Aula 17

TRF 1ª Região (Oficial de Justiça) Raciocínio Analítico e Raciocínio Lógico - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

05 de Abril de 2023

Índice

APRESENTAÇÃO DA AULA

Fala, pessoal!

Hoje trataremos sobre **sistemas lineares**. Antes de começar esse PDF, é necessário que você já tenha uma base de **matrizes** e **determinantes**.

Ressalto desde já que o assunto dessa aula **não costuma ser muito cobrado em provas de concurso público**.

Usualmente procuro colocar questões ao longo da teoria. Para o aprendizado da matéria de **sistemas lineares**, **existe a necessidade de uma base teórica que não costuma ser cobrada diretamente nas questões**, motivo pelo qual essa aula apresenta alguns trechos de teoria sem muitas questões.

Como de costume, vamos exibir um **resumo** logo no **início do tópico** para que você tenha uma visão geral do conteúdo antes mesmo de iniciar o assunto.

Conte comigo nessa caminhada =)

Prof. Eduardo Mocellin.

@edu.mocellin

SISTEMAS LINEARES

Sistemas lineares

Equação linear

Equações lineares são da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$.
- x_1, x_2, x_3, ..., x_n **são incógnitas**;
- a_1, a_2, a_3, ... ,a_n são os **coeficientes**;
- b é o **termo independente**.

Uma **solução de uma equação linear** é um **conjunto ordenado** de **números reais** **que torna a equação verdadeira**.

Sistema linear

Um **sistema linear** é um **conjunto de equações lineares**.
A **solução de um sistema linear** deve tornar verdadeira todas as equações que compõem o sistema.

Representação matricial de um sistema linear:

$$AX = B$$

- A: **Matriz dos coeficientes** ou **matriz incompleta do sistema**;
- X: **Matriz das incógnitas**;
- B: **Matriz dos termos independentes**.
- $[A|B]$: **Matriz completa do sistema**.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 1z = 3 \\ 1x + (-1)y + 1z = 1 \\ 1x + 3y + 0z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sistemas lineares equivalentes

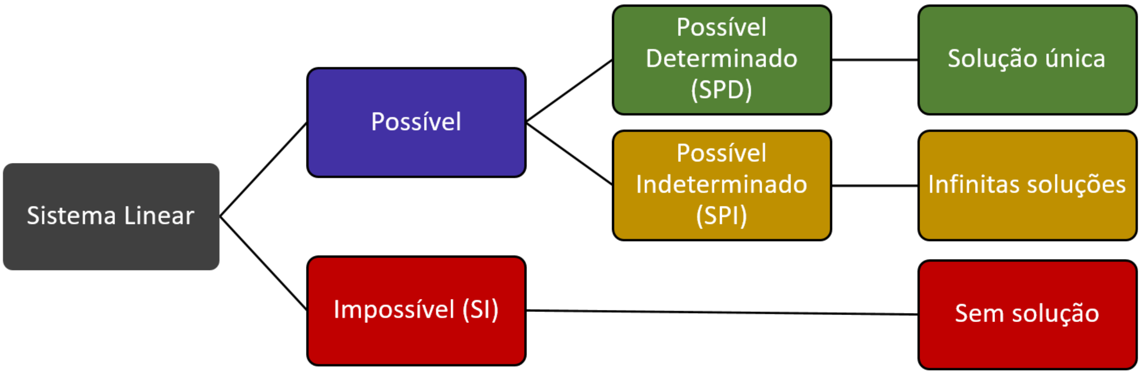
Dois **sistemas lineares** são **equivalentes** quando apresentam as mesmas soluções.
Uma equação L_1 é **combinação linear** de outras equações L_2 e L_3 **quando existem valores reais a e b tais que**:

$$L_1 = aL_2 + bL_3$$

Em um **sistema linear**, ao **substituir** uma **determinada equação** por uma **combinação linear dela** com **outra equação**, temos um **sistema linear equivalente**.

Em um **sistema linear**, quando uma **determinada equação** corresponde a uma **combinação linear** de **outras equações do sistema**, **podemos eliminar essa equação do sistema**.

Classificação de um sistema linear

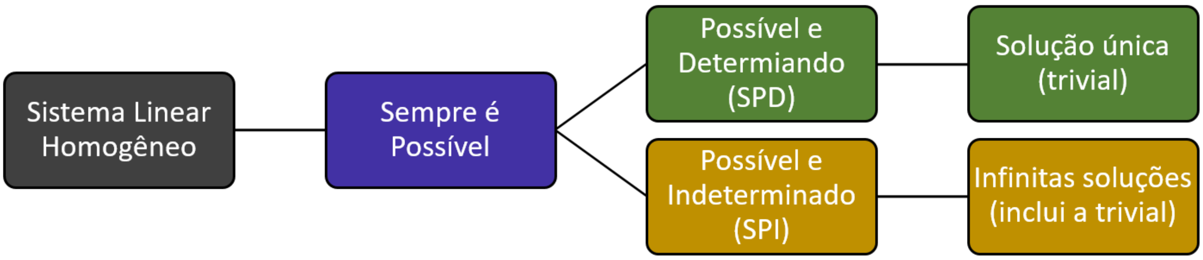


Se um sistema linear apresenta **mais de uma solução**, então ele apresenta **infinitas soluções**.

Sistema linear homogêneo

Um **sistema linear homogêneo** é aquele em que os **termos independentes** de todas as equações são iguais a zero. Sempre admite a solução em que todas as variáveis são zero (**solução trivial**).

$$\begin{cases} 3x + 1y + z = \mathbf{0} \\ 2x + 4y + 2z = \mathbf{0} \\ 3x + 2y + 4z = \mathbf{0} \end{cases}$$



Solução de um sistema linear

- **Solução por substituição**: consiste em isolar uma variável em uma equação e substituir em outra equação.
- **Solução por eliminação de variável:** consiste em eliminar variáveis por meio de uma **combinação linear** conveniente das equações do sistema linear.
- **Solução pela soma das equações do sistema:** existem casos em que a solução do sistema linear é obtida de modo mais rápido realizando a soma de todas as equações do sistema.
- **Solução por matriz inversa:** a **matriz das incógnitas** ($\boldsymbol{X}$) é obtida pelo produto da matriz inversa dos coeficientes pela matriz dos termos independentes: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

Teorema de Cramer

Só pode ser utilizado quando o **número de equações do sistema linear** (n) é igual ao **número de incógnitas.** Nesse caso, a **matriz dos coeficientes** (A) do sistema linear será **quadrada**, de dimensão $n \times n$.
Seja $D = \det A$.

01) Se $D \neq 0$, **o sistema é possível e determinado** (**SPD**), apresentando **solução única**.
02) Sendo $D \neq 0$, a solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ do sistema linear é tal que:

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}$$

Onde D_i é o determinante da matriz que se obtém a partir de $A_{n\times n}$ substinuindo a coluna i pela matriz $B_{n\times 1}$.

Método do escalonamento

O método consiste em **obter um sistema equivalente** ao sistema original em que **o número de variáveis explícitas diminui de equação para equação**. Em outras palavras, o número de coeficientes nulos aumenta de equação para equação.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 2x + 4y + 4z = 22 \\ 2x + 4y + 3z = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + \; y + \; z = \;\; 4 \\ \qquad 3y + 3z = \;\; 18 \\ \qquad\qquad -z = -12 \end{cases}$$

Para obter o sistema escalonado, devemos seguir os seguintes passos:
- Colocar como 1ª equação uma que apresente a 1ª incógnita;
- Anular a **1ª incógnita** de todas as equações (**exceto da 1ª**) fazendo uso da **1ª equação**;
- Anular a **2ª incógnita** de todas as equações (**exceto da 1ª e da 2ª**) fazendo uso da **2ª equação**;
- Anular a **3ª incógnita** de todas as equações (**exceto da 1ª, da 2ª e da 3ª**) fazendo uso da **3ª equação**;
- E assim sucessivamente, até que tenhamos usado todas as equações.

Posto e nulidade de uma matriz

O **posto** de uma matriz é o **número de linhas não nulas de uma matriz escalonada**. A representação do posto de uma matriz A é dada por $\rho(A)$.
A **nulidade** de uma matriz é dada por $null(A) = (\text{Nº } colunas) - \rho(A)$

Discussão de um sistema linear

Discussão por Teorema de Cramer

Para fins de **discussão do sistema linear**, o **Teorema de Cramer** tem serventia quando obtemos $D \neq 0$ **ou quando o sistema é homogêneo**.

Teorema de Cramer

D ≠ 0 → Sistema Possível e Determinado (SPD)

D = 0 → Sistema Possível e Indeterminado (SPI) | Sistema Impossível (SI)

Sistema Linear Homogêneo	
D ≠ 0	D = 0
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
Admite somente a solução trivial	Admite a solução trivial e infinitas outras

Discussão pelo Método do Escalonamento

Passo 1: Escalonar o sistema linear.

Passo 2: Analisar o sistema linear escalonado.

- Se obtivermos uma equação da forma $\mathbf{0x + 0y + 0z + 0w = b}$, com $\mathbf{b \neq 0}$, temos um **sistema impossível** (**SI**);
- **Caso contrário**, temos duas possibilidades:
  - Se o número de **equações** for **igual** ao número de **incógnitas**, temos um **sistema possível e determinado** (**SPD**).
  - Se o número de **equações** for **menor** do que o número de **incógnitas**, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

No escalonamento, se obtivermos uma equação da forma $\mathbf{0x + 0y + 0z + 0w = 0}$, **devemos eliminar essa equação do sistema linear**, pois essa equação é uma combinação linear das outras.

Equação linear

Definição

Nesse momento, vamos mostrar a representação genérica de uma equação linear. Basicamente, uma **equação linear** é uma equação da seguinte forma:

$$\boldsymbol{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_n x_n = b}$$

Em que $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, ..., $\boldsymbol{x_n}$ **são incógnitas**.

Os números reais $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$, ... ,$\boldsymbol{a_n}$ são os **coeficientes** da equação e $\boldsymbol{b}$ é denominado **termo independente**.

Exemplos de **equações lineares**:

Equação linear	Incógnitas	Coeficientes	Termo independente
$\boldsymbol{5x + 3y = 2}$	$\boldsymbol{x\,,y}$	$\boldsymbol{5\,,3}$	$\boldsymbol{2}$
$\boldsymbol{2x + 0y + 3z + 1w = 0}$	$\boldsymbol{x, y, z, w}$	$\boldsymbol{2, 0, 3, 1}$	$\boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{5^2 x_1 + \sqrt{3} x_2 + 1x_3 = \pi}$	$\boldsymbol{x_1, x_2, x_3}$	$\boldsymbol{5^2, \sqrt{3}, 1}$	$\boldsymbol{\pi}$

As equações a seguir **não são equações lineares**.

- $3\sqrt{x} + 2y + z = 3$
- $3x + 2y^2 + z = 1;$
- $5x + \log y + zw = 0;$
- $x + y + \cos z = 3.$

ACORDE!

Note que a **principal restrição** de uma equação linear está na **incógnita**. **Não** se pode ter incógnitas da forma $\sqrt{x}$, y^2 , $\log y$, $\cos z$, por exemplo, bem como **não** se pode ter produto entre incógnitas (zw).

Já os **coeficientes** e o **termo independente** podem ser quaisquer números reais: 5^2, $\sqrt{3}$, π, etc.

Solução de uma equação linear

Uma **solução** de uma equação linear é um **conjunto ordenado** de **números reais** **que torna a equação verdadeira**.

Vamos a um exemplo. Considere a seguinte equação linear:

$$\boxed{3x + 2y + z = 7}$$

Note que o conjunto ordenado $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{4})$ é uma solução, pois:

$$3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 7$$
$$3.\mathbf{1} + 2.\mathbf{0} + \mathbf{4} = 7$$
$$7 = 7$$
(VERDADEIRO)

Podemos ter infinitas soluções para a equação linear em questão. Observe que o conjunto ordenado $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{7})$ também é uma solução, pois:

$$3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 7$$
$$3.\mathbf{0} + 2.\mathbf{0} + \mathbf{7} = 7$$
$$7 = 7$$
(VERDADEIRO)

Vejamos agora o conjunto ordenado $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{5})$:

$$3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 7$$
$$3.\mathbf{5} + 2.\mathbf{5} + \mathbf{5} = 7$$
$$30 = 7$$
(FALSO)

Note que $(\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{5})$ **não é solução da equação linear**, pois esse conjunto ordenado **não tornou a equação linear verdadeira**.

Sistema linear

Definição

Um **sistema linear** nada mais é do que um **conjunto de equações lineares**. A seguir, temos um **sistema linear**, pois trata-se de um conjunto de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 3 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Agora observe o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \mathbf{2^y} = \dfrac{1}{2} \\ \mathbf{x^2 y} = 3 \end{cases}$$

Esse sistema de equações **não é linear**, pois contém equações que não são lineares.

Solução de um sistema linear

Assim como as equações lineares, um sistema linear também apresenta solução. A diferença é que **a solução do sistema linear deve tornar verdadeira todas as equações que compõem o sistema**.

Considere, por exemplo, o seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + y + 3z = 16 \\ 0x + y + z = 3 \end{cases}$$

Note que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ é solução do sistema linear, pois essa solução torna verdadeira as três equações. Vejamos:

Primeira equação	Segunda equação	Terceira equação
$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 6$	$3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z} = 16$	$0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 3$
$\mathbf{3} + \mathbf{1} + \mathbf{2} = 6$	$3.\mathbf{3} + \mathbf{1} + 3.\mathbf{2} = 16$	$0.\mathbf{3} + \mathbf{1} + \mathbf{2} = 3$
$6 = 6$	$16 = 16$	$3 = 3$
(VERDADEIRO)	**(VERDADEIRO)**	**(VERDADEIRO)**

Agora observe o que acontece com $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$:

Primeira equação

$$x + y + z = 6$$
$$2 + 2 + 2 = 6$$
$$6 = 6$$

(VERDADEIRO)

Segunda equação

$$3x + y + 3z = 16$$
$$3.2 + 2 + 3.2 = 16$$
$$14 = 16$$

(FALSO)

Terceira equação

$$0x + y + z = 3$$
$$0.2 + 2 + 2 = 3$$
$$4 = 3$$

(FALSO)

Como $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ satisfaz apenas uma equação do sistema, $(2, 2, 2)$ não é solução do sistema linear.

Veremos mais adiante que um sistema linear pode apresentar uma solução única, infinitas soluções ou então nenhuma solução.

Representação na forma matricial

Considere o seguinte sistema linear com três equações:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 1z = 2 \\ 1x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 1y + 4z = 4 \end{cases}$$

Esse sistema linear também pode ser representado por meio da equação matricial $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{Matriz\ A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{Matriz\ X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{Matriz\ B}$$

$$AX = B$$

Como assim, professor? Como que apareceu uma equação matricial?

Para compreender melhor a representação matricial, vamos desenvolvê-la.

Do lado esquerdo, temos o seguinte produto:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times1}$$

Trata-se da multiplicação de uma matriz 3×3 por uma matriz 3×1. Note que o produto é possível e que o resultado desse produto é uma matriz 3×1.

Colunas da 1ª = Linhas da 2ª

$$A_{3\times 3} \quad X_{3\times 1}$$

Produto: Linhas da 1ª e Colunas da 2ª

$$AX_{3\times 1}$$

Logo, AX é:

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 2x + 2y + 1z \\ 1x + 3y + 2z \\ 3x + 1y + 4z \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Do outro lado da equação, temos uma matriz B, que também apresenta dimensão 3×1:

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Assim, temos:

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} 2x + 2y + 1z \\ 1x + 3y + 2z \\ 3x + 1y + 4z \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Agora temos a igualdade de duas matrizes 3×1. Para as matrizes serem iguais, todos os elementos de mesma posição devem ser iguais:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 1z = 2 \\ 1x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 1y + 4z = 4 \end{cases}$$

Veja que voltamos ao nosso sistema linear!

Logo, **podemos representar um sistema linear** tanto por meio de um **conjunto de equações** quanto por meio de uma **equação matricial** do tipo $AX = B$.

Vejamos alguns exemplos de representação matricial:

Representação por conjunto de equações	Representação matricial $AX = B$
$\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 1x + 1y = 1 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 1x + 2y = 1 \\ 4x + 6y = 4 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 3x + 4y + 1z = 3 \\ 1x + (-1)y + 1z = 1 \\ 1x + 3y + 0z = 2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 3x + 2y + 1z = 3 \\ 1x + 3y + (-1)z = 1 \\ 1x + 3y + 0z = 2 \\ 6x + 4y + 2z = 6 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

Um ponto muito importante ao realizar a representação matricial é ordenar corretamente os **coeficientes**, as **variáveis** e os **termos independentes**.

Suponha, por exemplo, que temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ z - 2x = 1 \\ 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

Devemos colocar os **termos independentes** no lado direito da equação. Nesse caso, **a última equação deve ser modificada**:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ z - 2x = 1 \\ 2y + z = -3 \end{cases}$$

Além disso, devemos ordenar as **variáveis** da forma correta:

$$\begin{cases} \quad x \; + \; 3y + z = 5 \\ -2x \qquad\quad + z = 1 \\ \qquad\quad 2y + z = -3 \end{cases}$$

Por fim, quanto aos **coeficientes**, deve-se entender que:

- Variáveis que aparecem em outras equações e **não** aprecem em uma determinada equação devem ser representadas com um **coeficiente 0**;
- Variáveis que supostamente não apresentam coeficiente na verdade têm **coeficiente 1**.

Ficamos com:

$$\begin{cases} 1x \; + \; 3y + 1z = 5 \\ -2x + 0y + 1z = 1 \\ 0x + 2y + 1z = -3 \end{cases}$$

Portanto, o sistema original apresenta a seguinte forma matricial $\boldsymbol{AX = B}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Importante destacar que a **matriz $\boldsymbol{A}$** é conhecida por **matriz dos coeficientes** ou também **matriz incompleta do sistema**. Já a **matriz $\boldsymbol{X}$** é a **matriz das incógnitas** e a **matriz $\boldsymbol{B}$** é a **matriz dos termos independentes**.

Por fim, você deve saber que a **matriz completa do sistema** é a matriz formada pela **matriz incompleta $(\boldsymbol{A})$** concatenada com a **matriz dos termos independentes $(\boldsymbol{B})$**. Para o exemplo anterior, a matriz completa é dada por:

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

O esquema a seguir resume o que vimos sobre a representação matricial de um sistema linear.

ESQUEMATIZANDO

Representação matricial de um sistema linear:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

- $\boldsymbol{A}$: **Matriz dos coeficientes** ou **matriz incompleta do sistema**;
- $\boldsymbol{X}$: **Matriz das incógnitas**;
- $\boldsymbol{B}$: **Matriz dos termos independentes**;
- $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$: **Matriz completa do sistema**.

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 4y + 1z = 3} \\ \mathbf{1x + (-1)y + 1z = 1} \\ \mathbf{1x + 3y + 0z = 2} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

(SEDUC AM/2014) Considere o sistema linear de três equações e duas incógnitas a seguir:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 5 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

Esse sistema escrito na forma matricial é:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Comentários:

A representação de um sistema linear com **3 equações** e **2 incógnitas** na forma matricial é dado por $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, em que:

• $\boldsymbol{A}$ é a **matriz dos coeficientes**, da forma 3×2;

• $\boldsymbol{X}$ é a **matriz das incógnitas**, da forma 2×1; e

• $\boldsymbol{B}$ é a **matriz dos termos independentes**, da forma 3×1.

Para o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 5 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{1}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} = \mathbf{3} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}\boldsymbol{y} = \mathbf{5} \\ \mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{6}\boldsymbol{y} = \mathbf{7} \end{cases}$$

Temos:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra D.

Sistemas lineares equivalentes

O entendimento do que são sistemas equivalentes será bastante útil adiante, quando estudarmos a **solução de um sistema linear** e a **discussão de um sistema linear**. Vamos à definição:

Definição

Dois **sistemas lineares** são **equivalentes** quando apresentam as mesmas soluções.

Exemplo: considere os sistemas lineares S_1 e S_2.

$$S_1 \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x + y = 7 \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} x + 3y & = & 7 \\ 14y & = & -28 \end{cases}$$

Ainda veremos como obter as soluções de um sistema linear. Nesse momento, você deve acreditar em mim: ambos os sistemas admitem uma única solução dada por $(x, y) = (1, 2)$.

Assim, como ambos os sistemas apresentam as mesmas soluções (no caso, uma solução única), eles são equivalentes.

Podemos representar a equivalência entre dois sistemas por meio de um til " ~ ". Portanto:

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x + y = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y & = & 7 \\ 14y & = & -28 \end{cases}$$

A equivalência entre dois sistemas também pode ser representada por meio da **matriz completa do sistema**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -14 & 28 \end{bmatrix}$$

Combinação linear de equações

Na aula de determinantes, tratamos do conceito de combinação linear. Vamos recapitular a ideia, aplicando o conceito para **equações lineares**.

Podemos dizer que uma equação L_1 é **combinação linear** de outras equações L_2 e L_3 **quando existem valores reais a e b tais que**:

$$L_1 = aL_2 + bL_3$$

Vejamos um exemplo:

Exemplo 1. Considere as três equações abaixo:

$$x + y + z = 5$$
$$2x + y + 3z = 3$$
$$3x + 2y + 4z = 8$$

Note que a **terceira equação** (L_3) é **combinação linear** da **primeira** (L_1) com a **segunda** (L_2), pois $L_3 = \mathbf{1}L_1 + \mathbf{1}L_2$.

Nem sempre é fácil identificar uma combinação linear. Vejamos um outro exemplo:

Exemplo 2. Considere as três equações abaixo:

$$x - y + z = -1$$
$$2x + y + z = 3$$
$$5x + 1y + 3z = 5$$

Temos que a **primeira equação** (L_1) é combinação linear da **segunda** (L_2) e da **terceira** (L_3), pois $L_1 = (-\mathbf{2})L_2 + \mathbf{1}L_3$. Veja:

$$\begin{array}{c|l}
(-\mathbf{2})\boldsymbol{L_2} & -\mathbf{4x} - \mathbf{2y} - \mathbf{2z} = -6 \\
\mathbf{1}\boldsymbol{L_3} & \mathbf{5x} + \mathbf{1y} + \mathbf{3z} = 5 \\
\hline
(-\mathbf{2})\boldsymbol{L_2} + \mathbf{1}\boldsymbol{L_3} & \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{z} = -1
\end{array}$$

Obtenção de sistemas lineares equivalentes

Uma propriedade importante dos sistemas lineares diz respeito à **combinação linear de equações**.

TOME NOTA!

Em um **sistema linear**, ao **substituir** uma **determinada equação** por uma **combinação linear dela** com **outra equação**, temos um **sistema linear equivalente**.

Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x + y = 7 \end{cases}$$

Ao **substituir** a **segunda equação** $(\boldsymbol{L_2})$ pela **combinação linear** $\mathbf{1}\boldsymbol{L_2} + (-\mathbf{5})\boldsymbol{L_1}$, obtemos um novo sistema linear que é equivalente ao primeiro.

Como $\mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{5})L_1$ corresponde a $-\mathbf{14y} = -\mathbf{28}$, ficamos com:

$$\begin{cases} x+3y=7 \\ 5x+y=7 \end{cases} \sim \begin{cases} x+3y & = & 7 \\ \quad 14y & = & -28 \end{cases}$$

Para facilitar a comunicação, a substituição de $\boldsymbol{L_2}$ por $\boldsymbol{L_2} + \mathbf{(-5)}\boldsymbol{L_1}$ será denotada da seguinte forma:

$$\boldsymbol{L_2} \leftarrow \mathbf{1}\boldsymbol{L_2} + \mathbf{(-5)}\boldsymbol{L_1}$$

A propriedade aprendida é válida quando substituímos a equação por uma **combinação linear** de equações **que contenha a equação original**. Para o exemplo apresentado:

$$\boldsymbol{L_2} \leftarrow 1\boldsymbol{L_2} + (-5)L_1$$

Vamos a um outro exemplo. Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+2z=4 \\ 2x+4y+z=5 \end{cases}$$

Ao **substituir** a **segunda equação** (L_2) pela **combinação linear** $\mathbf{1}L_2 + \mathbf{(-1)}L_1$, obtemos um novo sistema linear que é equivalente ao primeiro.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+2z=4 \\ 2x+4y+z=5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z= \ 3 \\ \boldsymbol{y+z}= \ \mathbf{1} \\ 2x+4y+z=5 \end{cases}$$

Remoção de equações do sistema linear

Em um sistema linear, quando uma **determinada equação** corresponde a uma **combinação linear** de **outras equações do sistema**, **podemos eliminar essa equação do sistema**.

Exemplo: considere o seguinte sistema.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=5} \\ \boldsymbol{2x+y+3z=3} \\ \boldsymbol{3x+2y+4z=8} \end{cases}$$

Temos que a **terceira equação** é uma combinação linear da **primeira** com a **segunda**, pois $\boldsymbol{L_3 = 1L_1 + 1L_2}$. Logo, podemos eliminar a terceira equação. Isso significa que temos a seguinte equivalência:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \\ \boldsymbol{3x + 2y + 4z = 8} \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \end{cases}$$

INDO MAIS FUNDO!

A ideia por trás dessa remoção de uma equação é que, em um sistema linear, uma equação que é combinação linear de outras contém uma **informação desnecessária**. No caso apresentado, a informação $\boldsymbol{3x + 2y + 4z = 8}$ já está contida, implicitamente, nas outras duas equações.

Há uma situação análoga em que se pode eliminar uma equação do sistema linear:

TOME NOTA!

Já sabemos que, em um **sistema linear**, ao **substituir** uma **determinada equação** por uma **combinação linear dela** com **outra equação**, temos um **sistema linear equivalente**.

Se nessa substituição obtivermos uma equação no seguinte formato:

$$0x + 0y + 0z + 0w = 0$$

Podemos remover essa equação do sistema linear.

Vamos utilizar o mesmo sistema linear como exemplo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \\ \boldsymbol{3x + 2y + 4z = 8} \end{cases}$$

Ao substituirmos $\boldsymbol{L_3}$ por $\boldsymbol{L_3} + (-1)L_1$, temos o seguinte sistema linear equivalente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \\ \boldsymbol{3x + 2y + 4z = 8} \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \end{cases}$$

Ao substituirmos novamente $\boldsymbol{L_3}$ por $\boldsymbol{L_3} + (-1)L_2$, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ \mathbf{2x + y + 3z = 3} \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ \mathbf{0x + 0y + 0z = 0} \end{cases}$$

Note que obtivemos uma equação no formato $\mathbf{0x + 0y + 0z = 0}$. Logo, podemos eliminar essa equação.

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ \mathbf{0x + 0y + 0z = 0} \end{cases} \sim \begin{cases} \mathbf{x + y + z = 5} \\ \mathbf{2x + y + 3z = 3} \end{cases}$$

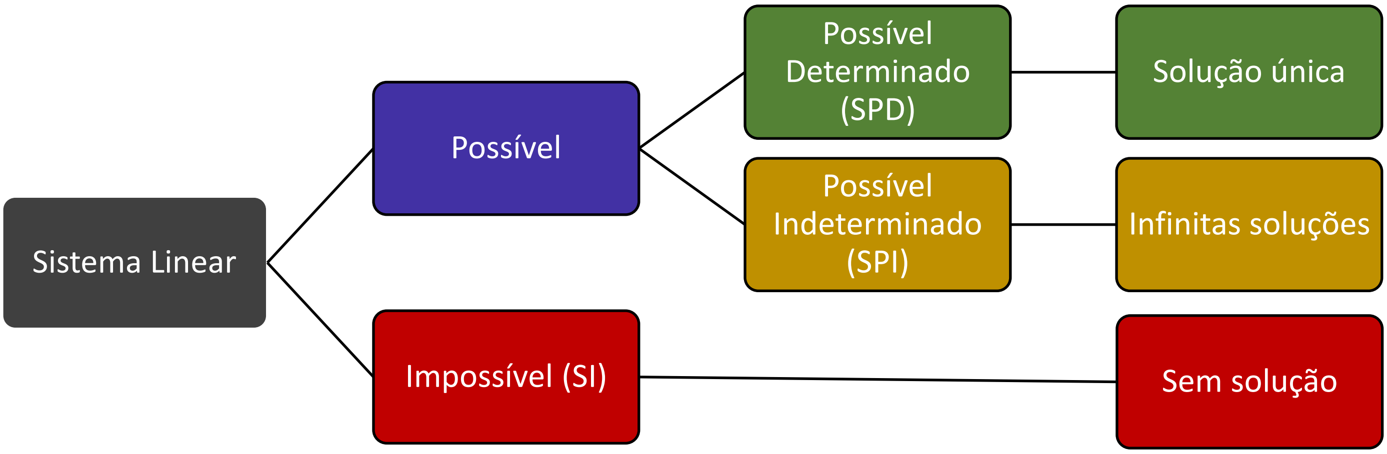
Portanto, temos que o sistema linear original é equivalente ao novo sistema linear obtido, isto é:

$$\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 5} \\ \mathbf{2x + y + 3z = 3} \\ \mathbf{3x + 2y + 4z = 8} \end{cases} \sim \begin{cases} \mathbf{x + y + z = 5} \\ \mathbf{2x + y + 3z = 3} \end{cases}$$

Classificação de um sistema linear

Um sistema linear pode ser classificado de três formas:

- **Sistema Possível e Determinado (SPD)**: o sistema apresenta uma **única** solução;
- **Sistema Possível e Indeterminado (SPI)**: o sistema apresenta **infinitas** soluções; e
- **Sistema Impossível (SI)**: ocorre quando o sistema **não apresenta solução**.



A seguir, vamos entender essas três classificações com maiores detalhes. O procedimento de como realizar essa classificação será visto no tópico de **discussão de um sistema linear**.

ACORDE!

Um sistema linear pode apresentar **solução única**, **infinitas soluções** ou **nenhuma solução**.

Se um sistema linear apresenta **mais de uma solução**, então ele apresenta **infinitas soluções**.

Não existe a possibilidade de ele apresentar "**apenas duas soluções**", "**apenas três soluções**", etc.

Sistema possível e determinado (SPD)

Um **sistema possível e determinado (SPD)** é aquele que admite uma única solução.

Um exemplo de sistema possível e determinado é o seguinte:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 3z = 14 \\ x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

Isso porque ele admite uma única solução: $(x, y, z) = (6, 14, 7)$.

Para um sistema ser possível e determinado, devemos ter:

- **Um número de equações igual ao número de incógnitas**;
- Essas equações **não podem ser combinações lineares umas das outras** (pois, nesse caso, podemos eliminar equações); e
- Essas equações **não podem se contradizer**.

Sistema possível e indeterminado (SPI)

Um **sistema possível e determinado (SPD)** é aquele que admite infinitas soluções.

Podemos tomar como exemplo o sistema que vimos recentemente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \\ \boldsymbol{3x + 2y + 4z = 8} \end{cases}$$

Lembre-se que ele é equivalente a um sistema com duas equações:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \\ \boldsymbol{3x + 2y + 4z = 8} \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \end{cases}$$

Veja que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{6}, -\boldsymbol{1})$, bem como $(-\boldsymbol{4}, \boldsymbol{8}, \boldsymbol{1})$ e $(-\boldsymbol{2}, \boldsymbol{7}\ \boldsymbol{0})$ são soluções do sistema linear.

Solução (x, y, z)	Teste em $x + y + z = 5$	Teste em $2x + y + 3z = 3$
$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{6}, -\boldsymbol{1})$	$0 + 6 + (-1) = 5 \ \rightarrow \boldsymbol{OK}$	$2.0 + 6 + 3.(-1) = 3 \ \rightarrow \boldsymbol{OK}$
$(-\boldsymbol{4}, \boldsymbol{8}, \boldsymbol{1})$	$(-4) + 8 + 1 = 5 \ \rightarrow \boldsymbol{OK}$	$2.(-4) + 8 + 3.1 = 3 \ \rightarrow \boldsymbol{OK}$
$(-\boldsymbol{2}, \boldsymbol{7}, \boldsymbol{0})$	$(-2) + 7 + 0 = 5 \ \rightarrow \boldsymbol{OK}$	$2.(-2) + 7 + 3.0 = 3 \ \rightarrow \boldsymbol{OK}$

Além dessas três soluções, temos infinitas outras. Logo, o sistema é possível e indeterminado.

Sistema impossível (SI)

O **sistema impossível** ocorre quando o sistema **não apresenta solução**.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ \mathbf{2x + y + 3z = 3} \\ \mathbf{2x + y + 3z = 4} \end{cases}$$

Observe o que a segunda e a terceira equação estão nos dizendo: em uma equação, temos que "$\mathbf{2x + y + 3z}$" é **igual a 3** e, na outra, temos que essa mesma soma é **igual a 4.**

Ora, não é possível encontrar uma solução (x, y, z) cuja soma " $\mathbf{2x + y + 3z}$" seja igual a 3 e a 4 ao mesmo tempo. Logo, o sistema é impossível.

Sistema linear homogêneo

Um **sistema linear homogêneo** é aquele em que os **termos independentes** de todas as equações são iguais a zero.

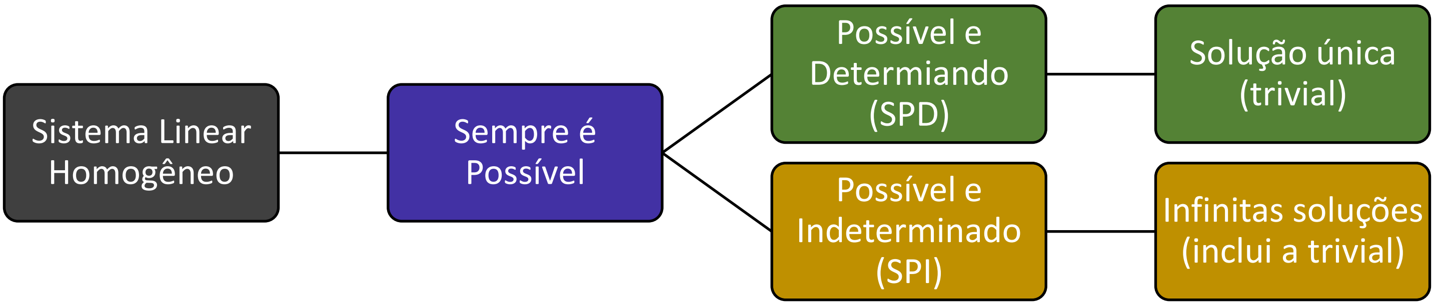
<u>Exemplo</u>:

$$\begin{cases} 3x + 1y + z = \mathbf{0} \\ 2x + 4y + 2z = \mathbf{0} \\ 3x + 2y + 4z = \mathbf{0} \end{cases}$$

Observe que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ é solução desse sistema.

Um **sistema linear homogêneo** é **<u>sempre possível</u>**, pois sempre admite a solução em que todas as variáveis são zero (denominada **solução trivial**).

- Se o sistema linear homogêneo admitir <u>somente</u> a **solução trivial**, então ele é um **Sistema Possível e Determinado** (**SPD**);
- Caso ele admita outras soluções, então ele admite <u>infinitas</u> soluções e é um **Sistema Possível e Indeterminado** (**SPI**).



(ANPEC/2001) Julgue o item a seguir como certo ou errado.

Um sistema homogêneo de equações lineares sempre tem solução.

Comentários:

Um **sistema homogêneo de equações lineares**, ou seja, um **sistema linear homogêneo**, é sempre possível, isto é, sempre admite ao menos uma solução, a **solução trivial**.

Gabarito: CERTO.

Solução de um sistema linear

Pessoal, até o momento o estudo foi mais voltado para a **construção de uma base teórica**. A partir de agora, temos que **redobrar a atenção**.

Solução por substituição

A **solução por substituição** consiste em isolar uma variável em uma equação e substituir em outra equação. Veja o próximo exemplo:

Encontre a solução do seguinte sistema linear: $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 2} \\ \mathbf{2x + y = 4} \end{cases}$.

A partir da segunda equação, podemos isolar y:

$$2x + y = 4$$

$$\boldsymbol{y = 4 - 2x}$$

Substituindo esse $\boldsymbol{y}$ na primeira equação, temos:

$$3x + 2\boldsymbol{y} = 2$$

$$3x + 2.\,(\boldsymbol{4 - 2x}) = 2$$

$$3x - 8 - 4x = 2$$

$$-x + 8 = 2$$

$$-x = -6$$

$$\boldsymbol{x = 6}$$

Como $\boldsymbol{y = 4 - 2x}$, temos:

$$y = 4 - 2\boldsymbol{x}$$

$$y = 4 - 2.\,\boldsymbol{6}$$

$$\boldsymbol{y = -8}$$

Logo, a solução do sistema em questão é $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{6}, \mathbf{-8})$.

HORA DE PRATICAR!

(SEFAZ AM/2022) x e y são tais que $4x + 5y = 80$ e $6x + 7y = 116$. O valor de $2x + 3y$ é:

a) 38

b) 40

c) 42

d) 44

e) 46

Comentários:

Vamos resolver o sistema linear por **substituição**. Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 80 \\ 6x + 7y = 116 \end{cases}$$

A partir da primeira equação, podemos isolar x:

$$4x + 5y = 80$$

$$4x = 80 - 5y$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{80 - 5y}{4}}}$$

Substituindo o valor de x na segunda equação, temos:

$$6x + 7y = 116$$

$$6 \times \left(\frac{80 - 5y}{4}\right) + 7y = 116$$

$$3 \times \left(\frac{80 - 5y}{2}\right) + 7y = 116$$

$$3 \times (40 - 2{,}5y) + 7y = 116$$

$$120 - 7{,}5y + 7y = 116$$

$$-0{,}5y = 116 - 120$$

$$-0{,}5y = -4$$

$$y = \frac{-4}{-0{,}5}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = 8}}$$

Substituindo o valor de y em $\boldsymbol{x = \frac{80-5y}{4}}$, temos:

$$x = \frac{80 - 5y}{4}$$

$$x = \frac{80 - 5 \times 8}{4}$$

$$x = \frac{80 - 40}{4}$$

$$x = \frac{40}{4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 10}}$$

Logo, o valor procurado é:

$$2x + 3y$$

$$= 2 \times 10 + 3 \times 8$$

$$= 20 + 24$$

$$= 44$$

Gabarito: Letra D.

Solução por eliminação de variável

Consiste em eliminar variáveis por meio de uma **combinação linear** conveniente das equações do sistema linear.

Trata-se de uma solução não muito metodológica, uma vez que **não há uma clareza do passo a passo a ser seguido**.

Veremos, mais adiante, que o **método do escalonamento** é uma versão procedimental do que aprenderemos nesse tópico.

Vejamos dois exemplos:

Encontre a solução do seguinte sistema linear: $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$

Ao realizar a soma das duas primeiras equações, isto é, a **combinação linear $L_1 + L_2$**, elimina-se a variável y:

$$\begin{array}{rl} L_1 & 3x + 2y = 2 \\ L_2 & 2x - 2y = 3 \\ \hline L_1 + L_2 & 5x \quad\quad = 5 \end{array}$$

Dividindo ambos os lados da equação por 5, ficamos com:

$$x = 1$$

Para obter y, **podemos substituir o valor de x em qualquer uma das equações do sistema linear**. Vamos substituir na **primeira**:

$$3x + 2y = 2$$

$$3.1 + 2y = 2$$

$$2y = 2 - 3$$

$$2y = -1$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

Logo, a solução do sistema em questão é $(x, y) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

Encontre a solução do seguinte sistema linear: $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 9 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

Ao realizar a **combinação linear** $L_1 + (-1)L_3$, elimina-se as variáveis x e z:

$$\begin{array}{rl} L_1 & x + 2y + z = 5 \\ (-1)L_3 & -x - y - z = -3 \\ \hline L_1 + (-1)L_3 & \quad y \quad = 2 \end{array}$$

Ao realizar a **combinação linear** $L_2 + (-2)L_3$, elimina-se as variáveis x e y:

$$\begin{array}{rr} L_2 & 2x+2y+3z=9 \\ (-2)L_3 & -2x-2y-2z=-6 \\ \hline L_1+(-1)L_3 & z=3 \end{array}$$

Temos, portanto, que $y=2$ e $z=3$. Para obter x, **podemos substituir esses valores em qualquer uma das equações do sistema linear**. Vamos substituir na **terceira**:

$$x+y+z=3$$

$$x+2+3=3$$

$$x=-2$$

Portanto, a solução do sistema linear é $(x,y,z)=(-2,2,3)$.

Solução pela soma das equações do sistema

Pessoal, existem casos em que a solução do sistema linear é obtida de modo mais rápido realizando a **soma de todas as equações do sistema**. Vejamos um exemplo:

Encontre a solução do seguinte sistema linear: $\begin{cases} x+y=3 \\ x+z=4 \\ y+z=5 \end{cases}$

Somando todas as equações do sistema, isto é, realizando a combinação linear $L_1+L_2+L_3$, temos:

$$\begin{array}{rr} L_1 & x+y \quad\;\; =3 \\ L_2 & x+\quad\;\; z=4 \\ L_3 & y+z=5 \\ \hline L_1+L_2+L_3 & 2x+2y+2z=12 \end{array}$$

Ficamos com:

$$2(x+y+z)=12$$

$$x+y+z=6$$

A partir dessa informação, podemos subtrair cada equação do sistema linear de $x+y+z=6$.

$$
\begin{array}{lr}
 & \boldsymbol{x + y + z = 6} \\
\boldsymbol{(-1)L_1} & -x - y \qquad = -3 \\
\hline
 & \boldsymbol{z = \quad 3}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
 & \boldsymbol{x + y + z = 6} \\
\boldsymbol{(-1)L_2} & -x + \quad - z = -4 \\
\hline
 & \boldsymbol{y \qquad = 2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
 & \boldsymbol{x + y + z = 6} \\
\boldsymbol{(-1)L_3} & - y - z = -5 \\
\hline
 & \boldsymbol{x \qquad\quad = 1}
\end{array}
$$

Portanto, a solução do sistema linear é $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3})$.

(MPE SC/2022) No sistema

$$
\begin{cases}
3a + b + c + d = 16 \\
a + 3b + c + d = 6 \\
a + b + 3c + d = 14 \\
a + b + c + 3d = 12
\end{cases}
$$

o valor de a é:

a) –1;

b) 1;

c) 2;

d) 3;

e) 4.

Comentários:

Ao somar todas as equações do sistema linear, temos:

$$
\begin{array}{c}
3a + b + c + d = 16 \\
a + 3b + c + d = \ \ 6 \\
a + b + 3c + d = 14 \\
a + b + c + 3d = 12 \\
\hline
6a + 6b + 6c + 6d = 48
\end{array}
$$

Ficamos com:

$$6(a+b+c+d)=48$$

$$\boldsymbol{a+b+c+d=8}$$

A partir dessa informação, podemos subtrair $\boldsymbol{a+b+c+d=8}$ da primeira equação do sistema linear.

$$\begin{array}{r} 3a+b+c+d=16 \\ \boldsymbol{-a-b-c-d=-8} \\ \hline \boldsymbol{2a \qquad\qquad =8} \end{array}$$

Logo, dividindo os dois lados da equação por 2, temos $\boldsymbol{a=4}$.

Gabarito: Letra E.

(TCE TO/2022) Considere o sistema:

$$\begin{cases} x+y+5z=0 \\ x+5y+z=14 \\ 5x+y+z=28 \end{cases}$$

O valor de x é:

a) 3/2;

b) 5/2;

c) 7/2;

d) 9/2;

e) 11/2.

Comentários:

Ao somar todas as equações do sistema linear, temos:

$$\begin{array}{c} x+y+5z=0 \\ x+5y+z=14 \\ 5x+y+z=28 \\ \hline 7x+7y+7z=42 \end{array}$$

Ficamos com:

$$7(x+y+z)=42$$

$$x+y+z=\frac{42}{7}$$

$$x+y+z=6$$

A partir dessa informação, podemos subtrair $\boldsymbol{x+y+z=6}$ da terceira equação do sistema linear.

$$\begin{array}{rl} 5x+y+z &= 28 \\ \boldsymbol{-x-y-z} &\boldsymbol{= -6} \\ \hline \boldsymbol{4x} \qquad\quad &\boldsymbol{= 22} \end{array}$$

Portanto:

$$x=\frac{22}{4}$$

$$x=\frac{11}{2}$$

Gabarito: Letra E.

Solução por matriz inversa

Considere um sistema linear cujo **número de equações** $(\boldsymbol{n})$ é **igual** ao **número de incógnitas**. Note que, nesse caso, a **matriz dos coeficientes** $(\boldsymbol{A})$ do sistema linear será **quadrada**, de dimensão $\boldsymbol{n\times n}$.

O sistema pode ser escrito na forma matricial do seguinte modo:

$$\boldsymbol{A_{n\times n}X_{n\times 1}=B_{n\times 1}}$$

Supondo que $\boldsymbol{\det A\neq 0}$, você deve se lembrar da aula de determinantes que **a matriz $\boldsymbol{A}$ possui inversa**. Ao multiplicar ambos os lados da equação por A^{-1} pela esquerda, temos:

$$\boldsymbol{A^{-1}AX=A^{-1}B}$$

Pela definição de matriz inversa, temos que $\boldsymbol{A^{-1}A=I}$. Logo:

$$\boldsymbol{IX=A^{-1}B}$$

Como a matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, ficamos com:

$$\boldsymbol{X=A^{-1}B}$$

Veja, portanto, que a **matriz das incógnitas** $(\boldsymbol{X})$ é obtida pelo produto da **matriz inversa dos coeficientes** pela **matriz dos termos independentes**.

