Aula 01

BNB - Raciocínio Lógico e Quantitativo - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

10 de Março de 2023

Índice

APRESENTAÇÃO DA AULA

Fala, pessoal!

O principal assunto da aula de hoje é **equivalências lógicas.**

O entendimento da aula é muito importante, porém **igualmente importante** é que você **DECORE** as principais equivalências lógicas. Equivalências lógicas existem para serem usadas, e o uso delas requer que você tenha as principais fórmulas "**no sangue**".

Em seguida, será abordado **álgebra de proposições**. Nesse assunto, você deve focar especialmente nas propriedades **comutativa**, **associativa** e **distributiva**. Além disso, nesse tópico, trataremos do uso de equivalências lógicas para a resolução de problemas de **tautologia**, **contradição** e **contingência**.

Como de costume, vamos exibir um **resumo** logo no **início de cada tópico** para que você tenha uma visão geral do conteúdo antes mesmo de iniciar o assunto.

Conte comigo nessa caminhada =)

Prof. Eduardo Mocellin.

@edu.mocellin

EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS

Equivalências lógicas
Duas proposições **A** e **B** são **equivalentes** quando todos os **valores lógicos** (V ou F) assumidos por elas **são iguais** para **todas as combinações de valores lógicos atribuídos às proposições simples que as compõem**.
Equivalências fundamentais
Equivalência contrapositiva $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ Transformação da condicional (se...então) em disjunção inclusiva (ou) $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ Transformação disjunção inclusiva (ou) em condicional (se...então) $p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$
Negações lógicas
Dupla negação da proposição simples $\sim(\sim p) \equiv p$ Negação da conjunção e da disjunção inclusiva (Leis de De Morgan) **Para negar "e"**: **negar ambas** as proposições e **trocar o "e" pelo "ou"**. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ **Para negar "ou"**: **negar ambas** as proposições e **trocar o "ou" pelo "e"**. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ Negação da condicional (se...então) $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
Outras equivalências e negações
Negação da conjunção (e) para a forma condicional (se...então) $\sim(p \wedge q) \equiv p \rightarrow \sim q$ $\sim(p \wedge q) \equiv q \rightarrow \sim p$ Conjunção de condicionais Quando o **termo comum** é o **consequente**, a equivalência apresenta uma **disjunção inclusiva** no **antecedente**. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$ Quanto o **termo comum** é o **antecedente**, a equivalência apresenta uma **conjunção** no **consequente**. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$

Equivalências da disjunção exclusiva (ou...ou)

$$p \veebar q \equiv (\sim p) \veebar (\sim q)$$

$$p \veebar q \equiv (\sim p) \leftrightarrow q$$

$$p \veebar q \equiv p \leftrightarrow (\sim q)$$

Negações da disjunção exclusiva (ou...ou)

$$\sim(p \veebar q) \equiv p \leftrightarrow q$$

$$\sim(p \veebar q) \equiv (\sim p) \veebar q$$

$$\sim(p \veebar q) \equiv p \veebar (\sim q)$$

Equivalências da bicondicional (se e somente se)

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\sim p) \leftrightarrow (\sim q)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\sim p) \veebar q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv p \veebar (\sim q)$$

Negações da bicondicional (se e somente se)

$$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv p \veebar q$$

$$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p) \leftrightarrow q$$

$$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow (\sim q)$$

$$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

O que é uma equivalência lógica

Quando duas proposições apresentam a mesma tabela-verdade dizemos que as **proposições são equivalentes.**

A representação da equivalência lógica é dada pelo o símbolo **⇔** ou **≡**. Se **A** é equivalente a **B**, podemos escrever de duas maneiras:

A ⇔ B

A ≡ B

Observação: o símbolo de equivalência ⇔ é diferente do conectivo bicondicional ↔

Informalmente, podemos dizer que duas proposições são equivalentes quando elas têm o mesmo significado. Exemplo:

a: "Eu moro em Taubaté."

b: "**Não é verdade** que eu **não** moro em Taubaté."

O conceito de **equivalência lógica** pode ser melhor detalhado assim:

TOME NOTA!

Duas proposições **A** e **B** são **equivalentes** quando todos os **valores lógicos** (V ou F) assumidos por elas **são iguais** para **todas as combinações de valores lógicos atribuídos às proposições simples que as compõem**.

Vejamos um exemplo:

Mostre que as proposições (p→q)∧(q→p) e p↔q são equivalentes.

Para resolver esse problema, basta construirmos a tabela-verdade de ambas proposições. Como a bicondicional já é conhecida por nós, precisamos simplesmente confeccionar a tabela-verdade de **(p→q)∧(q→p)** e comparar com a bicondicional **p↔q**.

Passo 1: determinar o número de linhas da tabela-verdade.

Temos duas proposições simples distintas, **p** e **q**. Logo, o número de linhas é $2^n = 2^2 = 4$.

Passo 2: desenhar o esquema da tabela-verdade.

Para determinar **(p→q)∧(q→p)**, precisamos obter **(p→q)** e **(q→p)**.

Para determinar **(p→q)**, precisamos obter **p** e **q**.

Para determinar **(q→p)**, precisamos obter **p** e **q**.

Podemos também incluir, de imediato, na nossa tabela a condicional **p↔q**, pois vamos compará-la com a expressão que estamos querendo obter.

p	q	p→q	q→p	(p→q)∧(q→p)	p↔q

Passo 3: atribuir V ou F às proposições simples de maneira alternada.

p	q	p→q	q→p	(p→q)∧(q→p)	p↔q
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Passo 4: obter o valor das demais proposições.

A condicional **p→q** é falsa somente quando o antecedente **p** for verdadeiro e o consequente **q** for falso.

p	q	p→q	q→p	(p→q)∧(q→p)	p↔q
V	V	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	F	V			

A condicional **q→p** é falsa somente quando o antecedente **q** for verdadeiro e o consequente **p** for falso.

p	q	p→q	q→p	(p→q)∧(q→p)	p↔q
V	V	V	V		
V	F	F	V		
F	V	V	F		
F	F	V	V		

A conjunção **(p→q)∧(q→p)** só será verdadeira quando **p→q** e **q→p** forem ambos verdadeiros.

p	q	p→q	q→p	(p→q)∧(q→p)	p↔q
V	V	V	V	V	
V	F	F	V	F	
F	V	V	F	F	
F	F	V	V	V	

Para a bicondicional, já sabemos que ela será verdadeira quando **p** e **q** tiverem o mesmo valor lógico.

p	q	p→q	q→p	(p→q)∧(q→p)	p↔q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Podemos perceber da análise da tabela-verdade acima que **(p→q)∧(q→p)** e **p↔q** assumem os exatos mesmos valores lógicos para todas as possibilidades de valores lógicos de **p** e **q**. Logo, as proposições são equivalentes. Veja:

p	q	p→q	q→p	(p→q)∧(q→p)	p↔q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Podemos escrever:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$$

ou

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$$

Equivalências fundamentais

Existem três equivalências fundamentais que **despencam** em provas de concurso público:

- **Equivalência contrapositiva**;
- **Transformação da condicional (se...então) em disjunção inclusiva (ou); e**
- **Transformação da disjunção inclusiva (ou) em condicional (se...então).**

Equivalência contrapositiva

A primeira equivalência fundamental é conhecida como **contrapositiva da condicional:**

$$\mathbf{p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p}$$

A equivalência é realizada do seguinte modo:

1. **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
2. **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Como exemplo, sejam as proposições:

p: "Hoje choveu."

q: "João fez a barba."

Considere a seguinte condicional **p→q**:

p→q: "**Se** **[**hoje choveu**]**, **então** **[**João fez a barba**]**."

A condicional a seguir é equivalente à condicional original:

~q→~p: "**Se** **[**João **não** fez a barba**]**, **então** **[**hoje **não** choveu**]**."

Um erro muito explorado pelas bancas é dizer que **p→q** seria equivalente a **~p→~q**. Isso porque é muito comum no dia a dia as pessoas cometerem esse erro.

Observe o exemplo acima: "**Se hoje choveu, então João fez a barba**". Vamos supor que não choveu. O que podemos afirmar sobre barba de João? Absolutamente nada, ele pode tanto ter feito quanto não ter feito a barba. **Logo**, **não podemos dizer que** "**Se hoje não choveu, então João não fez a barba**" **é equivalente à condicional original**. Em outras palavras, não podemos dizer que **~p→~q** é equivalente a **p→q**.

Por outro lado, podemos afirmar sem dúvida que **~q→~p**. Em outras palavras, considerando a proposição original, podemos dizer que "**Se João não fez a barba, então hoje não choveu**".

Em resumo:

p→q é equivalente a ~q→~p

p→q não é equivalente a ~p→~q

Vamos resolver um exercício envolvendo essa equivalência que acabamos de aprender.

(EPC/2023) Considere a seguinte afirmação:

Se subir a montanha é difícil, então a paisagem compensa.

Assinale a alternativa que contém uma equivalente lógica à afirmação apresentada.

a) Subir a montanha é difícil e a paisagem compensa.

b) Subir a montanha não é difícil e a paisagem não compensa.

c) Se a paisagem não compensa, então subir a montanha não é difícil.

d) Se subir a montanha é difícil, então a paisagem não compensa.

e) Subir a montanha não é difícil ou a paisagem não compensa.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

m: "Subir a montanha é difícil."

p: "A paisagem compensa."

A sentença original pode ser descrita por **m→p**:

m→p: "**Se** [subir a montanha é difícil], **então** [a paisagem compensa]."

Uma equivalência fundamental envolvendo o conectivo condicional é a **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

m→p ≡ ~p→~m

A proposição equivalente pode ser descrita por:

~p→~m: "**Se** [a paisagem **não** compensa], **então** [subir a montanha **não** é difícil]".

Gabarito: Letra C.

Transformação da condicional (se...então) em disjunção inclusiva (ou)

A segunda equivalência fundamental é a **transformação da condicional (se...então; →) em disjunção inclusiva (ou; ∨):**

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

A equivalência é realizada do seguinte modo:

1. **Nega-se o primeiro termo;**
2. **Troca-se a condicional (se...então; →) pela disjunção inclusiva (ou; ∨); e**
3. **Mantém-se o segundo termo.**

Como exemplo, considere novamente a seguinte condicional:

p→q: "**Se** **[**hoje choveu**]**, **então** **[**João fez a barba**]**."

Observe que a frase seguinte é equivalente:

~pVq: "**[**Hoje **não** choveu**]** **ou** **[**João fez a barba**]**."

Antes de realizar alguns exercícios sobre essa equivalência, é importante que você saiba que a condicional **p→q** apresenta somente duas possíveis equivalências: **~q→~p** e **~pVq**:

A condicional **p→q** apresenta somente duas possíveis equivalências:

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$
$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Portanto, uma **condicional só pode ser equivalente a outra condicional ou a uma disjunção inclusiva**.

Vamos resolver exercícios envolvendo essa equivalência que acabamos de aprender.

