tem a forma de um paralelepípedo retângulo de 2.000 cm^3 de volume. **Assertiva:** Nessa situação, se, nesse período, João catalogar 375 desses livros, então, nesse período, os três servidores juntos catalogarão uma quantidade de livros cuja soma dos volumes será superior a 2 m^3.

4. (CESPE/FUB/2018) A figura a seguir mostra uma mesa em que o tampo é um hexágono regular cujo lado mede 80 cm.

Julgue o item que se segue, a respeito da geometria do tampo dessa mesa.

Se esse tampo tiver espessura de 2 cm, então o seu volume será superior a 0,04 m³.

5. (CESPE/PREF. SÃO LUIS/2017) Os biscoitos de sal de determinada marca têm a forma de um paralelepípedo retângulo: a base é um quadrado de lados medindo 6 cm; a altura mede 0,25 cm. Os biscoitos são acondicionados em caixas com capacidade para 5.184 cm³. Nesse caso, a quantidade de biscoitos que podem ser acondicionados em uma dessas caixas é

A) superior a 1.500.
B) inferior a 100.
C) superior a 100 e inferior a 500.
D) superior a 500 e inferior a 1.000.
E) superior a 1.000 e inferior a 1.500.

6. (CESPE/PM-ES/2017) No item a seguir é apresentada uma situação hipotética, seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de modelos lineares, modelos periódicos e geometria dos sólidos.

O tanque para água de um veículo de combate a incêndio tem a forma de um paralelepípedo retângulo e está completamente cheio. No combate a um incêndio, gastou-se 1/3 de sua capacidade. No combate a um segundo incêndio, gastou-se 3/7 do que sobrou. Nesse caso, depois de extintos os dois incêndios, restou, no tanque, água até uma altura superior a 1/3 da altura original.

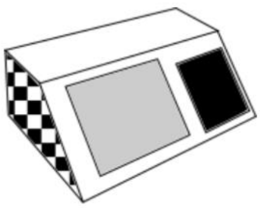
(PRF/2012) Texto para as próximas questões

Considere que o interior de um recipiente tenha a forma de um paralelepípedo retângulo de base quadrada de lado medindo 50 cm e altura, 40 cm. Considere, ainda, que esse recipiente tenha sido enchido com um combustível homogêneo composto de gasolina pura e álcool e que 40% do combustível constitua-se de álcool. Com base nessas informações, julgue o item subsequente.

7. (CESPE/PRF/2012) Se o recipiente estiver assentado sobre um plano horizontal e 30 litros do combustível forem retirados, a altura do combustível que restou no recipiente será inferior a 30 cm.

8. (CESPE/PRF/2012) Menos de 55 litros do combustível contido no recipiente constitui-se de gasolina pura.

9. (CESPE/TRE-ES/2011)



No prisma reto da figura acima, que representa, esquematicamente, uma urna eletrônica, as bases são trapézios retos, em que a base maior mede 27 cm, a base menor, 14 cm, e a altura, 13 cm. A altura do prisma é igual a 42 cm. No retângulo da parte frontal do prisma mostrado na figura, em um dos retângulos destacados, localizam-se as teclas e, no outro, uma tela em que aparece a foto do candidato escolhido pelo eleitor. Para atender aos eleitores portadores de deficiência visual, cada tecla possui, além do caractere comum, sua correspondente representação na linguagem braille. Cada caractere na linguagem

braille é formado a partir de seis pontos colocados em duas colunas paralelas de três pontos cada. Seguindo as regras da linguagem braille, cada caractere é formado levantando o relevo de alguns desses pontos, que pode ser apenas um ponto ou até cinco pontos. A partir dessas informações e considerando 1,4 como valor aproximado de Imagem $\sqrt{2}$, julgue o itens que se segue.

O volume do prisma é superior a 11 dm³.

10. (CESPE/CORREIOS/2011) Considerando-se que duas caixas, A e B, tenham, ambas, a forma de um paralelepípedo retângulo, que a caixa A tenha arestas que meçam 27 cm, 18 cm e 9 cm, e a caixa B tenha arestas medindo o dobro das arestas da caixa A, é correto afirmar que o volume da caixa B corresponde a
A) 8 vezes o volume da caixa A.
B) 2 vezes o volume da caixa A.
C) 3 vezes o volume da caixa A.
D) 4 vezes o volume da caixa A.
E) 6 vezes o volume da caixa A.