Vamos resolver um exemplo.

Encontre a solução do seguinte sistema linear: $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 2} \\ \mathbf{2x - 2y = 3} \end{cases}$

No sistema linear apresentado, a matriz dos coeficientes é dada por $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ e matriz dos termos independentes é $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Note que a matriz A é inversível, pois:

$$\det A = [3 \times (-2)] - [2 \times 2] = -10$$

Da aula sobre determinantes, você deve se lembrar que, para uma matriz $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$, a sua inversa é dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$. Logo, para o nosso caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz dos coeficientes $\boldsymbol{X}$ do sistema linear em questão é:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A^{-1}B}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} (\mathbf{-2}).\mathbf{2} + (\mathbf{-2}).\mathbf{3} \\ (\mathbf{-2}).\mathbf{2} + \mathbf{3}.\mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}.(-10) \\ -\frac{1}{10}.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Veja que $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$, isto é, $x = 1$ e $y = -\frac{1}{2}$. Portanto, a solução do sistema linear é $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$.

HORA DE PRATICAR!

(PETROBRAS/2008) A matriz $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + 3y = 185 \\ 3x + 2y = 190 \end{cases}$$

pode ser expressa na forma $X = PB$, em que $B = \begin{bmatrix} 195 \\ 190 \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos constantes do sistema, P é uma matriz constante, quadrada, de dimensão 2×2. Nesse caso, assinale a opção correspondente à matriz P.

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Comentários:

Considerando o sistema apresentado:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 185 \\ 3x + 2y = 190 \end{cases}$$

Temos que a **matriz dos coeficientes** é $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Como $\det A \neq 0$, então a **matriz A é inversível**.

$$\det A = [2.2] - [3.3] = 4 - 9 = -5$$

O sistema linear pode ser representado na sua forma matricial por:

$$\boldsymbol{AX = B}$$

Como a matriz A é inversível, podemos multiplicar ambos os lados da equação por A^{-1} pela esquerda:

$$\boldsymbol{A^{-1}AX = A^{-1}B}$$

$$\boldsymbol{IX = A^{-1}B}$$

$$\boldsymbol{X = A^{-1}B}$$

Comparando $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$ a equação matricial apresentada no enunciado, dada por $\boldsymbol{X = PB}$, temos que $\boldsymbol{P = A^{-1}}$.

Para uma matriz $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$, a sua inversa é dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$. Logo, para o nosso caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \times 2 & -\frac{1}{5} \times (-3) \\ -\frac{1}{5} \times (-3) & -\frac{1}{5} \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Portanto, $P = A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

Gabarito: Letra D.

Teorema de Cramer

Primeiramente, deve-se entender que o **Teorema de Cramer** só pode ser utilizado quando o **número de equações** do sistema linear ($\boldsymbol{n}$) é **igual** ao **número de incógnitas**. Nesse caso, a **matriz dos coeficientes** ($\boldsymbol{A}$) do sistema linear será **quadrada**, de dimensão $\boldsymbol{n \times n}$.

Considere, então, um sistema linear escrito na forma matricial:

$$\boldsymbol{A_{n\times n}X_{n\times 1} = B_{n\times 1}}$$

Vamos chamar de $\boldsymbol{D}$ o **determinante da matriz dos coeficientes** ($\boldsymbol{A}$). Ou seja:

$$D = \det A$$

O **Teorema de Cramer** nos diz duas coisas:

PRESTE MAIS ATENÇÃO!

01) Se $D \neq 0$, o **sistema é possível e determinado** (**SPD**), apresentando **solução única**.

02) Sendo $D \neq 0$, a solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \dots\ \alpha_n)$ do sistema linear é tal que:

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}$$

Onde D_i é o determinante da matriz que se obtém a partir de $A_{n\times n}$ substinuindo a coluna i pela matriz $B_{n\times 1}$.

Professor, não entendi nada!

Calma, concurseiro. O entendimento só virá com o desenvolvimento do próximo exemplo. Ao acompanhá-lo, o **Teorema de Cramer** fica mais claro.

Encontre a solução do seguinte sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 9 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ **pelo Teorema de Cramer.**

Ao representar o sistema linear na sua forma matricial, temos $AX = B$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Primeiro, devemos obter o determinante da matriz A:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [\mathbf{1.2.1 + 2.3.1 + 1.2.1}] - [\mathbf{1.2.1 + 1.3.1 + 2.2.1}]$$

$$D = 10 - 9$$

$$\boxed{D = 1}$$

Como $D \neq 0$, o sistema é **possível e determinado (SPD)**, sendo possível aplicar o teorema.

Obtenção de x

Para obter x, vamos utilizar a seguinte relação:

$$x = \frac{D_x}{D}$$

Já temos o valor do determinante D. Nesse momento, devemos obter D_x.

D_x é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A substituindo a **coluna dos coeficientes da variável x** pela matriz B.

Coeficientes de x

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\left|\begin{matrix} 5 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 & 2 \\ 9 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_x = [5.2.1 + 2.3.3 + 1.9.1] - [1.2.3 + 5.3.1 + 2.9.1]$$

$$D_x = 37 - 39$$

$$\boxed{D_x = -2}$$

Logo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{1}$$

$$\boxed{x = -2}$$

Obtenção de y

D_y é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A substituindo a **coluna dos coeficientes da variável y** pela matriz B.

Coeficientes de y

$$A=\begin{bmatrix}1 & \boxed{2} & 1\\ 2 & \boxed{2} & 3\\ 1 & \boxed{1} & 1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}5\\9\\3\end{bmatrix}$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & 9 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & 9 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 5\\ 2 & 9\\ 1 & 3\end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_y=[1.9.1+5.3.1+1.2.3]-[1.9.1+1.3.3+5.2.1]$$

$$D_y=30-28$$

$$\boxed{D_y=2}$$

Logo:

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{2}{1}$$

$$\boxed{y=2}$$

<u>Obtenção de z</u>

D_z é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A substituindo a **<u>coluna dos coeficientes da variável z</u>** pela matriz B.

Coeficientes de z

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & \boxed{1}\\ 2 & 2 & \boxed{3}\\ 1 & 1 & \boxed{1}\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}5\\9\\3\end{bmatrix}$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 2 & 9\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_z = [\mathbf{1.2.3 + 2.9.1 + 5.2.1}] - [\mathbf{5.2.1 + 1.9.1 + 2.2.3}]$$

$$D_z = 34 - 31$$

$$\boxed{D_z = 3}$$

Logo:

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{1}$$

$$\boxed{z = 3}$$

Portanto, a solução do sistema linear é $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$.

HORA DE PRATICAR!

(AFRFB/2012) Considere o sistema de equações lineares dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + rz = 2 \\ rx + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Sabendo-se que o sistema tem solução única para $r \neq 0$ e $r \neq 1$, então o valor de x é igual a

a) $\frac{2}{r}$

b) $\frac{-2}{r}$

c) $\frac{1}{r}$

d) $\frac{-1}{r}$

e) $2r$

Comentários:

Vamos resolver essa questão com o **Teorema de Cramer**.

Note que as variáveis do sistema são x, y e z, sendo r uma constante.

Ao representar o sistema linear na sua forma matricial, temos $AX = B$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & r \\ r & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Primeiro, devemos obter o determinante da matriz A:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & r \\ r & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & r \\ r & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ r & 2 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [\mathbf{1.(-1).1 + 1.r.r + 1.1.2}] - [\mathbf{1.(-1).r + 1.r.2 + 1.1.1}]$$

$$D = [r^2 + 1] - [r + 1]$$

$$D = r^2 - r$$

$$\boxed{D = r(r-1)}$$

O enunciado pede a solução para $r \neq 0$ e $r \neq 1$. Note que, para esse caso, $\boldsymbol{D}$ **será diferente de zero**. Portanto, podemos aplicar o **Teorema de Cramer**.

Para obter x, vamos utilizar a seguinte relação:

$$x = \frac{D_x}{D}$$

D_x é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A substituindo a **coluna dos coeficientes da variável** $\boldsymbol{x}$ pela matriz B.

Coeficientes de $\boldsymbol{x}$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{r} \\ \boxed{\boldsymbol{r}} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{r} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & r \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_x = [\mathbf{0.(-1).1 + 1.r.(-1) + 1.2.2}] - [\mathbf{1.(-1).(-1) + 0.r.2 + 1.2.1}]$$

$$D_x = [-r+4] - [3]$$

$$\boxed{D_x = 1 - r}$$

Logo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1-r}{r(r-1)} = \frac{-(r-1)}{r(r-1)}$$

Simplificando $(r-1)$, obtemos:

$$\boxed{x = \frac{-1}{r}}$$

Gabarito: Letra D.

Método do escalonamento

O **método do escalonamento**, também conhecido por **Eliminação Gaussiana**, sem dúvidas é o melhor meio para se resolver sistemas lineares.

Esse método nos traz um **passo a passo**, uma "**receita de bolo**". **Não é necessário ter uma "sacada" para resolver o sistema**. Além disso, **não precisamos resolver determinantes**, como acontece no **Teorema de Cramer**.

O método consiste em **obter um sistema equivalente** ao sistema original em que o **número de variáveis explícitas diminui de equação para equação**. Em outras palavras, o número de coeficientes nulos aumenta de equação para equação.

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 2x + 4y + 4z = 22 \\ 2x + 4y + 3z = 10 \end{cases}$$

A ideia do método do escalonamento é chegar no seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + \ \ z = 4 \\ \qquad 3y + 3z = 18 \\ \qquad\qquad -z = -12 \end{cases}$$

Dizemos que este sistema é um **sistema escalonado** porque o número de variáveis explícitas diminui de equação para equação. Note que na **primeira equação** temos 3 variáveis explícitas, na **segunda equação** temos 2 variáveis e, na **última equação**, temos apenas uma variável explícita.

Veja como o **sistema escalonado** é interessante: a partir da **última equação**, obtemos o valor de $\boldsymbol{z}$. Na **penúltima equação** conseguimos obter o valor de $\boldsymbol{y}$, pois já temos o valor de z. Por fim, na **primeira equação**, conseguimos obter o valor de $\boldsymbol{x}$, pois já temos y e z.

Ok, professor. Mas como obtenho esse sistema escalonado?

Para obter o sistema escalonado, devemos seguir os seguintes passos:

- Colocar como 1ª equação uma que apresente a 1ª incógnita;
- Anular a 1ª incógnita de todas as equações (exceto da 1ª) fazendo uso da 1ª equação;
- Anular a 2ª incógnita de todas as equações (exceto da 1ª e da 2ª) fazendo uso da 2ª equação;
- Anular a 3ª incógnita de todas as equações (exceto da 1ª, da 2ª e da 3ª) fazendo uso da 3ª equação;
- E assim sucessivamente, até que tenhamos usado todas as equações.

Vamos aprender na prática.

Encontre a solução do seguinte sistema linear $\begin{cases} \mathbf{2x + y + z = 4} \\ \mathbf{2x + 4y + 4z = 22} \\ \mathbf{2x + 4y + 3z = 10} \end{cases}$ pelo método do escalonamento.

• Note que a 1ª equação já apresenta a 1ª incógnita (x).

• Devemos, agora, eliminar a 1ª incógnita (x) de todas as equações (exceto da 1ª) fazendo uso da 1ª equação.

Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + \ z = \ 4 \\ 2x + 4y + 4z = 22 \\ 2x + 4y + 3z = 10 \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-1})L_1$, obtemos um sistema linear equivalente:

$$\sim \begin{cases} 2x + \ \ y + \ z = \ 4 \\ \qquad 3y + 3z = 18 \\ 2x + 4y + 3z = 10 \end{cases}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_1$, obtemos um sistema linear equivalente:

$$\sim \begin{cases} 2x + \ \ y + \ z = \ 4 \\ \qquad 3y + 3z = 18 \\ \qquad 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

• Devemos, agora, eliminar a 2ª incógnita (y) de todas as equações (exceto da 1ª e da 2ª) fazendo uso da 2ª equação.

Fazendo $L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_2$, obtemos um sistema linear equivalente:

$$\sim \begin{cases} 2x + \ \ y + \ z = \ 4 \\ \qquad 3y + 3z = 18 \\ \qquad\quad - 1z = -12 \end{cases}$$

Observe que obtemos um sistema escalonado. Nesse momento, devemos parar o escalonamento e obter a solução a partir da **última equação**.

$$-1z = -12$$

$$\boldsymbol{z = 12}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$3y + 3\boldsymbol{z} = 18$$

$$3y + 3.\boldsymbol{12} = 18$$

$$3y = -18$$

$$\boldsymbol{y = -6}$$

Da **primeira equação**, temos:

$$2x + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 4$$

$$2x + (\boldsymbol{-6}) + \boldsymbol{12} = 4$$

$$2x + 6 = 4$$

$$2x = -2$$

$$\boldsymbol{x = -1}$$

Portanto, a solução do sistema linear é $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{-6}, \boldsymbol{12})$.

Observe que, no problema anterior, obtivemos a seguinte sequência de sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x + y + z = 4} \\ \boldsymbol{2x + 4y + 4z = 22} \\ \boldsymbol{2x + 4y + 3z = 10} \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-1})L_1}{\sim} \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3y + 3z = 18 \\ 2x + 4y + 3z = 10 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_1}{\sim} \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3y + 3z = 18 \\ 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_2}{\sim} \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3y + 3z = 18 \\ -1z = -12 \end{cases}$$

Uma outra forma de escalonar o sistema é utilizando a **matriz <u>completa</u> do sistema** $[A|B]$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{22} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 18 \\ 2 & 4 & 3 & 10 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 18 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \end{bmatrix}$$

Dê preferência ao escalonamento <u>por meio da matriz completa do sistema</u>. Isso porque ela traz maior agilidade no escalonamento, pois não é necessário escrever diversas vezes as incógnitas x, y e z.

Para evitar trabalhar com frações na hora de escalonar um sistema, um recurso interessante é <u>alterar a ordem das equações</u>. Veremos isso na resolução do primeiro exercício a seguir.

(Pref. Rezende/2019) O valor de x no sistema linear a seguir é:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 19 \\ x + 2y + z = 12 \\ 3x - y + z = 7 \end{cases}$$

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentários:

Vamos resolver essa questão pelo **método do escalonamento**, fazendo uso da **matriz <u>completa</u> do sistema.** Inicialmente, temos:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 19 \\ x + 2y + z = 12 \\ 3x - y + z = 7 \end{cases}$$

Note que, para iniciar o escalonamento, teríamos que fazer $L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + \left(-\frac{1}{2}\right) L_1$ para eliminar a incógnita x da segunda equação. Para evitar trabalhar com números fracionários, vamos trocar a primeira e a segunda equação de lugar:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ 2x + y + 3z = 19 \\ 3x - y + z = 7 \end{cases}$$

A **matriz completa do sistema** é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 19 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

• **Note que a 1ª equação já apresenta a 1ª incógnita (x).**

• **Devemos, agora, eliminar a 1ª incógnita (x) de todas as equações (exceto da 1ª) fazendo uso da 1ª equação.**

Fazendo $L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-2})L_1$, obtemos um sistema linear equivalente:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-3})L_1$, obtemos um sistema linear equivalente:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & -2 & -29 \end{bmatrix}$$

• **Devemos, agora, eliminar a 2ª incógnita (y) de todas as equações (exceto da 1ª e da 2ª) fazendo uso da 2ª equação.**

Fazendo $L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \left(-\frac{7}{3}\right)L_1$, obtemos um sistema linear equivalente:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -\dfrac{13}{3} & -\dfrac{52}{3} \end{bmatrix}$$

Note, portanto, que obtivemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ -3y + z = -5 \\ -\dfrac{13}{3}z = -\dfrac{52}{3} \end{cases}$$

Da **última equação**, temos:

$$-\frac{13}{3}z = -\frac{52}{3}$$

$$13z = 52$$

$$\boldsymbol{z = 4}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$-3y + z = -5$$

$$-3y + 4 = -5$$

$$-3y = -9$$

$$\boldsymbol{y = 3}$$

Da **primeira equação**, temos:

$$x + 2y + z = 12$$

$$x + 2.3 + 4 = 12$$

$$x = 12 - 4 - 6$$

$$\boldsymbol{x = 2}$$

Portanto, o valor de x é 2.

Gabarito: Letra B.

(Pref. Caxias do Sul/2019) Dado o sistema de equações lineares abaixo:

$$Y = \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$$

O conjunto solução **S** com base na ordem de $S = (x_2, x_1, x_3)$ é:

a) $S = (x_2, x_1, x_3) = (2, -2, 8)$.

b) $S = (x_2, x_1, x_3) = (-2, 2, 8)$.

c) $S = (x_2, x_1, x_3) = (8, -2, 2)$.

d) $S = (x_2, x_1, x_3) = (2, 8, 2)$.

e) $S = (x_2, x_1, x_3) = (2, 2, 8)$.

Comentários:

Vamos resolver essa questão pelo **método do escalonamento**, fazendo uso da **matriz completa do sistema.**

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + \left(-\frac{3}{2}\right)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1/2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Veja que a última operação já eliminou a variável x_1 e x_2 da terceira equação.

Ficamos com o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -1x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 = -2 \\ 1x_3 = 8 \end{cases}$$

Da **última equação**, temos:

$$\boldsymbol{x_3 = 8}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$-1x_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{x_3} = -2$$

$$-x_2 - \frac{1}{2}.8 = -2$$

$$-x_2 - 4 = -2$$

$$-x_2 = 4 - 2$$

$$-x_2 = 2$$

$$\boldsymbol{x_2 = -2}$$

Da **primeira equação**, temos

$$2x_1 + 2\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} = 8$$

$$2x_1 + 2.(-2) + 8 = 8$$

$$2x_1 = 4$$

$$\boldsymbol{x_1 = 2}$$

Muita atenção nesse momento. A questão pergunta pela solução $S = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1}, x_3)$.

O **gabarito**, portanto, é **letra B**: $S = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1}, x_3) = (\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{2}, 8)$.

Gabarito: Letra B.

Posto e nulidade de uma matriz

O **posto** de uma matriz é o **número de linhas não nulas de uma matriz escalonada**. A representação do posto de uma matriz A é dada por $\rho(A)$.

A **nulidade** de uma matriz é dada pela **diferença** entre o **número de colunas** e o **posto da matriz**:

$$null(A) = (\text{Nº colunas}) - \rho(A)$$

Exemplo: se, ao escalonarmos uma matriz A, obtivermos o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Temos que:

- O **posto** dessa matriz é $\boldsymbol{\rho(A) = 3}$.
- A **nulidade** dessa matriz é $null\ (A) = 5 - 3 = 2$.

FIQUE ATENTO!

O **posto da matriz** também é conhecido por **característica da matriz**.

(ABIN/2010) Considerando a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

E os vetores:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Julgue o item a seguir.

A matriz A tem posto 2.

Comentários:

Vamos escalonar a matriz A, dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-2})L_1$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-3})L_1$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \left(-\frac{1}{2}\right) L_2$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

O **posto** de uma matriz é o **número de linhas não nulas de uma matriz escalonada**. Logo, o posto de A é 2.

Gabarito: CERTO.

Discussão de um sistema linear

Vimos que um sistema linear pode ser classificado de três formas:

- **Sistema Possível e Determinado (SPD)**: o sistema apresenta uma **única** solução;
- **Sistema Possível e Indeterminado (SPI)**: o sistema apresenta **infinitas** soluções; e
- **Sistema Impossível (SI)**: ocorre quando o sistema **não apresenta solução**.

A **discussão de um sistema linear** trata justamente dessa classificação, de modo a determinar se o sistema linear é SPD, SPI ou SI.

Discussão por Teorema de Cramer

Vimos que é possível obter a solução de um sistema linear por meio do **Teorema de Cramer**:

$$x = \frac{D_x}{\boldsymbol{D}} \;\; ; \;\; y = \frac{D_y}{\boldsymbol{D}} \;\; ; \;\; z = \frac{D_z}{\boldsymbol{D}}$$

Lembre-se de que a condição para aplicar o teorema é $\boldsymbol{D \neq 0}$, isto é, o **determinante** da **matriz dos coeficientes** (**matriz incompleta do sistema**) deve ser diferente de zero. Nesse caso, o **sistema é possível e determinado** (**SPD**), apresentando **solução única**.

Por outro lado, quando $\boldsymbol{D = 0}$**,** podemos ter um **sistema possível indeterminado** (**SPI**) ou um **sistema impossível** (**SI**).

Teorema de Cramer		
D ≠ 0	D = 0	
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)	Sistema Impossível (SI)

Um caso interessante ocorre quando temos um **sistema linear homogêneo**. Lembre-se de que esse sistema sempre admite solução, a **solução trivial**. Nesse caso, **esse sistema não pode ser impossível**, de modo que, se $D = 0$, necessariamente ele é **possível e indeterminado** (**SPI**).

Sistema Linear Homogêneo	
$D \neq 0$	$D = 0$
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
Admite somente a solução trivial	Admite a solução trivial e infinitas outras

Professor, quando $D = 0$ e o sistema não é homogêneo, como vou diferenciar o SPI do SI?

Excelente pergunta! Nesse caso, o **Teorema de Cramer** nos deixa na mão. Devemos utilizar o **Método do Escalonamento**, que será visto no próximo tópico.

ESCLARECENDO!

Para fins de **discussão do sistema linear**, o **Teorema de Cramer** tem serventia quando obtemos $\boldsymbol{D \neq 0}$ **ou quando o sistema é homogêneo**.

No caso em que $\boldsymbol{D = 0}$ e o sistema não é homogêneo, ficamos na dúvida entre **SPI** e **SI**. Para sanar essa questão, deve-se utilizar o **Método do Escalonamento**.

HORA DE PRATICAR!

(Pref. SJC/2019) Considere o sistema linear S, representado da seguinte forma matricial:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sistema S é:

a) impossível se $ad - bc = 0$

b) impossível se $ad - bc \neq 0$

c) possível e determinado se $ad - bc = 0$

d) possível e determinado se $ad - bc \neq 0$

e) possível e indeterminado se $ad - bc \neq 0$

Comentários:

Observe que o **sistema linear** em questão é **homogêneo**, pois os termos independentes são nulos.

Nesse caso, sendo D o determinante da matriz dos coeficientes:

- Se $D \neq 0$, temos um **sistema possível e determinado** (**SPD**);
- Se $D = 0$, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

O determinante da matriz dos coeficientes é:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Logo:

- Se $ad - bc \neq 0$, temos um **sistema possível e determinado** (**SPD**);
- Se $ad - bc = 0$, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Gabarito: Letra D.