(PROCON-DF/2023) A respeito de raciocínio lógico, julgue o item.

As proposições “Se Alice é uma estudante de medicina, então ela é inteligente” e “Alice não é uma estudante de medicina ou é inteligente” são equivalentes.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

e: "Alice é uma estudante de medicina."

i: "Alice é inteligente."

A proposição original pode ser descrita por **e→i**:

e→i: "**Se** **[**Alice é uma estudante de medicina**]**, **então** **[**ela (Alice) é inteligente**]**."

Note que a questão sugere que a proposição original é equivalente a uma **disjunção inclusiva (ou; ∨)**. Devemos, portanto, usar a equivalência da **transformação da condicional (se...então; →) em disjunção inclusiva (ou; ∨)**.

p→q ≡ ~p∨q

Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Nega-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a condicional (se...então; →) pela disjunção inclusiva (ou; ∨); e**
- **Mantém-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

e→i ≡ ~e∨i

A proposição equivalente pode ser descrita por:

~e∨i: "**[**Alice **não** é uma estudante de medicina**]** **ou** **[**(Alice) é inteligente**]**."

Gabarito: CERTO.

(Pref. S Parnaíba/2023) Considerando como verdadeira a sentença “Se Marcos cozinha, então ele não lava a louça”, assinale a alternativa que apresenta uma sentença equivalente a esta.

a) Marcos não cozinha ou não lava a louça.

b) Marcos não cozinha ou lava a louça.

c) Se Marcos não lava a louça, então ele cozinha.

d) Se Marcos lava a louça, então ele cozinha.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

c: "Marcos cozinha."

l: "Marcos lava a louça."

A proposição original pode ser descrita por **c→~l**:

c→~l: "**Se** [Marcos cozinha], **então** [ele **não** lava a louça]."

As alternativas apresentam tanto condicionais (se...então; →) quanto disjunções inclusivas (ou; V) como equivalentes. Devemos, portanto, testar as duas equivalências fundamentais que envolvem a condicional:

- **p→q ≡ ~q→~p** (contrapositiva)
- **p→q ≡ ~pVq** (transformação da condicional em disjunção inclusiva)

Para aplicar a primeira equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**
- **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

c→~l ≡ ~(~l)→~c

A dupla negação de **l** corresponde à proposição original **l**. Ficamos com:

c→~l ≡ l→~c

A proposição equivalente pode ser descrita por:

l→~c: "**Se** [Marcos lava a louça], **então** [ele (Marcos) **não** cozinha]."

Veja que essa equivalência não está nas alternativas apresentadas.

Vamos agora utilizar a segunda equivalência. Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Nega-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a condicional (se...então; →) pela disjunção inclusiva (ou; V); e**
- **Mantém-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

c→~l ≡ ~cV~l

A proposição equivalente pode ser descrita por:

~cV~l: " [Marcos **não** cozinha] **ou** [**não** lava a louça]."

Gabarito: Letra A.

Transformação disjunção inclusiva (ou) em condicional (se...então)

A terceira equivalência fundamental para sua prova é a **transformação da disjunção inclusiva (ou; ∨) em condicional (se...então; →)**:

$$p \vee q \equiv {\sim}p \rightarrow q$$

A equivalência é realizada do seguinte modo:

1. **Nega-se o primeiro termo;**
2. **Troca-se a disjunção inclusiva (ou; ∨) pela condicional (se...então; →); e**
3. **Mantém-se o segundo termo.**

Como exemplo, considere a seguinte disjunção inclusiva:

p∨q: "**[**Pedro estuda**]** **ou** **[**Maria trabalha**]**."

Observe que a frase seguinte é equivalente:

~p→q: "**Se** **[**Pedro **não** estuda**], então** **[**Maria trabalha**]**."

Vamos resolver um exercício envolvendo essa equivalência que acabamos de aprender.

(EPC/2023) Posso contar com os amigos ou ficarei sozinho. Uma afirmação que é logicamente equivalente a afirmação anterior é:

a) Se não posso contar com os amigos, então ficarei sozinho.

b) Se posso contar com os amigos, então ficarei sozinho.

c) Se não posso contar com os amigos, então não ficarei sozinho.

d) Se ficarei sozinho, então não posso contar com os amigos.

e) Posso contar com os amigos e ficarei sozinho.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

a: "Posso contar com os amigos."

s: "Ficarei sozinho."

A proposição original pode ser descrita por **a∨s**:

a∨s: "**[**Posso contar com os amigos**]** **ou** **[**ficarei sozinho**]**."

Sabemos que a disjunção inclusiva (ou; ∨) apresenta uma equivalência fundamental dada por **p∨q ≡ ~p→q**. Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Nega-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a disjunção inclusiva (ou; ∨) pela condicional (se...então; →); e**
- **Mantém-se o segundo termo.**

Aplicando essa equivalência para proposição em questão, ficamos com:

$$a \vee s \equiv {\sim}a \rightarrow s$$

A equivalência obtida é descrita por:

~a→s: "**Se** [**não** posso contar com os amigos], **então** [ficarei sozinho]."

Gabarito: Letra A.

Negações Lógicas

Nesse tópico iremos estudar as principais **negações lógicas**. Antes de apresentarmos as negações, é importante que você entenda que **uma negação lógica acaba sendo uma equivalência proveniente da negação de uma proposição**.

Veremos mais adiante, por exemplo, que a **negação de p∧q**, que pode ser representada por **~(p∧q)**, corresponde a **~p∨~q**. Nesse caso:

- Podemos dizer que a **negação de p∧q é** ~**p∨~q**;
- Podemos dizer que **~(p∧q) é equivalente a** ~**p∨~q**.

Ao se construir **negação** de uma proposição, constrói-se uma nova proposição com **valores lógicos sempre opostos aos da proposição original**. Para o exemplo apresentado, **~p∨~q** sempre terá o valor contrário da proposição **p∧q** para todas as linhas da tabela-verdade, conforme pode ser observado a seguir:

p	q	~p	~q	p∧q	~p∨~q
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

Em outras palavras, **~p∨~q** terá o valor lógico da **negação de p∧q**, dada por **~(p∧q)**, para todas as linhas da tabela-verdade:

p	q	~p	~q	p∧q	~(p∧q)	~p∨~q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Veremos a seguir as principais negações que você precisa saber.

Dupla negação da proposição simples

Um resultado importante que pode ser obtido da tabela verdade é que a **negação da negação de p** sempre tem valor lógico igual a **proposição p**, ou seja, é equivalente a **p**.

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

A prova dessa equivalência corresponde à tabela-verdade abaixo.

p	~p	~(~p)
V	F	V
F	V	F

Como exemplo, temos que a dupla negação "**Não é verdade que [Joãozinho não comeu o chocolate]**" é equivalente a "**Joãozinho comeu o chocolate**".

A **negação da negação de p** é equivalente a **p.**

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

Negação da conjunção e da disjunção inclusiva (Leis de De Morgan)

Nesse tópico, veremos como se nega a **conjunção (e; ∧)** e a **disjunção inclusiva (ou; ∨)**. Essas negações são conhecidas como **Leis de De Morgan**.

Negação da conjunção (e; ∧)

Para realizar a negação conjunção **p∧q**, deve-se seguir o seguinte procedimento:

1. **Negam-se ambas as parcelas da conjunção (e; ∧); e**
2. **Troca-se a conjunção (e; ∧) pela disjunção inclusiva (ou; ∨).**

Como resultado, podemos dizer que a negação de **p∧q**, também conhecida por **~(p∧q)**, é equivalente a **~p∨~q:**

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Como exemplo, considere as seguintes proposições simples:

p: "Comi lasanha."

q: "Bebi refrigerante."

A conjunção entre dessas duas proposições pode ser descrita por:

p∧q: "[Comi lasanha] **e** [bebi refrigerante]."

A negação dessa proposição composta é:

~(p∧q) ≡ ~p∨~q: "[**Não** comi lasanha] **ou** [**não** bebi refrigerante]."

Negação da disjunção inclusiva (ou; ∨)

De modo semelhante à negação da conjunção, para negarmos a disjunção inclusiva **p∨q,** devemos seguir o seguinte procedimento:

1. **Negam-se ambas as parcelas da disjunção inclusiva (ou; ∨); e**
2. **Troca-se a disjunção inclusiva (ou; ∨) pela conjunção (e; ∧).**

Como resultado disso, podemos escrever que a negação de **p∨q**, também conhecida por **~(p∨q)**, é equivalente a **~p∧~q:**

$$\sim (p \lor q) \equiv \sim p \land \sim q$$

Vejamos um exemplo:

p∨q: "[Comi lasanha] **ou** [bebi refrigerante]."

A negação dessa proposição composta é:

~(p∨q) ≡ ~p∧~q: "[**Não** comi lasanha] **e** [**não** bebi refrigerante]."

A seguir temos um mnemônico que resume as duas **Leis de De Morgan**:

Leis de De Morgan

Para negar o "e": **negar ambas** as proposições e **trocar o "e" pelo** "ou".

$$\sim (p \land q) \equiv \sim p \lor \sim q$$

Para negar o "ou": **negar ambas** as proposições e **trocar o "ou" pelo** "e".

$$\sim (p \lor q) \equiv \sim p \land \sim q$$

Vamos agora resolver exercícios envolvendo as **Leis de De Morgan**.

(AGENERSA/2023) Considere a afirmação:

"Caminho ou não saio do lugar."

Assinale a opção que apresenta sua negação lógica.

a) Não caminho ou não saio do lugar.

b) Caminho ou saio do lugar.

c) Não caminho ou saio do lugar.

d) Caminho e não saio do lugar.

e) Não caminho e saio do lugar.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

c: "Caminho."

s: "Saio do lugar."

A proposição original pode ser escrita pela disjunção inclusiva **c∨~s**:

c∨~s: "[Caminho] **ou** [**não** saio do lugar]."

Para realizar a negação de uma disjunção inclusiva, usa-se a equivalência **~(p∨q) ≡ ~p∧~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

• **Negam-se ambas as parcelas da disjunção inclusiva (ou; ∨); e**

• **Troca-se a disjunção inclusiva (ou; ∨) pela conjunção (e; ∧).**

Em outras palavras, **negam-se as duas proposições e troca-se o "ou" pelo "e"**. Para o caso em questão, temos:

~(c∨~s) ≡ ~c∨~(~s)

A dupla negação da proposição simples **s** corresponde à proposição original. Ficamos com:

~(c∨~s) ≡ ~c∨s

Logo, a negação requerida pode ser descrita por:

~c∨s: "[**Não** caminho] **e** [saio do lugar]."

Gabarito: Letra E.