11. (CESPE/CBM-ES/2010) Uma caixa-d'água tem formato de um paralelepípedo retângulo, e outra, de um cilindro circular. A caixa-d'água com formato de paralelepípedo tem base igual a 20 m e 15 m, e altura igual a 5 m. O raio da base da caixa com formato cilíndrico mede 10 m, e a altura, 5 m. Tomando 3,14 como o valor aproximado da constante julgue o item que se segue.

A caixa com formato de paralelepípedo tem mais capacidade de armazenamento de água que a caixa com formato cilíndrico.

12. (CESPE/PREF. IPOJUCA/2009) Em uma piscina que tenha a forma de um paralelepípedo com comprimento igual a 6 m, largura igual a 3 m e altura igual a 2 m, cabem 36.000 litros d'água.

13. (CESPE/MPE-RR/2008) Considere que a carroceria de um caminhão de transporte de cargas tenha a forma de um paralelepípedo retângulo medindo 8 m × 3 m × 4 m. Com base nessas informações, julgue o item que se segue.

O volume máximo de carga que esse caminhão pode transportar em sua carroceria é inferior a 100.000 litros.

14. (CESPE/PGE-PA/2007) Se uma caixa d'água tem a forma de um paralelepípedo retângulo, em que a base é um retângulo de lados 100 cm × 50 cm e a altura mede 80 cm, então o volume da caixa d'água, em litros, é igual a
A) 200.
B) 400.
C) 2.000.
D) 4.000.

Gabarito

1. CERTO
2. LETRA A
3. ERRADO
4. ERRADO
5. LETRA D
6. CERTO
7. CERTO
8. ERRADO
9. CERTO
10. LETRA A
11. ERRADO
12. CERTO
13. CERTO
14. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Pirâmide

1. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Uma pirâmide de altura $h = 2\sqrt{3}$ cm com base dada por um hexágono regular de lado $l = 3$ cm tem volume $V = \sqrt{3}$ cm³.

2. (CESPE/CBM-AL/2021) Julgue o seguinte item, relativos a geometria espacial.

Para cobrir um tetraedro regular de aresta igual a $\sqrt[4]{3}$ m com um material adesivo que custa R$ 5,50/m², deve-se gastar R$ 16,50.

3. (CESPE/PM-AL/2021) Com relação às geometrias plana, espacial e analítica, julgue o item que se segue.

A área superficial de uma pirâmide de base quadrada regular em que todas as arestas são iguais a 2 é $S = 4 + 4\sqrt{3}$.

4. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item seguinte, referente a geometria analítica, geometria plana e geometria espacial.

Situação hipotética: As faces laterais de uma pirâmide regular quadrangular são triângulos equiláteros, e todas as arestas da pirâmide medem L cm. **Assertiva:** Nessa situação, a altura da pirâmide é igual a $\frac{L}{\sqrt{2}}$ cm.

Gabarito

1. ERRADO
2. CERTO
3. CERTO
4. CERTO

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Cilindro

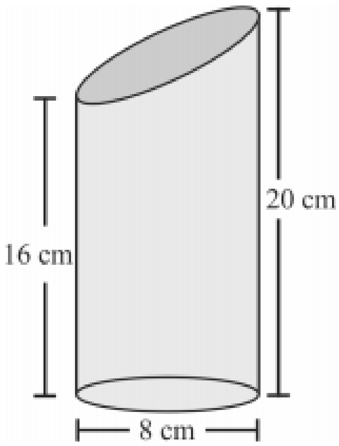
1. (CESPE/CBM-TO/2021) Considere um caminhão-pipa cujo tanque é cilíndrico com comprimento igual a 4 metros e diâmetro igual a 2 metros. Usando-se π = 3,14, é correto estimar que o volume desse tanque é igual a

A) 6.280 litros.
B) 12.560 litros.
C) 25.120 litros.
D) 50.240 litros.

2. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item seguinte, referente a geometria analítica, geometria plana e geometria espacial.

Se a área total de um cilindro circular reto de 3 cm de altura for igual ao triplo de sua área lateral, então o volume desse cilindro será inferior a 400 cm³.