(TRANSPETRO/2018) Sistemas lineares homogêneos possuem, pelo menos, uma solução e, portanto, nunca serão considerados impossíveis. O sistema linear dado abaixo possui infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + \alpha y + z = 0 \\ \alpha x + \alpha y + 2z = 0 \end{cases}$$

Qual o maior valor possível para α?

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários:

Temos um **sistema linear homogêneo** com **infinitas soluções**. Logo, além de homogêneo, o sistema é **possível e indeterminado (SPI)**.

Portanto, devemos ter $D = 0$, ou seja, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Aplicando a **Regra de Sarrus** no determinante D, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [\mathbf{1.\alpha.2 + 1.1.\alpha + 1.1.\alpha}] - [\mathbf{1.\alpha.\alpha + 1.1.\alpha + 1.1.2}]$$

$$D = [4\alpha] - [\alpha^2 + \alpha + 2]$$

$$D = -\alpha^2 + 3\alpha - 2$$

Como $D = 0$, temos:

$$-\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0$$

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

Aplicando a **Fórmula de Bhaskara**:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4.1.2$$

$$\Delta = 1$$

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\alpha = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.1}$$

$$\alpha = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\boldsymbol{\alpha_1 = 2} \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha_2 = 1}$$

Logo, **o maior valor possível para α é 2**.

Gabarito: Letra C.

Antes de passar para o próximo tópico, é necessário esclarecer um ponto para aqueles que estudaram essa matéria em outras fontes.

Alguns professores, especialmente relacionados a concursos públicos, ensinam de **modo equivocado (<u>ERRADO</u>)** que se pode usar **Teorema de Cramer** para diferenciar um **SPI** de um **SI**. Eles dizem que, uma vez que $D = 0$, o **SPI** ocorre quando:

$$D = D_x = D_y = D_z = \cdots = 0$$

O contraexemplo a seguir mostra que **esse bizu está errado**:

$$\begin{cases} 1x + 1y + 1z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = \mathbf{7} \end{cases}$$

Note que **o sistema apresentado é impossível** (**SI**). Isso porque, ao multiplicar a primeira equação por 3, obtém-se:

$$3x + 3y + 3z = \mathbf{3}$$

Essa equação contradiz a última equação do sistema, pois $3x + 3y + 3z$ **não pode ser igual a 3 e a 7 ao mesmo tempo**.

Observe, porém, que todos os determinantes são zero, pois apresentam filas paralelas iguais:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 2 & 2 \\ \mathbf{7} & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 2 & \mathbf{2} & 2 \\ 3 & \mathbf{7} & 3 \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 2 & 2 & \mathbf{2} \\ 3 & 3 & \mathbf{7} \end{vmatrix}$$

Segundo o bizu errado, **teríamos um SPI**, pois $D = D_x = D_y = D_z = 0$.

Discussão pelo Método do Escalonamento

Podemos classificar um sistema linear em SPD, SPI e SI de maneira inequívoca por meio do escalonamento. Para tanto, deve-se seguir os seguintes passos:

Passo 1: Escalonar o sistema linear.

Passo 2: Analisar o sistema linear escalonado.

- Se obtivermos uma equação da forma $\mathbf{0x + 0y + 0z + 0w = b}$, com $\mathbf{b \neq 0}$, temos um **sistema impossível** (**SI**);
- **Caso contrário**, temos duas possibilidades:
  - Se o número de **equações** for **igual** ao número de **incógnitas**, temos um **sistema possível e determinado** (**SPD**).
  - Se o número de **equações** for **menor** do que o número de **incógnitas**, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

ACORDE!

No escalonamento, se obtivermos uma equação da forma $\mathbf{0x + 0y + 0z + 0w = 0}$, **devemos eliminar essa equação do sistema linear**, pois essa equação é uma combinação linear das outras.

Vamos realizar três exemplos para que não reste dúvida quanto ao método.

Classifique o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 4x + 7y + 3z = 8 \end{cases}$.

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{2})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{4})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{1})L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

A última equação do sistema escalonado, dada por $\mathbf{0x + 0y + 0z = 1}$, indica que estamos diante de um **sistema impossível** (**SI**).

Classifique o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 2 \\ 4x + 9y + 5z = 5 \end{cases}$.

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{4})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{1})L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

A última equação do sistema escalonado, dada por $\mathbf{0x + 0y + 0z = 0}$, deve ser eliminada. O sistema linear em questão é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Explicitando as variáveis, o sistema linear original equivale a:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \quad\;\; y + z = 1 \end{cases}$$

Veja que **o sistema anterior é escalonado**, pois o número de incógnitas diminui de equação para equação.

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (2) é **menor** do que o **número de incógnitas** (3). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Classifique o sistema linear $\begin{cases} \boldsymbol{x - y + z = 1} \\ \boldsymbol{x + 3y + 2z = 2} \\ \boldsymbol{2x + 3y + 1z = 3} \end{cases}$**.**

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema.**

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{2})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \left(-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right)L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 4 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Explicitando as variáveis, o sistema linear original equivale a:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \quad 4y + z = 1 \\ \quad\quad -\frac{1}{4}z = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Veja que **o sistema acima é escalonado**, pois o número de incógnitas diminui de equação para equação.

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (3) é **igual** ao **número de incógnitas** (3). Logo, temos um **sistema possível e determinado** (**SPD**).

Vamos praticar o que aprendemos nessa seção.

HORA DE PRATICAR!

(STN/2013) Dado o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$$

É correto afirmar que:

a) o sistema não possui solução.

b) o sistema possui uma única solução.

c) $x = 1$ e $y = 2$ é uma solução do sistema.

d) o sistema é homogêneo.

e) o sistema possui mais de uma solução.

Comentários:

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz <u>completa</u> do sistema**. Temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Realizando $L_2 = \mathbf{1}L_2 + \left(-\frac{3}{2}\right)L_1$, ficamos com:

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

A última equação do sistema escalonado, dada por $\mathbf{0x + 0y = 0}$, pode ser eliminada. O sistema linear em questão é equivalente a:

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Explicitando as variáveis, o sistema linear original equivale a:

$$\{x + 2y = 6$$

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (1) é **<u>menor</u>** do que o **número de incógnitas** (2). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**). Isso significa que o sistema possui mais de uma solução, isto é, possui infinitas soluções. O **gabarito**, portanto, é **letra E**.

Gabarito: Letra E.

(CGU/2008) Considerando o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + px_2 = q \end{cases}$$

pode-se corretamente afirmar que

a) se $p = -2$ e $q \neq 4$, então o sistema é impossível.

b) se $p \neq -2$ e $q = 4$, então o sistema é possível e indeterminado.

c) se $p = -2$, então o sistema é possível e determinado.

d) se $p = -2$ e $q \neq 4$, então o sistema é possível e indeterminado.

e) se $p = 2$ e $q = 4$, então o sistema é impossível.

Comentários:

Essa questão é um excelente resumo do que vimos quanto à **discussão de um sistema linear**.

Inicialmente, vamos utilizar o **Teorema de Cramer**.

O determinante D da **matriz dos coeficientes** é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & p \end{vmatrix}$$

$$D = [1 \times p] - [(-1) \times 2]$$

$$D = p - (-2)$$

$$\boldsymbol{D = p + 2}$$

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que **o sistema é possível e determinado** (**SPD**) quando $\boldsymbol{D \neq 0}$, isto é, quando:

$$p + 2 \neq 0$$

$$\boldsymbol{p \neq -2}$$

Para o caso em que $\boldsymbol{D = 0}$, isto é, **quando** $\boldsymbol{p = -2}$, podemos ter tanto um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**) quanto um **sistema impossível** (**SI**).

Para saber o que acontece para o caso em que $\boldsymbol{p = -2}$, devemos escalonar o sistema. Temos:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 \boldsymbol{- 2}x_2 = q \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & q \end{bmatrix}$$

Realizando $L_2 = \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-2})L_1$, temos:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & q-4 \end{bmatrix}$$

Note que:

- Se $(q-4)$ for diferente de zero, isto é, **se $q \neq 4$**, teremos um **sistema impossível** (**SI**), pois haverá uma equação da forma $\mathbf{0x_1 + 0x_2 = (q-4)}$ com $(\boldsymbol{q}-\mathbf{4}) \neq \mathbf{0}$.
- Por outro lado, **se $q = 4$**, ficamos com:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

A última equação do sistema escalonado, dada por $\mathbf{0x_1 + 0x_2 = 0}$, pode ser eliminada. O sistema linear em questão é equivalente a:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Explicitando as variáveis, o sistema linear original equivale a:

$$\{x_1 - x_2 = 2$$

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (1) é **menor** do que o **número de incógnitas** (2). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Em resumo, temos o seguinte:

- $p \neq -2 \rightarrow$ **Sistema Possível e Determinado (SPD)**;
- $p = -2$ e $q \neq 4 \rightarrow$ **Sistema Impossível (SI)**;
- $p = -2$ e $q = 4 \rightarrow$ **Sistema Possível e Indeterminado (SPI)**.

O **gabarito**, portanto, é **letra A**.

Gabarito: Letra A.

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Sistema linear

Outras Bancas

1.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Nas duas equações mostradas a seguir, x e y são variáveis e a e b são constantes.

$$\frac{y-a}{2}+\frac{y-x}{5}+\frac{y}{4}=0 \text{ e } \frac{x-b}{2}+\frac{x-y}{5}+\frac{x}{4}=0$$

Essas equações podem ser compactadas em uma equação matricial do tipo $M\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$, na qual M é a matriz:

a) $\begin{bmatrix}0,4 & 1,9\\1,9 & 0,4\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}-0,4 & 1,9\\0,4 & -1,9\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}-1,9 & 0,4\\1,9 & -0,4\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}-0,4 & 1,9\\1,9 & -0,4\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}-4 & 19\\19 & -4\end{bmatrix}$

Comentários:

Para transformar o sistema linear para a forma matricial, devemos deixar os termos independentes do lado direito das equações.

Da **primeira equação**, temos:

$$\frac{y-a}{2}+\frac{y-x}{5}+\frac{y}{4}=0$$

$$\frac{y}{2}-\frac{a}{2}+\frac{y}{5}-\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=0$$

$$-\frac{1}{5}x+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)y=\boldsymbol{\frac{a}{2}}$$

Note que, a partir da **matriz dos termos independentes** $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ apresentada no enunciado, percebe-se que **a questão pede que o termo independente da primeira equação seja a**. Logo, devemos multiplicar a primeira equação por 2. Ficamos com:

$$-\frac{2}{5}x+\left(1+\frac{2}{5}+\frac{2}{4}\right)y=\boldsymbol{a}$$

$$-0{,}4x+(1+0{,}4+0{,}5)y=a$$

$$\boldsymbol{-0,4x+1,9y=a}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$\frac{x-b}{2}+\frac{x-y}{5}+\frac{x}{4}=0$$

$$\frac{x}{2}-\frac{b}{2}+\frac{x}{5}-\frac{y}{5}+\frac{x}{4}=0$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)x-\frac{1}{5}y=\boldsymbol{\frac{b}{2}}$$

A questão pede que o termo independente da segunda equação seja *b*. Logo, devemos multiplicar a segunda equação por 2. Ficamos com:

$$\left(1+\frac{2}{5}+\frac{2}{4}\right)x-\frac{2}{5}y=\boldsymbol{b}$$

$$(1+0{,}4+0{,}5)x-0{,}4y=b$$

$$\boldsymbol{1,9x-0,4y=b}$$

Logo, o sistema apresentado pelo enunciado corresponde a:

$$\begin{cases}\boldsymbol{-0,4x+1,9y=a}\\ \boldsymbol{1,9x-0,4y=b}\end{cases}$$

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix}-0{,}4 & 1{,}9\\ 1{,}9 & -0{,}4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz M é:

$$M=\begin{bmatrix}-0{,}4 & 1{,}9\\ 1{,}9 & -0{,}4\end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra D.

Questões Inéditas

2.(INÉDITA) Quanto aos sistemas lineares, julgue o item a seguir.

O sistema linear $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+y+3z=2 \\ y+z=3 \end{cases}$ **pode ser representado por meio da seguinte equação matricial:**

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Comentários:

Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 1x+1y+1z=1 \\ 3x+1y+3z=2 \\ 0x+1y+1z=3 \end{cases}$$

A representação matricial desse sistema, conforme apresentado na teoria da aula, é dada do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**. Cumpre destacar que a equação matricial presente no item não corresponde ao sistema linear em questão. Veja:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1x+3y+0z \\ 1x+1y+1z \\ 1x+3y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Igualando os elementos das duas matrizes-coluna, temos:

$$\rightarrow \begin{cases} 1x+3y+0z=1 \\ 1x+1y+1z=2 \\ 1x+3y+3z=3 \end{cases}$$

Note que esse sistema obtido é diferente do original.

Gabarito: ERRADO.

3. (INÉDITA) Assinale a alternativa que apresenta a matriz dos coeficientes do sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 3x - 3z = x \\ -y + z = 6 \end{cases}$$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Comentários:

Para obter a matriz dos coeficientes do sistema linear, devemos manter as variáveis do lado esquerdo das equações:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 3x - 3z = x \\ -y + z = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 3x - 3z - x = 0 \\ -y + z = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 2x - 3z = 0 \\ -y + z = 6 \end{cases}$$

Além disso, quanto aos coeficientes, deve-se entender que:

- Variáveis que aparecem em outras equações e **não** aprecem em uma determinada equação devem ser representadas com um **coeficiente 0**;
- Variáveis que supostamente não apresentam coeficiente na verdade têm **coeficiente 1**.

Ficamos com:

$$\begin{cases} 1x + 3y + 1z = 5 \\ 2x + 0y - 3z = 0 \\ 0x - 1y + 1z = 6 \end{cases}$$

Portanto, o sistema original apresenta a seguinte forma matricial $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz dos coeficientes}} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra D.

4. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema de equações a seguir, em que x e y são variáveis:

$$\begin{cases} \dfrac{y-2}{3} + \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{y}{5} = 0 \\ \dfrac{x-5}{3} + \dfrac{y-x}{5} + \dfrac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

Esse sistema de equações pode ser escrito da forma $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, em que A é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{19}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{19}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{30} \\ \frac{19}{30} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{19}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{30} \\ \frac{19}{30} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Comentários:

Para transformar o sistema linear para a forma matricial, devemos deixar os termos independentes do lado direito das equações.

Da **primeira equação**, temos:

$$\frac{y-2}{3} + \frac{x-y}{2} + \frac{y}{5} = 0$$

$$\frac{y}{3} - \frac{2}{3} + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{y}{5} = 0$$

$$\frac{x}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)y = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{2} + \left(\frac{10-15+6}{30}\right)y = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{30}y = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

Note que, a partir da **matriz dos termos independentes** $\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix}$ apresentada no enunciado, **percebe-se que a questão pede que o <u>termo independente</u> da primeira equação seja 2**. Logo, devemos multiplicar a primeira equação por 3. Ficamos com:

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{10}y = \mathbf{2}$$

Da **<u>segunda equação</u>**, temos:

$$\frac{x-5}{3} + \frac{y-x}{5} + \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{3} - \frac{5}{3} + \frac{y}{5} - \frac{x}{5} + \frac{x}{2} = 0$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{5}y = \frac{5}{3}$$

$$\left(\frac{10-6+15}{30}\right)x + \frac{1}{5}y = \frac{5}{3}$$

$$\frac{19}{30}x + \frac{1}{5}y = \mathbf{\frac{5}{3}}$$

A questão pede que o termo independente da segunda equação seja 5. Logo, devemos multiplicar a segunda equação por 3. Ficamos com:

$$\frac{19}{10}x + \frac{3}{5}y = \mathbf{5}$$

Logo, o sistema apresentado pelo enunciado corresponde a:

$$\begin{cases} \mathbf{\frac{3}{2}x + \frac{1}{10}y = 2} \\ \mathbf{\frac{19}{10}x + \frac{3}{5}y = 5} \end{cases}$$

Na forma matricial, temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\frac{3}{2}} & \mathbf{\frac{1}{10}} \\ \mathbf{\frac{19}{10}} & \mathbf{\frac{3}{5}} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

Gabarito: Letra B.

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Solução de um sistema linear

FGV

1.(FGV/MPE SC/2022) Sabe-se que $\begin{cases} \mathbf{2x - y = 9} \\ \mathbf{3x - 2y = 5} \end{cases}$.

O valor de $x + y$ é:

a) 16;

b) 18;

c) 24;

d) 26;

e) 30.

Comentários:

Vamos resolver o sistema linear por **substituição**.

A partir da primeira equação, podemos isolar y:

$$2x - y = 9$$

$$2x - 9 = y$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = 2x - 9}}$$

Substituindo esse valor na segunda equação, temos:

$$3x - 2y = 5$$

$$3x - 2(\mathbf{2x - 9}) = 5$$

$$3x - 4x + 18 = 5$$

$$-x = 5 - 18$$

$$-x = -13$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 13}}$$

Substituindo o valor de x em $\boldsymbol{y = 2x - 9}$, temos:

$$y = 2x - 9$$

$$y = 2 \times 13 - 9$$

$$y = 26 - 9$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = 17}}$$

Logo:

$$x + y = 13 + 17$$

$$= 30$$

Gabarito: Letra E.

2.(FGV/SEFAZ AM/2022) x e y são tais que $4x + 5y = 80$ e $6x + 7y = 116$. O valor de $2x + 3y$ é:

a) 38

b) 40

c) 42

d) 44

e) 46

Comentários:

Vamos resolver o sistema linear por **substituição**. Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 80 \\ 6x + 7y = 116 \end{cases}$$

A partir da primeira equação, podemos isolar x:

$$4x + 5y = 80$$

$$4x = 80 - 5y$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{80 - 5y}{4}}}$$

Substituindo o valor de x na segunda equação, temos:

$$6x + 7y = 116$$

$$6 \times \left(\frac{80 - 5y}{4}\right) + 7y = 116$$

$$3 \times \left(\frac{80 - 5y}{2}\right) + 7y = 116$$

$$3 \times (40 - 2{,}5y) + 7y = 116$$

$$120 - 7{,}5y + 7y = 116$$

$$-0{,}5y = 116 - 120$$

$$-0{,}5y = -4$$

$$y = \frac{-4}{-0{,}5}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = 8}}$$

Substituindo o valor de y em $\boldsymbol{x = \frac{80-5y}{4}}$, temos:

$$x = \frac{80 - 5y}{4}$$

$$x = \frac{80 - 5 \times 8}{4}$$

$$x = \frac{80 - 40}{4}$$

$$x = \frac{40}{4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 10}}$$

Logo, o valor procurado é:

$$2x + 3y$$

$$= 2 \times 10 + 3 \times 8$$

$$= 20 + 24$$

$$= 44$$

Gabarito: Letra D.

3.(FGV/CGU/2022) Considere o sistema linear $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ -3x + y + 2z = 3 \end{cases}$.

Sabe-se que $x + y > 100$.

O menor valor inteiro de z que satisfaz as condições dadas é:

a) 52;

b) 53;

c) 54;

d) 55;

e) 56.

Comentários:

Note o número de equações do sistema é superior ao número de incógnitas e, portanto, não podemos determinar os valores de x, y e z.

Para resolver o problema, vamos **escrever x em função da variável z**, depois vamos **escrever y em função da variável z** para, em seguida, **substituir os valores encontrados na desigualdade $x + y > 100$**,

Escrever x em função da variável z

Vamos obter uma relação entre x e z eliminando a variável y.

Ao realizar a **combinação linear $L_1 + 2L_2$**, temos:

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{L_1} & x - 2y + \ \ z = \ 4 \\ \boldsymbol{2L_2} & -6x + 2y + 4z = 6 \\ \hline \boldsymbol{L_1 + 2L_2} & \boldsymbol{-5x \qquad\quad + 5z = 10} \end{array}$$

Escrevendo x em função de z, temos:

$$-5x + 5z = 10$$

$$5x = 5z - 10$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = z - 2}}$$

Escrever y em função da variável z

Vamos obter uma relação entre y e z eliminando a variável x.

Ao realizar a **combinação linear $3L_1 + L_2$**, temos:

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{3L_1} & 3x - 6y + 3z = 12 \\ \boldsymbol{L_2} & -3x + \ \ y + 2z = 3 \\ \hline \boldsymbol{3L_1 + L_2} & \boldsymbol{\qquad - 5y \ + 5z = 15} \end{array}$$

Escrevendo y em função de z, temos:

$$-5y + 5z = 15$$

$$5y = 5z - 15$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = z - 3}}$$

Substituir os valores encontrados na desigualdade $\boldsymbol{x + y > 100}$

Ao realizar a substituição, temos:

$$x + y > 100$$

$$(z - 2) + (z - 3) > 100$$

$$2z - 5 > 100$$

$$2z > 105$$

$$z > 52{,}5$$

Logo, o **menor valor inteiro de $\boldsymbol{z}$** que satisfaz as condições dadas é **53**.

Gabarito: Letra B.

4. (FGV/MPE SC/2022) No sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{3a + b + c + d = 16} \\ \boldsymbol{a + 3b + c + d = 6} \\ \boldsymbol{a + b + 3c + d = 14} \\ \boldsymbol{a + b + c + 3d = 12} \end{cases}$$

o valor de $\boldsymbol{a}$ é:

a) –1;

b) 1;

c) 2;

d) 3;

e) 4.

Comentários:

Ao somar todas as equações do sistema linear, temos:

$$\begin{array}{r} 3a + b + c + d = 16 \\ a + 3b + c + d = \ \ 6 \\ a + b + 3c + d = 14 \\ a + b + c + 3d = 12 \\ \hline 6a + 6b + 6c + 6d = 48 \end{array}$$

Ficamos com:

$$6(a + b + c + d) = 48$$

$$\boldsymbol{a + b + c + d = 8}$$

A partir dessa informação, podemos subtrair $\boldsymbol{a + b + c + d = 8}$ da primeira equação do sistema linear.

$$\begin{array}{r} 3a + b + c + d = 16 \\ \boldsymbol{-a - b - c - d = -8} \\ \hline \boldsymbol{2a \qquad\qquad\quad = 8} \end{array}$$

Logo, dividindo os dois lados da equação por 2, temos $\boldsymbol{a = 4}$.

Gabarito: Letra E.

5. (FGV/TCE TO/2022) Considere o sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + 5z = 0} \\ \boldsymbol{x + 5y + z = 14} \\ \boldsymbol{5x + y + z = 28} \end{cases}$$

O valor de $\boldsymbol{x}$ é:

a) 3/2;

b) 5/2;

c) 7/2;

d) 9/2;

e) 11/2.