(PM CE/2023) Sabendo-se que não é verdade que o policial militar de serviço pode dormir e pode usar a viatura para fins pessoais, é correto afirmar que:

a) O policial militar de serviço pode dormir ou pode usar a viatura para fins pessoais.

b) O policial militar de serviço não pode dormir ou não pode usar a viatura para fins pessoais.

c) O policial militar de serviço pode dormir ou não pode usar a viatura para fins pessoais.

d) O policial militar de serviço não pode dormir ou pode usar a viatura para fins pessoais.

e) O policial militar de serviço não pode dormir e não pode usar a viatura para fins pessoais.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

d: "O policial militar de serviço pode dormir."

v: "O policial militar de serviço pode usar a viatura para fins pessoais."

Note que a proposição original pode ser descrita por ~**(d∧v)**:

~**(d∧v)**: "**Não é verdade que [(**o policial militar de serviço pode dormir**) e (**(o policial militar de serviço) pode usar a viatura para fins pessoais**)]**."

Observe que a proposição original, ~**(d∧v)**, é a negação da conjunção **(d∧v)**. Como a questão pergunta por algo que é correto de se afirmar, devemos encontrar algo que é equivalente a ~**(d∧v)**, ou seja, **devemos negar (d∧v)**.

Para realizar a negação de uma conjunção, usa-se a equivalência **~(p∧q) ≡ ~p∨~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Negam-se ambas as parcelas da conjunção (e; ∧); e**
- **Troca-se a conjunção (e; ∧) pela disjunção inclusiva (ou; ∨).**

Em outras palavras, **negam-se as duas proposições e troca-se o "ou" pelo "e"**. Para o caso em questão, temos:

~(d∧v) ≡ ~d∨~v

Logo, a negação requerida pode ser descrita por:

~d∨~v: "[O policial militar de serviço **não** pode dormir] **ou** [(o policial militar de serviço) **não** pode usar a viatura para fins pessoais]."

Gabarito: Letra B.

Negação da condicional (se...então)

A negação de **p→q** é realizada por meio da seguinte equivalência:

~(p→q) ≡ p∧~q

A negação da condicional é realizada do seguinte modo:

1. **Mantém-se o primeiro termo;**
2. **Troca-se a condicional (se...então; →) pela conjunção (e; ∧); e**
3. **Nega-se o segundo termo.**

Como exemplo, considere a seguinte condicional:

p→q: "Se [eu comi lasanha], **então** [eu bebi refrigerante]."

A negação dessa expressão pode ser escrita como:

~ (p→q) ≡ p∧~q: "[Eu comi lasanha] **e** [eu **não** bebi refrigerante]."

(DPE SP/2023) Uma afirmação que corresponde a uma negação da lógica da afirmação:

'Se cada escultura é uma obra de arte, então a chuva é uma grande artista", é

a) Se a chuva não é uma grande artista, então cada escultura não é uma obra de arte.

b) Cada escultura é uma obra de arte ou a chuva é uma grande artista.

c) Cada escultura não é uma obra de arte ou a chuva não é uma grande artista.

d) Cada escultura é uma obra de arte, e a chuva não é uma grande artista.

e) Se cada escultura não é uma obra de arte, então a chuva não é uma grande artista.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

o: "Cada escultura é uma obra de arte."

a: "A chuva é uma grande artista."

A sentença original pode ser descrita por **o→a**:

o→a: "**Se** [cada escultura é uma obra de arte], **então** [a chuva é uma grande artista]".

Para realizar a negação de uma condicional, usa-se a equivalência **~(p→q) ≡ p∧~q.** Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Mantém-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a condicional (se...então; →) pela conjunção (e; ∧); e**
- **Nega-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

~(o→a) ≡ o∧~a

Logo, a negação pode ser descrita por:

o∧~a: "[Cada escultura é uma obra de arte] **e** [a chuva **não** é uma grande artista]."

Gabarito: Letra D.

(MPE SP/2023) Considere a proposição:

"Se Maria não sabe Matemática, então ela erra problemas de porcentagem".

Assinale a opção que apresenta a negação dessa proposição.

a) Se Maria sabe Matemática, então ela não erra problemas de porcentagem.

b) Se Maria não sabe Matemática, então ela não erra problemas de porcentagem.

c) Se Maria não erra problemas de porcentagem, então ela sabe Matemática.

d) Maria não sabe Matemática e não erra problemas de porcentagem.

e) Maria sabe Matemática e erra problemas de porcentagem.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

m: "Maria sabe Matemática."

p: "Maria erra problemas de porcentagem."

A sentença original pode ser descrita por **~m→p**:

~m→p: "**Se** [Maria **não** sabe Matemática], **então** [ela (Maria) erra problemas de porcentagem]".

Para realizar a negação de uma condicional, usa-se a equivalência **~(p→q) ≡ p∧~q.** Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Mantém-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a condicional (se...então; →) pela conjunção (e; ∧); e**
- **Nega-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

~(~m→p) ≡ ~m∧~p

Logo, a negação pode ser descrita por:

~m∧~p: "[Maria **não** sabe Matemática] **e** [(Maria) **não** erra problemas de porcentagem]."

Gabarito: Letra D.

Questões com mais de uma equivalência

Para fins de resolução de questões de concurso público, é importante que você se familiarize com a **utilização de mais de uma equivalência em um mesmo problema**.

Vamos praticar com algumas questões.

(SEPLAN RR/2023) Considerando os conectivos lógicos usuais, que as letras maiúsculas representam proposições lógicas e que o símbolo ~ representa a negação de uma proposição, julgue o item subsecutivo.

A expressão $(A \vee B) \rightarrow C$ é equivalente à expressão $(\sim A \wedge \sim B) \vee C$.

Comentários:

Note que originalmente temos uma condicional cujo antecedente é $(A \vee B)$ e cujo consequente é **C**. Sabemos que a condicional apresenta somente duas equivalências:

- $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ (contrapositiva)
- $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ (transformação da condicional em disjunção inclusiva)

Como a proposição composta sugerida como equivalente não é uma condicional, vamos utilizar a segunda equivalência.

Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Nega-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a condicional (se...então; →) pela disjunção inclusiva (ou; ∨); e**
- **Mantém-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

$$(A \vee B) \rightarrow C \equiv \sim(A \vee B) \vee C$$

Note que $\sim(A \vee B)$ é a negação de $(A \vee B)$, podendo ser desenvolvida por De Morgan. Para negar a disjunção inclusiva "ou" **negam-se as duas proposições e troca-se o "ou" pelo "e"**. Ficamos com:

$$(A \vee B) \rightarrow C \equiv (\sim A \wedge \sim B) \vee C$$

Gabarito: CERTO.

(TJ SP/2023) Em uma reunião, com seus colaboradores, o chefe do atendimento diz: "Se o atendimento é bom, então o cliente fica satisfeito e volta". A alternativa que contém uma afirmação equivalente à afirmação do chefe é:

a) Se o cliente fica satisfeito e volta, então o atendimento é bom.

b) Se o cliente não fica satisfeito ou não volta, então o atendimento não é bom.

c) O cliente fica satisfeito ou volta e o atendimento é bom.

d) Se o cliente não fica satisfeito ou volta, então o atendimento não é bom.

e) O atendimento é bom e o cliente fica satisfeito e volta.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

b: "O atendimento é bom."

s: "O cliente fica satisfeito."

v: "O cliente fica volta."

A sentença original pode ser descrita por **b→(s∧v)**:

b→(s∧v): "**Se** [o atendimento é bom], **então** [(o cliente fica satisfeito) **e** ((o cliente) volta)]."

Note que originalmente temos uma condicional cujo antecedente é **b** e cujo consequente é **(s∧v)**. Sabemos que a condicional apresenta somente duas equivalências:

• **p→q ≡ ~q→~p** (contrapositiva)

• **p→q ≡ ~p∨q** (transformação da condicional em disjunção inclusiva)

Vamos começar utilizando a equivalência **contrapositiva**: **p→q ≡ ~q→~p.** Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

• **Invertem-se as posições do antecedente e do consequente; e**

• **Negam-se ambos os termos da condicional.**

Para o caso em questão, temos:

b→(s∧v) ≡ **~(s∧v)→~b**:

Note que **~(s∧v)** é a negação de **(s∧v)**, podendo ser desenvolvida por De Morgan. Para negar a conjunção "e" **negam-se as duas proposições e troca-se o "e" pelo "ou"**. Ficamos com:

b→(s∧v) ≡ **(~s∨~v)→~b**:

Note que a proposição obtida como equivalente corresponde à **alternativa B**, que é o **gabarito da questão**:

(~s∨~v)→~b: "**Se [**(o cliente **não** fica satisfeito**) ou (**(o cliente) **não** volta**)]**, **então [**o atendimento **não** é bom**]**."

Para fins didáticos, vamos aplicar a segunda equivalência da condicional, dada por **p∨q ≡ ~p→q**. Para aplicar essa equivalência, devemos realizar o seguinte procedimento:

- **Nega-se o primeiro termo;**
- **Troca-se a disjunção inclusiva (ou; ∨) pela condicional (se...então; →); e**
- **Mantém-se o segundo termo.**

Para o caso em questão, temos:

b→(s∧v) ≡ ~b∨(s∧v)

Ficamos com a seguinte equivalência:

~b∨(s∧v): "**[**O atendimento **não** é bom**] ou [**(o cliente fica satisfeito**) e (**(o cliente) volta**)]**."

Veja que não temos essa opção nas alternativas.

Gabarito: Letra B.

(CBM SC/2023) Dentre as alternativas a seguir, aquela que contém a negação lógica da proposição composta "Estou doente e, se o médico permite, então viajo" é:

a) Estou doente e o médico permite e não viajo.

b) Não estou doente e o médico permite e viajo.

c) Estou doente ou o médico permite e não viajo.

d) Não estou doente e o médico permite e não viajo.

e) Não estou doente ou o médico permite e não viajo.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

d: "Estou doente."

m: "O médico permite."

v: "Eu viajo."

A sentença original pode ser descrita por **d∧(m→v)**:

d∧(m→v): "**[**Estou doente**] e, [se (**o médico permite**)**, **então (**(eu) viajo**)]**"

Devemos negar a sentença original. Note que **temos uma conjunção (e; ∧)** entre a proposição simples **d** e a condicional **(m→v)**.

Para realizar a negação de uma conjunção, usa-se a equivalência **~(p∧q) ≡ ~p∨~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

• Negam-se ambas as parcelas da conjunção (e; ∧);

• Troca-se a conjunção (e; ∧) pela disjunção inclusiva (ou; ∨).

Em outras palavras, **negam-se as duas proposições e troca-se o "e" pelo "ou"**. Para o caso em questão, temos:

~[d∧(m→v)] ≡ ~d∨~(m→v)

Note que uma das parcelas obtidas, **~(m→v)**, é a negação da condicional **(m→v)**.

Para realizar a negação de uma condicional, usa-se a equivalência **~(p→q) ≡ p∧~q.** Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

• Mantém-se o primeiro termo;

• Troca-se a condicional (se...então; →) pela conjunção (e; ∧); e

• Nega-se o segundo termo.

Logo, ficamos com:

~[d∧(m→v)] ≡ ~d∨(m∧~v)

Logo, a negação requerida corresponde a:

~d∨(m∧~v): "[**Não** estou doente] **ou** [(o médico permite) **e** (**não** viajo)]."