3. (CESPE/IFF/2018)



Um cilindro circular reto, cuja base tem diâmetro de 8 cm, foi cortado por um plano inclinado em relação à base, dando origem ao tronco de cone apresentado. A altura maior do tronco de cone mede 20 cm e a menor, 16 cm. Nesse caso, o volume do tronco de cone é igual a

A) 256π cm³.
B) 288π cm³.
C) 320π cm³.
D) 576π cm³.
E) 1.152π cm³.

(INPI/2013) Texto para a próxima questão

Considere um reservatório de formato cilíndrico com volume de 60 m^3 que esteja conectado a um cano para enchê-lo. Sabendo que a vazão do cano é definida como sendo o volume de água que sai do cano por segundo, julgue os itens seguintes.

4. (CESPE/INPI/2013) Se o custo para encher esse reservatório de 60.000 dm^3 for de R$ 0,03 por segundo, então a utilização de uma vazão de 40.000 mL por segundo será 25% mais econômico que a utilização de uma vazão de 0,0125 m^3 por segundo.

5. (CESPE/SEE-AL/2013) Para confeccionar os brigadeiros e os doces de coco para a festa de seu filho, Maria preparou uma lata de brigadeiro — cilíndrica, com medidas internas iguais a 12 cm de diâmetro e 10 cm de altura — e uma lata de docinho de coco — cilíndrica, com medidas internas iguais a 8 cm de diâmetro e 10 cm de altura. Considerando que os brigadeiros e os docinhos de coco tenham sido enrolados sob a forma de uma pequena esfera de 1 cm de raio, julgue o item a seguir.

Maria preparou ingredientes suficientes para enrolar mais de 250 brigadeiros.

6. (CESPE/CBM-ES/2010) Uma caixa-d'água tem formato de um paralelepípedo retângulo, e outra, de um cilindro circular. A caixa-d'água com formato de paralelepípedo tem base igual a 20 m e 15 m, e altura igual a 5 m. O raio da base da caixa com formato cilíndrico mede 10 m, e a altura, 5 m. Tomando 3,14 como o valor aproximado da constante π julgue o item que se segue.

A caixa com formato cilíndrico tem capacidade de $1.570\ m^3$.

Gabarito

1. LETRA A
2. LETRA B
3. CERTO
4. LETRA B
5. ERRADO
6. CERTO
7. CERTO

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Cone

1. (CESPE/PC-ES/2010) Os policiais da delegacia de defesa do consumidor apreenderam, em um supermercado, 19,5 kg de mercadorias impróprias para o consumo: potes de 150 g de queijo e peças de 160 g de salaminho. Com base nessa situação, julgue o item a seguir.

Suponha que os potes de queijo tenham a forma de um tronco de cone de 7 cm de altura, em que o raio da base maior meça 4 cm e o da base menor, 3 cm. Nesse caso, tomando 3,14 como valor aproximado para $\boldsymbol{\pi}$, é correto afirmar que essas embalagens têm capacidade para, no máximo, 250 mL.

2. (CESPE/PETROBRÁS/2008) Considere que casquinhas de sorvete têm a forma de um cone circular reto e capacidade para 45π cm³ de sorvete em seu interior. Nesse caso, se as casquinhas têm 15 cm de altura, então o raio da base do cone deve medir

A) $\sqrt{45/\pi}$ cm.
B) $\sqrt{18}$ cm.
C) $3/\sqrt{\pi}$ cm.
D) 3π cm.
E) 3 cm.

Gabarito

1. ERRADO
2. LETRA E

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Esfera

1. (CESPE/IFF/2018) O volume de um cubo que tem seus vértices sobre uma superfície esférica de raio igual a $5\sqrt{3}$ centímetros é igual a

A) 75 cm³.
B) 125 cm³.
C) $375\sqrt{3}$ cm³
D) 1.000 cm³.
E) $3.000\sqrt{3}$ cm³.

(SEPLAG-DF/2008) Texto para as próximas questões
Julgue os itens a seguir, acerca de um reservatório de gás que tem a forma de uma esfera de 10 m de raio.

2. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Se for construído um novo reservatório esférico, com raio igual à metade do raio do reservatório original, então o volume desse novo reservatório será igual à metade do volume do outro reservatório.

3. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) O volume desse reservatório é igual a 4.000π m³.

4. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) A área de superfície do reservatório é igual a 400π m².

GABARITO

1. LETRA D
2. ERRADO
3. ERRAD
4. CERTO

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.