Comentários:

Ao somar todas as equações do sistema linear, temos:

$$\begin{array}{r} x + y + 5z = 0 \\ x + 5y + z = 14 \\ 5x + y + z = 28 \\ \hline 7x + 7y + 7z = 42 \end{array}$$

Ficamos com:

$$7(x + y + z) = 42$$

$$x + y + z = \frac{42}{7}$$

$$x + y + z = 6$$

A partir dessa informação, podemos subtrair $\boldsymbol{x + y + z = 6}$ da terceira equação do sistema linear.

$$\begin{array}{r} 5x + y + z = 28 \\ \boldsymbol{-x - y - z = -6} \\ \hline \boldsymbol{4x \qquad\qquad = 22} \end{array}$$

Portanto:

$$x = \frac{22}{4}$$

$$x = \frac{11}{2}$$

Gabarito: Letra E.

6. (FGV/FEMPAR/2021) A manipulação das equações de um sistema linear pode gerar novas equações lineares mais simples que as originais. Ao serem incorporadas ao conjunto original, as novas equações podem contribuir na busca por soluções do sistema.

Considere o sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas dado por

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = 9 \\ a + 3b - 2c = 11 \\ -2a + b + 3c = 13 \end{cases}$$

É correto afirmar que $a + b + c$ vale

a) 16,5.

b) 18,5.

c) 19.

d) 32,5.

e) 33.

Comentários:

Ao somar todas as equações do sistema linear, temos:

$$\begin{array}{r} 3a - 2b + c = 9 \\ a + 3b - 2c = 11 \\ -2a + b + 3c = 13 \\ \hline 2a + 2b + 2c = 33 \end{array}$$

Ficamos com:

$$2(a + b + c) = 33$$

$$a + b + c = \frac{33}{2}$$

$$a + b + c = 16{,}5$$

Gabarito: Letra A.

7.(FGV/ALERO/2018) Considere o sistema linear

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + 3z = 160} \\ \boldsymbol{2x + 3y + z = 140} \\ \boldsymbol{3x + y + 2x = 156} \end{cases}$$

O valor de x é:

a) 20.

b) 22.

c) 24.

d) 26.

e) 28.

Comentários:

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 160 \\ 2 & 3 & 1 & 140 \\ 3 & 1 & 2 & 156 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-2})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 160 \\ 0 & -1 & -5 & -180 \\ 3 & 1 & 2 & 156 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-3})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 160 \\ 0 & -1 & -5 & -180 \\ 0 & -5 & -7 & -324 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-5})L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 160 \\ 0 & -1 & -5 & -180 \\ 0 & 0 & 18 & 576 \end{bmatrix}$$

A partir da terceira equação, temos:

$$18z = 576$$

$$\boldsymbol{z = 32}$$

A partir da segunda equação, temos:

$$-y - 5z = -180$$

$$-y - 5.32 = -180$$

$$y = 180 - 160$$

$$\boldsymbol{y = 20}$$

A partir da primeira equação, temos:

$$x + 2y + 3z = 160$$
$$x + 2.20 + 3.32 = 160$$
$$x = 160 - 40 - 96$$
$$\boldsymbol{x = 24}$$

Logo, temos que $x = 24$. Portanto, o **gabarito** é **letra C**.

Outra forma de resolver o problema é pelo **Teorema de Cramer**. Temos que:

$$x = \frac{D_x}{D}$$

D é o determinante da **matriz dos coeficientes**:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right.$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [\mathbf{1.3.2 + 2.1.3 + 3.2.1}] - [\mathbf{3.3.3 + 1.1.1 + 2.2.2}]$$

$$D = 18 - 36$$

$$D = -18$$

D_x é o determinante da **matriz dos coeficientes** **substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes**:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 160 & 2 & 3 & 160 & 2 \\ 140 & 3 & 1 & 140 & 3 \\ 156 & 1 & 2 & 156 & 1 \end{array}\right.$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_x = [\mathbf{160.3.2 + 2.1.156 + 3.140.1}] - [\mathbf{3.3.156 + 1.60.1.1 + 2.140.2}]$$

$$D_x = 1692 - 2124 = -432$$

Logo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-432}{-18}$$
$$x = 24$$

Novamente, obtemos que o **gabarito** é **letra C**.

Gabarito: Letra C.

Cebraspe

Texto para as questões 08 a 10

Considerando o sistema linear $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ -x + 2y - 2z = -11 \end{cases}$, julgue os itens que se segue.

8. (CESPE/SGA AC/2008) $y > x$.

9.(CESPE/SGA AC/2008) Todas as soluções do sistema são números naturais.

10. (CESPE/SGA AC/2008) $z = x + |y|$

Comentários:

Antes de resolver os itens da questão, vamos escalonar a **matriz completa do sistema** e obter a solução.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -11 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow 1L_2 + (-2)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -11 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow 1L_3 + 1L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 1L_3 + \left(-\frac{1}{5}\right)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{5} & -\frac{57}{5} \end{bmatrix}$$

Logo, temos o seguinte sistema linear equivalente:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \\ -\frac{19}{5}z = -\frac{57}{5} \end{cases}$$

Da **terceira equação**, temos:

$$-\frac{19}{5}z = -\frac{57}{5}$$

$$z = \frac{57}{19}$$

$$\mathbf{z = 3}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$5y + 4\mathbf{z} = 2$$

$$5y + 4 \times 3 = 2$$

$$5y = 2 - 12$$

$$5y = -10$$

$$\mathbf{y = -2}$$

Da **primeira equação**, temos:

$$x - \ \mathbf{y} - \ \mathbf{z} = 0$$

$$x = y + z$$

$$x = -2 + 3$$

$$\mathbf{x = 1}$$

Portanto, a solução do sistema é $(x, y, z) = (1, -2, 3)$. Vamos analisar os itens.

Questão 08

Item ERRADO. $y > x$ é uma afirmação falsa, pois, **-2 não é maior do que 1**.

Questão 09

Item ERRADO. y não é um número natural, pois $y = -2$.

Questão 10

Item CERTO. Temos **que a expressão é uma igualdade verdadeira**, pois $z = 3$ e $x + |y|$ também é igual a 3.

$$z = x + |y|$$

$$3 = 1 + |-2|$$

$$3 = 1 + 2$$

$$3 = 3$$

Gabarito: 08 - ERRADO. 09 - ERRADO. 10 - CERTO.

FCC

11.(FCC/CBM AP/2022) Considere a imagem abaixo em que cada Emoji diferente corresponde a um valor numérico diferente.

O valor numérico correspondente ao Emoji  **é**

a) 4

b) 3

c) −2

d) −3

e) −4

Comentários:

Considere que ,  e  sejam, respectivamente, as incógnitas $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$. Segundo o enunciado, devemos **determinar o valor de $\boldsymbol{y}$**.

Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z + z = 24 \\ y + z = 7 \\ x + x = 14 \end{cases}$$

Organizando o sistema linear, temos:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 24 \\ \quad\; y + \quad z = 7 \\ 2x \qquad\qquad = 14 \end{cases}$$

A partir da terceira equação, podemos determinar x:

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

Substituindo o valor de x na primeira equação, temos:

$$x + y + 2z = 24$$

$$7 + y + 2z = 24$$

$$y + 2z = 24 - 7$$

$$y + 2z = 17$$

Logo, ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \quad y + 2z = 17 \\ \quad y + \;\; z = 7 \\ x \qquad\quad\;\; = 7 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos o valor de z:

$$(y + 2z) - (y + z) = 17 - 7$$

$$z = 10$$

Substituindo o valor de z na segunda equação, obtemos y:

$$y + z = 7$$

$$y + 10 = 7$$

$$y = 7 - 10$$

$$y = -3$$

Portanto, o valor numérico correspondente ao Emoji  é -3.

Gabarito: Letra D.

12. (FCC/TRT 11/2017) O sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x+3y=24 \\ 4x-2y=16 \end{cases}$ é equivalente ao sistema $\begin{cases} 2x+3y=24 \\ 4x-2y=16 \\ 8x+Ky=80 \end{cases}$, em que x e y são as incógnitas reais dos sistemas. Se $S = (x+y)$ e K é um parâmetro real, então

a) S = 2,00K

b) S = 0,80K

c) S = 0,75K

d) S = 1,25K

e) S = 1,50K

Comentários:

Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x+3y=24 \\ 4x-2y=16 \end{cases}$$

Realizando $L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-2})L_1$, temos:

$$\begin{cases} 2x+3y=24 \\ \quad -8y=-32 \end{cases}$$

A partir da **última equação** do sistema escalonado, temos:

$$-8y=-32$$

$$\boldsymbol{y=4}$$

A partir da **primeira equação** do sistema escalonado, temos:

$$2x+3\boldsymbol{y}=24$$

$$2x+3.4=24$$

$$2x=24-12$$

$$\boldsymbol{x=6}$$

Portanto, a solução do sistema $\begin{cases} 2x+3y=24 \\ 4x-2y=16 \end{cases}$ é $(x,y)=(4,6)$.

Para que o sistema $\begin{cases} 2x+3y=24 \\ 4x-2y=16 \\ 8x+Ky=80 \end{cases}$ seja equivalente ao sistema original, ele deve apresentar somente a solução $(x,y)=(4,6)$. Nesse caso, a última equação deve ser satisfeita para $(x,y)=(4,6)$.

$$8x + Ky = 80$$

$$8.4 + K.6 = 80$$

$$32 + 6K = 80$$

$$6K = 48$$

$$\boldsymbol{K = 8}$$

O valor de $S = x + y$ é:

$$S = 6 + 4 = 10$$

Logo, $\frac{S}{K}$ é:

$$\frac{S}{K} = \frac{10}{8} = 1{,}25$$

Portanto, $\boldsymbol{S = 1,25K}$.

Gabarito: Letra D.

13. (FCC/SEE MG/2012) Se a, b e c são soluções do sistema $\begin{cases} \boldsymbol{a + 2b = 7} \\ \boldsymbol{2a - c = -3} \\ \boldsymbol{a + 3b - 2c = 0} \end{cases}$, então a soma $(\boldsymbol{a + b + c})$ vale

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

Comentários:

Note que a, b e c são as variáveis do sistema linear. Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{2})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & -17 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & -17 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Vamos trocar as duas últimas equações de lugar, para facilitar o escalonamento e **evitar usar frações**. Ficamos com:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -17 \end{bmatrix}$$

Continuando o escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -17 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{4})L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -9 & -45 \end{bmatrix}$$

Logo, temos o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} a + 2b \qquad = 7 \\ \qquad b - 2c = -7 \\ \qquad\quad -9c = -45 \end{cases}$$

Da **última equação**, temos:

$$-9c = -45$$

$$\boldsymbol{c = 5}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$b - 2\boldsymbol{c} = -7$$

$$b - 2.5 = -7$$

$$b = -7 + 10$$

$$\boldsymbol{b = 4}$$

Da **primeira equação**, temos:

$$a + 2\boldsymbol{b} = 7$$

$$a + 2.4 = 7$$

$$a = 7 - 8$$

$$\boldsymbol{a = -1}$$

Logo:

$$a + b + c = (-1) + 4 + 5 = 8$$

Gabarito: Letra D.

Vunesp

14.(VUNESP/Pref. N Odessa/2018) Gertrudes, que é doceira, recebeu três encomendas para festas. Sabe-se que, em cada uma das encomendas, foram usadas quantidades diferentes de ovos, iguais a x, y e z, tais que $x + y = 40$, $x + z = 30$ e $y + z = 38$. Desse modo, é correto afirmar que, para a produção dessas três encomendas, Gertrudes usou uma quantidade de ovos igual a

a) 3,5 dúzias.

b) 4 dúzias.

c) 4,5 dúzias.

d) 5 dúzias.

e) 5,5 dúzias.

Comentários:

O **total de ovos** das três encomendas é dado pela **soma $x + y + z$**. Note que a questão apresenta o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y \qquad = 40 \\ x \qquad + z = 30 \\ \qquad y + z = 38 \end{cases}$$

Ao somar as três equações, ficamos com:

$$2x + 2y + 2z = 108$$

$$2(x + y + z) = 108$$

$$(x + y + z) = 54$$

O número de dúzias é:

$$\frac{54}{12} = 4{,}5 \text{ dúzias}$$

Gabarito: Letra C.

15.(VUNESP/CM Marília/2017) Uma editora enviou para uma biblioteca três pacotes que tinham, respectivamente, y, w e z livros em cada um. Sabendo-se que $y + w = 40$, $y + z = 30$ e $w + z = 38$, é correto afirmar que os três pacotes tinham, juntos, um número total de livros igual a

a) 54.

b) 56.

c) 58.

d) 60.

e) 64.

Comentários:

O **total de livros** dos três pacotes é dado pela **soma $y+w+z$**. Note que a questão apresenta o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y + w \quad\quad = 40 \\ y \quad\quad + z = 30 \\ \quad\;\; w + z = 38 \end{cases}$$

Ao somar as três equações, ficamos com:

$$2y + 2w + 2z = 108$$

$$2(y + w + z) = 108$$

$$(y + w + z) = 54$$

Portanto, o total de livros é 54.

Gabarito: Letra A.

16. (VUNESP/TJ SP/2017) Os preços de venda de um mesmo produto nas lojas X, Y e Z são números inteiros representados, respectivamente, por x, y e z. Sabendo-se que $x + y = 200$, $x + z = 150$ e $y + z = 190$, então a razão $\frac{x}{y}$ é:

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{8}$

e) $\frac{1}{3}$

Comentários:

Temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y \quad\quad = 200 \\ x \quad\quad + z = 150 \\ \quad\;\; y + z = 190 \end{cases}$$

Ao somar todas as equações do sistema, ficamos com:

$$2x + 2y + 2z = 540$$

$$2(x + y + z) = 540$$

$$\boldsymbol{x + y + z = 270}$$

Veja que temos a soma das três incógnitas e cada equação original apresenta sempre duas incógnitas. Podemos subtrair cada equação do sistema linear de $\boldsymbol{x + y + z = 270}$.

$$\begin{array}{lr} & \boldsymbol{x + y + z = 270} \\ (\boldsymbol{-1})L_2 & -x \quad\quad - z = -150 \\ \hline & \boldsymbol{y \quad\quad = 120} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} & \boldsymbol{x + y + z = 270} \\ (\boldsymbol{-1})L_3 & - y - z = -190 \\ \hline & \boldsymbol{x \quad\quad\quad = 80} \end{array}$$

Logo:

$$\frac{x}{y} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$$

Gabarito: Letra C.

17. (VUNESP/CM Itatiba/2015) Nas somas apresentadas, cada uma das quatro letras a, b, c e d representa um número formado por um algarismo.

$$\boldsymbol{a + b + c + d = 14}$$

$$\boldsymbol{a + b + c = 9}$$

$$\boldsymbol{a + b + d = 11}$$

$$\boldsymbol{b + c + d = 12}$$

Nessas condições, é correto afirmar que

a) d + a = 8.

b) c – a = 2.

c) c + b = 6.

d) a + b = 5.

e) d – c = 2.

Comentários:

Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a+b+c+d=14 \\ a+b+c \qquad = 9 \\ a+b \qquad +d=11 \\ \qquad b+c+d=12 \end{cases}$$

Note que podemos obter o valor de a, c e d subtraindo as três últimas equações da primeira.

$$\begin{array}{rr} L_1 & a+b+c+d=14 \\ (-\mathbf{1})L_2 & -a-b-c \qquad =-9 \\ \hline & \boldsymbol{d} \ = \mathbf{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} L_1 & a+b+c+d=14 \\ (-\mathbf{1})L_3 & -a-b \qquad -d=-11 \\ \hline & \boldsymbol{c} \qquad = \mathbf{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} L_1 & a+b+c+d=14 \\ (-\mathbf{1})L_4 & -b-c-d=-12 \\ \hline & \boldsymbol{a} \qquad\qquad = \mathbf{2} \end{array}$$

A partir da primeira equação, podemos obter b:

$$a+b+c+d=14$$

$$2+b+3+5=14$$

$$b=14-10$$

$$\boldsymbol{b}=\mathbf{4}$$

A partir dos valores obtidos, temos que:

$$d-c=5-3$$

$$=2$$

O **gabarito**, portanto, é **letra E**.

Gabarito: Letra E.

18. (VUNESP/Pref. SJC/2012)

$$\begin{cases} \sqrt[3]{729}x+\sqrt[3]{125}y+2^4=146 \\ \dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt[3]{27}}x-\sqrt{25}y+4^3=74 \end{cases}$$

Os valores das incógnitas x e y que satisfazem esse sistema de equações são, respectivamente,

a) 10 e 8.

b) 8 e 10.

c) 12 e 6.

d) 6 e 12.

e) 8 e 12.

Comentários

Vamos organizar o sistema linear apresentado, removendo as raízes e deixando os termos independentes do lado direito da equação.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{729}x + \sqrt[3]{125}y + 2^4 = 146 \\ \dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt[3]{27}}x - \sqrt{25}y + 4^3 = 74 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{9^3}x + \sqrt[3]{5^3}y + 16 = 146 \\ \dfrac{\sqrt{15^2}}{\sqrt[3]{3^3}}x - \sqrt{5^2}y + 64 = 74 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 9x + 5y = 146 - 16 \\ \dfrac{15}{3}x - 5y = 74 - 64 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x + 5y = 130 \\ 5x - 5y = 10 \end{cases}$$

Note que, ao somar as duas equações, elimina-se a variável y. Ficamos com:

$$14x = 140$$

$$\boldsymbol{x = 10}$$

Substituindo o valor encontrado para x na primeira equação, obtemos:

$$9x + 5y = 130$$

$$9.10 + 5y = 130$$

$$5y = 130 - 90$$

$$5y = 40$$

$$\boldsymbol{y = 8}$$

Logo, os valores das incógnitas x e y são, respectivamente, 10 e 8.

Gabarito: Letra A.

19. (VUNESP/UNCISAL/2009) O sistema a seguir representa as quantias que dois amigos possuem, sendo x a quantia de Paulo e y a quantia de Luiz:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + \frac{1}{5}y = \frac{8}{5}} \\ \boldsymbol{x - 6000 = \frac{x+y}{2}} \end{cases}$$

A diferença entre as duas quantias é igual a

a) R$ 10.000,00.

b) R$ 12.000,00.

c) R$ 15.000,00.

d) R$ 18.000,00.

Comentários:

Vamos organizar o sistema linear, removendo as frações.

Ao multiplicar a primeira equação por 5 e a segunda equação por 2, ficamos com:

$$\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - 12.000 = x + y \end{cases}$$

Agora vamos deixar as variáveis à esquerda e os termos independentes à direita.

$$\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - 12.000 = x + y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + y = 8 \\ x - y = 12.000 \end{cases}$$

Note que a questão pergunta pela **diferença entre as duas quantias** $(\boldsymbol{x - y})$. Essa diferença é dada pela segunda equação:

$$x - y = 12.000$$

Gabarito: Letra B.

20. (VUNESP/Pref. Sorocaba/2006) Resolvendo o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = -1} \\ \boldsymbol{\frac{4x-y}{5} - x + y = 3} \end{cases}$ **pode-se afirmar que** $\boldsymbol{x^2 + y^2}$ **vale**

a) 122.

b) 120.

c) 118.

d) 116.

e) 114.

Comentários:

Vamos organizar o sistema linear, removendo as frações.

Ao multiplicar a primeira equação por 6 (2 × 3) e a segunda equação por 5, ficamos com:

$$\begin{cases} 3(x+y) - 2(x-y) = -6 \\ (4x - y) - 5x + 5y = 15 \end{cases}$$

Agora vamos agrupar as variáveis.

$$\begin{cases} 3(x+y) - 2(x-y) = -6 \\ (4x - y) - 5x + 5y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 3y - 2x + 2y = -6 \\ -x + 4y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 5y = -6 \\ -x + 4y = 15 \end{cases}$$

Ao somar as duas equações, removemos a variável x. Ficamos com:

$$5y + 4y = -6 + 15$$

$$9y = 9$$

$$\boldsymbol{y = 1}$$

Substituindo y na primeira equação, temos:

$$x + 5\boldsymbol{y} = -6$$

$$x + 5.1 = -6$$

$$\boldsymbol{x = -11}$$

Logo, $x^2 + y^2$ é:

$$(-11)^2 + 1^2$$

$$= 121 + 1$$

$$= 122$$

Gabarito: Letra A.

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Discussão de um sistema linear

FGV

1.(FGV/Pref. SP/2016) Em uma aula, o professor ofereceu a seus alunos o seguinte problema:

O salário de Paulo é depositado em um banco todo mês. Após juntar o dobro do seu salário e depois de pagar a mensalidade da faculdade ficou com 5 mil reais. Dois meses depois, ele tinha em sua conta o valor do seu salário e mais o valor de 3 mensalidades da faculdade, o que totalizou 6 mil reais. Paulo constatou ainda que se somasse o dobro de seu salário ao valor da mensalidade, resultaria 7 mil reais.

Encontre um modelo que represente a situação: nomeie x o valor do salário de Paulo e y o valor da mensalidade da faculdade.

Foram três as soluções encontradas por seus alunos:

- **A primeira exibia o sistema de equações $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$ como modelo para o problema.**
- **A segunda, exibia o sistema de equações $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ como modelo para o problema.**
- **A terceira solução encontrada exibia a equação $x + 3(2x - 5) = 6$ como modelo para o cálculo do salário.**

Todos encontraram como solução para o salário 3 mil reais e para a mensalidade da faculdade, mil reais.

Com base no caso apresentado, assinale a afirmativa correta.

a)Os valores do salário e da mensalidade encontrados não estão corretos.

b) O modelo correto para o problema foi encontrado apenas na primeira solução, já que são equações com duas variáveis.

c) O modelo correto para o problema foi encontrado apenas na segunda solução, já que são equações com duas variáveis.

d) O modelo correto para o cálculo da mensalidade foi encontrado apenas na terceira solução, pois essa é uma equação com apenas uma variável.

e) Todos os modelos encontrados estão corretos, embora o terceiro modelo encontre apenas o valor do salário, já que a equação tem apenas uma variável.

Comentários:

Devemos considerar que o salário de Paulo é dado por x **em milhares de reais**, bem como o valor da mensalidade deve ser considerado y **em milhares de reais**. Feita essa consideração, vamos transformar os dados do problema em linguagem matemática.

"Após juntar o dobro do seu salário e depois de pagar a mensalidade da faculdade ficou com 5 mil reais."

$$2x - y = 5$$ **(Primeira equação)**

"...ele tinha em sua conta o valor do seu salário e mais o valor de 3 mensalidades da faculdade, o que totalizou 6 mil reais"

$$x + 3y = 6$$ **(Segunda equação)**

"Paulo constatou ainda que se somasse o dobro de seu salário ao valor da mensalidade, resultaria 7 mil reais"

$$2x + y = 7$$ **(Terceira equação)**

—

Note que o **primeiro aluno** apresentou as duas primeiras equações como modelo do problema:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{7}{2}} & \mathbf{\frac{7}{2}} \end{bmatrix}$$

Trata-se de um **sistema possível e determinado** (**SPD**), pois temos o mesmo número de equações e incógnitas no sistema escalonado. Poderíamos determinar os valores de x e de y, porém isso não é necessário para a resolução do problema.