Gabarito: Letra E.

Outras equivalências e negações

Neste tópico, serão apresentadas **outras equivalências e negações** que, **apesar de apresentarem baixa incidência**, **podem aparecer na sua prova**.

Negações da conjunção (e) para a forma condicional (se...então)

Existem duas maneiras de se negar a conjunção de modo que ela adquira a forma condicional:

$$\sim(p \wedge q) \equiv p \rightarrow \sim q$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv q \rightarrow \sim p$$

Considere, por exemplo, a seguinte conjunção:

p∧q: "[Comi lasanha] **e** [bebi refrigerante]."

Além de negar por De Morgan, temos as seguintes possíveis negações de **p∧q**:

~(p∧q) ≡ p→~q: "**Se** [comi lasanha], **então** [**não** bebi refrigerante]."

~(p∧q) ≡ q→~p: "**Se** [bebi refrigerante], **então** [**não** comi lasanha]."

(MRE/2016) Considere a sentença "Corro e não fico cansado". Uma sentença logicamente equivalente à negação da sentença dada é:

a) Se corro então fico cansado.

b) Se não corro então não fico cansado.

c) Não corro e fico cansado.

d) Corro e fico cansado.

e) Não corro ou não fico cansado.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

c: "Corro."

f: "Fico cansado."

A proposição original pode ser escrita pela conjunção **c∧~f**:

c∧~f: "[Corro] **e** [**não** fico cansado]."

A questão pede pela **negação da conjunção (e; ∧) considerada**. **Em regra**, **devemos utilizar De Morgan para negar uma conjunção**. **Logo**, **vamos testar essa possibilidade primeiro**.

Para realizar a negação de uma conjunção, usa-se a equivalência **~(p∧q) ≡ ~p∨~q**. Para aplicar essa equivalência, devemos seguir o seguinte procedimento:

- **Negam-se ambas as parcelas da conjunção (e; ∧); e**
- **Troca-se a conjunção (e; ∧) pela disjunção inclusiva (ou; ∨).**

Em outras palavras, **negam-se as duas proposições e troca-se o "e" pelo "ou"**. Para o caso em questão, temos:

$$\sim(c \land \sim f) \equiv \sim c \lor \sim(\sim f)$$

A dupla negação da proposição simples **f** corresponde à proposição original. Ficamos com:

$$\sim(c \land \sim f) \equiv \sim c \lor f$$

Logo, a negação requerida pode ser descrita por:

~c∨f: "**[Não** corro**]** **ou** **[**fico cansado**]**."

Note que essa possível negação não está presente nas alternativas. Observe, porém, que as alternativas A e B apresentam condicionais como a negação da conjunção original. Logo, vamos utilizar as seguintes negações da conjunção:

$$\sim(p \land q) \equiv p \rightarrow \sim q$$

ou

$$\sim(p \land q) \equiv q \rightarrow \sim p$$

Aplicando essas equivalências para o caso em questão, ficamos com:

$$\sim(c \land \sim f) \equiv c \rightarrow \sim(\sim f)$$

ou

$$\sim(c \land \sim f) \equiv \sim f \rightarrow \sim c$$

A dupla negação de **f** corresponde à proposição original. Ficamos com:

$$\sim(c \land \sim f) \equiv c \rightarrow f$$

ou

$$\sim(c \land \sim f) \equiv \sim f \rightarrow \sim c$$

Logo, podemos escrever a negação da conjunção **c∧~f** das seguintes formas:

~(c∧~f) ≡ c→f: "**Se** **[**corro**]**, **então** **[**fico cansado**]**."

ou

~(c∧~f) ≡ ~f→~c: "**Se** **[não** fico cansado**]**, **então** **[não** corro**]**."

Veja que a primeira possibilidade de se negar a conjunção está presente na **alternativa A**, que é o **gabarito da questão**.

Gabarito: Letra A.

Conjunção de condicionais

Existem duas equivalências envolvendo **conjunção de condicionais** que de vez em quando aparecem nas provas:

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$$

Quando o **termo comum** é o **consequente**, a equivalência apresenta uma **disjunção inclusiva** no **antecedente**.

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$$

Quanto o **termo comum** é o **antecedente**, a equivalência apresenta uma **conjunção** no **consequente**.

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$$

(SEFAZ-AL/2020) Considere as proposições:

• **P1**: "Se há carência de recursos tecnológicos no setor Alfa, então o trabalho dos servidores públicos que atuam nesse setor pode ficar prejudicado.".

• **P2**: "Se há carência de recursos tecnológicos no setor Alfa, então os beneficiários dos serviços prestados por esse setor podem ser mal atendidos.".

A proposição **P1∧P2** é equivalente à proposição "Se há carência de recursos tecnológicos no setor Alfa, então o trabalho dos servidores públicos que atuam nesse setor pode ficar prejudicado e os beneficiários dos serviços prestados por esse setor podem ser mal atendidos.".

Comentários:

Considere as proposições simples:

c: "Há carência de recursos tecnológicos no setor Alfa."

t: "O trabalho dos servidores públicos que atuam nesse setor pode ficar prejudicado."

b: "Os beneficiários dos serviços prestados por esse setor podem ser mal atendidos."

A proposição **P1** pode ser descrita por **c→t** e a proposição **P2** pode ser descrita por **c→b**. Logo, a proposição **P1∧P2** pode ser descrita por:

$$(c \to t) \land (c \to b)$$

Devemos, portanto, avaliar se **(c→t)∧(c→b)** é equivalente a:

"**Se** [há carência de recursos tecnológicos no setor Alfa], **então** [(o trabalho dos servidores públicos que atuam nesse setor pode ficar prejudicado) **e** (os beneficiários dos serviços prestados por esse setor podem ser mal atendidos)]."

Isto é, devemos avaliar se **(c→t)∧(c→b)** é equivalente a **c→(t∧b)**.

Sabemos que essas duas proposições compostas são equivalentes, pois correspondem à seguinte equivalência estudada:

$$(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$$

O **gabarito**, portanto, é **CERTO**.

Gabarito: CERTO.

(PF/2004) As proposições **(PVQ)→S** e **(P→S)V(Q→S)** possuem tabelas de valorações iguais.

Comentários:

A assertiva está ERRADA. A equivalência correta seria **(P→S)∧(Q→S) ≡ (PVQ)→S**.

Lembre-se que as equivalências mostradas nesse tópico são **conjunções (e; ∧) de condicionais**. Veja:

$$(p \to r) \land (q \to r) \equiv (p \lor q) \to r$$

$$(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$$

Para mostrar formalmente que **(PVQ)→S** e **(P→S)V(Q→S)** **não** possuem tabelas de valorações iguais, isto é, para mostrar que essas proposições **não** são equivalentes, podemos montar a seguinte tabela-verdade:

P	Q	S	P→S	Q→S	PvQ	(P→S)v(Q→S)	(PvQ)→S
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

Gabarito: ERRADO.

Equivalências da disjunção exclusiva (ou...ou)

Uma forma equivalente de se escrever a **disjunção exclusiva (ou...ou; ⊻)** consiste em **negar ambos os termos**:

$$p \veebar q \equiv (\sim p) \veebar (\sim q)$$

Como exemplo, considere a disjunção exclusiva:

p⊻q: "Ou [jogo bola**], ou [**jogo sinuca**]."**

Essa disjunção exclusiva é equivalente a:

(~p)⊻(~q): "Ou [não jogo bola**], ou [não** jogo sinuca**]."**

ATENÇÃO DECORE!

> Uma possível equivalência da disjunção exclusiva **p⊻q** consiste em negar tanto **p** quanto **q**:
>
> $$p \veebar q \equiv (\sim p) \veebar (\sim q)$$

Além disso, outras duas possibilidades de se obter equivalências da disjunção exlcusiva consiste em transformá-la em uma **bicondicional (se e somente se; ↔) negando-se apenas um dos termos**:

$$p \veebar q \equiv (\sim p) \leftrightarrow q$$

$$p \veebar q \equiv p \leftrightarrow (\sim q)$$

Para fins de exemplo, considere novamente a seguinte disjunção exclusiva:

p⊻q: "Ou [jogo bola**], ou [**jogo sinuca**]."**

Essa disjunção exclusiva também é equivalente às seguintes proposições:

(~p)↔q: "[Não jogo bola**] se e somente se [**jogo sinuca**]."**

p↔(~q): "[Jogo bola**] se e somente se [não** jogo sinuca**]."**

RESUMINDO

$$p\underline{\vee}q \equiv (\sim p)\underline{\vee}(\sim q)$$

$$p\underline{\vee}q \equiv (\sim p)\leftrightarrow q$$

$$p\underline{\vee}q \equiv p\leftrightarrow(\sim q)$$

(TCE SP/2017) Se a afirmação “Ou Renato é o gerente da loja ou Rodrigo é o dono da loja” é verdadeira, então uma afirmação necessariamente verdadeira é:

a) Renato é o gerente da loja e Rodrigo é o dono da loja.

b) Renato é o gerente da loja se, e somente se, Rodrigo não é o dono da loja.

c) Se Renato não é o gerente da loja, então Rodrigo não é o dono da loja.

d) Se Renato é o gerente da loja, então Rodrigo é o dono da loja.

e) Renato é o gerente da loja.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

g: "Renato é o gerente da loja."

d: "Rodrigo é o dono da loja."

A proposição original pode ser descrita por $g\underline{\vee}d$:

$g\underline{\vee}d$: "**Ou** [Renato é o gerente da loja] **ou** [Rodrigo é o dono da loja]."

Temos que procurar nas alternativas uma resposta equivalente a uma **disjunção exclusiva**. Sabemos que existem as seguintes equivalências:

$$p\underline{\vee}q \equiv (\sim p)\underline{\vee}(\sim q)$$

$$p\underline{\vee}q \equiv (\sim p)\leftrightarrow q$$

$$p\underline{\vee}q \equiv p\leftrightarrow(\sim q)$$

Como não há uma disjunção exclusiva nas respostas, devemos testar as últimas duas equivalências. Para o caso em questão, temos as seguintes equivalências:

$$g\underline{\vee}d \equiv (\sim g)\leftrightarrow d$$

$$g\underline{\vee}d \equiv g\leftrightarrow(\sim d)$$

Essas equivalências podem ser descritas por:

(~g)↔d: "[Renato **não** é o gerente da loja] **se, e somente se,** [Rodrigo é o dono da loja]."

g↔(~d): "[Renato é o gerente da loja] **se, e somente se,** [Rodrigo **não** é o dono da loja]."

Veja que **g↔(~d)** corresponde à proposição composta que está na **letra B**, que é o **gabarito da questão**.

Gabarito: Letra B.

Negação da disjunção exclusiva (ou...ou)

A principal **negação da disjunção exclusiva** é a **bicondicional**:

~(p⊻q) ≡ p↔q

Como exemplo, considere a seguinte disjunção exclusiva:

p⊻q: "Ou [jogo bola], **ou** [jogo sinuca]."