—

O **segundo aluno**, por sua vez, apresentou as três equações:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \left(-\frac{4}{7}\right)L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{7}{2}} & \mathbf{\frac{7}{2}} \end{bmatrix}$$

Veja, portanto, que **os sistemas lineares encontrados pelo primeiro e pelo segundo aluno são equivalentes, pois eles são equivalentes ao mesmo sistema escalonado**. Ambos são sistemas **possíveis e determinados** (**SPD**), pois temos o mesmo número de equações e incógnitas no sistema escalonado.

—

O **terceiro aluno**, por sua vez, apresentou apenas uma equação:

$$x + 3(2x - 5) = 6$$

Basicamente, esse aluno isolou a variável y na **primeira equação** ($2x - y = 5$), obtendo $\mathbf{y = 2x - 5}$. Em seguida, **substituiu y** na **segunda equação** ($x + 3y = 6$):

$$x + 3\mathbf{y} = 6$$

$$x + 3(\mathbf{2x - 5}) = 6$$

—

Podemos tirar as seguintes conclusões:

- O **primeiro modelo está correto**, pois representa duas equações do problema, gerando um sistema **SPD** em que se pode obter x e y;
- O **segundo modelo está correto**, pois representa três equações do problema cujo sistema escalonado apresenta 2 equações e 2 incógnitas, gerando um sistema **SPD** equivalente ao primeiro **em que se pode obter os mesmos valores para x e y**;
- O **terceiro modelo está correto**, pois se baseia em duas equações do problema e utiliza o método da substituição para encontrar o valor do salário (x).

Com base nessas conclusões, temos a **alternativa E** como **correta**:

"Todos os modelos encontrados estão corretos, embora o terceiro modelo encontre apenas o valor do salário, já que a equação tem apenas uma variável."

Gabarito: Letra E.

Cebraspe

2.(CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Com relação a sistemas lineares e análise combinatória, julgue o item.

Para todo sistema linear da forma $AX = B$, em que A é uma matriz quadrada $m \times m$, X e B são matrizes colunas $m \times 1$, e $det(A) = 0$, o sistema não tem solução.

Comentários:

Temos um sistema linear na forma matricial $\boldsymbol{A}_{m\times m}\boldsymbol{X}_{m\times 1} = \boldsymbol{B}_{m\times 1}$, sendo:

- $\boldsymbol{A}$: **Matriz dos coeficientes** ou **matriz <u>incompleta</u> do sistema**;
- $\boldsymbol{X}$: **Matriz das incógnitas**;
- $\boldsymbol{B}$: **Matriz dos termos independentes**.

Segundo o **Teorema de Cramer**, quando $D = 0$, isto é, **quando $\det A = 0$, podemos ter**:

- **Sistema Possível e Indeterminado** (**SPI**): apresenta infinitas soluções;
- **Sistema Impossível** (**SI**): não apresenta solução.

Teorema de Cramer

D ≠ 0	D = 0	
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)	Sistema Impossível (SI)

Portanto, **não se pode afirmar que o sistema não tem solução**, pois ele pode ser **SPI** e, consequentemente, **pode apresentar infinitas soluções.**

Gabarito: ERRADO.

3. (CESPE/SEDUC CE/2009/Adaptada) Acerca da matriz $A = \begin{bmatrix} a-1 & a-1 & a-1 \\ a-1 & 1 & 2 \\ a-1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, em que a é um número real, julgue o item a seguir.

Se $a \neq 1$, então a equação matricial $AX = O$, em que $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é a matriz nula de ordem 3×1, tem uma única solução.

Comentários:

Observe que a equação matricial $AX = \boldsymbol{O}$ representa um **sistema linear homogêneo**, pois se trata de um sistema linear em que **<u>todos os termos independentes são nulos</u>**.

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que se $D \neq 0$, isto é, se $\det A \neq 0$, o sistema linear homogêneo apresenta **solução única**, a solução trivial.

Sistema Linear Homogêneo	
D ≠ 0	D = 0
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
Admite somente a solução trivial	Admite a solução trivial e infinitas outras

Aplicando a **Regra de Sarrus** no determinante da matriz A, temos:

$$\left|\begin{matrix} a-1 & a-1 & a-1 \\ a-1 & 1 & 2 \\ a-1 & 1 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a-1 & a-1 \\ a-1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\det A = [(-2).(a-1) + 2(a-1)^2 + (a-1)^2] - [(a-1)^2 + 2(a-1) + (-2).(a-1)^2]$$

$$\det A = [3(a-1)^2 - 2(a-1)] - [-(a-1)^2 + 2(a-1)]$$

$$\det A = 4(a-1)^2 - 4(a-1)$$

Para termos solução única, devemos ter $\mathbf{\det A \neq 0}$.

$$4(a-1)^2 - 4(a-1) \neq 0$$

$$4(a-1)^2 \neq 4(a-1)$$

$$(a-1)^2 \neq (a-1)$$

A igualdade ocorre com $a = 1$. Portanto, **devemos ter $a \neq 1$**. Simplificando ambos os lados por $(a-1)$, temos:

$$(a-1) \neq 1$$

$$\mathbf{a \neq 2}$$

Logo, para que tenhamos solução única, **é necessário que a seja diferente de 1 e também que a seja diferente de 2**.

Portanto, é **errado** dizer que se $a \neq 1$, então a equação matricial $AX = O$ tem uma única solução.

Gabarito: ERRADO.

4.(CESPE/SEDUC AL/2013/Adaptada) O sistema $\begin{cases} 5x + 5y + 5z = 3.000 \\ 5x + 4y + 4z = 1.060 \\ 6x + 5y + 5z = 1.260 \end{cases}$ **é impossível.**

Comentários:

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema**.

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 3000 \\ 5 & 4 & 4 & 1060 \\ 6 & 5 & 5 & 1260 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow 1L_2 + (-1)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 3000 \\ 0 & -1 & -1 & -1940 \\ 6 & 5 & 5 & 1260 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow 1L_3 + \left(-\frac{6}{5}\right)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 3000 \\ 0 & -1 & -1 & -1940 \\ 0 & -1 & -1 & -2340 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 1L_3 + (-1)L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 3000 \\ 0 & -1 & -1 & -1940 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-400} \end{bmatrix}$$

A última equação do sistema escalonado, dada por $\mathbf{0x + 0y + 0z = -400}$, indica que estamos diante de um **sistema impossível** (**SI**).

Gabarito: CERTO.

5. (CESPE/SEDUC AL/2013/Adaptada) O sistema $\begin{cases} 5x + 5y + 5z = 3000 \\ 5x + 4y + 4z = 1.060 \\ 4x + 5y + 2z = 1.140 \end{cases}$ é possível e indeterminado.

Comentários:

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema**.

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 3000 \\ 5 & 4 & 4 & 1060 \\ 4 & 5 & 2 & 1140 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow 1L_2 + (-1)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 3000 \\ 0 & -1 & -1 & -1940 \\ 4 & 5 & 2 & 1140 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow 1L_3 + \left(-\frac{4}{5}\right)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 3000 \\ 0 & -1 & -1 & -1940 \\ 0 & 1 & -2 & -1260 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 1L_3 + 1L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 3000 \\ 0 & -1 & -1 & -1940 \\ 0 & 0 & -3 & -3200 \end{bmatrix}$$

Explicitando as variáveis, o sistema linear original equivale a:

$$\begin{cases} 5x + 5y + 5z = 3000 \\ \quad -y - z = 1 \\ \quad\quad -3z = -3200 \end{cases}$$

Veja que **o sistema acima é escalonado**, pois o número de incógnitas diminui de equação para equação.

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (3) é **igual** ao **número de incógnitas** (3). Logo, temos um **sistema possível e determinado** (**SPD**).

Gabarito: ERRADO.

6. (CESPE/IFF/2018) Considere o sistema S de m equações lineares e n incógnitas, mostrado abaixo.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + \ a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots \ + a_{mn}x_n = b_m$$

Nesse sistema, x_1, x_2, … , x_n são as incógnitas, os coeficientes a_{ij} e os b_i são números reais, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A respeito das propriedades e das soluções do sistema S, assinale a opção correta.

a) Considere que $m = n$ e que $A = (a_{ij})$ — a matriz dos coeficientes de S — seja tal que $det(A) = 0$. Nesse caso, S não possui solução.

b) Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ são soluções de S e se r é um número real qualquer, então $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ e $r\alpha = (r\alpha_1, r\alpha_2, \dots, r\alpha_n)$ são também soluções de S.

c) Se $m < n$, então S possui infinitas soluções.

d) Se $m = n$ e se o sistema homogêneo associado a S — isto é, o sistema com os mesmos coeficientes a_{ij} apenas considerando todos os $b_i = 0$ — tiver solução única, então o sistema S também terá solução única.

e) Se $m > n$, então S não possui solução.

Comentários:

Veja que a questão apresenta um **sistema linear** genérico com **m equações** e **n incógnitas**. Vamos comentar cada alternativa.

a) Considere que $m = n$ e que $A = (a_{ij})$ — a matriz dos coeficientes de S — seja tal que $det(A) = 0$. Nesse caso, S não possui solução. ERRADO.

A alternativa afirma que, se o número de equações for igual ao número de incógnitas $(m = n)$ e se o determinante da matriz dos coeficientes for zero $(\det A = 0)$, então o sistema não possui soluções.

Essa afirmativa está **errada** porque, de acordo com o **Teorema de Cramer**, se $D = 0$, isto é, se $\det A = 0$, podemos ter tanto um **sistema possível indeterminado** (**SPI**) quanto um **sistema impossível** (**SI**). **No primeiro caso, temos infinitas soluções**.

b) Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ são soluções de S e se r é um número real qualquer, então $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ e $r\alpha = (r\alpha_1, r\alpha_2, \dots, r\alpha_n)$ são também soluções de S. ERRADO.

A alternativa afirma três coisas sobre o sistema linear genérico apresentado:

- O sistema admite ao menos duas soluções e, portanto, admite infinitas soluções. Isso significa que estamos diante de um **Sistema Possível Indeterminado** (**SPI**).
- A **soma das duas soluções de um SPI** gera **necessariamente** uma **nova solução** do sistema; e
- A **multiplicação de uma solução do SPI por uma constante r qualquer também é solução do sistema**.

Para mostrar que as **afirmações estão erradas**, vamos mostrar um **contraexemplo**. Considere o seguinte **Sistema Possível e Indeterminado** (**SPI**) de uma única equação:

$$\{x_1 + x_2 = 1$$

Note que $(x_1, x_2) = (1, 0)$ é solução do sistema e que $(x_1, x_2) = (0, 1)$ também é. Note, porém, que:

- $(1 + 0, 0 + 1) = (1, 1)$ **não é solução do sistema**, pois $1 + 1 \neq 1$; e
- $5.(1, 0) = (5, 0)$ **não é solução do sistema**, pois $5 + 0 \neq 1$.

A **alternativa**, portanto, está **ERRADA**.

c) Se $m < n$, então S possui infinitas soluções. ERRADO.

Vimos que a questão apresenta um **sistema linear** genérico com **m equações** e **n incógnitas**.

A alternativa afirma que se o número de equações é menor do que o número de incógnitas $(m < n)$, **então o sistema apresenta infinitas soluções**.

Trata-se de uma afirmação **ERRADA**, pois o sistema pode ter um número de equações menor do que o número de incógnitas e ser um **Sistema Impossível** (**SI**) (**sem solução**).

Veja o seguinte **contraexemplo**:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Note que **o número de equações é menor do que o número de incógnitas** e **o sistema é impossível**. Isso porque, ao multiplicar a primeira equação por 2, obtém-se:

$$2x + 2y + 2z = 2$$

Essa equação contradiz a segunda equação do sistema, pois $2x + 2y + 2z$ **não pode ser igual a 2 e a 3 ao mesmo tempo.**

d) Se $m = n$ e se o sistema homogêneo associado a S — isto é, o sistema com os mesmos coeficientes a_{ij} apenas considerando todos os $b_i = 0$ — tiver solução única, então o sistema S também terá solução única. **CERTO.**

Se $m = n$, o sistema tem o mesmo número de equações e de incógnitas. Nesse caso, a **matriz dos coeficientes** (A) **é quadrada**.

O sistema original S pode ser descrito na forma matricial por:

$$\boldsymbol{AX = B}$$

O sistema homogêneo associado é dado por:

$$\boldsymbol{AX = O}$$

Em que O é a matriz nula de ordem $n \times 1$.

Se o **sistema homogêneo associado** tiver **solução única**, esse sistema homogêneo é um **Sistema Possível e Determinado** (**SPD**). Pelo **Teorema de Cramer**, temos que $\boldsymbol{D = \det A \neq 0}$.

Como a **matriz dos coeficientes (A) é a mesma para o sistema original, esse sistema também será possível e determinado** (**SPD**), pois $\boldsymbol{D = \det A \neq 0}$. Logo, o sistema original também terá solução única.

e) Se $m > n$, então S não possui solução. **ERRADO.**

Vimos que a questão apresenta um **sistema linear** genérico com **m equações** e **n incógnitas**.

A alternativa afirma que se o número de equações é maior do que o número de incógnitas $(m > n)$, **então o sistema não possui solução**, ou seja, o **sistema é impossível** (**SI**).

Trata-se de uma afirmação **ERRADA**, pois nesse caso podemos ter um sistema **possível e determinado** (**SPD**), um sistema **possível e indeterminado** (**SPI**) ou até mesmo um **sistema impossível** (**SI**).

Veja o seguinte contraexemplo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

Note que temos um número de equações (3) maior do que o número de incógnitas (2). Note, porém, que ao escalonar o sistema ficamos com:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \sim \{x + y = 1$$

Note, portanto, que esse sistema é **possível e indeterminado** (**SPI**), admitindo **infinitas soluções**.

Gabarito: Letra D.

7. (CESPE/SEDUC AL/2018) Julgue o item que se segue, relativos a matrizes e sistemas lineares.

Um sistema linear escrito na forma matricial $PX = -X$, em que P é uma matriz $n \times n$ de coeficientes constantes e X é a matriz das incógnitas, $n \times 1$, tem solução única se, e somente se, a matriz $P + I$ for inversível (I é a matriz identidade $n \times n$).

Comentários:

Sabe-se que um sistema linear pode ser escrito na forma matricial $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, sendo:

- $\boldsymbol{A}$: **Matriz dos coeficientes** ou **matriz incompleta do sistema**;
- $\boldsymbol{X}$: **Matriz das incógnitas**;
- $\boldsymbol{B}$: **Matriz dos termos independentes**.

O problema propõe a forma matricial $PX = -X$. Vamos organizar essa equação matricial:

$$PX = -X$$

$$PX + X = O$$

Colocando a matriz X em evidência:

$$(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$$

Comparando a expressão acima com a forma tradicional $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$**,** temos que:

- $(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{I})$ **é a matriz dos coeficientes**;
- $\boldsymbol{X}$ **é a matriz das incógnitas**;
- $\boldsymbol{O}$, que é a matriz nula, é a **matriz dos termos independentes**.

Para o sistema ter solução única, ele deve ser um **sistema possível e determinado** (**SPD**). Sabemos, pelo **Teorema de Cramer**, que isso ocorre quando o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Isso significa que $\det(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{I})$ **é diferente de zero**.

Sabemos que uma matriz é inversível se, e somente se, essa matriz tem determinante diferente de zero. Logo, **a matriz $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{I}$ deve ser inversível**.

Gabarito: CERTO.

8. (CESPE/Pref. São Luís/2017) Um sistema linear de 4 equações e 4 incógnitas pode ser escrito na forma matricial como $AX = B$, em que A é a matriz, de ordem 4×4, dos coeficientes da equação; X é a matriz coluna, de ordem 4×1, das incógnitas da equação e B é a matriz coluna, de ordem 4×1, dos termos independentes da equação.

Com referência a essas informações, assinale a opção correta.

a) Se X_1, X_2 e X_3 forem matrizes, de ordem 4×1, que são soluções distintas da referida equação matricial, então o determinante de A será igual a zero.

b) Se a matriz A tiver exatamente duas linhas iguais, então o sistema terá exatamente duas soluções distintas.

c) Se todos os elementos da matriz B forem iguais a zero e o determinante de A for igual a zero, então o sistema não terá solução.

d) Se uma matriz C, de ordem 4×1, possuir dois elementos positivos e dois negativos e for tal que $AC = B$, então o determinante de A será diferente de zero.

e) Se o determinante da matriz A for igual a zero, então A terá pelo menos duas linhas iguais.

Comentários:

Vamos avaliar todas as alternativas da questão.

a) Se X_1, X_2 e X_3 forem matrizes, de ordem 4×1, que são soluções distintas da referida equação matricial, então o determinante de A será igual a zero. CERTO.

Se o sistema linear $AX = B$ apresenta mais de uma solução, então ele apresenta infinitas soluções e é classificado como **Sistema Possível e Indeterminado** (**SPI**).

Sabemos, pelo **Teorema de Cramer**, que este é um caso em que $D = 0$, isto é, $\det A = 0$. O **gabarito**, portanto, é **letra A**.

b) Se a matriz A tiver exatamente duas linhas iguais, então o sistema terá exatamente duas soluções distintas. ERRADO.

Um sistema linear pode apresentar solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução.

c) Se todos os elementos da matriz B forem iguais a zero e o determinante de A for igual a zero, então o sistema não terá solução. ERRADO.

Se todos os elementos da matriz B forem iguais a zero, temos um **Sistema Linear Homogêneo**. Nesse caso, se $\det A = 0$, isto é, $D = 0$, o sistema apresenta **infinitas soluções**.

Sistema Linear Homogêneo	
D ≠ 0	D = 0
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
Admite somente a solução trivial	Admite a solução trivial e infinitas outras

d) Se uma matriz C, de ordem 4×1, possuir dois elementos positivos e dois negativos e for tal que $AC = B$, então o determinante de A será diferente de zero. **ERRADO.**

A alternativa apresenta uma **solução** para o sistema $AX = B$, dada pela **matriz C**. O fato dessa solução apresentar dois elementos positivos e dois elementos negativos **em nada influencia o determinante da matriz A**. Como há a garantia de que temos uma solução, esse sistema pode ser:

- **Possível e Determinado** (**SPD**): apresenta solução única. Nesse caso, $D = \det A \neq 0$;
- **Possível e Indeterminado** (**SPI**): apresenta infinitas soluções, dentre elas a matriz C. Nesse caso, $D = \det A = 0$.

Como o sistema pode ser **SPI**, então não necessariamente o determinante de A será diferente de zero.

e) Se o determinante da matriz A for igual a zero, então A terá pelo menos duas linhas iguais. **ERRADO.**

Da aula de determinantes, sabemos que **existem muitas formas de uma matriz A ter determinante zero**. Esse determinante zero pode ocorrer, por exemplo, por conta de **filas iguais** (linhas ou colunas), de **filas proporcionais** ou também de **filas que são combinações lineares de outras**.

Logo, é **errado** dizer que se o determinante da matriz A for igual a zero, **necessariamente** há linhas iguais.

Gabarito: Letra A.

9. (CESPE/CGE MG/2009) Em um concurso estadual, foram aprovados x candidatos, que serão distribuídos para trabalharem em y cidades do estado. Na hipótese de serem encaminhados 2 candidatos para cada cidade, sobrarão 70 candidatos para serem distribuídos. Entretanto, no caso de serem encaminhados 3 candidatos para cada cidade, será necessário convocar mais 40 candidatos classificados nesse concurso.

Para determinação dos valores x e y, obtém-se um sistema linear de duas equações com incógnitas x e y. A ele está associada uma matriz M, formada pelos coeficientes das variáveis das suas equações. Assinale a opção correta a respeito da solução desse sistema.

a) A matriz M tem determinante diferente de zero.

b) O sistema é homogêneo.

c) O sistema é compatível e indeterminado.

d) A matriz M é não-inversível.

e) A matriz M não pode ser transformada por meio de operações elementares sobre suas linhas na matriz identidade 2 por 2.

Comentários:

Vamos descrever o problema por meio de equações:

"Na hipótese de serem encaminhados 2 candidatos para cada cidade, sobrarão 70 candidatos para serem distribuídos"

Isso significa que, se tivéssemos $x - 70$ candidatos, poderíamos encaminhar 2 para cada cidade. Logo:

$$y = \frac{x - 70}{2}$$

$$2y = x - 70$$

$$\boldsymbol{x - 2y = 70}$$

"...no caso de serem encaminhados 3 candidatos para cada cidade, será necessário convocar mais 40 candidatos classificados nesse concurso."

Isso significa que, se tivéssemos $x + 40$ candidatos, poderíamos encaminhar 3 para cada cidade. Logo:

$$y = \frac{x + 40}{3}$$

$$3y = x + 40$$

$$\boldsymbol{x - 3y = -40}$$

O sistema linear obtido para se determinar x e y é:

$$\begin{cases} x - 2y = 70 \\ x - 3y = -40 \end{cases}$$

Na forma matricial, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ -40 \end{bmatrix}$$

Vamos analisar as alternativas.

a) A matriz M tem determinante diferente de zero. CERTO.

Como M é a matriz dos coeficientes, então:

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= [1 \times (-3)] - [(-2) \times 1]$$

$$= -3 - (-2)$$

$$= -1$$

Portanto, o determinante de M é diferente de zero. Logo, o **gabarito** é **letra A**.

b) O sistema é homogêneo. ERRADO.

O sistema não é homogêneo, pois a matriz dos termos independentes, $\begin{bmatrix} 70 \\ -40 \end{bmatrix}$, não é nula.

c) O sistema é compatível e indeterminado. ERRADO.

O sistema é **possível e determinado**, pois $D = \det M \neq 0$.

d) A matriz M é não-inversível. ERRADO.

A matriz M apresenta determinante diferente de zero. Portanto, ela é inversível.

e) A matriz M não pode ser transformada por meio de operações elementares sobre suas linhas na matriz identidade 2 por 2. ERRADO.

Temos a matriz M:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Se fizermos $L_2 = (-1)L_2 + L_1$, ficamos com:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 = L_1 + 2L_2$, ficamos com:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz M pode ser transformada na matriz identidade 2 por 2.

Gabarito: Letra A.

10. (CESPE/PETROBRAS/2008/Adaptada) Considerando que A seja a matriz formada pelos coeficientes do sistema $\begin{cases} ax + by = \mu \\ cx + dy = v \end{cases}$, que $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e que, $Z = \begin{pmatrix} \mu \\ v \end{pmatrix}$ assinale a opção correta.

a) Se as componentes de Z forem nulas e o determinante de A for igual a zero, então o sistema terá infinitas soluções.

b) O sistema pode ser representado matricialmente por $AZ = W$.

c) O determinante de A é igual a $ad + bc$.

d) A substituição dos elementos c e d, da segunda linha A, por $2a$ e $2b$, respectivamente, o determinante da nova matriz será igual a $4ab$.

Comentários:

Temos que a **matriz dos coeficientes** é dada por $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Além disso, $\boldsymbol{Z}$ é a **matriz dos termos independentes** e $\boldsymbol{W}$ é a **matriz das incógnitas**.

Vamos analisar as alternativas.

a) Se as componentes de Z forem nulas e o determinante de A for igual a zero, então o sistema terá infinitas soluções. CERTO.

Se as componentes de Z forem nulas, temos um sistema homogêneo. Nesse caso, se $D = \det A = 0$, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**), que admite infinitas soluções. O **gabarito**, portanto, é **letra A**.

Sistema Linear Homogêneo	
D ≠ 0	D = 0
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
Admite somente a solução trivial	Admite a solução trivial e infinitas outras

b) O sistema pode ser representado matricialmente por $AZ = W$. ERRADO.

O sistema pode ser representado por $AW = Z$, pois $\boldsymbol{Z}$ é a **matriz dos coeficientes**, que deve estar na equação sem multiplicar outra matriz.

c) O determinante de A é igual a $ad + bc$. ERRADO.

O determinante de A é $ad - bc$.

d) A substituição dos elementos c e d, da segunda linha A, por $2a$ e $2b$, respectivamente, o determinante da nova matriz será igual a $4ab$. ERRADO.

Nesse caso, o determinante seria zero, pois teríamos duas linhas proporcionais:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{vmatrix} = [a.2b] - [b.2a] = 2ab - 2ab = 0$$

Gabarito: Letra A.

Texto para as questões 11 e 12

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 0 \\ x + a^2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

Considerando o sistema homogêneo de equações lineares apresentado acima, em que a é uma constante real, julgue os itens que se segue.

11. (CESPE/INPE/2008) Para $a = -1$, a única solução do sistema é $x = y = z = 0$.

12. (CESPE/INPE/2008) Independentemente do valor de a, o sistema tem apenas a solução $x = y = z = 0$.

Comentários:

Note que estamos diante de um **sistema linear homogêneo**, pois todos os termos independentes são zero. Nesse caso, segundo o **Teorema de Cramer**, temos:

Sistema Linear Homogêneo	
D ≠ 0	D = 0
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
Admite somente a solução trivial	Admite a solução trivial e infinitas outras

Vamos calcular o determinante da matriz dos coeficientes, isto é, o determinante $D = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & a^2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & a^2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} a & 2 \\ 1 & a^2 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [\mathbf{a.a^2.5 + 2.3.2 + 1.1.3}] - [\mathbf{1.a^2.2 + a.3.3 + 2.1.5}]$$

$$D = [5a^3 + 12 + 3] - [2a^2 + 9a + 10]$$

$$D = 5a^3 - 2a^2 - 9a + 5$$

Vamos analisar as alternativas.

Questão 11

Se $a = -1$, o determinante da matriz dos coeficientes é:

$$D = 5a^3 - 2a^2 - 9a + 5$$

$$D = 5(-1)^3 - 2(-1)^2 - 9.(-1) + 5$$

$$D = -5 - 2 + 9 + 5$$

$$D = 7$$

Como $D \neq 0$, o sistema é **possível e determinado** (**SPD**), admitindo solução única. Como estamos lidando com um sistema homogêneo, **a solução única é a solução trivial**, dada por $x = y = z = 0$. O **gabarito**, portanto, é **CERTO**.

Questão 12

Quando $D = 0$, isto é, quando:

$$5a^3 - 2a^2 - 9a + 5 = 0$$

O sistema linear em questão é **possível e indeterminado** (**SPI**). Nesse caso, o sistema **admite infinitas soluções**, dentre as quais a solução trivial $x = y = z = 0$. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Observação: necessariamente existe um valor real de a que é raiz daquela equação, pois todo polinômio de grau ímpar admite solução real. O assunto polinômios não faz parte dessa aula. Caso faça parte do seu edital, o tema será visto em outra aula.

Gabarito: 11 - CERTO. 12 - ERRADO.

13. (CESPE/PM DF/2007) Julgue o seguinte item com relação a geometria do plano cartesiano, modelos periódicos e modelos lineares.

Considere o seguinte sistema de equações lineares homogêneo.

$$\begin{cases} x + ay - 2z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Nesse caso, é correto afirmar que, se $a = -1$ ou se $a = -2$, então esse sistema só admite a solução $x = y = z = 0$.

Comentários:

Note que estamos diante de um **sistema linear homogêneo**, pois todos os termos independentes são zero. Nesse caso, segundo o **Teorema de Cramer**, temos:

Sistema Linear Homogêneo	
D ≠ 0	D = 0
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
Admite somente a solução trivial	Admite a solução trivial e infinitas outras

Vamos calcular o determinante da matriz dos coeficientes, isto é, o determinante $D = \begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & a \\ a & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [\mathbf{1.1.(-1) + a.1.1 + (-2).a.(-1)}] - [\mathbf{(-2).1.1 + 1.1.(-1) + a.a.(-1)}]$$

$$D = [-1 + a + 2a] - [-2 - 1 - a^2]$$

$$D = 3a + 2 + a^2$$

$$D = a^2 + 3a + 2$$

Note que, para $\boldsymbol{a = -1}$ e para $\boldsymbol{a = -2}$, **temos $\boldsymbol{D = 0}$**:

$$\boldsymbol{a = -1}$$

$$\rightarrow D = (-1)^2 + 3.(-1) + 2$$

$$D = 1 - 3 + 2$$

$$D = 0$$

$$\boldsymbol{a = -2}$$

$$\rightarrow D = (-2)^2 + 3.(-2) + 2$$

$$D = 4 - 6 + 2$$

$$D = 0$$

Portanto, para $\boldsymbol{a = -1}$ e para $\boldsymbol{a = -2}$, **o sistema é possível e indeterminado** (**SPI**), admitindo **infinitas soluções**. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Gabarito: ERRADO.

FCC

14.(FCC/IBMEC/2019) Considere o seguinte sistema linear, nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x + ky = 3 \end{cases}$$

O valor de k para que este sistema seja impossível (isto é, não tenha soluções) é

a) – 4

b) 0

c) 4

d) – 2

e) 1

Comentários:

Vamos escalonar o sistema. Na forma matricial, o sistema é dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$$

Realizando $L_2 = L_2 + 2L_1$, ficamos com:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & k+4 & 5 \end{bmatrix}$$

Note que, se $(k + 4)$ for igual a zero, teremos um sistema impossível, pois haverá uma equação da forma $\mathbf{0x + 0y = 5}$. Logo, o sistema é impossível quando:

$$k + 4 = 0$$

$$k = -4$$

Gabarito: Letra A.

Vunesp

15.(VUNESP/Pref. Peruíbe/2019) É correto afirmar que o sistema linear $\begin{cases} ax + 2y = a - 1 \\ 2x + 4y = 3a \end{cases}$

a) é possível e determinado para qualquer valor de a.

b) é possível e determinado para $a = 1$.

c) é possível e indeterminado para $a = 1$.

d) é possível e determinado para $a = 2$.

e) é impossível para $a = 5$.

Comentários:

Pelo **Teorema de Cramer**, temos:

Para o caso em questão, o determinante D da matriz dos coeficientes é:

$$\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = [a \times 4] - [2 \times 2] = 4a - 4 = 4(a-1)$$

Note que o determinante será igual a zero quando:

$$4(a-1) = 0$$

$$a - 1 = 0$$

$$a = 1$$

Portanto:

- Para $a = 1$, o sistema pode ser **SPI** ou **SI** (seriam necessárias mais investigações para determinar se é **SPI** ou **SI**);
- Para $a \neq 1$, o sistema é **possível e determinado** (**SPD**).

Portanto, o **gabarito** é **letra D**: o sistema é possível e determinado para $a = 2$, pois, nesse caso, o valor de a é diferente de 1.

Gabarito: Letra D.

16. (VUNESP/Pref. Cerquilho/2019) Considere o seguinte sistema linear, sendo k um parâmetro real:

$$S = \begin{cases} x + y + z = 80 \\ 0,15x + 0,35y + kz = 32 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

O sistema S será:

a) possível e determinado, se $k = \frac{1}{5}$.

b) possível e indeterminado, se $k = \frac{1}{5}$.

c) impossível, se $k = \frac{1}{5}$.

d) impossível, se $k \neq \frac{1}{5}$.

e) possível e indeterminado, se $k \neq \frac{1}{5}$.

Comentários:

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0,15 & 0,35 & k & 32 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-0,15})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 0,20 & k-0,15 & 20 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_1}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 0,20 & k-0,15 & 20 \\ 0 & -4 & -1 & -80 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{20})L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 0,20 & k-0,15 & 20 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{20k-4} & \mathbf{320} \end{bmatrix}$$

Note que, **se $\mathbf{20k - 4 = 0}$**, isto é, **se $\mathbf{k = \frac{1}{5}}$**, a última equação do sistema linear ficará da seguinte forma:

$$\mathbf{0x + 0y + 0z = 320}$$

Logo, **o sistema é impossível se $\mathbf{k = \frac{1}{5}}$.**

Gabarito: Letra C.

17. (VUNESP/PM SP/2018) O sistema linear $\begin{cases} x - 3y + 4z = -4 \\ 3x - 7y + 7z = -8 \\ -4x + 6y - z = \alpha - 1 \end{cases}$ terá solução somente quando o valor de α for igual a

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

Comentários:

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema**.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 3 & -7 & 7 & -8 \\ -4 & 6 & -1 & \alpha-1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{3})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ -4 & 6 & -1 & \alpha-1 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \mathbf{4}L_1}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & -6 & 15 & \alpha-17 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \mathbf{3}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha-5} \end{bmatrix}$$

Note que, se $\alpha - 5$ for diferente de zero, isto é, se $\alpha \neq 5$, a última equação do sistema linear ficará da seguinte forma:

$$\mathbf{0}\boldsymbol{x} + \mathbf{0}\boldsymbol{y} + \mathbf{0}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{5} \neq 0$$

Nesse caso, teríamos um **sistema impossível** (**SI**), sem solução.

Para o caso em que $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{5}$, a última equação do sistema fica assim:

$$\mathbf{0}\boldsymbol{x} + \mathbf{0}\boldsymbol{y} + \mathbf{0}\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$$

Nesse caso, podemos eliminar a equação do sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Explicitando as variáveis, o sistema linear original, para $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{5}$**,** equivale a:

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = -4 \\ \quad 2y - 5z = 4 \end{cases}$$

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (2) é **menor** do que o **número de incógnitas** (3). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**), que admite infinitas soluções.

Portanto, o sistema linear terá solução (infinitas soluções) quando $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{5}$.

Gabarito: Letra D.

Outras Bancas

18.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Considere o sistema de equações lineares nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases} k^2x + y = 3 \\ x - ky = m + 4 \end{cases}, \text{ no qual } k \text{ e } m \text{ são reais.}$$

Sabe-se que existem números reais a e b, com $a \neq b$, tais que os pares ordenados (a, b) e (b, a) são soluções do sistema dado.

Dessa forma, k e m são, necessariamente, tais que

a) $k = 1, m = 1$

b) $k \neq 1, m = 1$

c) $k = -1, m = -1$

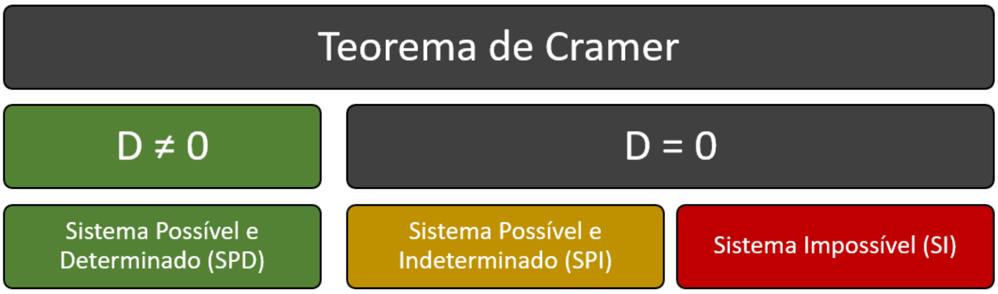
d) $k \neq -1, m = -1$

e) $k \neq -1, m \neq -1$

Comentários:

Note que o enunciado afirma que o sistema apresenta duas soluções distintas. Isso significa que o sistema possui infinitas soluções, ou seja, trata-se de um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que uma condição **necessária** para que o sistema seja **SPI** é que o **determinante da matriz dos coeficientes seja zero**, isto é, $D = 0$.



Observação: **Não** se trata de uma condição **suficiente**, pois **$D = 0$ não implica que o sistema seja SPI**, pois ele pode ser **SI**. Em outras palavras:

$$SPI \rightarrow D = 0$$

$$D = 0 \rightarrow SPI \text{ ou } SI$$

Fazendo $D = 0$, temos:

$$\begin{vmatrix} k^2 & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = 0$$

$$[k^2 \times (-k)] - [1 \times 1] = 0$$

$$-k^3 - 1 = 0$$

$$k^3 = -1$$

$$\boldsymbol{k = -1}$$

Agora que temos $k = -1$, o sistema linear fica assim:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = m + 4 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, isto é, subtraindo a segunda linha da primeira, ficamos com:

$$\overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-1})L_1}{\sim} \begin{cases} x + y = 3 \\ 0x + 0y = \boldsymbol{m + 1} \end{cases}$$

Note que:

- Se $(m + 1)$ for diferente de zero, isto é, se $\boldsymbol{m \neq -1}$, teremos um **sistema impossível** (**SI**), pois haverá uma equação da forma $\mathbf{0x + 0y = (m + 1)}$ com $\mathbf{(m + 1) \neq 0}$.
- Por outro lado, se $\boldsymbol{m = -1}$, ficamos com:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 0x + 0y = \mathbf{0} \end{cases} \sim \{x + y = 3$$

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (1) é **menor** do que o **número de incógnitas** (2). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Portanto, para que o sistema seja **SPI**, devemos ter $\boldsymbol{k = -1}$ e $\boldsymbol{m = -1}$.

Gabarito: Letra C.

19. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Seja o sistema de equação linear: $\begin{cases} \boldsymbol{ax + y = 1} \\ \boldsymbol{x + ay = -1} \end{cases}$

Quantos são os valores do parâmetro a que levam o sistema a possuir infinitas soluções?

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) infinitos

Comentários:

Note que o enunciado afirma que o sistema deve possuir infinitas soluções, ou seja, deve ser um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que uma condição **necessária** para que o sistema seja **SPI** é que o **determinante da matriz dos coeficientes seja zero**, isto é, $D = 0$.

Observação: **Não** se trata de uma condição suficiente, pois $D = 0$ não implica que o sistema seja **SPI**, pois ele pode ser **SI**. Em outras palavras:

$$SPI \rightarrow D = 0$$

$$D = 0 \rightarrow SPI \ ou \ SI$$

Fazendo $D = 0$, temos:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$[a \times a] - [1 \times 1] = 0$$

$$a^2 - 1 = 0$$

$$a^2 = 1$$

$$\boldsymbol{a = \pm 1}$$

Note, portanto, que a princípio temos duas possibilidades: $\boldsymbol{a = 1}$ e $\boldsymbol{a = -1}$.

—

Fazendo $a = 1$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Veja que **esse sistema é impossível**, pois $x + y$ não pode ser igual a 1 e também igual a -1. Escalonando o sistema, ficamos com:

$$\overset{L_2 \leftarrow 1L_2 + (-1)L_1}{\sim} \begin{cases} x + y = 3 \\ \boldsymbol{0x + 0y = -2} \end{cases}$$

—

Fazendo $a = -1$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, ficamos com:

$$\overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + \mathbf{1}L_1}{\sim} \begin{cases} -x + y = 1 \\ \mathbf{0x + 0y = 0} \end{cases} \sim \{-x + y = 1$$

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (1) é **menor** do que **número de incógnitas** (2). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

–

Portanto, conclui-se que o sistema admite infinitas soluções para **apenas um valor** do parâmetro a.

Gabarito: Letra B.

20. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Com relação ao sistema de variáveis reais x e y, $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x - y = n \end{cases}$, no qual m e n são números reais, tem-se que

a) se $m = -1$ e $n = -3$, qualquer par ordenado (x, y), x e y reais, é solução

b) não tem solução se $m = -1$ e $n \neq -3$

c) tem sempre solução quaisquer que sejam m e n reais

d) tem duas soluções se $m \neq -1$

e) $(1,1)$ é solução se $m = n$

Comentários:

Pelo **Teorema de Cramer**, pode-se obter algumas conclusões a partir do **determinante** da **matriz dos coeficientes** (D):

Temos que:

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$D = [m \times (-1)] - [1 \times 1]$$

$$\boldsymbol{D = -m - 1}$$

Para $\boldsymbol{D = 0}$, podemos ter tanto um **SPI** quanto um **SI**.

$$D = 0$$

$$-m - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{m = -1}$$

Portanto, pelo **Teorema de Cramer**, temos as seguintes conclusões:

- $\boldsymbol{m = -1}$ → **Sistema possível e indeterminado** (**SPI**) ou **Sistema Impossível** (**SI**).
- Quando, $D \neq 0$, isto é, $\boldsymbol{m \neq -1}$ **→ Sistema Possível e Determinado** (**SPD**).

Para $\boldsymbol{m = -1}$, ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ x - y = n \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\underset{\sim}{L_2 \leftarrow \boldsymbol{1}L_2 + \boldsymbol{1}L_1} \begin{cases} -x + y = 3 \\ 0x + 0y = \boldsymbol{n + 3} \end{cases}$$

Veja que:

- Se $(n + 3)$ for diferente de zero, isto é, se $\boldsymbol{n \neq -3}$, teremos um **sistema impossível** (**SI**), pois haverá uma equação da forma $\boldsymbol{0x + 0y = (n + 3)}$ com $(n + 3) \neq 0$.

- Por outro lado, se $\boldsymbol{n = -3}$, ficamos com:

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ 0x + 0y = \boldsymbol{0} \end{cases} \sim \{-x + y = 3$$

  Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (1) é <u>**menor**</u> do que o **número de incógnitas** (2). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Em resumo, temos as seguintes conclusões:

- $m \neq -1$ → **Sistema possível e determinado** (**SPD**) → Solução única.
- $m = -1$ e $n = -3$ → **Sistema Possível e Indeterminado** (**SPI**) → Infinitas soluções.
- $m = -1$ e $n \neq -3$ → **Sistema Impossível** (**SI**) → Sem solução.

Vamos analisar as alternativas:

a) se $m = -1$ e $n = -3$, qualquer par ordenado (x, y), x e y reais, é solução. ERRADO.

Se $m = -1$ e $n = -3$, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**), que admite infinitas soluções. Isso não significa dizer que qualquer par ordenado é solução. Por exemplo, o par $(x, y) = (0, 0)$ não é solução.

b) não tem solução se $m = -1$ e $n \neq -3$. CERTO.

Se $m = -1$ e $n \neq -3$, o **sistema é impossível**, isto é, não admite solução. O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

c) tem sempre solução quaisquer que sejam m e n reais. ERRADO.

Conforme a alternativa B, sistema não admite solução para $m = -1$ e $n \neq -3$.

d) tem duas soluções se $m \neq -1$. ERRADO.

Se $m \neq -1$, o **sistema é possível e determinado** (**SPD**) e, portanto, admite solução única.

e) $(1, 1)$ é solução se $m = n$. ERRADO.

Não basta que m seja igual a n para que $(x, y) = (1,1)$ seja solução. Fazendo $m = n$, temos seguinte sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}x + y = 3 \\ x - y = \boldsymbol{n} \end{cases}$$

Note que $(x, y) = (1,1)$ não torna verdadeira as duas equações do sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} + 1 = 3 \\ 1 - 1 = \boldsymbol{n} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{n} = 2 \\ 0 = \boldsymbol{n} \end{cases}$$

Gabarito: Letra B.

21. (CESGRANRIO/BNDES/2009) Para que o sistema linear $\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ ax + 4y = b \end{cases}$ possua infinitas soluções, os valores de a e b devem ser tais que $\frac{a}{b}$ valha

a) -5

b) -2

c) 0

d) 2

e) 5

Comentários:

A questão pede que o sistema possua infinitas soluções, isto é, pede que ele seja **possível e indeterminado** (**SPI**).

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que uma condição **necessária** para que o sistema seja **SPI** é que o **determinante da matriz dos coeficientes seja zero**, isto é, $D = 0$.

Teorema de Cramer		
D ≠ 0	D = 0	
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)	Sistema Impossível (SI)

Observação: **Não** se trata de uma condição suficiente, pois $D = 0$ não implica que o sistema seja **SPI**, pois ele pode ser **SI**. Em outras palavras:

$$SPI \rightarrow D = 0$$

$$D = 0 \rightarrow SPI \text{ ou } SI$$

Temos:

$$D = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ a & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$[5 \times 4] - [(-6) \times a] = 0$$

$$20 + 6a = 0$$

$$a = -\frac{20}{6}$$

$$\boldsymbol{a = -\frac{10}{3}}$$

Para $a = -\frac{10}{3}$, ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ -\dfrac{10}{3}x + 4y = b \end{cases}$$

Para evitar trabalhar com frações, vamos multiplicar a segunda equação por 3. Ficamos com:

$$\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ -10x + 12y = 3b \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\underset{\sim}{L_2 \leftarrow 1L_2 + 2L_1} \begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ 0x + 0y = 3b + 2 \end{cases}$$

Para o sistema ser **possível e indeterminado**, devemos ter $\mathbf{3b + 2 = 0}$:

$$3b + 2 = 0$$

$$3b = -2$$

$$\boldsymbol{b = -\frac{2}{3}}$$

Portanto é necessário que $\frac{a}{b}$ seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{10}{3} \times \frac{3}{2}$$

$$= 5$$

Gabarito: Letra E.

22.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Um professor editou sua prova bimestral em um processador de textos antigo e salvou em um pen drive para imprimir na escola. Devido à incompatibilidade entre os processadores de texto, alguns caracteres de um sistema linear, cujas variáveis eram x, y e z, ficaram irreconhecíveis na impressão, conforme ilustrado a seguir:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + \square z = 1} \\ \boldsymbol{x + 2y + z = 2} \\ \boldsymbol{2x + 5y - 3z = \triangle} \end{cases}$$

Os alunos que iriam resolver a prova bimestral perguntaram ao professor quais eram os valores de □ e △, mas ele não soube dizer. Disse apenas que o sistema possuía, pelo menos, duas soluções distintas.