A negação dessa disjunção exclusiva pode ser escrita da seguinte forma:

~(p⊻q) ≡ p↔q: "[Jogo bola] **se e somente se** [jogo sinuca]."

Podemos ainda negar a disjunção exclusiva negando **apenas uma** das suas parcelas. Veja:

~(p⊻q) ≡ (~p)⊻q

~(p⊻q) ≡ p⊻(~q)

Como exemplo, considere novamente a seguinte disjunção exclusiva:

p⊻q: "Ou [jogo bola], **ou** [jogo sinuca]."

A negação dessa disjunção exclusiva também pode ser escrita das seguintes formas:

~(p⊻q) ≡ (~p)⊻q: "Ou [**não** jogo bola], **ou** [jogo sinuca]."

~(p⊻q) ≡ p⊻(~q): "Ou [jogo bola], **ou** [**não** jogo sinuca]."

RESUMINDO

$$\sim(p\underline{\vee}q) \equiv p\leftrightarrow q$$

$$\sim(p\underline{\vee}q) \equiv (\sim p)\underline{\vee}q$$

$$\sim(p\underline{\vee}q) \equiv p\underline{\vee}(\sim q)$$

Vamos resolver alguns exercícios relativos à negação da disjunção exclusiva.

(DPE SP/2023) Considere a seguinte afirmação:

Ou Flávio é funcionário público ou Flávio é funcionário de empresa privada.

Assinale a alternativa que contém uma negação lógica para a afirmação apresentada.

a) Ou Flávio não é funcionário público ou Flávio não é funcionário de empresa privada.

b) Flávio é funcionário de empresa privada se, e somente se, ele é funcionário público.

c) Se Flávio é funcionário público, então ele é funcionário de empresa privada.

d) Flávio é funcionário de empresa privada e é funcionário público.

e) Flávio é funcionário público ou é funcionário de empresa privada.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

p: "Flávio é funcionário público."

e: "Flávio é funcionário de empresa privada."

A afirmação original é uma **disjunção exclusiva** (**ou...ou**) representada por $p\underline{\vee}e$:

$p\underline{\vee}e$: " **Ou** **[**Flávio é funcionário público**]** **ou** **[**Flávio é funcionário de empresa privada**]**."

Conhecemos as seguintes negações da disjunção exclusiva:

$$\sim(p\underline{\vee}q) \equiv p\leftrightarrow q$$

$$\sim(p\underline{\vee}q) \equiv (\sim p)\underline{\vee}q$$

$$\sim(p\underline{\vee}q) \equiv p\underline{\vee}(\sim q)$$

Veja que **as alternativas C, D e E podem ser eliminadas**, pois a negação da disjunção exclusiva **não pode ser** uma **condicional**, uma **conjunção** ou uma **disjunção inclusiva**. **Restam apenas as alternativas A e B**.

Aplicando negações aprendidas para o caso em questão, temos:

$$\sim(p\underline{\vee}e) \equiv p \leftrightarrow e$$

$$\sim(p\underline{\vee}e) \equiv (\sim p)\underline{\vee}e$$

$$\sim(p\underline{\vee}e) \equiv p\underline{\vee}(\sim e)$$

Veja que **a alternativa A está errada**, pois ela nega ambas as parcelas da disjunção exclusiva, apresentando a proposição **(~p)⊻(~e)**. Essa proposição é uma equivalência de **p⊻e**, não uma negação de **p⊻e**.

Logo, **a alternativa correta é a letra B**, que apresenta uma possibilidade para a negação **~(p⊻e)**, dada por **p↔e:**

~(p⊻e) ≡ p↔e: "[Flávio é funcionário de empresa privada] **se, e somente se,** [ele é funcionário público]."

Gabarito: Letra B.

(CMSJC/2022) Considere a afirmação: "Ou arranjo emprego ou não me caso". A negação dessa afirmação é:

a) Se eu arranjo emprego, então eu me caso.

b) Se eu não arranjo emprego, então eu me caso.

c) Ou não arranjo emprego ou me caso.

d) Ou não arranjo emprego ou não me caso.

e) Arranjo emprego e não me caso.

Comentários:

Considere as proposições simples:

a: "Arranjo emprego."

c: "Me caso."

A afirmação original é uma **disjunção exclusiva** (**ou...ou**) representada por **a⊻~c**:

a⊻~c: " **Ou** [arranjo emprego] **ou** [**não** me caso]."

Conhecemos as seguintes negações da disjunção exclusiva:

$$\sim(p\underline{\vee}q) \equiv p \leftrightarrow q$$

$$\sim(p\underline{\vee}q) \equiv (\sim p)\underline{\vee}q$$

$$\sim(p\underline{\vee}q) \equiv p\underline{\vee}(\sim q)$$

Note que nas alternativas **não temos nenhuma bicondicional**. Portanto, **não devemos utilizar essa forma de se negar a disjunção exclusiva**.

Utilizando a negação **~(p⊻q) ≡ (~p)⊻q** para o caso em questão, ficamos com:

~(a⊻~c) ≡ ~a⊻~c: "Ou [**não** arranjo emprego] **ou** [**não** me caso]**."**

Veja que a primeira negação está presente na **alternativa D**, que é o **gabarito** da questão.

Note que o uso da equivalência $\sim(p\underline{\vee}q) \equiv p\underline{\vee}(\sim q)$ também seria possível. Ocorre que, nesse caso, não encontramos resposta. Vejamos:

$$\sim(a\underline{\vee}\sim c) \equiv a\underline{\vee}\sim(\sim c)$$

A dupla negação de **c** corresponde à proposição original. Ficamos com:

$$\sim(a\underline{\vee}\sim c) \equiv a\underline{\vee}c$$

Logo, a negação poderia ser descrita por:

$\sim(a\underline{\vee}\sim c) \equiv a\underline{\vee}c$: "**Ou** [arranjo emprego] **ou** [me caso]."

Note que essa possibilidade não aparece nas possíveis alternativas.

Gabarito: Letra D.

Equivalências da bicondicional (se e somente se)

Inicialmente, é importante que você saiba que a bicondicional apresenta a seguinte equivalência:

$$p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$$

Considere, por exemplo, a seguinte bicondicional $p\leftrightarrow q$:

$p\leftrightarrow q$: "[Durmo] **se e somente se** [estou cansado]"

Essa bicondicional é equivalente a $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$:

$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$: "[**Se** (estou cansado), **então** (durmo)] **e** [**se** (durmo), **então** (estou cansado)]".

Os alunos costumam decorar essa equivalência do seguinte modo: uma forma equivalente à bicondicional é **ir $(p\rightarrow q)$ e $(\wedge)$ voltar $(q\rightarrow p)$** com a condicional.

$$p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$$

Mnemônico: uma forma equivalente à **bicondicional** é **ir e voltar** com a **condicional**

Outra forma equivalente de se escrever a bicondicional consiste em **negar ambos os termos**:

$$p\leftrightarrow q \equiv (\sim p)\leftrightarrow(\sim q)$$

Considere novamente a seguinte bicondicional **p↔q**:

p↔q: "**[**Durmo**] se e somente se [**estou cansado**]**"

Essa bicondicional é equivalente a **(~p)↔(~q)**:

(~p)↔(~q): "**[Não** durmo**] se e somente se [não** estou cansado**]**."

Além disso, outras duas possibilidades de se obter uma equivalência da bicondicional consiste em transformá-la em uma **disjunção exclusiva (ou...ou; ⊻)** **negando-se apenas um dos termos**:

$$p\leftrightarrow q \equiv (\sim p)\veebar q$$

$$p\leftrightarrow q \equiv p\veebar(\sim q)$$

Para fins de exemplo, considere novamente a seguinte bicondicional:

p↔q: "**[**Durmo**] se e somente se [**estou cansado**]**"

Essa bicondicional também é equivalente às seguintes proposições:

(~p)⊻q: "**Ou [não** durmo**], ou [**estou cansado**]**."

p⊻(~q): " **Ou [**durmo**], ou [não** estou cansado**]**."

RESUMINDO

$$p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$$

$$p\leftrightarrow q \equiv (\sim p)\leftrightarrow(\sim q)$$

$$p\leftrightarrow q \equiv (\sim p)\veebar q$$

$$p\leftrightarrow q \equiv p\veebar(\sim q)$$

Vejamos algumas questões sobre equivalências da bicondicional.

(APPGG Pref. SP/2023) Uma proposição lógica equivalente à proposição “Adriano é pai se, e somente se, Giuliano é filho” está contida na alternativa:

a) Se Giuliano não é filho, então Adriano não é pai.

b) Adriano é pai, e Giuliano não é filho.

c) Ou Adriano é pai, ou Giuliano é filho.

d) Se Adriano é pai, então Giuliano é filho.

e) Ou Giuliano é filho, ou Adriano não é pai.

Comentários:

Sejam as seguintes proposições simples:

a: "Adriano é pai."

g: "Giuliano é filho."

A proposição original pode ser escrita pela bicondicional **a↔g**:

“[Adriano é pai] **se, e somente se,** [Giuliano é filho].”

Conhecemos as seguintes equivalências para a bicondicional:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\sim p) \leftrightarrow (\sim q)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\sim p) \underline{\vee} q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv p \underline{\vee} (\sim q)$$

Note que **as alternativas A e D podem ser eliminadas**, pois são condicionais em que há apenas duas proposições simples sem uma conjunção.

A **alternativa B também pode ser eliminada**, pois a bicondicional não pode ser equivalente a uma conjunção.

Logo, **restam as alternativas C e E**, **que são disjunções exclusivas (ou...ou; $\underline{\vee}$)**. Devemos, portanto, aplicar as duas últimas equivalências:

$a \leftrightarrow g \equiv (\sim a) \underline{\vee} g$: "**Ou** [Adriano **não** é pai]**, ou** [Giuliano é filho]."

$a \leftrightarrow g \equiv a \underline{\vee} (\sim g)$: " **Ou** [Adriano é pai]**, ou** [Giuliano **não** é filho]."

Note que **a alternativa C deve ser eliminada**, pois ela não negou nenhuma parcela. Essa alternativa corresponde a $a \underline{\vee} g$:

$a \underline{\vee} g$: "**Ou** [Adriano é pai], **ou** [Giuliano é filho]."

A **alternativa correta** é a **letra E**, que apresenta a proposição **g⊻(~a)**.

Ainda nessa aula, em **álgebra de proposições**, veremos que na disjunção exclusiva podemos trocar livremente de posição ambas as parcelas, de modo que a equivalência dada por **(~a)⊻g** corresponde a **g⊻(~a)**:

g⊻(~a): **Ou [**Giuliano é filho**]**, **ou [**Adriano **não** é pai**]**.

Gabarito: Letra E.

(ISS RJ/2010) A proposição "um número inteiro é par se e somente se o seu quadrado for par" equivale logicamente à proposição:

a) se um número inteiro for par, então o seu quadrado é par, e se um número inteiro não for par, então o seu quadrado não é par.

b) se um número inteiro for ímpar, então o seu quadrado é ímpar.

c) se o quadrado de um número inteiro for ímpar, então o número é ímpar.

d) se um número inteiro for par, então o seu quadrado é par, e se o quadrado de um número inteiro não for par, então o número não é par.

e) se um número inteiro for par, então o seu quadrado é par.

Comentários:

Sejam as proposições:

p: "Um número inteiro é par."

q: "O quadrado de um número inteiro é par."

A proposição composta pode ser assim representada:

p↔q: "[Um número inteiro é par**] se e somente se [**o seu quadrado for par**]**."

Sabemos que uma possível equivalência para a bicondicional é:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Não temos alternativa que corresponda a essa última equivalência. Note, porém, que se realizarmos a **contrapositiva de (q→p)**, encontramos:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$$

Esse resultado pode ser lido como:

(p→q)∧(~p→~q): "**[Se (**um número inteiro for par**)**, **então (**o seu quadrado é par**)]**, **e [se (**um número inteiro **não** for par**)**, **então (**o seu quadrado **não** é par**)]**."

Gabarito: Letra A.

Negações da bicondicional (se e somente se)

São quatro as maneiras mais comuns de se negar a bicondicional. A primeira que vamos apresentar é que a **negação da bicondicional é equivalente à disjunção exclusiva**.

$$\sim(p\leftrightarrow q) \equiv p\underline{\vee}q$$

Considere novamente a seguinte bicondicional $p\leftrightarrow q$:

$p\leftrightarrow q$: "**[**Durmo**] se e somente se [**estou cansado**]**"

A negação dessa bicondicional pode ser escrita da seguinte forma:

$\sim(p\leftrightarrow q) \equiv p\underline{\vee}q$: "**Ou [**Durmo**], ou [**estou cansado**]**"

Podemos ainda negar a proposição bicondicional negando **apenas uma** das suas parcelas. Veja:

$$\sim(p\leftrightarrow q) \equiv (\sim p)\leftrightarrow q$$

$$\sim(p\leftrightarrow q) \equiv p\leftrightarrow(\sim q)$$

Como exemplo, considere novamente a seguinte bicondicional:

$p\leftrightarrow q$: "**[**Durmo**] se e somente se [**estou cansado**]**"

A negação dessa bicondicional também pode ser escrita das seguintes formas:

$\sim(p\leftrightarrow q) \equiv (\sim p)\leftrightarrow q$: "**[Não** durmo**] se e somente se [**estou cansado**]**"

$\sim(p\leftrightarrow q) \equiv p\leftrightarrow(\sim q)$: "**[**Durmo**] se e somente se [não** estou cansado**]**"

Cabe salientar que existe uma outra forma de **negação da bicondicional utilizando apenas operadores de conjunção e de disjunção inclusiva**:

$$\sim (p\leftrightarrow q) \equiv (p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p)$$

$$\sim (p\leftrightarrow q) \equiv p\underline{\vee}q$$
$$\sim (p\leftrightarrow q) \equiv (\sim p)\leftrightarrow q$$
$$\sim (p\leftrightarrow q) \equiv p\leftrightarrow(\sim q)$$
$$\sim (p\leftrightarrow q) \equiv (p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p)$$

Vamos resolver alguns exercícios relativos à negação da bicondicional.

(CAU TO/2023) Com relação a estruturas lógicas, julgue o item.

A negação de “A Fênix é imortal se, e somente se, renasce das cinzas” é “Ou a Fênix é imortal ou renasce das cinzas”.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

i: "A Fênix é imortal."

r: "A Fênix renasce das cinzas."

A afirmação original é a bicondicional **i↔r**:

i↔r: "[A Fênix é imortal] **se, e somente se,** [renasce das cinzas]."

A questão sugere que a negação da bicondicional é uma disjunção exclusiva. Devemos, portanto, utilizar a negação **~(p↔q) ≡ p⊻q**. Para o caso em questão, temos:

~(i↔r) ≡ i⊻r

Ficamos com a seguinte negação:

~(i↔r) ≡ i⊻r: “**Ou** [a Fênix é imortal] **ou** [renasce das cinzas].”

Gabarito: CERTO.

(Pref. Vila Lângaro/2019) A negação da proposição “João passa no concurso público se e somente se João estuda” é:

a) João não passa no concurso público se e somente se João não estudou.

b) João não passa no concurso público e João não estudou.

c) João passa no concurso público e João estuda.

d) Ou João passa no concurso público ou João estuda.

e) Se João passa no concurso público, então João estuda.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

p: " João passa no concurso público."

e: " João estuda."

A afirmação original é a bicondicional **p↔e**:

p↔e: "[João passa no concurso público] **se, e somente se,** [João estuda]."

As principais formas de se negar a bicondicional são:

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \underline{\vee} q$$

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p) \leftrightarrow q$$

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow (\sim q)$$

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

Note que a primeira forma de se negar a bicondicional apresentada, quando aplicada para a bicondicional **p↔e**, corresponde à **alternativa D**, que é o **gabarito da questão**:

~(p↔e) ≡ p$\underline{\vee}$e: " **Ou** [João passa no concurso público] **ou** [João estuda]."

As demais formas apresentadas nas alternativas não correspondem à negação da bicondicional. Especial atenção deve ser dada à **alternativa A**, que **apresenta uma equivalência da bicondicional**, **não uma negação**:

$$p \leftrightarrow e \equiv (\sim p) \leftrightarrow (\sim e)$$

Gabarito: Letra D.

ÁLGEBRA DE PROPOSIÇÕES

Álgebra de proposições

Propriedade comutativa

Todos os conectivos, **exceto o condicional (se...então; →)**, gozam da propriedade comutativa.

$$p \land q \equiv q \land p$$
$$p \lor q \equiv q \lor p$$
$$p \veebar q \equiv q \veebar p$$
$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

Propriedade associativa

$$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$$
$$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$$

Propriedade distributiva

$$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$$
$$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$$

Propriedade da identidade

$$p \land t \equiv p$$
$$p \land c \equiv c$$

$$p \lor t \equiv t$$
$$p \lor c \equiv p$$

Propriedade da absorção

$$p \lor (p \land q) \equiv p$$
$$p \land (p \lor q) \equiv p$$

Propriedade da idempotência

$$p \land p \equiv p$$
$$p \lor p \equiv p$$

Álgebra de proposições × tautologia, contradição e contingência

Desenvolver a proposição composta original até se chegar:
- Em uma **tautologia** **t**; ou
- Em uma **contradição** **c**; ou
- Em uma **contingência**, que pode ser uma proposição simples **p**, uma conjunção **p∧q**, etc.

Bicondicional em problemas de tautologia, contradição e contingência

$$X \leftrightarrow Y$$

- Se **X** e **Y** forem proposições equivalentes, a bicondicional será uma **tautologia**.
- Se **X** e **Y** forem proposições em que uma é a negação da outra, a bicondicional será uma **contradição**.

Introdução

A **álgebra de proposições** trata do uso sequencial de equivalências lógicas e de outras propriedades para simplificar expressões.

O uso dessa ferramenta é interessante para resolver questões de um modo mais rápido. Além disso, pode ser **muito útil em questões mais diretas de equivalências lógicas, quando a banca tenta "esconder" a equivalência nas alternativas**.

O mais importante é você conhecer as propriedades **comutativa**, **associativa** e **distributiva** e suas aplicações mais imediatas nas questões. Isso porque, via de regra, o conhecimento das demais propriedades não costuma ser cobrado e, além disso, é comum que as **questões mais complexas** de **álgebra de proposições** possam ser resolvidas por **tabela-verdade.**

Propriedade comutativa

Todos os conectivos, **exceto o condicional (se...então; →)**, gozam da propriedade comutativa. Isso quer dizer que é possível trocar a ordem dos componentes em uma proposição composta sem afetar o resultado da tabela-verdade:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \underline{\vee} q \equiv q \underline{\vee} p$$

$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

A seguir temos um exemplo da utilidade da propriedade comutativa em questões de concursos públicos.

EXEMPLIFICANDO

Suponha que uma questão peça para você a negação da seguinte condicional:

p→q: "**Se** [eu correr], **então** [chego a tempo]."

Sabemos que **essa condicional não goza da propriedade comutativa**. A negação dessa condicional, pedida pela questão, pode ser encontrada pela seguinte equivalência:

~ (p→q) ≡ p∧~q: "Corro e não chego a tempo."

Suponha agora que, dentre as alternativas da questão, você não encontre a proposição composta "Corro e não chego a tempo", porém encontre "Não chego a tempo e corro". Pode marcar essa alternativa sem medo! Isso porque, usando a **propriedade comutativa**, a conjunção obtida $\mathbf{p \wedge {\sim} q}$ pode ser escrita como $\mathbf{{\sim} q \wedge p}$:

$\mathbf{{\sim}(p \rightarrow q) \equiv p \wedge {\sim} q \equiv {\sim} q \wedge p}$: "Não chego a tempo e corro."

TOME NOTA!

Todos os conectivos exceto o condicional comutam:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \underline{\vee} q \equiv q \underline{\vee} p$$
$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

A condicional $p \rightarrow q$ não goza da propriedade comutativa.
$p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ não são equivalentes.

A equivalência correta para a condicional é a contrapositiva:

$$p \rightarrow q \equiv {\sim} q \rightarrow {\sim} p$$

Propriedade associativa

Na **álgebra elementar**, quando realizamos uma multiplicação, é comum ouvirmos a frase "a ordem dos fatores não altera o produto". Essa frase resume a propriedade associativa para a multiplicação.

Vamos supor que queremos realizar a multiplicação **3×5×7**. Ela pode ser feita de duas formas:

- Multiplicamos **3×5** e depois multiplicamos esse resultado por **7**, obtendo **(3×5)×7**; ou
- Multiplicamos **3** pelo resultado da multiplicação de **5×7**, obtendo **3×(5×7)**.

Ou seja, na álgebra elementar, a propriedade associativa nos diz que em uma multiplicação de diversos termos, podemos realizar as operações de multiplicação na ordem que bem entendermos que o resultado será o mesmo:

$$(\mathbf{3} \times \mathbf{5}) \times \mathbf{7} = \mathbf{3} \times (\mathbf{5} \times \mathbf{7})$$

O mesmo vale para a adição de termos:

$$(\mathbf{3} + \mathbf{5}) + \mathbf{7} = \mathbf{3} + (\mathbf{5} + \mathbf{7})$$

Na **álgebra de proposições** temos algo muito semelhante. Dizemos que a **conjunção (e; ∧)** e a **disjunção inclusiva (ou; ∨)** gozam da propriedade associativa, sendo válidas as equivalências:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

Observe que a propriedade **associativa** **não mistura em uma mesma expressão** o conectivo "**e**" e o conectivo "**ou**"

Vamos a um exemplo que mostra uma utilidade para a propriedade associativa.