Se a afirmação do professor é correta, qual a soma dos valores de □ e △ ?

a) 11

b) 8

c) 6

d) 5

e) 4

Comentários:

Para facilitar as contas, vamos substituir o quadrado pela constante "q" e o triângulo pela constante "t". Ficamos com o seguinte sistema de variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x + y + qz = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = t \end{cases}$$

O enunciado afirma que o sistema possuía, pelo menos, duas soluções distintas. Isso significa que o sistema admite infinitas soluções, ou seja, estamos diante de um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

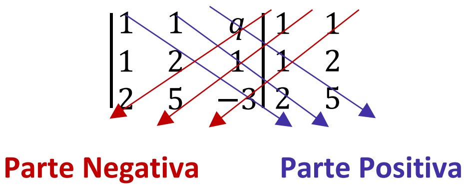
Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que uma condição **necessária** para que o sistema seja **SPI** é que o **determinante da matriz dos coeficientes seja zero**, isto é, $D = 0$.

Observação: **Não** se trata de uma condição suficiente, pois $D = 0$ não implica que o sistema seja **SPI**, pois ele pode ser **SI**. Em outras palavras:

$$SPI \rightarrow D = 0$$

$$D = 0 \rightarrow SPI \text{ ou } SI$$

Temos que $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & q \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$. Vamos aplicar a **regra de Sarrus**:



$$D = [1.2.(-3) + 1.1.2 + q.1.5] - [q.2.2 + 1.1.5 + 1.1.(-3)]$$

$$D = [5q - 4] - [4q + 2]$$

$$D = q - 6$$

Para que tenhamos um **SPI**, é **necessário** que $D = 0$. Logo:

$$q - 6 = 0$$

$$\boldsymbol{q = 6}$$

Logo, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + \mathbf{6}z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = t \end{cases}$$

Vamos escaloná-lo a partir da **matriz completa do sistema**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & t \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & t \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-2})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -15 & t-2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-3})L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{t-5} \end{bmatrix}$$

Para que o sistema seja possível e indeterminado, a terceira equação do sistema escalonado deve ser da seguinte forma:

$$\boldsymbol{0x + 0y + 0z = 0}$$

Portanto, devemos ter:

$$\boldsymbol{t - 5 = 0}$$

$$\boldsymbol{t = 5}$$

Portanto, a soma dos valores de □ e △ é:

$$q + t = 6 + 5 = 11$$

Gabarito: Letra A.

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Sistema linear

Outras Bancas

1.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Nas duas equações mostradas a seguir, x e y são variáveis e a e b são constantes.

$$\frac{y-a}{2}+\frac{y-x}{5}+\frac{y}{4}=0 \text{ e } \frac{x-b}{2}+\frac{x-y}{5}+\frac{x}{4}=0$$

Essas equações podem ser compactadas em uma equação matricial do tipo $M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, na qual M é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} 0{,}4 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & 0{,}4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -0{,}4 & 1{,}9 \\ 0{,}4 & -1{,}9 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1{,}9 & 0{,}4 \\ 1{,}9 & -0{,}4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -0{,}4 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & -0{,}4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -4 & 19 \\ 19 & -4 \end{bmatrix}$

Questões Inéditas

2.(INÉDITA) Quanto aos sistemas lineares, julgue o item a seguir.

O sistema linear $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+y+3z=2 \\ y+z=3 \end{cases}$ pode ser representado por meio da seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3. (INÉDITA) Assinale a alternativa que apresenta a matriz dos coeficientes do sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 3x - 3z = x \\ -y + z = 6 \end{cases}$$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

4.(INÉDITA) Considere o seguinte sistema de equações a seguir, em que x e y são variáveis:

$$\begin{cases} \dfrac{y-2}{3} + \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{y}{5} = 0 \\ \dfrac{x-5}{3} + \dfrac{y-x}{5} + \dfrac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

Esse sistema de equações pode ser escrito da forma $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, em que A é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{19}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{19}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{30} \\ \frac{19}{30} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{19}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{30} \\ \frac{19}{30} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

GABARITO– MULTIBANCAS

Sistema linear

1. LETRA D
2. ERRADO
3. LETRA D
4. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Solução de um sistema linear

FGV

1.(FGV/MPE SC/2022) Sabe-se que $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$.

O valor de $x + y$ é:

a) 16;

b) 18;

c) 24;

d) 26;

e) 30.

2.(FGV/SEFAZ AM/2022) x e y são tais que $4x + 5y = 80$ e $6x + 7y = 116$. O valor de $2x + 3y$ é:

a) 38

b) 40

c) 42

d) 44

e) 46

3.(FGV/CGU/2022) Considere o sistema linear $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ -3x + y + 2z = 3 \end{cases}$.

Sabe-se que $x + y > 100$.

O menor valor inteiro de z que satisfaz as condições dadas é:

a) 52;

b) 53;

c) 54;

d) 55;

e) 56.

4. (FGV/MPE SC/2022) No sistema

$$\begin{cases} 3a + b + c + d = 16 \\ a + 3b + c + d = 6 \\ a + b + 3c + d = 14 \\ a + b + c + 3d = 12 \end{cases}$$

o valor de a é:

a) –1;

b) 1;

c) 2;

d) 3;

e) 4.

5. (FGV/TCE TO/2022) Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ x + 5y + z = 14 \\ 5x + y + z = 28 \end{cases}$$

O valor de x é:

a) 3/2;

b) 5/2;

c) 7/2;

d) 9/2;

e) 11/2.

6. (FGV/FEMPAR/2021) A manipulação das equações de um sistema linear pode gerar novas equações lineares mais simples que as originais. Ao serem incorporadas ao conjunto original, as novas equações podem contribuir na busca por soluções do sistema.

Considere o sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas dado por

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = 9 \\ a + 3b - 2c = 11 \\ -2a + b + 3c = 13 \end{cases}$$

É correto afirmar que $a + b + c$ vale

a) 16,5.

b) 18,5.

c) 19.

d) 32,5.

e) 33.

7.(FGV/ALERO/2018) Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 160 \\ 2x + 3y + z = 140 \\ 3x + y + 2x = 156 \end{cases}$$

O valor de x é:

a) 20.

b) 22.

c) 24.

d) 26.

e) 28.

Cebraspe

Texto para as questões 08 a 10

Considerando o sistema linear $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ -x + 2y - 2z = -11 \end{cases}$, julgue os itens que se segue.

8. (CESPE/SGA AC/2008) $y > x$.

9.(CESPE/SGA AC/2008) Todas as soluções do sistema são números naturais.

10. (CESPE/SGA AC/2008) $z = x + |y|$

FCC

11.(FCC/CBM AP/2022) Considere a imagem abaixo em que cada Emoji diferente corresponde a um valor numérico diferente.

O valor numérico correspondente ao Emoji  **é**

a) 4

b) 3

c) −2

d) −3

e) −4

12. (FCC/TRT 11/2017) O sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x + 3y = 24 \\ 4x - 2y = 16 \end{cases}$ **é equivalente ao sistema** $\begin{cases} 2x + 3y = 24 \\ 4x - 2y = 16 \\ 8x + Ky = 80 \end{cases}$**, em que x e y são as incógnitas reais dos sistemas. Se $S = (x + y)$ e K é um parâmetro real, então**

a) S = 2,00K

b) S = 0,80K

c) S = 0,75K

d) S = 1,25K

e) S = 1,50K

13. (FCC/SEE MG/2012) Se a, b e c são soluções do sistema $\begin{cases} a + 2b = 7 \\ 2a - c = -3 \\ a + 3b - 2c = 0 \end{cases}$ **, então a soma $(a + b + c)$ vale**

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

Vunesp

14.(VUNESP/Pref. N Odessa/2018) Gertrudes, que é doceira, recebeu três encomendas para festas. Sabe-se que, em cada uma das encomendas, foram usadas quantidades diferentes de ovos, iguais a x, y e z, tais que $x + y = 40$, $x + z = 30$ e $y + z = 38$. Desse modo, é correto afirmar que, para a produção dessas três encomendas, Gertrudes usou uma quantidade de ovos igual a

a) 3,5 dúzias.

b) 4 dúzias.

c) 4,5 dúzias.

d) 5 dúzias.

e) 5,5 dúzias.

15.(VUNESP/CM Marília/2017) Uma editora enviou para uma biblioteca três pacotes que tinham, respectivamente, y, w e z livros em cada um. Sabendo-se que $y + w = 40$, $y + z = 30$ e $w + z = 38$, é correto afirmar que os três pacotes tinham, juntos, um número total de livros igual a

a) 54.

b) 56.

c) 58.

d) 60.

e) 64.

16. (VUNESP/TJ SP/2017) Os preços de venda de um mesmo produto nas lojas X, Y e Z são números inteiros representados, respectivamente, por x, y e z. Sabendo-se que $x + y = 200$, $x + z = 150$ e $y + z = 190$, então a razão $\frac{x}{y}$ é:

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{8}$

e) $\frac{1}{3}$

17. (VUNESP/CM Itatiba/2015) Nas somas apresentadas, cada uma das quatro letras a, b, c e d representa um número formado por um algarismo.

$$a + b + c + d = 14$$
$$a + b + c = 9$$
$$a + b + d = 11$$
$$b + c + d = 12$$

Nessas condições, é correto afirmar que

a) d + a = 8.

b) c – a = 2.

c) c + b = 6.

d) a + b = 5.

e) d – c = 2.

18. (VUNESP/Pref. SJC/2012)

$$\begin{cases} \sqrt[3]{729}x + \sqrt[3]{125}y + 2^4 = 146 \\ \dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt[3]{27}}x - \sqrt{25}y + 4^3 = 74 \end{cases}$$

Os valores das incógnitas x e y que satisfazem esse sistema de equações são, respectivamente,

a) 10 e 8.

b) 8 e 10.

c) 12 e 6.

d) 6 e 12.

e) 8 e 12.

19. (VUNESP/UNCISAL/2009) O sistema a seguir representa as quantias que dois amigos possuem, sendo x a quantia de Paulo e y a quantia de Luiz:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{5}y = \dfrac{8}{5} \\ x - 6000 = \dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

A diferença entre as duas quantias é igual a

a) R$ 10.000,00.

b) R$ 12.000,00.

c) R$ 15.000,00.

d) R$ 18.000,00.

20. (VUNESP/Pref. Sorocaba/2006) Resolvendo o sistema $\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = -1 \\ \frac{4x-y}{5} - x + y = 3 \end{cases}$ **pode-se afirmar que** $x^2 + y^2$ **vale**

a) 122.

b) 120.

c) 118.

d) 116.

e) 114.

GABARITO – MULTIBANCAS

Solução de um sistema linear

1. LETRA E
2. LETRA D
3. LETRA B
4. LETRA E
5. LETRA E
6. LETRA A
7. LETRA C
8. ERRADO
9. ERRADO
10. CERTO
11. LETRA D
12. LETRA D
13. LETRA D
14. LETRA C
15. LETRA A
16. LETRA C
17. LETRA E
18. LETRA A
19. LETRA B
20. LETRA A

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Discussão de um sistema linear

FGV

1.(FGV/Pref. SP/2016) Em uma aula, o professor ofereceu a seus alunos o seguinte problema:

O salário de Paulo é depositado em um banco todo mês. Após juntar o dobro do seu salário e depois de pagar a mensalidade da faculdade ficou com 5 mil reais. Dois meses depois, ele tinha em sua conta o valor do seu salário e mais o valor de 3 mensalidades da faculdade, o que totalizou 6 mil reais. Paulo constatou ainda que se somasse o dobro de seu salário ao valor da mensalidade, resultaria 7 mil reais.

Encontre um modelo que represente a situação: nomeie x o valor do salário de Paulo e y o valor da mensalidade da faculdade.

Foram três as soluções encontradas por seus alunos:

- **A primeira exibia o sistema de equações $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$ como modelo para o problema.**
- **A segunda, exibia o sistema de equações $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ como modelo para o problema.**
- **A terceira solução encontrada exibia a equação $x + 3(2x - 5) = 6$ como modelo para o cálculo do salário.**

Todos encontraram como solução para o salário 3 mil reais e para a mensalidade da faculdade, mil reais.

Com base no caso apresentado, assinale a afirmativa correta.

a)Os valores do salário e da mensalidade encontrados não estão corretos.

b) O modelo correto para o problema foi encontrado apenas na primeira solução, já que são equações com duas variáveis.

c) O modelo correto para o problema foi encontrado apenas na segunda solução, já que são equações com duas variáveis.

d) O modelo correto para o cálculo da mensalidade foi encontrado apenas na terceira solução, pois essa é uma equação com apenas uma variável.

e) Todos os modelos encontrados estão corretos, embora o terceiro modelo encontre apenas o valor do salário, já que a equação tem apenas uma variável.

Cebraspe

2.(CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Com relação a sistemas lineares e análise combinatória, julgue o item.

Para todo sistema linear da forma $AX = B$, em que A é uma matriz quadrada $m \times m$, X e B são matrizes colunas $m \times 1$, e $det(A) = 0$, o sistema não tem solução.

3. (CESPE/SEDUC CE/2009/Adaptada) Acerca da matriz $A = \begin{bmatrix} a-1 & a-1 & a-1 \\ a-1 & 1 & 2 \\ a-1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, em que a é um número real, julgue o item a seguir.

Se $a \neq 1$, então a equação matricial $AX = O$, em que $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é a matriz nula de ordem 3×1, tem uma única solução.

4.(CESPE/SEDUC AL/2013/Adaptada) O sistema $\begin{cases} 5x + 5y + 5z = 3.000 \\ 5x + 4y + 4z = 1.060 \\ 6x + 5y + 5z = 1.260 \end{cases}$ é impossível.

5. (CESPE/SEDUC AL/2013/Adaptada) O sistema $\begin{cases} 5x + 5y + 5z = 3000 \\ 5x + 4y + 4z = 1.060 \\ 4x + 5y + 2z = 1.140 \end{cases}$ é possível e indeterminado.

6. (CESPE/IFF/2018) Considere o sistema S de m equações lineares e n incógnitas, mostrado abaixo.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + \ a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Nesse sistema, x_1, x_2, ... , x_n são as incógnitas, os coeficientes a_{ij} e os b_i são números reais, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A respeito das propriedades e das soluções do sistema S, assinale a opção correta.

a) Considere que $m = n$ e que $A = (a_{ij})$ — a matriz dos coeficientes de S — seja tal que $det(A) = 0$. Nesse caso, S não possui solução.

b) Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ são soluções de S e se r é um número real qualquer, então $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ e $r\alpha = (r\alpha_1, r\alpha_2, \dots, r\alpha_n)$ são também soluções de S.

c) Se $m < n$, então S possui infinitas soluções.

d) Se $m = n$ e se o sistema homogêneo associado a S — isto é, o sistema com os mesmos coeficientes a_{ij} apenas considerando todos os $b_i = 0$ — tiver solução única, então o sistema S também terá solução única.

e) Se $m > n$, então S não possui solução.

7.(CESPE/SEDUC AL/2018) Julgue o item que se segue, relativos a matrizes e sistemas lineares.

Um sistema linear escrito na forma matricial $PX = -X$, em que P é uma matriz $n \times n$ de coeficientes constantes e X é a matriz das incógnitas, $n \times 1$, tem solução única se, e somente se, a matriz $P + I$ for inversível (I é a matriz identidade $n \times n$).

8. (CESPE/Pref. São Luís/2017) Um sistema linear de 4 equações e 4 incógnitas pode ser escrito na forma matricial como $AX = B$, em que A é a matriz, de ordem 4×4, dos coeficientes da equação; X é a matriz coluna, de ordem 4×1, das incógnitas da equação e B é a matriz coluna, de ordem 4×1, dos termos independentes da equação.

Com referência a essas informações, assinale a opção correta.

a) Se X_1, X_2 e X_3 forem matrizes, de ordem 4×1, que são soluções distintas da referida equação matricial, então o determinante de A será igual a zero.

b) Se a matriz A tiver exatamente duas linhas iguais, então o sistema terá exatamente duas soluções distintas.

c) Se todos os elementos da matriz B forem iguais a zero e o determinante de A for igual a zero, então o sistema não terá solução.

d) Se uma matriz C, de ordem 4×1, possuir dois elementos positivos e dois negativos e for tal que $AC = B$, então o determinante de A será diferente de zero.

e) Se o determinante da matriz A for igual a zero, então A terá pelo menos duas linhas iguais.

9. (CESPE/CGE MG/2009) Em um concurso estadual, foram aprovados x candidatos, que serão distribuídos para trabalharem em y cidades do estado. Na hipótese de serem encaminhados 2 candidatos para cada cidade, sobrarão 70 candidatos para serem distribuídos. Entretanto, no caso de serem encaminhados 3 candidatos para cada cidade, será necessário convocar mais 40 candidatos classificados nesse concurso.

Para determinação dos valores x e y, obtém-se um sistema linear de duas equações com incógnitas x e y. A ele está associada uma matriz M, formada pelos coeficientes das variáveis das suas equações. Assinale a opção correta a respeito da solução desse sistema.

a) A matriz M tem determinante diferente de zero.

b) O sistema é homogêneo.

c) O sistema é compatível e indeterminado.

d) A matriz M é não-inversível.

e) A matriz M não pode ser transformada por meio de operações elementares sobre suas linhas na matriz identidade 2 por 2.

10.(CESPE/PETROBRAS/2008/Adaptada) Considerando que A seja a matriz formada pelos coeficientes do sistema $\begin{cases} ax + by = \mu \\ cx + dy = v \end{cases}$, que $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e que, $Z = \begin{pmatrix} \mu \\ v \end{pmatrix}$ assinale a opção correta.

a) Se as componentes de Z forem nulas e o determinante de A for igual a zero, então o sistema terá infinitas soluções.

b) O sistema pode ser representado matricialmente por $AZ = W$.

c) O determinante de A é igual a $ad + bc$.

d) A substituição dos elementos c e d, da segunda linha A, por $2a$ e $2b$, respectivamente, o determinante da nova matriz será igual a $4ab$.

Texto para as questões 11 e 12

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 0 \\ x + a^2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

Considerando o sistema homogêneo de equações lineares apresentado acima, em que a é uma constante real, julgue os itens que se segue.

11. (CESPE/INPE/2008) Para $a = -1$, a única solução do sistema é $x = y = z = 0$.

12. (CESPE/INPE/2008) Independentemente do valor de a, o sistema tem apenas a solução $x = y = z = 0$.

13. (CESPE/PM DF/2007) Julgue o seguinte item com relação a geometria do plano cartesiano, modelos periódicos e modelos lineares.

Considere o seguinte sistema de equações lineares homogêneo.

$$\begin{cases} x + ay - 2z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Nesse caso, é correto afirmar que, se $a = -1$ ou se $a = -2$, então esse sistema só admite a solução $x = y = z = 0$.

FCC

14.(FCC/IBMEC/2019) Considere o seguinte sistema linear, nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x + ky = 3 \end{cases}$$

O valor de k para que este sistema seja impossível (isto é, não tenha soluções) é

a) – 4

b) 0

c) 4

d) – 2

e) 1

Vunesp

15.(VUNESP/Pref. Peruíbe/2019) É correto afirmar que o sistema linear $\begin{cases} ax + 2y = a - 1 \\ 2x + 4y = 3a \end{cases}$

a) é possível e determinado para qualquer valor de a.

b) é possível e determinado para $a = 1$.

c) é possível e indeterminado para $a = 1$.

d) é possível e determinado para $a = 2$.

e) é impossível para $a = 5$.

16. (VUNESP/Pref. Cerquilho/2019) Considere o seguinte sistema linear, sendo k um parâmetro real:

$$S = \begin{cases} x + y + z = 80 \\ 0,15x + 0,35y + kz = 32 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

O sistema S será:

a) possível e determinado, se $k = \frac{1}{5}$.

b) possível e indeterminado, se $k = \frac{1}{5}$.

c) impossível, se $k = \frac{1}{5}$.

d) impossível, se $k \neq \frac{1}{5}$.

e) possível e indeterminado, se $k \neq \frac{1}{5}$.

17. (VUNESP/PM SP/2018) O sistema linear $\begin{cases} x - 3y + 4z = -4 \\ 3x - 7y + 7z = -8 \\ -4x + 6y - z = \alpha - 1 \end{cases}$ **terá solução somente quando o valor de α for igual a**

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

Outras Bancas

18.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Considere o sistema de equações lineares nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases} k^2x + y = 3 \\ x - ky = m + 4 \end{cases}, \text{ no qual } k \text{ e } m \text{ são reais.}$$

Sabe-se que existem números reais a e b, com $a \neq b$, tais que os pares ordenados (a, b) e (b, a) são soluções do sistema dado.

Dessa forma, k e m são, necessariamente, tais que

a) $k = 1, m = 1$

b) $k \neq 1, m = 1$

c) $k = -1, m = -1$

d) $k \neq -1, m = -1$

e) $k \neq -1, m \neq -1$

19. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Seja o sistema de equação linear: $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = -1 \end{cases}$

Quantos são os valores do parâmetro a que levam o sistema a possuir infinitas soluções?

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) infinitos

20. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Com relação ao sistema de variáveis reais x e y, $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x - y = n \end{cases}$, no qual m e n são números reais, tem-se que

a) se $m = -1$ e $n = -3$, qualquer par ordenado (x, y), x e y reais, é solução

b) não tem solução se $m = -1$ e $n \neq -3$

c) tem sempre solução quaisquer que sejam m e n reais

d) tem duas soluções se $m \neq -1$

e) $(1,1)$ é solução se $m = n$

21. (CESGRANRIO/BNDES/2009) Para que o sistema linear $\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ ax + 4y = b \end{cases}$ possua infinitas soluções, os valores de a e b devem ser tais que $\frac{a}{b}$ valha

a) -5

b) -2

c) 0

d) 2

e) 5

22.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Um professor editou sua prova bimestral em um processador de textos antigo e salvou em um pen drive para imprimir na escola. Devido à incompatibilidade entre os processadores de texto, alguns caracteres de um sistema linear, cujas variáveis eram x, y e z, ficaram irreconhecíveis na impressão, conforme ilustrado a seguir:

$$\begin{cases} x + y + \square z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = \triangle \end{cases}$$

Os alunos que iriam resolver a prova bimestral perguntaram ao professor quais eram os valores de □ e △, mas ele não soube dizer. Disse apenas que o sistema possuía, pelo menos, duas soluções distintas.

Se a afirmação do professor é correta, qual a soma dos valores de □ e △ ?

a) 11

b) 8

c) 6

d) 5

e) 4

GABARITO – MULTIBANCAS

Discussão de um sistema linear

1. LETRA E
2. ERRADO
3. ERRADO
4. CERTO
5. ERRADO
6. LETRA D
7. CERTO
8. LETRA A
9. LETRA A
10. LETRA A
11. CERTO
12. ERRADO
13. ERRADO
14. LETRA A
15. LETRA D
16. LETRA C
17. LETRA D
18. LETRA C
19. LETRA B
20. LETRA B
21. LETRA E
22. LETRA A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.