(Inédita) Julgue o item a seguir.

A proposição **p∨(q∨~p)** é uma tautologia.

Comentários:

Nesse tipo de problema, **é interessante tentarmos chegar em uma proposição do tipo (p∨~p)**. Isso porque, de acordo com a aula anterior, que sabemos que **essa proposição é uma tautologia**. Originalmente, temos:

$$p \vee (q \vee \sim p)$$

Utilizando a **propriedade comutativa** em **(q∨~p),** temos:

$$p \vee (\sim p \vee q)$$

Utilizando a **propriedade associativa** na expressão anterior, temos:

$$(p \vee \sim p) \vee q$$

De acordo com a aula anterior, sabemos que **(p∨~p)** é uma tautologia clássica. Representando a tautologia pela letra **t**, ficamos com:

$$t \vee q$$

Observe que a **t∨q** é a **disjunção inclusiva** entre **um termo que é sempre verdade** com a proposição **q**. Sabemos que, para a disjunção inclusiva ser falsa, ambos os termos precisam ser falsos. Logo, **como um dos termos é sempre verdadeiro**, essa disjunção inclusiva é **sempre verdadeira**. Consequentemente, a expressão original é uma **tautologia**. Podemos escrever:

$$p \vee (q \vee \sim p) \equiv t$$

Outra forma de se entender a propriedade associativa é perceber que, **quando temos uma sequência só de conjunções (e; ∧) ou só de disjunções inclusivas (ou; ∨)**, **podemos remover os parênteses/colchetes**.

(TRT 1/2008) Proposições compostas são denominadas equivalentes quando possuem os mesmos valores lógicos V ou F, para todas as possíveis valorações V ou F atribuídas às proposições simples que as compõem. Assinale a opção correspondente à proposição equivalente a "**~[[A∧(¬B)]→C]**".

a) **A∧(~B)∧(~C)**

b) **(~A)∨(~B)∨C**

c) **C→[A∧(~B)]**

d) **(~A)∨B∨C**

e) **[(~A)∧B]→(~C)**

Comentários:

A proposição original, dada por **~[[A∧(~B)]→C]**, corresponde à negação de um condicional cujo o antecedente é **[A∧(~B)]** e cujo o consequente é **C.**

Para negar uma condicional, utilizamos a equivalência **~(p→q) ≡ p∧~q.** Aplicando ao caso em questão, devemos manter **[A∧(~B)]**, trocar a condicional pela conjunção e negar **C:**

~[[A∧(~B)]→C] ≡ [A∧(~B)]∧(~C)

Observe que, pela **propriedade associativa**, a **ordem em que é executada a conjunção não importa**. Nesse caso, **podemos remover os colchetes da proposição obtida**. Consequentemente, podemos escrever:

~[[A∧(~B)]→C] ≡ A∧(~B)∧(~C)

Gabarito: Letra A.

Propriedade distributiva

Na **álgebra elementar**, a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição consiste em realizar a seguinte operação:

$$3\times(5 + 7) = 3\times 5 + 3\times 7$$

Da mesma forma, podemos partir do lado direito da equação acima chegar ao lado esquerdo "colocando o número 3 em evidência":

$$3\times 5 + 3\times 7 = 3\times(5 + 7)$$

Na **álgebra de proposições** temos as seguintes **propriedades distributivas:**

- **Da conjunção (e; ∧) com relação à disjunção inclusiva (ou; ∨); e**
- **Da disjunção inclusiva (ou; ∨) com relação à conjunção (e; ∧);**

Propriedade distributiva da conjunção com relação à disjunção inclusiva

A propriedade distributiva do conectivo "e" em relação ao "ou" é dada pela equivalência abaixo. Perceba que nela "**p∧**" é distribuído.

$$p\land(q\lor r) \equiv (p\land q) \lor (p\land r)$$

É importante também reconhecer a propriedade "de trás para frente". Isso significa que podemos colocar o termo "**p∧**" em evidência.

$$(p\land q)\lor(p\land r) \equiv p\land(q\lor r)$$

Propriedade distributiva da disjunção inclusiva com relação à conjunção

A propriedade distributiva do conectivo "ou" em relação ao "e" é dada pela equivalência abaixo. Perceba que nela "**p∨**" é distribuído.

$$p\lor(q\land r) \equiv (p\lor q)\land(p\lor r)$$

É importante também reconhecer a propriedade "de trás para frente". Isso significa que podemos colocar o termo " **p∨**" em evidência.

$$(p\lor q)\land(p\lor r) \equiv p\lor(q\land r)$$

(ISS Fortaleza/2023) P: "Se a pessoa trabalha com o que gosta e está de férias, então é feliz ou está de férias."

Considerando a proposição **P** precedente, julgue o item seguinte.

A proposição **P** pode ser obtida pela aplicação da propriedade distributiva da conjunção sobre a condicional, utilizando-se as proposições "A pessoa está de férias." e "Se a pessoa trabalha com o que gosta, é feliz.".

Comentários:

Em lógica de proposições, temos as seguintes propriedades distributivas:

Propriedade distributiva da conjunção com relação à disjunção inclusiva

$$p\land(q\lor r) \equiv (p\land q) \lor (p\land r)$$

Propriedade distributiva da disjunção inclusiva com relação à conjunção

$$p\lor(q\land r) \equiv (p\lor q)\land(p\lor r)$$

Não há que se falar em "**propriedade distributiva da conjunção sobre a condicional**".

Gabarito: ERRADO.

(Pref. Alumínio/2016) Considere a afirmação: Sueli é professora e, pratica ginástica ou pratica corrida. Uma afirmação equivalente é

A) Sueli é professora e pratica ginástica e pratica corrida.

B) Se Sueli é professora, então ela não pratica ginástica e não pratica corrida.

C) Sueli é professora e pratica ginástica, ou é professora e pratica corrida.

D) Se Sueli não pratica ginástica ou não pratica corrida, então ela é professora.

E) Sueli pratica ginástica e pratica corrida, ou é professora.

Comentários:

Sejam as proposições simples:

s: "Sueli é professora."

g: "Sueli pratica ginástica."

k: "Sueli pratica corrida."

Na afirmação do enunciado, a vírgula após o "**e**" indica parênteses na proposição composta:

"**[**Sueli é professora**] e, [(**pratica ginástica**) ou (**pratica corrida**)]**."

Logo, temos a seguinte representação:

s∧(g∨k)

Por meio da **propriedade distributiva**, podemos distribuir "**s∧**":

s∧(g∨k) ≡ (s∧g)∨(s∧k)

Temos, portanto, a seguinte equivalência:

(s∧g)∨(s∧k): "([Sueli é professora**] e [**pratica ginástica**])**, **ou ([**Sueli é professora**] e [**pratica corrida**])**"

Essa equivalência corresponde à **alternativa C**.

Gabarito: Letra C.

Cumpre destacar que quando temos um **condicional** e queremos utilizar a **álgebra de proposições** para resolver alguma questão, é necessário **transformar a condicional em disjunção inclusiva** por meio da seguinte equivalência já conhecida:

p→q ≡ ~p∨q

Lembre-se, também, que temos como **transformar a negação da condicional em uma conjunção:**

$$\sim(p\rightarrow q) \equiv p\land\sim q$$

A seguir, apresentaremos uma questão que pode ser resolvida mais rapidamente utilizando as propriedades que vimos até agora.

(MPE RO/2023) Assinale a opção em que é apresentada a proposição lógica equivalente à proposição lógica $(P\rightarrow Q)\land(R\lor Q)$.

a) $Q\lor(\sim P\land R)$

b) $(P\land R)\lor(\sim Q\lor\sim P)$

c) $P\rightarrow(R\land Q)$

d) $\sim P\rightarrow(\sim Q\land R)$

e) $(P\rightarrow R)\lor(\sim Q\rightarrow\sim P)$

Comentários:

Para resolver essa questão, faz-se necessário utilizar as propriedades que aprendemos até agora de modo a **desenvolver a proposição composta** $(P\rightarrow Q)\land(R\lor Q)$ **até se chegar em outra mais simples**.

Veja que, caso não resolvêssemos essa questão por **álgebra de proposições**, seria necessário construir a tabela-verdade de $(P\rightarrow Q)\land(R\lor Q)$ e comparar essa tabela-verdade com as tabelas das outras cinco alternativas.

Feitas essas observações, vamos ao problema.

Note que **temos uma condicional** na proposição composta original: $(P\rightarrow Q)$. Para desenvolver a expressão por álgebra de proposições, devemos transformá-la em disjunção inclusiva: $\sim P\lor Q$. Logo, a proposição original pode ser descrita por:

$$(\sim P\lor Q)\land(R\lor Q)$$

Observando o que acabamos de obter, note que, **após algumas operações**, poderemos colocar "**$Q\lor$**" em evidência, por meio da **propriedade distributiva**. Antes disso, note que:

• Aplicando a **propriedade comutativa** em $(\sim P\lor Q)$, ficamos com $(Q\lor\sim P)$; e

• Aplicando a **propriedade comutativa** em $(R\lor Q)$, ficamos com $(Q\lor R)$.

Logo, a proposição $(\sim P\lor Q)\land(R\lor Q)$ pode ser descrita por:

$$(Q\lor\sim P)\land(Q\lor R)$$

Por meio da **propriedade distributiva**, podemos colocar "**QV**" em evidência:

QV(~P∧R)

Note, portanto, que a proposição original corresponde à proposição apresentada na **alternativa A**.

Gabarito: Letra A.

Propriedade da identidade, da absorção e da idempotência

Trate as propriedades da **identidade**, da **absorção** e da **idempotência** como um "**bônus**" que pode te ajudar em algumas questões mais difíceis. Não se apegue muito a essas propriedades, pois elas não costumam aparecer em prova.

Propriedade da identidade

Propriedade da identidade para a conjunção

Sendo **t** uma **tautologia** e **c** uma **contradição**, temos as seguintes equivalências:

p∧t ≡ p

p∧c ≡ c

Note que **p∧t** é equivalente a **p** porque se trata de uma conjunção em que um termo é sempre verdadeiro. Isso significa que o valor de **p∧t** depende somente do valor de **p:**

- Se **p** for verdadeiro, teremos **V∧V**, que é uma conjunção verdadeira; e
- Se **p** for falso, teremos **F∧V**, que é uma conjunção falsa.

p	t	p∧t
V	V	V
F	V	F

Além disso, **p∧c** é equivalente a **c** porque se trata de uma conjunção em que temos um termo sempre falso.

p	c	p∧c
V	F	F
F	F	F

Propriedade da identidade para a disjunção inclusiva

Sendo **t** uma **tautologia** e **c** uma **contradição**, temos as seguintes equivalências:

p∨t ≡ t

p∨c ≡ p

Note que **p∨t** é uma tautologia **t** porque se trata de uma disjunção inclusiva em que temos um termo sempre verdadeiro:

p	t	p∨t
V	V	V
F	V	V

Além disso, **p∨c** é equivalente a **p** porque se trata de uma disjunção inclusiva em que um termo é sempre falso. Isso significa que o valor de **p∨c** depende somente do valor de **p:**

- Se **p** for verdadeiro, teremos **VVF**, que é uma disjunção inclusiva verdadeira; e
- Se **p** for falso, teremos **FVF**, que é uma disjunção inclusiva falsa.

p	c	p∨c
V	F	V
F	F	F

(ANPAD/2014) A proposição composta **p∧(q∨(~p))** é logicamente equivalente à proposição

a) **q**

b) **p∧q**

c) **p∨q**

d) **p∧(~q)**

e) **p∨(~q)**

Comentários:

Aplicado a **propriedade distributiva** em "**p∧**", temos:

p∧(q∨~p) ≡ (p∧q)∨(p∧~p)

Conforme visto na aula anterior, **(p∧~p)** é uma contradição. Logo, ficamos com:

(p∧q)∨c

Veja que temos uma disjunção inclusiva entre **(p∧q)** e uma contradição **c**. Essa disjunção inclusiva é equivalente a **(p∧q)**, pois se trata de uma disjunção inclusiva em que um termo é sempre falso (**propriedade da identidade para a disjunção inclusiva**). Logo, ficamos com:

(p∧q)

Gabarito: Letra B.

Propriedade da absorção

A propriedade da absorção é representada por duas equivalências:

p∨(p∧q) ≡ p

p∧(p∨q) ≡ p

Essas equivalências são demonstráveis por tabela-verdade:

p	q	p∧q	p∨(p∧q)
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

p	q	p∨q	p∧(p∨q)
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

(SEFAZ-MS/2006) Representando por **~r** a negação de uma proposição **r**, a negação de **p∧(p∨q)** é equivalente a:

a) **~p**.

b) **~q**.

c) **~(p∨q)**.

d) **~(p∧q)**.

e) uma contradição.

Comentários:

Pela **propriedade da absorção**, sabemos que **p∧(p∨q) ≡ p**. Logo, a negação pedida é ~**p**.

Gabarito: Letra A.

Propriedade da idempotência

A propriedade da idempotência é representada por duas equivalências:

$$p \land p \equiv p$$

$$p \lor p \equiv p$$

Note que o valor lógico da conjunção **p∧p** depende exclusivamente da proposição **p**, pois:

- Se **p** for verdadeiro, **p∧p** será verdadeiro, pois será uma conjunção entre dois termos verdadeiros; e
- Se **p** for falso, **p∧p** será falso, pois será uma conjunção entre dois termos falsos

Além disso, o valor lógico da disjunção inclusiva **p∨p** também depende exclusivamente da proposição **p**, pois:

- Se **p** for verdadeiro, **p∨p** será verdadeiro, pois será uma disjunção inclusiva entre dois termos verdadeiros; e
- Se **p** for falso, **p∨p** será falso, pois será uma disjunção inclusiva entre dois termos falsos.

Para que não reste dúvidas, as equivalências são demonstráveis por tabela-verdade:

p	p	p∧p
V	V	V
F	F	F

p	p	p∨p
V	V	V
F	F	F

(DPEN/2013) Considerando que, **P**, **Q** e **R** são proposições conhecidas, julgue o próximo item.

A proposição **¬[(P → Q)∨Q]** é equivalente à proposição **P∧(¬Q)**, em que **¬P** é a negação de **P**.

Comentários:

Primeiramente, vale perceber que essa questão pode ser resolvida por **tabela-verdade**. Isso porque, para duas proposições serem equivalentes, basta que elas apresentem a mesma tabela-verdade.

Dito isso, vamos resolver a questão por **álgebra de proposições**. A nossa estratégia será partir de **~[(P→Q)∨Q]** para chegar em **P∧(~Q).**

Veja que **~[(P→Q)∨Q]** é a negação da disjunção inclusiva entre **(P→Q)** e **Q**. Vamos desenvolver essa negação por De Morgan, negando ambas as parcelas e trocando "ou" por "e". Ficamos com:

$$\sim(P \rightarrow Q) \land \sim Q$$

Para negar uma condicional, utilizamos a seguinte equivalência: **~(p→ q) ≡ p∧~ q.** Ficamos com:

$$[P \land \sim Q] \land \sim Q$$

Pela **propriedade associativa**, podemos escrever:

$$P \wedge [\sim Q \wedge \sim Q]$$

Observe que, pela **propriedade idempotente**, **[~Q∧~Q]** apresenta sempre o valor lógico de **~Q.** Isso porque quando **~Q** é V, **[~Q∧~Q]** é V, e quando **~Q** é F, **[~Q∧~Q]** é F. Logo, nossa conjunção fica assim:

$$P \wedge (\sim Q)$$

Gabarito: CERTO.

Álgebra de proposições x tautologia, contradição e contingência

Você se lembra que um dos métodos para descobrirmos se uma proposição composta é uma **tautologia**, uma **contradição** ou uma **contingência** é utilizar **equivalências lógicas** ou **álgebra de proposições**?

Esse método costuma ser o mais rápido, porém requer o domínio das equivalências lógicas e das propriedades da álgebra de proposições.

A ideia consiste basicamente em desenvolver a proposição composta original até se chegar:

- Em uma **tautologia t**; ou
- Em uma **contradição c**; ou
- Em uma **contingência**, que pode ser uma proposição simples **p**, uma conjunção **p∧q**, etc.

(STJ/2018) A proposição **¬P→(P→Q)**, em que **¬P** denota a negação da proposição **P**, é uma tautologia, isto é, todos os elementos de sua tabela-verdade são V (verdadeiro).

Comentários:

Note que originalmente temos a condicional ~**P→ (P→Q)**, cujo antecedente é ~**P** e cujo consequente é outra condicional, dada por **(P→Q)**.

Utilizando a equivalência **p→q ≡ ~pVq**, ficamos com:

$$\sim(\sim P) \vee (P \rightarrow Q)$$

A dupla negação de **P** corresponde à proposição simples **P**. Ficamos com:

$$P \vee (P \rightarrow Q)$$

Utilizando novamente a equivalência **p→q ≡ ~pVq** para a condicional **(P→Q)**, ficamos com:

$$P \vee (\sim P \vee Q)$$

Utilizando a **propriedade associativa**, temos:

$$(P \vee \sim P) \vee Q$$

P∨~P é uma tautologia. Ficamos com:

$$t \vee Q$$

Veja que temos uma disjunção inclusiva entre uma tautologia **t** e uma proposição simples **Q**. **Essa disjunção inclusiva é sempre verdadeira**, pois um dos termos dela (tautologia **t**) sempre será verdadeiro (**propriedade da identidade para a disjunção inclusiva**). Logo, a proposição original corresponde a uma tautologia:

$$t$$

Gabarito: CERTO.

(CBM AL/2017) A respeito de proposições lógicas, julgue o item a seguir.

Se **P** e **Q** forem proposições simples, então a proposição composta **Q∨(Q→P)** é uma tautologia.

Comentários:

Temos a seguinte proposição composta:

$$Q \vee (Q \rightarrow P)$$

Utilizando a equivalência **p→q ≡ ~p∨q** para a condicional **(Q→P)**, ficamos com:

$$Q \vee (\sim Q \vee P)$$

Utilizando a **propriedade associativa**, temos:

$$(Q \vee \sim Q) \vee P$$

Q∨~Q é uma tautologia. Ficamos com:

$$t \vee P$$

Veja que temos uma disjunção inclusiva entre uma tautologia **t** e uma proposição simples **P**. **Essa disjunção inclusiva é sempre verdadeira**, pois um dos termos dela (tautologia **t**) sempre será verdadeiro (**propriedade da identidade para a disjunção inclusiva**). Logo, a proposição original corresponde a uma tautologia:

$$t$$

Gabarito: CERTO.

Bicondicional em problemas de tautologia, contradição e contingência

Um problema muito explorado pelas bancas de concurso público consiste em perguntar se uma determinada **bicondicional** é uma **tautologia** ou uma **contradição**.

Quanto ao conectivo bicondicional, sabemos que:

- A **bicondicional** é **verdadeira** quando ambas as parcelas tiverem o mesmo valor lógico; e
- A **bicondicional** é **falsa** quando ambas as parcelas tiverem valores lógicos contrários.

Considere a seguinte bicondicional cujas parcelas são duas proposições compostas **X** e **Y**:

$$X \leftrightarrow Y$$

Note que:

- **Se X e Y forem proposições equivalentes**, ambas as parcelas terão **sempre** o mesmo valor lógico. Nesse caso, a bicondicional será **sempre** verdadeira, ou seja, **a bicondicional será uma tautologia**.
- **Se X e Y forem proposições em que uma é a negação da outra**, ambas as parcelas terão **sempre** valores lógicos contrários. Nesse caso, a bicondicional será **sempre** falsa, ou seja, **a bicondicional será uma contradição**.

HORA DE PRATICAR!

(POLC AL/2023) Considere os conectivos lógicos usuais e assuma que as letras maiúsculas representam proposições lógicas simples. Com base nessas informações, julgue o item seguinte relativo à lógica proposicional.

A proposição lógica **(P→Q)↔((~P)VQ)** é uma tautologia.

Comentários:

Originalmente, temos a seguinte bicondicional:

$$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow((\sim P)\vee Q)$$

Utilizando a equivalência **p→q ≡ ~pVq** para a condicional **(P→Q)**, obtemos **((~P)VQ)**. Logo, a bicondicional original pode ser descrita por:

$$((\sim P)\vee Q)\leftrightarrow((\sim P)\vee Q)$$

Veja que a bicondicional original corresponde a uma bicondicional em que as duas parcelas são iguais. Logo, ambas as parcelas da bicondicional **sempre** vão apresentar o mesmo valor lógico. Consequentemente, a bicondicional **sempre** será verdadeira. Trata-se, portanto, de uma **tautologia**.

Gabarito: CERTO

(Pref Acrelândia/2022) A proposição **(P∧Q)↔(~P∨~Q)** representa uma afirmativa que podemos chamar de:

a) contingência.

b) tautologia.

c) implicação lógica.

d) contradição.

e) paradoxo.

Comentários:

Originalmente, temos a seguinte bicondicional:

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$$

Note que o segundo termo da bicondicional, **(~P∨~Q)**, é a negação do primeiro termo **(P∧Q)**. Isso porque, por De Morgan, temos:

$$(P \wedge Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$$

Logo, a bicondicional em questão pode ser escrita do seguinte modo:

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow \sim(P \wedge Q)$$

Veja que a bicondicional original corresponde a uma bicondicional em que as duas parcelas são uma a negação da outra. Logo, ambas as parcelas da bicondicional **sempre** vão apresentar valores lógicos distintos. Consequentemente, a bicondicional **sempre** será falsa. Trata-se, portanto, de uma **contradição**.

Gabarito: Letra D.

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.